中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040417

國立新竹女子高級中學

指導老師姓名

楊錫金

劉東鑪

作者姓名

吳禹璇

陳昱樺

☼中華民國第四十四屆中小學科學展覽會☼

○作品說明書○

科　　別：數學科

組　　別：高中組

作品名稱：柱咒毀滅－探討河內塔柱數增加與搬運次數之關係

關 鍵 詞：河內塔、最佳圓片數、搬移策略

編號：

壹、摘要

在這篇報告中我們跳脫了傳統三根柱子的窠臼，而改採四根以上的柱子來進行搬運，在這之前，繁複的步驟常令我們在操作上耗費許多時間，但是在我們增加柱子數後發現不只是搬運次數驟減，而且我們還發現了許多有趣的規律，以下是我們所得到的重點：

1. 在四根以上的柱子，我們搬運過程分成三段，並可證明下列的式子 $F_k(n) = 2F_k(m) + F_{k-1}(n-m)$ 成立。
2. 在四根以上的柱子，最佳圓片數 m 值，通常有很多解，但是在某些特定的圓片數中，m 值卻只有唯一一解，而其搬運過程中，搬運的圓片編號也只有唯一的對應組合，這結論令我們非常訝異。

貳、研究動機及目的

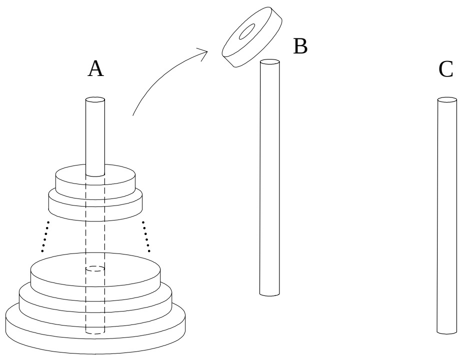
河內之塔（Towers of Hanoi）是法國人 M.Claus（Lucas）在 1883 從泰國帶到法國的（越南當時是法國的屬地），河內曾經是越戰時北越的首都，現在的胡志明市；河內之塔有一個起源的故事，這是 De Parville 在 1884 年講的。在 Benares 地方有一座神廟，從天神創世紀起，就在神廟地底，大地的中心處立了三根鑽石的針，一根針上串了 64 個用金子鑄成的圓片，自上而下圓片就越來越大，神廟的僧侶按照由上而下由小而大，一次搬運一個圓片的方法，把這 64 個金圓片搬到第三根鑽石針上，一旦工作完成，這些針、圓片、神廟、以及這世界都會隨之而消失，若一秒一步，這需要 $2^{64}-1$ 步，亦即１８，４６６７４４，０７３７０９，５５１６１５秒，縱使僧侶毫不犯錯，也得花個５８４９億年才能搬得完。以上雖是神話故事，但讓我們覺得僧侶很〝辛苦〞，如果我們方法不變，但我們把柱子增為４根、５根… 那我們可省多少時間呢？以下就是我們的分析：

參、研究設備器材

紙、筆、河內塔道具、電腦。

肆、研究過程及方法

一、規則說明：在河內塔的原始規則中，共有三根柱子，及 n 個圓片。在起始狀態中，圓片依照由小而大的順序集中在一根柱子上，再以一盤一步的順序依照由小而大的順序移至不同的另一根柱子。在搬運過程中，大圓片亦不得置於小圓片之上。此為三柱之河內塔。在下列的內容中，我們將以此規則為基準。將原始的三根柱子擴充為四根以上。探討其中的關聯性。



二、符號定義：

(a) n：總圓片數。為方便分析，將圓片由小而大編號 1, 2, 3…, n。

(b) m：最佳圓片數。在柱子數為四根以上時，在實際操作多次之後，發現有多種方法可使搬運次數最少，但都可用下列方法來表示：即先將適當量 m 個圓片搬至一柱〈利用 k 根柱子〉，再利用剩下的 $k-1$ 根柱子，搬運剩餘 $n-m$ 個圓片至另一柱，最後再利用 k 根柱子，將先前 m 片搬至 $n-m$ 個圓片上。此時的 m，我們稱為最佳圓片數 m。證明會在下面的敘述中解釋。

(c) $F_k(n)$：在河內塔中。當柱子為 k 根時，搬運 n 個圓片所需最少搬運次數，以 $F_k(n)$ 表示。

(d) $P_k(n,x)$：當柱子為 k 根，搬運 n 個圓片時，第 x 次搬運之圓片號碼。

三、分析與推導過程

（一）三根柱子的河內塔：

當圓片數為 3 時，是我們所熟悉的河內塔標準形式，若其中一柱有 n 個圓片，欲將其搬移至另一柱，最少總搬動次數 $F_3(n)$為 2^n-1 次，要達此最少次數，其方法只有固定的一種，即第幾次應搬第幾個圓片 $P_k(n,x)$是固定且可知的。將之整理如下表一與表二。

表一：$F_3(n)$，最少搬運次數。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
$F_3(n)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	…
$F_3(n)$ 之差分	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	…

表二：$P_3(n,x)$，第 x 次搬運之圓片編號。其中 n 表總圓片數，x 表第 x 次搬運。例如：要將 4 個圓片搬移至另一柱，則第 6 次搬動之圓片號碼為 2，即 $P_3(4,6)=2$。

n \ x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	1																														
2	1	2	1																												
3	1	2	1	3	1	2	1																								
4	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1																
5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1	5	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1	3	1	2	1

從表二我們不難看出，1 號圓片每 2 次搬運就會再次被搬運到，2 號圓片每 4 次（2^2），3 號圓片每 8 次（2^3），4 號圓片每 16 次（2^4）即會再次被搬運，以此類推，我們可以將 $P_3(n,x)$歸納如下。

$$P_3(n,x)=\begin{cases} 1 & \text{if } x=2^1t_1+1,\ t_1\in N\cup\{0\} \\ 2 & \text{if } x=2^2t_2+2,\ t_2\in N\cup\{0\} \\ 3 & \text{if } x=2^3t_3+4,\ t_3\in N\cup\{0\} \\ \vdots & \\ j & \text{if } x=2^jt_j+2^{j-1},\ t_j\in N\cup\{0\} \\ \vdots & \\ n & \text{if } x=2^{n-1} \end{cases}$$

由 $x=2^jt_j+2^{j-1}$，則 t_j 可用 x 與 j 表示成 $t_j=\dfrac{x-2^{j-1}}{2^j}$

又 t_j 為自然數或零，所以 $P_3(n,x)$ 可化簡成

$$P_3(n,x)=\begin{cases} 1 & \text{if } \left[\dfrac{x-1}{2}\right]=\dfrac{x-1}{2} \\ 2 & \text{if } \left[\dfrac{x-2}{2^2}\right]=\dfrac{x-2}{2^2} \\ 3 & \text{if } \left[\dfrac{x-2^2}{2^3}\right]=\dfrac{x-2^2}{2^3} \\ \vdots & \\ j & \text{if } \left[\dfrac{x-2^{j-1}}{2^j}\right]=\dfrac{x-2^{j-1}}{2^j} \\ \vdots & \\ n & \text{if } \left[\dfrac{x-2^{n-1}}{2^n}\right]=\dfrac{x-2^{n-1}}{2^n} \end{cases} \qquad \ldots\ldots (1)$$

則利用(1)式，$P_3(n, x)$ 可利用電腦程式（見附錄一）快速求得，甚至列出如表二的所有搬運過程。

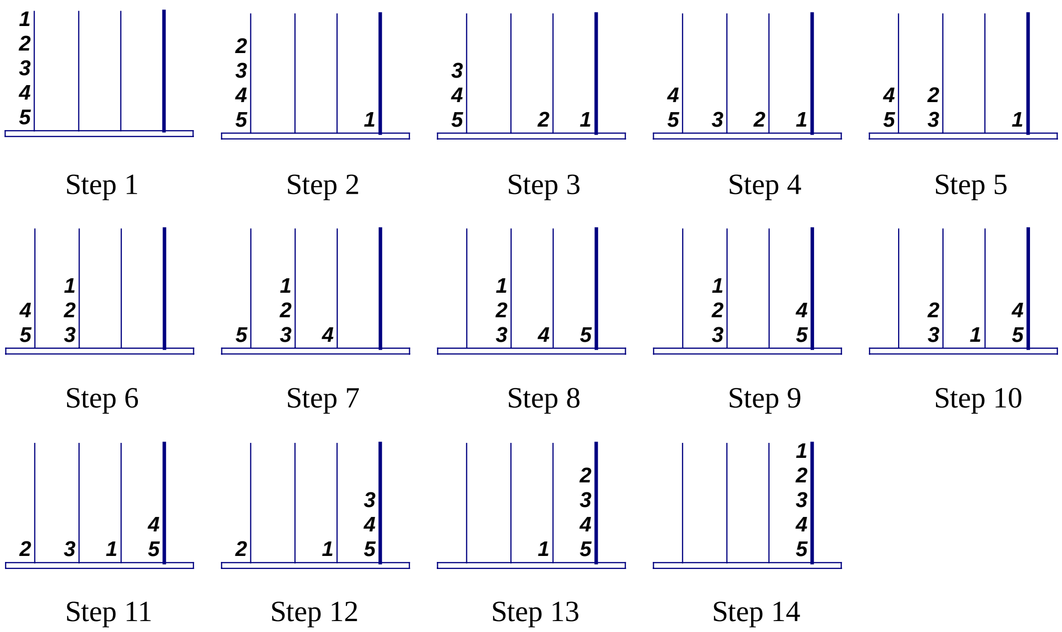
（二）四根柱子的河內塔：

現在再多增加一根柱子，搬運的規則不變，則我們想知道最少次數的搬法是否仍是固定的，若否，又有幾種呢？而最少次數又為何呢？

經由實際操作後發現，要將 n 個盤子從一根柱子搬移到另一根柱子，使其搬運次數最少的方法並不唯一，但都可以用一固定的策略來搬移，此策略分為三個階段：

(a) 先將適當量的 m 個圓片（編號 $1 \sim m$）利用四根柱子搬移到一根柱子。
(b) 再將剩餘的 $n-m$ 個圓片（編號 $m+1 \sim n$），利用其它三根柱子搬移至另一根柱子。
(c) 最後再利用四根柱子，將(a)中 $1 \sim m$ 號之圓片搬運至此柱。

我們以 5 個圓片為例來說明此一搬移策略。如圖一所示，Step 1 ~ Step 6 為第一階段，其意義是把編號 1, 2, 3 的圓片先搬移到一根柱子。接著 Step 6 ~ Step 9 為第二階段，其意義是把編號 4 跟 5 的圓片搬移到一另根柱子。最後的第三階段為 Step 9 ~ Step 14，其意義是將先前編號 1, 2, 3 的圓片搬移堆疊到 4 跟 5 號的圓片上。如此搬移便可得到最少搬移次數為 13 次。



圖一：5 個圓片的搬移策略圖。其中每個數字代表一個圓片，且數字愈大表示圓片愈大。

在搬移策略的三個階段中，第一與第三階段都是利用 4 根柱子來搬移 m 個圓片，第二階段則只用 3 根柱子來搬移 $n-m$ 個圓片，所以我們可以此得到最少搬運次數的關係如下。

$$F_4(n)=F_4(m)+F_3(n-m)+F_4(m)$$

$$=2F_4(m)+F_3(n-m) \;\ldots\ldots (2)$$

對固定的圓片數 n ($n\in N$)，利用上式(2)，我們便可以在小於 n 的範圍內尋找 $t=m$ 值，使得 $2F_4(t)+F_3(n-t)$ 達到最小，則此時 $F_4(n)$ 即為此最小值，亦即

$$F_4(n)=\min_{\substack{0\le t<n\\ t\in Z}}\{2F_4(t)+F_3(n-t)\}$$

底下表三是經電腦程式（見附錄二）計算所歸納出來的。由表三 $F_4(n)$ 之差分可以很容易發現如下規則

2^0 有 1 項，2^1 有 2 項，2^2 有 3 項，⋯，2^{q-1} 有 q 項

則 $F_4(n)$ 可表示如下

$$F_4(n)=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+q\times 2^{q-1}+\left(n-\sum_{t=1}^{q}t\right)\times 2^q$$

其中 q 為滿足 $n-\sum_{t=1}^{q}t\ \ge 0$ 之最大整數

令 $S_q=1\times 2^0+2\times 2^1+3\times 2^2+\cdots+q\times 2^{q-1}$ …… (∗1)

則 $2S_q=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(q-1)\times 2^{q-1}+q\times 2^q$ …… (∗2)

(∗1)式減去(∗2)式得

$$-S_q=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{q-1}-q\times 2^q$$

$$=\frac{2^q-1}{2-1}-q\times 2^q=(1-q)\times 2^q-1$$

即 $S_q=(q-1)\times 2^q+1$ …… (∗3)

表三：m，最佳圓片數。$F_4(n)$，最少搬運次數。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	⋯
m	0	0 1	1	1 2	2 3	3	3 4	4 5	5 6	6	6 7	7 8	8 9	9 10	10	10 11	11 12	12 13	⋯
$F_4(n)$	1	3	5	9	13	17	25	33	41	49	65	81	97	113	129	161	193	225	⋯
$F_4(n)$ 之差分	1	2	2	4	4	4	8	8	8	8	16	16	16	16	16	32	32	32	⋯

又令

$$R_q=\left(n-\sum_{t=1}^{q}t\right)\times 2^q=\left(n-\frac{q(q+1)}{2}\right)\times 2^q \;\ldots\ldots\;(*4)$$

由(∗3)與(∗4)式得

$$F_4(n)=(q-1)\times 2^q+1+\left(n-\frac{q(q+1)}{2}\right)\times 2^q$$

$$=2^q\left(n-\frac{q(q-1)}{2}-1\right)+1$$

又 q 為滿足 $n-\sum_{t=1}^{q}t\ge 0$ 之最大整數，即

$$\max\{q\mid n-\sum_{t=1}^{q}t\ge 0,\ q\in Z\}$$

亦即

$$\max\{q\mid q^2+q-2n\le 0,\ q\in Z\}\;\ldots\ldots\;(3)$$

解不等式 $q^2+q-2n\le 0$ 得

$$\frac{-1-\sqrt{1+8n}}{2}\le q\le\frac{-1+\sqrt{1+8n}}{2}$$

則滿足(3)式之 q 的解為

$q=\left[\dfrac{-1+\sqrt{1+8n}}{2}\right]$，其中 [ ] 為高斯符號。

將上面 $F_4(n)$ 的公式結果整理如下。

> $F_4(n)$ 之公式：
>
> 當柱子數 $k=4$ 時，欲從一柱搬移 n 個圓片至另一柱的最少搬運次數之公式為
>
> $$F_4(n)=2^q\left(n-\frac{q(q-1)}{2}-1\right)+1$$
>
> 且 $q=\left[\dfrac{-1+\sqrt{1+8n}}{2}\right]$，其中 [ ] 為高斯符號。

當搬運次數最少時，其公式我們已經求得，但要如何搬呢？從表三中可以發現，搬移策略第一階段的 m 值通常不唯一。也就是說要使搬運次數最少，其搬法可能會有很多種。底下我們就來討論 m 值，並求 m 值與 n、q 的關係式。

首先，我們討論圓片數 n 有唯一 m 值的情形。從表三可以看出，若圓片數 $n=1$，3，6，10 …，則其 m 值唯一。也就是當 n 為下列形式時

$$n = 1 + 2 + 3 + ... + q = \frac{q(1+q)}{2}$$

其會有唯一 m 值，且

$$m = 1 + 2 + 3 + ... + (q - 1) = \frac{(q-1)q}{2}。$$

以 $n = 15$（$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5$）為例，其唯一 m 值為 10（$= 1 + 2 + 3 + 4$）。此結果可以藉由討論 m 值得到，即利用(2)式，在小於 15 的範圍內代入不同 m 值，使 $2F_4(m) + F_3(15 - m)$ 達到最小，進而求得 $F_4(15)$ 與 m 值，其部分過程如下

$$\vdots$$
$$2F_4(1+2+3+4-1) + F_3(6) = 145 \;\ldots\ldots\; (2.1)$$
$$2F_4(1+2+3+4) \qquad + F_3(5) = 129 \;\ldots\ldots\; (2.2)$$
$$2F_4(1+2+3+4+1) + F_3(4) = 145 \;\ldots\ldots\; (2.3)$$
$$\vdots$$

從(2.1)式到(2.2)式，$2F_4$的部分增加

$$2F_4(1+2+3+4) - 2F_4(1+2+3+4-1) = 2 \cdot 2^3 = 2^4$$

而 F_3的部分減少

$$F_3(6) - F_3(5) = (2^6 - 1) - (2^5 - 1) = 2^5$$

因為減少的次數比增加的次數多，所以(2.2)式會比(2.1)式有更少的搬運次數。再看(2.2)式到(2.3)式，$2F_4$的部分增加

$$2F_4(1+2+3+4+1) - 2F_4(1+2+3+4) = 2 \cdot 2^4 = 2^5$$

而 F_3的部分減少

$$F_3(5) - F_3(4) = (2^5 - 1) - (2^4 - 1) = 2^4$$

因為增加的次數比減少的次數多，所以(2.2)式會比(2.3)式有更少的搬運次數。因此(2.2)式為最小值，此時 m 為唯一解 $m = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$，且

$$F_4(15) = 2F_4(1+2+3+4) + F_3(5) = 129。$$

現在我們用較一般的式子來說明當 $n = 1+2+3+\ldots+q$ 時，其會有唯一 m 值，且 $m = 1+2+3+\ldots+(q-1)$。

設 $m = 1+2+3+\ldots+(q-1)$ 為某圓片數 n 的唯一 m 值。則仿上述例子的方法，其求 $2F_4(m)+F_3(n-m)$ 最小值的部分過程可表示如下

$$\vdots$$

$$2F_4\big(1+2+3+\ldots+(q-1)-1\big)+F_3(n-m+1) \quad \ldots\ldots (2.4)$$

$$2F_4\big(1+2+3+\ldots+(q-1)\big)+F_3(n-m) \quad \ldots\ldots (2.5)$$

$$2F_4\big(1+2+3+\ldots+(q-1)+1\big)+F_3(n-m-1) \quad \ldots\ldots (2.6)$$

$$\vdots$$

從(2.4)式到(2.5)式，$2F_4$ 的部分增加

$$2F_4\big(1+2+3+\ldots+(q-1)\big)-2F_4\big(1+2+3+\ldots+(q-1)-1\big)$$

$$=2\cdot\left(F_4\Big(\frac{q(q-1)}{2}\Big)-F_4\Big(\frac{q(q-1)}{2}-1\Big)\right) \quad （代入 F_4(n) 公式）$$

$$=2\cdot\left\{2^{q-1}\left(\frac{q(q-1)}{2}-\frac{(q-1)(q-2)}{2}-1\right)-2^{q-2}\left(\frac{q(q-1)}{2}-1-\frac{(q-2)(q-3)}{2}-1\right)\right\}$$

$$=2\cdot 2^{q-2}=2^{q-1}$$

而 F_3 的部分減少

$$F_3(n-m+1)-F_3(n-m)=(2^{n-m+1}-1)-(2^{n-m}-1)=2^{n-m}$$

因為 $m = 1+2+3+\ldots+(q-1)$ 為唯一解，所以(2.5)式為最小值，則

$$2^{q-1}<2^{n-m} \quad \ldots\ldots (*5)$$

又從(2.5)式到(2.6)式，$2F_4$ 的部分增加

$$2F_4\big(1+2+3+\ldots+(q-1)+1\big)-2F_4\big(1+2+3+\ldots+(q-1)\big)=2\cdot 2^{q-1}=2^{q}$$

而 F_3 的部分減少

$$F_3(n-m)-F_3(n-m-1)=(2^{n-m}-1)-(2^{n-m-1}-1)=2^{n-m-1}$$

同理，因為(2.5)式為最小值，所以

$$2^{q}>2^{n-m-1} \quad \ldots\ldots (*6)$$

由(*5)與(*6)式得

$$2^{n-m-1}<2^{q}<2^{n-m+1}$$

又 q 為整數，則

$$q = n - m$$

即

$$n = m + q = 1 + 2 + 3 + ... + (q - 1) + q$$

亦即當 $n = 1 + 2 + 3 + ... + q$ 時，其唯一 m 值為 $1 + 2 + 3 + ... + (q - 1) = n - q$。

另外，當 $n \neq 1 + 2 + 3 + ... + q$ 時，其 m 值有兩解為 $n - q - 1$ 或 $n - q$。例如 $n = 11$，則 $q = 4$，且 m 值為 6（$= 11 - 4 - 1$）或 7（$= 11 - 4$）。同樣地，我們可以藉由求 $2F_4(m) + F_3(11 - m)$ 最小值的過程得到此結果，其部分過程如下

$$\vdots$$

$$2F_4(5) + F_3(6) = 89$$

$$2F_4(6) + F_3(5) = 65 \text{ …… } (2.7)$$

$$2F_4(7) + F_3(4) = 65 \text{ …… } (2.8)$$

$$2F_4(8) + F_3(3) = 73$$

$$\vdots$$

因為從(2.7)式到(2.8)式，$2F_4$ 部分增加的次數與 F_3 部分減少的次數皆為 2^4 次，所以(2.7)與(2.8)式皆達最小值，此時 m 為 6 或 7。

將上述 m 值的討論結果整理如下。

1. 當 $n = 1 + 2 + 3 + ... + q$ 時，其 m 值為唯一，且

$$m = 1 + 2 + 3 + ... + (q - 1) = n - q$$

2. 當 $n \neq 1 + 2 + 3 + ... + q$ 時，其 m 值有兩解為

$$m = n - q - 1 \text{ 或 } n - q$$

在柱子數 $k = 3$ 時，我們已經知道 $P_3(n, x)$ 是唯一的，亦即搬運 n 個圓片至另一柱的最少次數搬法是固定且已知的。但當柱子數 $k = 4$ 時，最少次數的搬法通常不只一種，所以搬運 n 個圓片時，第 x 次搬運之圓片號碼 $P_4(n, x)$ 會因為搬法不同而對應不同的值，因此必須適當地規定搬運的方法，使 $P_4(n, x)$ 只對應一個值。

我們可以從搬移策略的三個階段著手，在第二個階段所搬移的 $n - m$ 個圓片是用三根柱子搬運，所以在這個階段的搬運方法是唯一的。同理，我們可以將第

一與第三階段的 m 個圓片再分解為三個階段，而其中的第二階段又為唯一搬法，以此類推便可以求出整個搬運過程。此過程可以用(2)式適當展開來表達，如下

$$
\begin{aligned}
F_4(n) &= 2F_4(m) + F_3(n-m) \\
&= 2\left(2F_4(m') + F_3(m-m')\right) + F_3(n-m) \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

簡而言之，就是將整個搬運過程完全分解為 3 根柱子的河內塔搬運，而關鍵便在於每次分解時所選擇的最佳圓片數 m。因為 m 通常不唯一，所以便能組合出很多種搬運法，因此我們規定以 $m = n - q$ 來決定 m 值。此時 $P_4(n,x)$ 對應的值已經固定，則 $P_4(n,x)$ 可依分解過程表示如下

$$
P_4(n,x) = \begin{cases}
P_4(m,x) & \text{if } 1 \le x \le F_4(m) \\
P_3\left(n-m, x-F_4(m)\right) + m & \text{if } F_4(m)+1 \le x \le F_4(m)+F_3(n-m) \\
P_4\left(m, x-F_4(m)-F_3(n-m)\right) & \text{if } F_4(m)+F_3(n-m)+1 \le x \le F_4(n)
\end{cases}
$$

利用此 $P_4(n,x)$ 的關係式，可以很方便地以電腦程式（附錄三）列出一種最少次數的搬法。下表四為圓片數 1 到 7 的最少次數搬運過程。

表四：$P_4(n,x)$，第 x 次搬運之圓片編號。其中 n 表總圓片數，x 表第 x 次搬運。例如：要將 4 個圓片搬移至另一柱，則第 6 次搬動之圓片號碼為 3，即 $P_4(4,6)=3$。

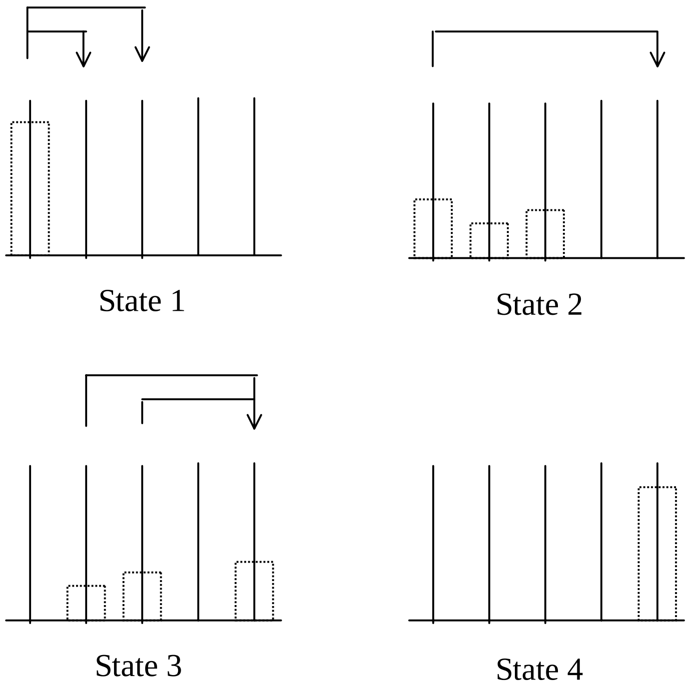
n \ x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1																								
2	1	2	1																						
3	1	2	3	2	1																				
4	1	2	1	3	4	3	1	2	1																
5	1	2	3	2	1	4	5	4	1	2	3	2	1												
6	1	2	3	2	1	4	5	4	6	4	5	4	1	2	3	2	1								
7	1	2	1	3	4	3	1	2	1	5	6	5	7	5	6	5	1	2	1	3	4	3	1	2	1

（三）五根柱子的河內塔：

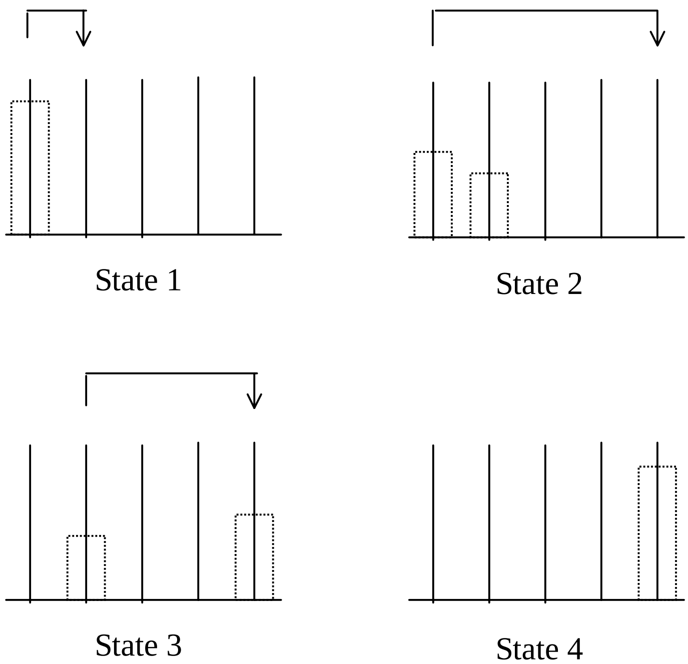
在討論過 4 根柱子後，我們再來看看 5 根柱子又會有何結果。在一樣的搬運規則下，當柱子有 5 根時，能達到最少搬運次數的方法就更多了，但我們發現之前所用的搬移策略仍然會使搬運次數達到最少。

5 根柱子考慮的搬移情形比 4 根柱子更複雜一些，我們可能會猜想也許先將某些圓片搬移到〝兩根〞柱子，再將剩下的圓片搬移到另一柱子，最後才把先前兩根柱子的圓片搬移堆疊到所求的柱子上，直觀上這樣搬也許會有更少次數。

為方便了解，以圖二(a)表示此種搬法，並簡記為(a)搬法。另以圖二(b)表示先前所用的搬移策略，並簡記為(b)搬法。



圖二 (a)：先將某些圓片搬移到〝兩根〞柱子，再將剩下的圓片搬移到另一柱子，最後再把先前兩根柱子的圓片搬移堆疊到所求的柱子上，此搬法簡記為(a)搬法。



圖二 (b)：先前所用的搬移策略（即 4 根柱子時所用的搬法），簡記為(b)搬法。

定理一：若有 n 個盤子，5 根柱子，當(a)搬法達最少搬運次數時，則會存在一個(b)搬法與其對等。

Pf ：

假設(a)搬法分別先搬移 m_1（編號 $1\sim m_1$）與 m_2（編號 $m_1+1\sim m_2$）個圓片到兩根柱子，則其搬運總次數為

$$F_5(m_1)+F_4(m_2)+F_3(n-m_1-m_2)+F_4(m_2)+F_5(m_1)$$

即

$$2F_5(m_1)+2F_4(m_2)+F_3(n-m_1-m_2)\ \ldots\ldots\ \text{(a)}$$

又設(b)搬法先搬移 m（編號 $1\sim m$）個圓片到一根柱子，則(b)搬法的搬運總次數為

$$\begin{aligned}&F_5(m)+F_4(n-m)+F_5(m)\\&=2F_5(m)+F_4(n-m)\\&=2F_5(m)+2F_4(m')+F_3(n-m-m')\ \ldots\ldots\ \text{(b)}\end{aligned}$$

令 $m=m_1$，$m'=m_2$，則(a)式與(b)式相同，亦即此時存在一個(b)搬法與此(a)搬法對等。

定理二：當柱子數大於 5 時，定理一亦成立。

Pf ：

設柱子數為 k 根，$k>5$

令(a)搬法分別先搬移 m_1（編號 $1\sim m_1$）與 m_2（編號 $m_1+1\sim m_2$）個圓片到兩根柱子，則其搬運總次數為

$$2F_k(m_1)+2F_{k-1}(m_2)+F_{k-2}(n-m_1-m_2)\ \ldots\ldots\ \text{(a}'\text{)}$$

又令(b)搬法先搬移 m（編號 $1\sim m$）個圓片到一根柱子，則(b)搬法的搬運總次數為

$$\begin{aligned}&2F_k(m)+F_{k-1}(n-m)\\&=2F_k(m)+2F_{k-1}(m')+F_{k-2}(n-m-m')\ \ldots\ldots\ \text{(b}'\text{)}\end{aligned}$$

令 $m=m_1$，$m'=m_2$，則(a′)式與(b′)式相同，亦即此時存在一個(b)搬法與(a)搬法對等。

當柱子數 k 愈大時，可能會考慮先將某些圓片搬移到 3 根，4 根或更多根柱子上等策略，但仿定理一與定理二的方法，只需將 $2F_k(m)+F_{k-1}(n-m)$ 持續展開如下

$$\begin{aligned}
&2F_k(m)+F_{k-1}(n-m)\\
&\quad=2F_k(m)+2F_{k-1}(m')+F_{k-2}(n-m-m')\\
&\quad=2F_k(m)+2F_{k-1}(m')+2F_{k-2}(m'')+F_{k-3}(n-m-m'-m'')\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

便可找到一個與之對等的(b)搬法。因此，當柱子數為 k 根時（$k\geq 5$），我們仍可用先前的搬移策略來使搬運次數達到最少。此搬移策略如下：

搬移策略三階段： (a) 先將適當量的 m 個圓片（編號 $1\sim m$）利用 k 根柱子搬移到一根柱子。 (b) 再將剩餘的 $n-m$ 個圓片（編號 $m+1\sim n$），利用其它 $k-1$ 根柱子搬移至另一根柱子。 (c) 最後再利用 k 根柱子，將(a)中 $1\sim m$ 號之圓片搬運至此柱。

以此搬移策略來搬運圓片，則當有 5 根柱子時，可以得到其最少搬運次數的關係如下。

$$\begin{aligned}
F_5(n)&=F_5(m)+F_4(n-m)+F_5(m)\\
&=2F_5(m)+F_4(n-m)\ \ldots\ldots\ (4)
\end{aligned}$$

對固定的圓片數 n，利用上式(4)，我們便可以在小於 n 的範圍內尋找 $t=m$ 值，使得 $2F_5(t)+F_4(n-t)$ 達到最小，則此時 $F_5(n)$ 即為此最小值，亦即

$$F_5(n)=\min_{\substack{0\leq t<n\\ t\in Z}}\{2F_5(t)+F_4(n-t)\}$$

表五是利用電腦程式（見附錄四）以迴圈的方式計算所歸納出的 m 與 $F_5(n)$。從表中可以看出，最佳圓片數 m 解的個數隨圓片數 n 增加而呈現規則的遞增後遞減，且每次遞增時 m 解的個數也會增加，這是很有趣也很奇妙的現象。也就是說當圓片數 n 很大時（$n\to\infty$），其最佳圓片數 m 的解可能只有一個，也可能很多個（無限多解）。

表五：m，最佳圓片數。$F_5(n)$，最少搬運次數。

$\boldsymbol{n}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	$\cdots$
$\boldsymbol{m}$	0	0,1	0,1	1	1,2	1,2,3	1,2,3,4	2,3,4	3,4	4	4,5	4,5,6	4,5,6,7	4,5,6,7,8	5,6,7,8,9	6,7,8,9,10	7,8,9,10	8,9,10	9,10	10	10,11	10,11,12	$\cdots$
$\boldsymbol{F_5(n)}$	1	3	5	7	11	15	19	23	27	31	39	47	55	63	71	79	87	95	103	111	127	143	$\cdots$
$\boldsymbol{F_5(n)}$ 之差分	1	2	2	2	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	16	16	$\cdots$

另外，如果我們想求得 $F_5(n)$ 的公式，則可以藉由 $F_5(n)$ 差分的規則來推導。觀察表五，$F_5(n)$ 的差分有如下規則

$$2^0\text{ 有 1 項，}\ 2^1\text{ 有 3 項，}\ 2^2\text{ 有 6 項，}\ \cdots,\ 2^{q-1}\text{ 有 }\frac{q(q+1)}{2}\text{ 項}$$

則可得到

$$F_5(n)=1\times2^0+3\times2^1+6\times2^2+\cdots+\frac{q(q+1)}{2}\times2^{q-1}+\left(n-\sum_{t=1}^{q}\frac{t(t+1)}{2}\right)\times2^q$$

其中 q 為滿足 $n-\sum_{t=1}^{q}\frac{t(t+1)}{2}\geq0$ 之最大整數

令 $S_q=1\times2^0+3\times2^1+6\times2^2+\cdots+\frac{q(q+1)}{2}\times2^{q-1}$ …… (∗6)

則 $2S_q=1\times2^1+3\times2^2+6\times2^3+\cdots+\frac{(q-1)q}{2}\times2^{q-1}+\frac{q(q+1)}{2}\times2^q$ …… (∗7)

(∗6)式減去(∗7)式得

$$-S_q=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+\cdots+q\times2^{q-1}-\frac{q(q+1)}{2}\times2^q \quad\text{…… (∗8)}$$

則 $-2S_q=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+q\times2^q-\frac{q(q+1)}{2}\times2^{q+1}$ …… (∗9)

再用(∗8)式減去(∗9)式得

$$\begin{aligned}S_q&=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{q-1}-q\times2^q-\frac{q(q+1)}{2}\times2^q+\frac{q(q+1)}{2}\times2^{q+1}\\&=\frac{1\times(2^q-1)}{2-1}+\frac{q^2-q}{2}\times2^q\\&=2^{q-1}(q^2-q+2)-1 \quad\text{…… (∗10)}\end{aligned}$$

又令

$$R_q=\left(n-\sum_{t=1}^{q}\frac{t(t+1)}{2}\right)\times2^q=\left(n-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{q}t^2-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{q}t\right)\times2^q$$

$$= \left(n - \frac{q(q+1)(2q+1)}{12} - \frac{q(q+1)}{4} \right) \times 2^q$$

$$= \left(n - \frac{1}{6} q(q+1)(q+2) \right) \times 2^q \ \ldots\ldots\ (*11)$$

由$(*10)$與$(*11)$式得

$$F_5(n) = 2^{q-1}(q^2 - q + 2) - 1 + \left(n - \frac{1}{6} q(q+1)(q+2) \right) \times 2^q$$

$$= 2^q \left(n - \frac{q(q^2+5)}{6} + 1 \right) - 1$$

又 q 為滿足 $n - \sum_{t=1}^{q} \frac{t(t+1)}{2} \geq 0$ 之最大整數，即

$$\max \{ q \mid n - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{q} t(t+1) \geq 0,\ \ q \in Z \}$$

亦即

$$\max \{ q \mid q^3 + 3q^2 + 2q - 6n \leq 0,\ \ q \in Z \} \ \ldots\ldots\ (5)$$

要解(5)式，我們可以先利用<u>卡當諾</u>（Gerolamo Cardano，1501 – 1576）的三次方程式解法解下列方程式

$$q^3 + 3q^2 + 2q - 6n = 0 \ \ldots\ldots\ (*12)$$

解 q 過程如下：

令 $q = y - 1$ 代入$(*12)$式得

$$(y-1)^3 + 3(y-1)^2 + 2(y-1) - 6n = 0$$

即

$$y^3 - y - 6n = 0 \ \ldots\ldots\ (*13)$$

設 $y = u + v$ 解$(*13)$式，則

$$(u+v)^3 - (u+v) - 6n = 0$$

即

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - 1) - 6n = 0 \ \ldots\ldots\ (*14)$$

令 $u^3 + v^3 = 6n$，$3uv = 1$，則$(*14)$式成立

以 u^3，v^3 為方程式 $x^2 - 6nx + \frac{1}{27} = 0$ 之兩根

解得 $x = \dfrac{6n \pm \sqrt{(6n)^2 - \frac{4}{27}}}{2} = 3n \pm \sqrt{9n^2 - \frac{1}{27}}$

因此 y 之一解為 $\sqrt[3]{3n+\sqrt{9n^2-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{3n-\sqrt{9n^2-\frac{1}{27}}}$

此時(∗12)式可分解為如下形式

$$\left(q-(y-1)\right)\left(q^2+aq+b\right)=0$$

但因(∗12)式的根為一個實根兩個複數根，所以 q^2+aq+b 恆正，則滿足(5)式的不等式可化簡為

$$q\le y-1$$

則滿足(5)式之 q 為 $[\,y-1\,]$，即

$$q=\left[\sqrt[3]{3n+\sqrt{9n^2-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{3n-\sqrt{9n^2-\frac{1}{27}}}-1\right]$$

其中 [ ] 為高斯符號。

將上面 $F_5(n)$ 公式的結果整理如下。

> $F_5(n)$ 之公式：
>
> 當柱子數 $k=5$ 時，欲從一柱搬移 n 個圓片至另一柱的最少搬運次數之公式為
>
> $$F_5(n)=2^q\left(n-\frac{q(q^2+5)}{6}+1\right)-1$$
>
> 且 $q=\left[\sqrt[3]{3n+\sqrt{9n^2-\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{3n-\sqrt{9n^2-\frac{1}{27}}}-1\right]$，其中 [ ] 為高斯符號。

接著，如同求 $P_4(n,x)$ 一樣，欲求 $P_5(n,x)$，我們得先規定一種 m 的取法，使 $P_5(n,x)$ 只對應一個值。觀察表五的 m 值，若圓片數 n 為下列形式

$$n=\sum_{t=1}^{q}\frac{t(t+1)}{2}=\frac{1}{6}q(q+1)(q+2)\ \ \ldots\ldots\ (*15)$$

則此時 m 有唯一解為

$$m=\sum_{t=1}^{q-1}\frac{t(t+1)}{2}=\frac{1}{6}(q-1)q(q+1)\ \ \ldots\ldots\ (*16)$$

由(∗15)與(∗16)式，則

$$m = n - \frac{q(q+1)}{2} \quad \ldots\ldots \ (*17)$$

當 n 不為(∗17)式的形式時，其 m 值的解並不唯一，但通常(∗17)式仍會是 m 的其中一解，若否，則可取其解為

$$m = \frac{1}{6} q(q+1)(q+2)$$

因此我們規定 m 的取法為

$$m = \begin{cases} n - \frac{q(q+1)}{2} & \text{if } n - \frac{q(q+1)}{2} < \frac{1}{6} q(q+1)(q+2) \\ \frac{1}{6} q(q+1)(q+2) & \text{if } n - \frac{q(q+1)}{2} \geq \frac{1}{6} q(q+1)(q+2) \end{cases}$$

此時 $P_5(n,x)$ 對應的值已經固定，且

$$P_5(n,x) = \begin{cases} P_5(m,x) & \text{if } 1 \leq x \leq F_5(m) \\ P_4\big(n-m, x-F_5(m)\big) + m & \text{if } F_5(m)+1 \leq x \leq F_5(m)+F_4(n-m) \\ P_5\big(m, x-F_5(m)-F_4(n-m)\big) & \text{if } F_5(m)+F_4(n-m)+1 \leq x \leq F_5(n) \end{cases}$$

利用此 $P_5(n,x)$ 的關係式，可以用電腦程式（附錄五）快速地列出一種最少次數的搬法。下表六為圓片數 1 到 9 的最少次數搬運過程。

表六：$P_5(n,x)$，第 x 次搬運之圓片編號。其中 n 表總圓片數，x 表第 x 次搬運。例如：要將 6 個圓片搬移至另一柱，則第 7 次搬動之圓片號碼為 5，即 $P_5(6,7)=5$。

n \ x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	1																										
2	1	2	1																								
3	1	2	3	2	1																						
4	1	2	3	4	3	2	1																				
5	1	2	1	3	4	5	4	3	1	2	1																
6	1	2	3	2	1	4	5	6	5	4	1	2	3	2	1												
7	1	2	3	4	3	2	1	5	6	7	6	5	1	2	3	4	3	2	1								
8	1	2	3	4	3	2	1	5	6	5	7	8	7	5	6	5	1	2	3	4	3	2	1				
9	1	2	3	4	3	2	1	5	6	7	6	5	8	9	8	5	6	7	6	5	1	2	3	4	3	2	1

（四）六根柱子的河內塔：

仿照 5 根柱子的討論方法，當柱子數增為 6 根時，以搬移策略來搬運圓片可達到最少搬運次數，且最少搬運次數的關係為

$$F_6(n)=2F_6(m)+F_5(n-m) \quad \ldots\ldots (6)$$

同樣地，利用(6)式，在小於 n 的範圍內尋找 $t=m$ 值，使得 $2F_6(t)+F_5(n-t)$ 達到最小，則

$$F_6(n)=\min_{\substack{0\le t<n\\ t\in Z}}\{2F_6(t)+F_5(n-t)\}$$

利用電腦程式（見附錄六）以迴圈的方式可以很快地執行這些步驟，並將結果整理成下表七。在表七中，最佳圓片數 m 解的個數與 5 根柱子時類似，都是隨圓片數 n 增加而呈現規則的遞增後遞減，但 6 根柱子之 m 解的個數比 5 根柱子時增加更快。

表七：m，最佳圓片數。$F_6(n)$，最少搬運次數。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	…
m	0	0,1	0,1	0,1	1	1,2	1,2,3	1,2,3,4	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5	2,3,4,5	3,4,5	4,5	5	5,6	5,6,7	5,6,7,8	5,6,7,8,9	5,6,7,8,9,10	5,6,7,8,9,10,11	5,6,7,8,9,10,11,12	…
$F_6(n)$	1	3	5	7	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	57	65	73	81	89	97	105	…
$F_6(n)$ 之差分	1	2	2	2	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	8	8	8	8	8	8	8	…

接著，如果我們想求得 $F_6(n)$ 的公式，則可以藉由 $F_6(n)$ 差分的規則來推導。觀察表七，$F_6(n)$ 的差分有如下規則

2^0 有 1 項，2^1 有 4 項，2^2 有 10 項，⋯，2^{q-1} 有 $\dfrac{q(q+1)(q+2)}{6}$ 項

則可得到

$$F_6(n)=1\times 2^0+4\times 2^1+10\times 2^2+\cdots+\frac{q(q+1)(q+2)}{6}\times 2^{q-1}+\left(n-\sum_{t=1}^{q}\frac{1}{6}t(t+1)(t+2)\right)\times 2^q$$

其中 q 為滿足 $n-\sum_{t=1}^{q}\frac{1}{6}t(t+1)(t+2)\ge 0$ 之最大整數

令 $S'_q=1\times 2^0+4\times 2^1+10\times 2^2+\cdots+\dfrac{q(q+1)(q+2)}{6}\times 2^{q-1}$ …… (*18)

則 $2S'_q = 1\times 2^1 + 4\times 2^2 + 10\times 2^3 + \cdots + \dfrac{(q-1)q(q+1)}{6}\times 2^{q-1}$

$$+\frac{q(q+1)(q+2)}{6}\times 2^q \;\ldots\ldots\; (*19)$$

(∗18)式減去(∗19)式得

$$-S'_q = 1\times 2^0 + 3\times 2^1 + 6\times 2^2 + \cdots + \frac{q(q+1)}{2}\times 2^{q-1}$$

$$-\frac{q(q+1)(q+2)}{6}\times 2^q \;\ldots\ldots\; (*20)$$

又由(∗10)式（p14）知

$$1\times 2^0 + 3\times 2^1 + 6\times 2^2 + \cdots + \frac{q(q+1)}{2}\times 2^{q-1} = 2^{q-1}(q^2-q+2)-1$$

代入(∗20)式得

$$-S'_q = 2^{q-1}(q^2-q+2)-1-\frac{q(q+1)(q+2)}{6}\times 2^q$$

則 $S'_q = \dfrac{1}{6}q(q+1)(q+2)\times 2^q - (q^2-q+2)\times 2^{q-1}+1 \;\ldots\ldots\; (*21)$

又令

$$R'_q = \left(n-\sum_{t=1}^{q}\frac{1}{6}t(t+1)(t+2)\right)\times 2^q = \left(n-\frac{1}{6}\sum_{t=1}^{q}t^3-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{q}t^2-\frac{1}{3}\sum_{t=1}^{q}t\right)\times 2^q$$

$$=\left(n-\frac{q^2(q+1)^2}{24}-\frac{q(q+1)(2q+1)}{12}-\frac{k(k+1)}{6}\right)\times 2^q$$

$$=\left(n-\frac{1}{24}q(q+1)(q+2)(q+3)\right)\times 2^q \;\ldots\ldots\; (*22)$$

由(∗21)與(∗22)式得

$$F_6(n)=\frac{1}{6}q(q+1)(q+2)\times 2^q - (q^2-q+2)\times 2^{q-1}+1$$

$$+\left(n-\frac{1}{24}q(q+1)(q+2)(q+3)\right)\times 2^q$$

$$=2^q\left(n-\frac{(q-1)q(q^2+3q+14)}{24}-1\right)+1$$

又 q 為滿足 $n-\displaystyle\sum_{t=1}^{q}\frac{1}{6}t(t+1)(t+2)\ge 0$ 之最大整數，即

$$\max\left\{q \;\middle|\; n-\sum_{t=1}^{q}\frac{1}{6}t(t+1)(t+2)\ge 0,\ q\in Z\right\}$$

亦即

$$\max\{\, q \mid q^4+6q^3+11q^2+6q-24n\le 0,\ \ q\in Z \,\}\ \ldots\ldots\ (7)$$

要解(7)式，我們可以先解不等程式

$$q^4+6q^3+11q^2+6q-24n\le 0\ \ \ldots\ldots\ (*23)$$

令 $q=y-\dfrac{3}{2}$ 代入(*23)式得

$$y^4-\frac{5}{2}y^2+\frac{9}{16}-24n\le 0\ \ \ldots\ldots\ (*24)$$

則 $\left(y^2-\dfrac{5}{4}\right)^2\le 24n+1$

即 $\left(y^2-\dfrac{5}{4}+\sqrt{24n+1}\right)\left(y^2-\dfrac{5}{4}-\sqrt{24n+1}\right)\le 0$

但 $y^2-\dfrac{5}{4}+\sqrt{24n+1}$ 恆正（因為 $n\ge 1$）

所以(*24)式可簡化為

$$y^2-\frac{5}{4}-\sqrt{24n+1}\le 0$$

解得 $-\sqrt{\dfrac{5}{4}+\sqrt{24n+1}}\le y\le\sqrt{\dfrac{5}{4}+\sqrt{24n+1}}$

亦即 $-\sqrt{\dfrac{5}{4}+\sqrt{24n+1}}-\dfrac{3}{2}\le q\le\sqrt{\dfrac{5}{4}+\sqrt{24n+1}}-\dfrac{3}{2}$

因此滿足(7)式之 q 為

$$q=\left[\sqrt{\frac{5}{4}+\sqrt{24n+1}}-\frac{3}{2}\right]$$

其中 [ ] 為高斯符號。

將上面 $F_6(n)$ 公式的結果整理如下。

$F_6(n)$ 之公式：

當柱子數 $k=6$ 時，欲從一柱搬移 n 個圓片至另一柱的最少搬運次數之公式為

$$F_6(n)=2^q\left(n-\frac{(q-1)q(q^2+3q+14)}{24}-1\right)+1$$

且 $q=\left[\sqrt{\frac{5}{4}+\sqrt{24n+1}}-\frac{3}{2}\right]$，其中 [ ] 為高斯符號。

再觀察表七，若 n 為下列形式

$$n=\sum_{t=1}^{q}\frac{1}{6}t(t+1)(t+2)=\frac{1}{24}q(q+1)(q+2)(q+3)$$

則此時 m 有唯一解為

$$m=\sum_{t=1}^{q-1}\frac{1}{6}t(t+1)(t+1)=\frac{1}{24}(q-1)q(q+1)(q+2)$$

若我們把 3 柱、4 柱、5 柱與 6 柱的 n 及 m 做一些整合，我們將發現一個有趣的結果。

設柱子數 $k=6$，若 n 有唯一 m 值解，則 n 與 m 滿足

$$n=\frac{1}{24}q(q+1)(q+2)(q+3)$$

$$m=\frac{1}{24}(q-1)q(q+1)(q+2)$$

$$F_6(n)=2F_6(m)+F_5(n-m)$$

因為

$$n-m=\frac{1}{24}q(q+1)(q+2)(q+3)-\frac{1}{24}(q-1)q(q+1)(q+2)$$

$$=\frac{1}{6}q(q+1)(q+2)=\sum_{t=1}^{q}\frac{t(t+1)}{2}$$

所以 $F_5(n-m)$ 能唯一分解為

$$F_5(n-m)=2F_5(m')+F_4(n-m-m')$$

且 $m' = \sum_{t=1}^{q-1} \frac{t(t+1)}{2} = \frac{1}{6}(q-1)q(q+1)$

又因為

$$n - m - m' = \frac{1}{6}q(q+1)(q+2) - \frac{1}{6}(q-1)q(q+1)$$

$$= \frac{q(q+1)}{2} = \sum_{t=1}^{q} t$$

則 $F_4(n-m)$ 亦能唯一分解為

$$F_4(n-m-m') = 2F_4(m'') + F_3(n-m-m'-m'')$$

且 $m'' = \sum_{t=1}^{q-1} t = \frac{(q-1)q}{2}$

由此可知，當柱子數 $k=6$，且 n 有唯一 m 值解時，其最少次數的搬法只有一種。以 $n=15$（$= \sum_{t=1}^{3} \frac{1}{6} t(t+1)(t+2)$）為例，其有唯一 m 值 5，且 $F_6(15)$ 能被唯一分解為

$$\begin{aligned}
F_6(15) &= 2F_6(5) + F_5(10) \\
&= 2\left(2F_6(1) + F_5(4)\right) + \left(2F_5(4) + F_4(6)\right) \\
&= 4F_6(1) + 4F_5(4) + F_4(6) \\
&= 4F_6(1) + 4\left(2F_5(1) + F_4(3)\right) + \left(2F_4(3) + F_3(3)\right) \\
&= 4F_6(1) + 8F_5(1) + 6F_4(3) + F_3(3) \\
&= 4F_6(1) + 8F_5(1) + 6\left(2F_4(1) + F_3(2)\right) + F_3(3) \\
&= 4F_6(1) + 8F_5(1) + 12F_4(1) + 6F_3(2) + F_3(3)
\end{aligned}$$

也就是說，以 6 根柱子來搬運 15 個圓片的搬法是唯一的，且其最少搬運次數為

$$\begin{aligned}
F_6(15) &= 4 \times 1 + 8 \times 1 + 12 \times 1 + 6 \times (2^2 - 1) + 2^3 - 1 \\
&= 49
\end{aligned}$$

因為上述的討論已經包含 3 根、4 根與 5 根柱子，因此當柱子數 $k=3$，4，5 時，亦有相同的性質。這是一個很奇妙的現象，因為當 n 很大時，可能很容易便能找出一種最少搬運次數的搬法，但有時卻只存在一種搬法可以達到最少搬運次數，這時候若不知道搬運的規則，那可能會白白花費很多時間在錯誤的嚐試上。

伍、結論與展望

在河內塔的神話故事中，即使僧侶毫不犯錯地以一步一秒的速度搬運圓片，也得花約 5849 億年才能搬得完。就算世世代代都有僧侶一直持續搬運圓片，恐怕地球也沒那麼長壽吧！但如果能把鑽石針增為 4 根，甚至 5 根、6 根，那又如何呢？從下表八，若鑽石針增為 4 根，則最少搬運次數只需 18433 次，換算為時間也只需約 307.2 分鐘（約 5 小時）。也就是說僧侶可以在他有生之年，甚至是短短的數小時內便能完成搬運 64 個圓片，由此可見這第四根鑽石針的威力何其之大啊！再看看將鑽石針增為 5 根、6 根後，其減少的搬運次數跟時間似乎已經沒多大差別。所以只要河內塔故事中的鑽石針再增加一根，那世界末日便會在短短數小時內來臨，到時人類也許只來得及禱告了吧！

其實河內塔只是一個神話故事，但在實際生活中，本篇文章的結果也許能應用在減少計算機的運算或是增快計算機的處理速度。我們可以想像當計算機在運算時，其存取資料的過程就像一堆數字在儲存硬體中搬運，若能適當的增加儲存硬體，並配合搬運資料的方法，那必能大大地減少運算的時間。

另外，當圓片數持續增加時，一般會直覺認為最少次數的搬法會越來越多，但從推導過程看來，最少搬運次數的方法在某些圓片數時為唯一。

這個題目尚有許多有趣的地方可以繼續研究與延伸，我們提供下列兩個方向供參考：

1. 可將柱子編號來討論。
2. 可繼續討論柱子數 7 以上（$k \geq 7$）的情形。
3. 可以研究最少搬運次數的方法數與圓片數的關係。

表八：比較 $F_3(64)$、$F_4(64)$、$F_5(64)$ 與 $F_6(64)$。

$\boldsymbol{k}$	3	4	5	6
$\boldsymbol{F_k(n)}$	$2^{64}-1$	18433	1535	673
時間	約 5849 億年	約 307.2 分鐘	約 25.6 分鐘	約 11.2 分鐘

陸、參考資料

[1] 余文卿、李白飛等（2003）：《 龍騰數學（一）教學手冊 》。台北縣，龍騰文化。

[2] 林福來（1992）：《離散數學初步》。台北市，九章出版社。

附錄一

程式目的：求 $P_3(n,x)$（使用 maple 軟體）。

```
f3:=proc(n)
    2^n-1;
    end:

p3:=proc(n,x)
    local i;
    for i from 1 by 1 to n do
     if ( floor( (x-2^(i-1))/2^i )=(x-2^(i-1))/2^i)
     then break end if;
    end do;
    return i;
    end:

L3:=proc(n)
    local i;
    for i to f3(n) do
    print(p3(n,i));
    end do;
    end:
```

[說明]

f3：柱子數三根時的最少搬運次數，即 $F_3(n)$。

p3：柱子數為三根，搬運 n 個圓片時，第 x 次搬運之圓片號碼，即 $P_3(n,x)$。

L3：在 n 個圓片，3 根柱子時，L3(n) 會輸出最少搬運次數的所有搬運過程。

附錄二

程式目的：在小於 n 的範圍內尋找 $t=m$ 值，使得 $2F_4(t)+F_3(n-t)$ 達到最小，則此時 $F_4(n)$ 即為此最小值（使用 maple 軟體）。

```
f3:=proc(n)
    2^n-1;
    end:

min_f4:=proc(n)
  local i,a,b,c;
  c:=0;
  for i from 0 to n-2 do
   if (c=0) and ((2*f4[i+1]+f3(n-i-1))=(2*f4[i]+f3(n-i)))
   then a:=i;c:=1;
   elif ((2*f4[i+1]+f3(n-i-1))>(2*f4[i]+f3(n-i)))
   then b:=i;break end if;
  end do;
  return [a,b,2*f4[i]+f3(n-i)];
  end:

list_f4:=proc(n)
    local i;
    global f4;
    f4[0]:=0;
    for i from 1 to n do
     f4[i]:=min_f4(i)[3];
     print(i,min_f4(i)[1],min_f4(i)[2],f4[i]);
    end do;
    end:
```

[說明]

min_f4：求 $\min\limits_{\substack{0\le t<n \\ t\in Z}}\{2F_4(t)+F_3(n-t)\}$。

list_f4：從 $i=1, 2, \cdots, n$ 輸出（i，最小 m 值，最大 m 值，$F_4(i)$）。

附錄三

程式目的：求 $P_4(n,x)$（使用 maple 軟體）。

```
f3:=proc(n)
    2^n-1;end:

p3:=proc(n,x)
    local i;
    for i from 1 by 1 to n do
     if ( floor( (x-2^(i-1))/2^i )=(x-2^(i-1))/2^i)
     then break end if;
    end do;return i;end:

f4:=proc(n)
    local q;
    q:=floor((-1+sqrt(1+8*n))/2);
    2^(q-1)*(2*n-q^2+q-2)+1;end:

p4:=proc(n,x)
    local m;
    m:=n-floor((-1+sqrt(1+8*n))/2);
    if (1<=x and x<=f4(m)) then p4(m,x)
    elif (f4(m)+1<=x and x<=f4(m)+f3(n-m))
    then p3(n-m,x-f4(m))+m
    elif (f4(m)+f3(n-m)+1<=x and x<=f4(n))
    then p4(m,x-f4(m)-f3(n-m))
    end if;end:

L4:=proc(n)
    local i;
    for i to f4(n) do
    print(p4(n,i));
    end do;end:
```

[說明]

L4：在 n 個圓片，4 根柱子時，L4(n) 會輸出最少搬運次數的所有搬運過程。

附錄四

程式目的：在小於 n 的範圍內尋找 $t=m$ 值，使得 $2F_5(t)+F_4(n-t)$ 達到最小，則此時 $F_5(n)$ 即為此最小值（使用 maple 軟體）。

```
f4:=proc(n)
    local k;
    k:=floor((-1+sqrt(1+8*n))/2);
    2^(k-1)*(2*n-k^2+k-2)+1;
    end:

min_f5:=proc(n)
  local i,a,b,c;
  c:=0;
  for i from 0 to n-2 do
   if (c=0) and ((2*f5[i+1]+f4(n-i-1))=(2*f5[i]+f4(n-i)))
   then a:=i;c:=1;
   elif ((2*f5[i+1]+f4(n-i-1))>(2*f5[i]+f4(n-i)))
   then b:=i;break end if;
  end do;
  return [a,b,2*f5[i]+f4(n-i)];
  end:

list_f5:=proc(n)
    local i;
    global f5;
    f5[0]:=0;
    for i from 1 to n do
     f5[i]:=min_f5(i)[3];
     print(i,min_f5(i)[1],min_f5(i)[2],f5[i]);
    end do;
    end:
```

[說明]

list_f5：從 $i=1, 2, \cdots, n$ 輸出（i，最小 m 值，最大 m 值，$F_5(i)$）。

附錄五

程式目的：求 $P_5(n,x)$（使用 maple 軟體)。

```
f3:=proc(n)
    2^n-1;end:

p3:=proc(n,x)
    local i;
    for i from 1 by 1 to n do
     if ( floor( (x-2^(i-1))/2^i )=(x-2^(i-1))/2^i)
     then break end if;
    end do;return i;end:

f4:=proc(n)
    local q;
    q:=floor((-1+sqrt(1+8*n))/2);
    2^(q-1)*(2*n-q^2+q-2)+1;end:

p4:=proc(n,x)
    local m;
    m:=n-floor((-1+sqrt(1+8*n))/2);
    if (1<=x and x<=f4(m)) then p4(m,x)
    elif (f4(m)+1<=x and x<=f4(m)+f3(n-m))
    then p3(n-m,x-f4(m))+m
    elif (f4(m)+f3(n-m)+1<=x and x<=f4(n))
    then p4(m,x-f4(m)-f3(n-m))
    end if;end:

f5:=proc(n)
    local q;
    q:=floor(evalf((3*n+(9*n^2-(1/27))^(1/2))^(1/3)+
           (3*n-(9*n^2-(1/27))^(1/2))^(1/3)-1));
    2^q*(n-q*(q^2+5)/6+1)-1;
    end:
```

```
p5:=proc(n,x)
    local m,q;
    q:=floor(evalf((3*n+(9*n^2-(1/27))^(1/2))^(1/3)+
           (3*n-(9*n^2-(1/27))^(1/2))^(1/3)-1));
    if (n-q*(q+1)/2 < q*(q+1)*(q+2)/6)
    then m:=n-q*(q+1)/2
    else m:=q*(q+1)*(q+2)/6 end if;
    if (1<=x and x<=f5(m)) then p5(m,x)
    elif (f5(m)+1<=x and x<=f5(m)+f4(n-m))
    then p4(n-m,x-f5(m))+m
    elif (f5(m)+f4(n-m)+1<=x and x<=f5(n))
    then p5(m,x-f5(m)-f4(n-m)) end if;end:

L5:=proc(n)
    local i;
    for i to f5(n) do
    print(p5(n,i));end do;end:
```

[說明]

L5：在 *n* 個圓片，5 根柱子時，L5(n) 會輸出最少搬運次數的所有搬運過程。

附錄六

程式目的：在小於 n 的範圍內尋找 $t=m$ 值，使得 $2F_6(t)+F_5(n-t)$ 達到最小，則此時 $F_6(n)$ 即為此最小值（使用 maple 軟體）。

```
f5:=proc(n)
    local q;
    q:=floor(evalf((3*n+(9*n^2-(1/27))^(1/2))^(1/3)+
           (3*n-(9*n^2-(1/27))^(1/2))^(1/3)-1));
    2^q*(n-q*(q^2+5)/6+1)-1;
    end:

min_f6:=proc(n)
  local i,a,b,c;
  c:=0;
  for i from 0 to n-2 do
   if (c=0) and ((2*f6[i+1]+f5(n-i-1))=(2*f6[i]+f5(n-i)))
   then a:=i;c:=1;
   elif ((2*f6[i+1]+f5(n-i-1))>(2*f6[i]+f5(n-i)))
   then b:=i;break end if;
  end do;
  return [a,b,2*f6[i]+f5(n-i)];
  end:

list_f6:=proc(n)
    local i;
    global f6;
    f6[0]:=0;
    for i from 1 to n do
     f6[i]:=min_f6(i)[3];
     print(i,min_f6(i)[1],min_f6(i)[2],f6[i]);
    end do;
    end:
```

[說明]

list_f5：從 $i=1, 2, \cdots, n$ 輸出（i，最小 m 值，最大 m 值，$F_6(i)$）。

評 語

040417 高中組數學科

柱咒毀滅-探討河內塔柱數增加與搬運次數之間的關係

1. 研究題材出現太過頻繁。

2. 應該採用電腦作動態展示。