中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040416

國立武陵高級中學

指導老師姓名

陳銘欽

作者姓名

陳秋語

王麗珍

陳怡如

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：高中組

作品名稱：迷宮的十字路口 — 一筆畫探密

關 鍵 詞：一筆畫、走法數

編　　號：

壹、摘要

本報告主要討論一筆畫走法數，從含兩個奇數點的直線方塊圖到皆由偶數點構成的直線方塊圖，這些圖形又可分為直向與橫向，進而推出無限延伸的直線走法數公式，研究過程中發現偶直線圖形的一些性質，然後我們將方塊擴展成平面 2xN，最後導出 2xN 的通氏。在推導 2xN. 3x3 圖形走法數時，觀察到路徑似乎可平移，且圖形平移後走法數不變。

貳、研究動機

數學課老師提到一筆畫，並說此可延伸出很多有趣知識，因此激起我們的好奇心和企圖心，決定要進一步研究相關圖形的走法數及其性質。

參、研究目的

深入了解一筆畫。除課內範圍，我們把圖延伸擴展及把原分離的兩個圖相連(奇偶直線圖、橫向圖)，討論走法數，更進一步討論平面圖(2xN、3x3 圖形)。除計算走法數外，研究圖形間規律及研究快速而準確的解題方法，亦是研究的重心。

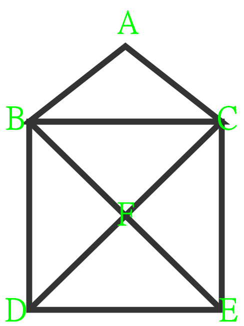
肆、研究設備、器材

一堆紙、一堆筆、電腦、爛磁片、爆炸的腦袋、被轟炸的心靈、老師的期盼。

伍、研究過程

一、一筆畫圖形的理論

我們先由書籍中得知構成一筆畫圖形的理論



A、B、C、F 有偶數個路徑，
為「偶數點」
D、E 有奇數個路徑，
為「奇數點」

構成一筆畫的圖形

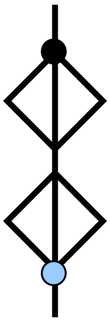
(一) 若一個圖形恰有兩奇數點，此圖必可一筆描繪，且描繪此圖時，其中一個奇數點必為起點，而另一點必為終點。

(二) 若一圖形上所有的點皆偶數點，在描繪此圖時，可用任一點為起點，且原起點必為終點。

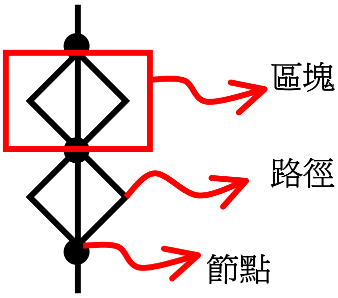
由上述理論，我們擬了一系列的一筆畫圖形，希望能由簡入繁的從直線圖形導出平面一筆畫圖形的走法數。

二、 擬定研究方向

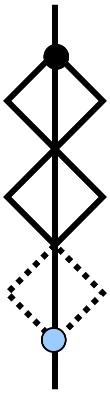
課內範圍：

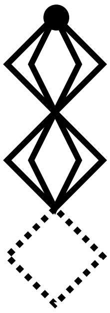


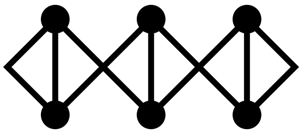
延伸 →

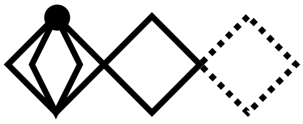


奇直向 → 偶直向 → ~~奇橫向~~ → 偶橫向



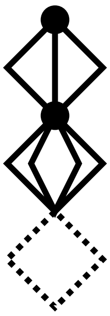


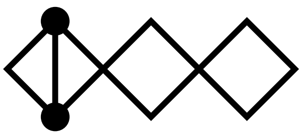


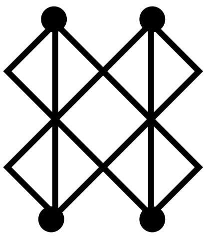


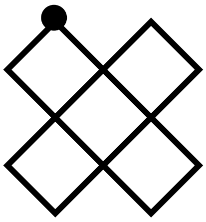
〈如圖：
奇橫向出現多於
兩個奇數點，
無法一筆畫走完。〉

→ 奇偶直向 → 奇偶橫向 → ~~奇平面~~ → 偶平面



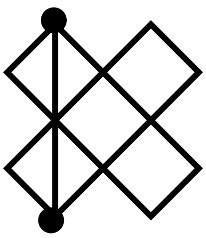






〈同「奇橫向」，
無法一筆畫走完〉

→ 奇偶平面

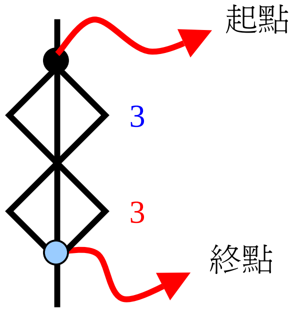


目標是循序漸進由簡單直線奇偶一筆畫圖形進而擴展到平面圖，擬好研究方向，我們開始著手研究。

三、 開始研究

(一)奇直向：

為求直奇數一筆畫圖走法數，由基本的 3x3 圖形做起：



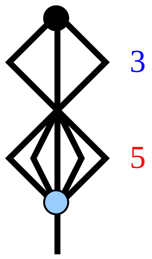
為得知 3x3 圖形一筆畫走法數，先用樹狀圖來解：

由起點出發，每遇到一個節點，便有”向上”與”向下”兩種選擇

3 ＜ 上 2x1x3x2 ／ 下 3x2 ＜ 上 2x1x1 ／ 下(無法一筆畫)

→ 走法數 3!x3!x2

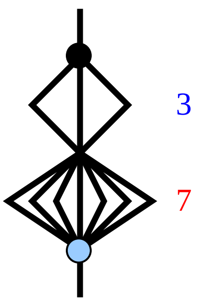
3x5 圖形：



3 ＜ 上 2x1x5! ／ 下 5x4 ＜ 上 2x1x3! ／ 下 3x2x2x1x1

→ 走法數 3!x5!x3

3x7 圖形：



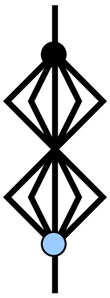
3 ＜ 上 2x1x7! ／ 下 7x6 ＜ 上 2x1x5! ／ 下 5x4 ＜ 上 2x1x3! ／ 下 3x2x2x1x1

→ 走法數 3!x7!x4

由以上圖形我們推論，3xn 圖形，走法數為 $3! \times n! \times \frac{n+1}{2}$

嘗試 mxn 圖形：

5x5 圖形：



5

5

5

上 4x3

上 2x1x5!

下 5x4

上 2x1x3!

下 3x2x2x1x1

下 5x4

上 4x3

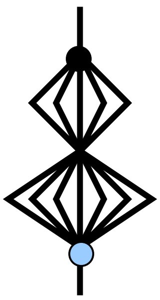
上 2x1x3!

下 3x2x2x1x1

下 3x2x4x3x2x1x1

→ 走法數 5!x5!x6

5x7 圖形：



5

7

5

上 4x3

上 2x1x7!

下 7x6

上 2x1x5!

下 5x4

上 2x1x3!

下 3x2x2x1x1

下 7x6

上 4x3

上 2x1x5!

下 5x4

上 2x1x3!

下 3x2x2x1x1

下 5x4

上 4x3

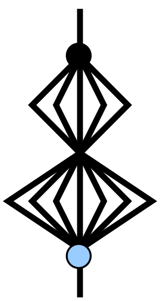
上 2x1x3!

下 3x2x2x1x1

下 3x2x4x3x2x1x1

→ 走法數 5!x7!x10

由以上圖形得知 mxn 圖形走法數爲 m 階乘 n 階再乘一數値 h

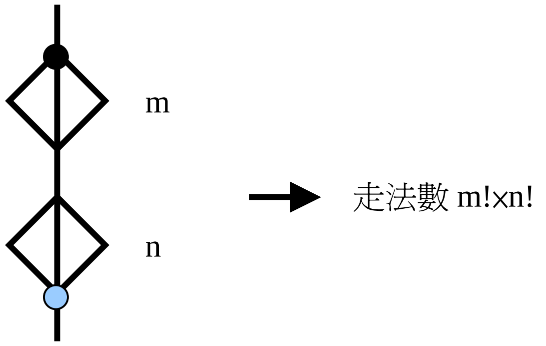


m

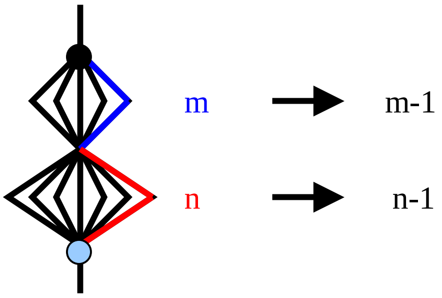
n

→ 走法數 m! × n! × h

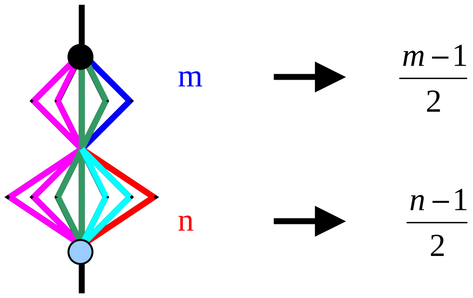
m!×n!的原理可由課本圖形推導



課本圖形中上下兩區塊是分開的，所以必是上區塊走完才往下，走法數爲 m!×n!。但在討論的圖形中，上下區塊交一節點，所以當遇到節點時，需考慮向上或向下，走法數也隨之增加。其中 h 爲遇到節點時，選擇往上或往下的情形。我們假設先保留一條回到終點的路，則上下路徑數變爲 m-1 與 n-1。



剩下的路徑數中，由節點選擇往上或下再回到原點時，每次操作會消耗 2 條路徑。



如此操作對向上有$\frac{m-1}{2}$次，向下有$\frac{n-1}{2}$次，相當於把$\frac{m-1}{2}$與$\frac{n-1}{2}$排列，有$\dfrac{\left(\frac{m+n-2}{2}\right)!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$種，即 h=$\dfrac{\left(\frac{m+n-2}{2}\right)!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$

也可想成在$\frac{m+n-2}{2}$次操作中，有$\frac{m-1}{2}$是向上，其餘爲向下，相當於$\frac{m+n-2}{2}$取$\frac{m-1}{2}$或取

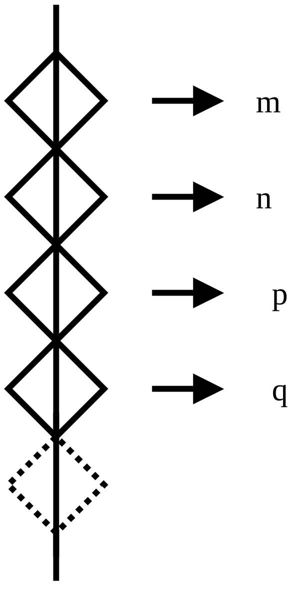
$\frac{n-1}{2}$，如此走法數爲 $C^{\frac{m+n-2}{2}}_{\frac{m-1}{2}} = C^{\frac{m+n-2}{2}}_{\frac{n-1}{2}} = \frac{\left(\frac{m+n-2}{2}\right)!}{\left(\frac{m-1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$

故一個 m×n 直奇數一筆畫圖形(m,n$\in 2k-1, k \in N$)走法數爲

m! × n! × $C^{\frac{m+n-2}{2}}_{\frac{m-1}{2}}$

此想法也解釋了 3×n 的公式 3! × n! × $\frac{n+1}{2}$

若繼續延伸成 m×n×p×q…(m.n.p.q…$\in 2k-1, k \in N$)的圖形，走法數爲

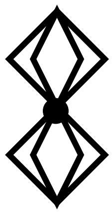


m! × n! × p! × q!…×$C^{\frac{m+n-2}{2}}_{\frac{m-1}{2}}$ ×$C^{\frac{n+p-2}{2}}_{\frac{n-1}{2}}$ ×$C^{\frac{p+q-2}{2}}_{\frac{p-1}{2}}$ ×…

(二)偶直向：

由奇圖形的理論，可以推導出偶圖形走法數

1.起點在中間：來回有$\frac{n}{2}$及$\frac{m}{2}$次，操作取 C。

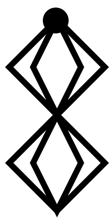


n $\rightarrow$ $\frac{n}{2}$

m $\rightarrow$ $\frac{m}{2}$

$\rightarrow$ 走法數 n ! × m ! × $C^{\frac{m+n}{2}}_{\frac{m}{2}}$ (m.n$\in 2k, k \in N$)

2.起點在末梢：假想先走到中節點($\rightarrow$ n-1)，則上區塊爲奇圖形($\rightarrow$ n-1-1)，那麼走法數就變爲$\frac{n-2}{2}$和$\frac{m}{2}$種。

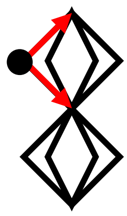


n $\rightarrow$ $\frac{n-2}{2}$

m $\rightarrow$ $\frac{m}{2}$

$\rightarrow$ 走法數 n ! × m ! × $C^{\frac{m+n-2}{2}}_{\frac{m}{2}}$ (m.n$\in 2k, k \in N$)

3.起點在邊緣：同起點在末梢，但上區塊少一條路徑可選擇(n-1)，但又可決定先往上或下。

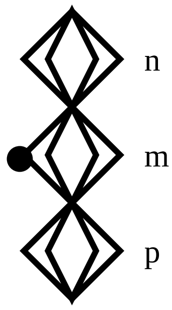


n $\rightarrow$ $\frac{n-2}{2}$種

m $\rightarrow$ $\frac{m}{2}$種

$\rightarrow$ 走法數(n-1) ! × m ! × $C^{\frac{m+n-2}{2}}_{\frac{m}{2}}$ × 2 (m.n$\in 2k, k \in N$)

4.延伸：同理，走法數只與和節點相鄰的上下區塊有關。



$$\rightarrow \text{走法數 } n!\times(m-1)!\times p!\times C_{\frac{n}{2}}^{\frac{m+n-2}{2}}\times C_{\frac{p}{2}}^{\frac{m+p-2}{2}}\times 2$$

觀察上述幾種偶直向圖形，發現走法數和起終點出口路徑數有關，由公式得知：

起點在中間　　：　　起點在末梢

$$n!\times m!\times C_{\frac{m}{2}}^{\frac{m+n}{2}} \quad : \quad n!\times m!\times C_{\frac{m}{2}}^{\frac{m+n-2}{2}}$$

$$=\frac{\frac{m+n}{2}\times\cancel{(\frac{m+n-2}{2})!}}{\frac{n}{2}\times\cancel{(\frac{n-2}{2})!}} \quad : \quad \frac{\cancel{(\frac{m+n-2}{2})!}}{\cancel{(\frac{n-2}{2})!}} \quad = \quad (m+n):n$$

起點在末梢　　：　　起點在邊緣

$$n!\times\cancel{m!}\times\cancel{C_{\frac{m}{2}}^{\frac{m+n-2}{2}}} \quad : \quad (n-1)!\times\cancel{m!}\times\cancel{C_{\frac{m}{2}}^{\frac{m+n-2}{2}}}\times 2 \quad = n:2$$

嘗試數種起終點偶直向圖形後，發現走法數和出口路徑數皆成正比，推論原因：

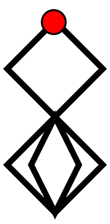


圖 1-1

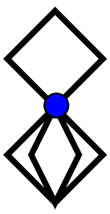


圖 1-2

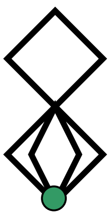
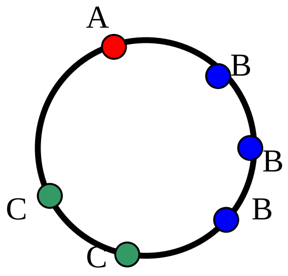


圖 1-3

圖 1-1 的起終點在完成一筆畫的過程中經過 1 次
圖 1-2 的起終點在完成一筆畫的過程中經過 3 次
圖 1-3 的起終點在完成一筆畫的過程中經過 2 次

設圖 1-1 終點爲 A，圖 1-2 終點爲 B，圖 1-3 終點爲 C，偶直向圖形起終點相同，故整條路徑可以拉開，看作一個圓環，其中 A 點經過 1 次，B 點經過 3 次，C 點經過 2 次



圓環上走法數均相同，每個點都可當成起點。

∴走法數=A 經過次數：B 經過次數：C 經過次數=出口數比=1：3：2

故一個最基本的 <u>起點在末梢</u> 公式：

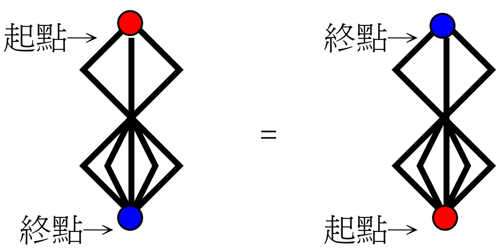
$$n\,!\times m\,!\times C^{\frac{m+n}{2}}_{\frac{m}{2}}\quad (m.n\in 2k, k\in N)$$

若起終點改變則依上述原則推論。

同理，不管直線或平面，只要是偶數點構成的圖形皆有此性質。

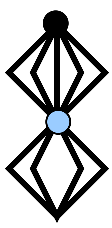
<u>偶數點的此性質是否適用於奇數點？</u>

研究後發現，奇數點無此性質，因爲對於一個圖形來說，最多能有兩個奇數點，其中一個必爲起點，另一個爲終點，起終點互換走法數不變，雖然起點出口路徑數不同，但是走法數卻相同，故奇數不會有此性質。



(三)奇偶直向：

想法同上，上有$\frac{m-1}{2}$取法，下有$\frac{n}{2}$：



m $\rightarrow \frac{m-1}{2}$

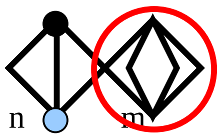
n $\rightarrow \frac{n}{2}$

$\rightarrow$ 走法數 $m! \times n! \times C^{\frac{m+n-1}{2}}_{\frac{m-1}{2}}$

(四)奇偶橫向：

1.偶區塊直放：想法與「節點在邊緣」同。偶區塊少一條選擇，但可選擇上下。

奇　　偶

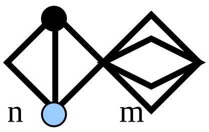


(走完才能回去)

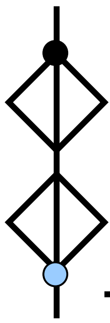
$\rightarrow$ 走法數 $n! \times 2 \times (m-1)!$

2.偶區塊橫放：

奇　　偶



(←想法相同→)



奇 x

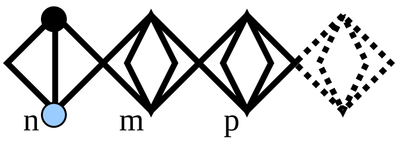
奇 y

$\rightarrow$ 走法數 $n! \times m!$

$\rightarrow$ 走法數 $x! \times y!$

3.偶區塊直放連續：

奇　　偶　　偶　　偶

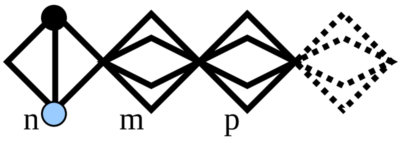


…

$\rightarrow$ 走法數 $n! \times 2 \times (m-1)! \times 2 \times (p-1)! \times \cdots$

4.偶區塊橫放連續：偶區塊部分可看做「偶直向起點在末梢」。

奇　　偶　　偶　　偶



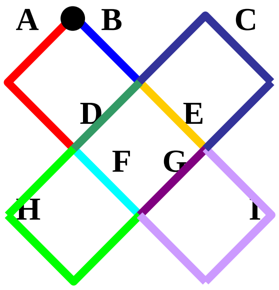
……

$\rightarrow$ 走法數 $n! \times m! \times p! \times \ldots\ldots \times C^{\frac{m+p-2}{2}}_{\frac{m}{2}} \times \ldots\ldots$

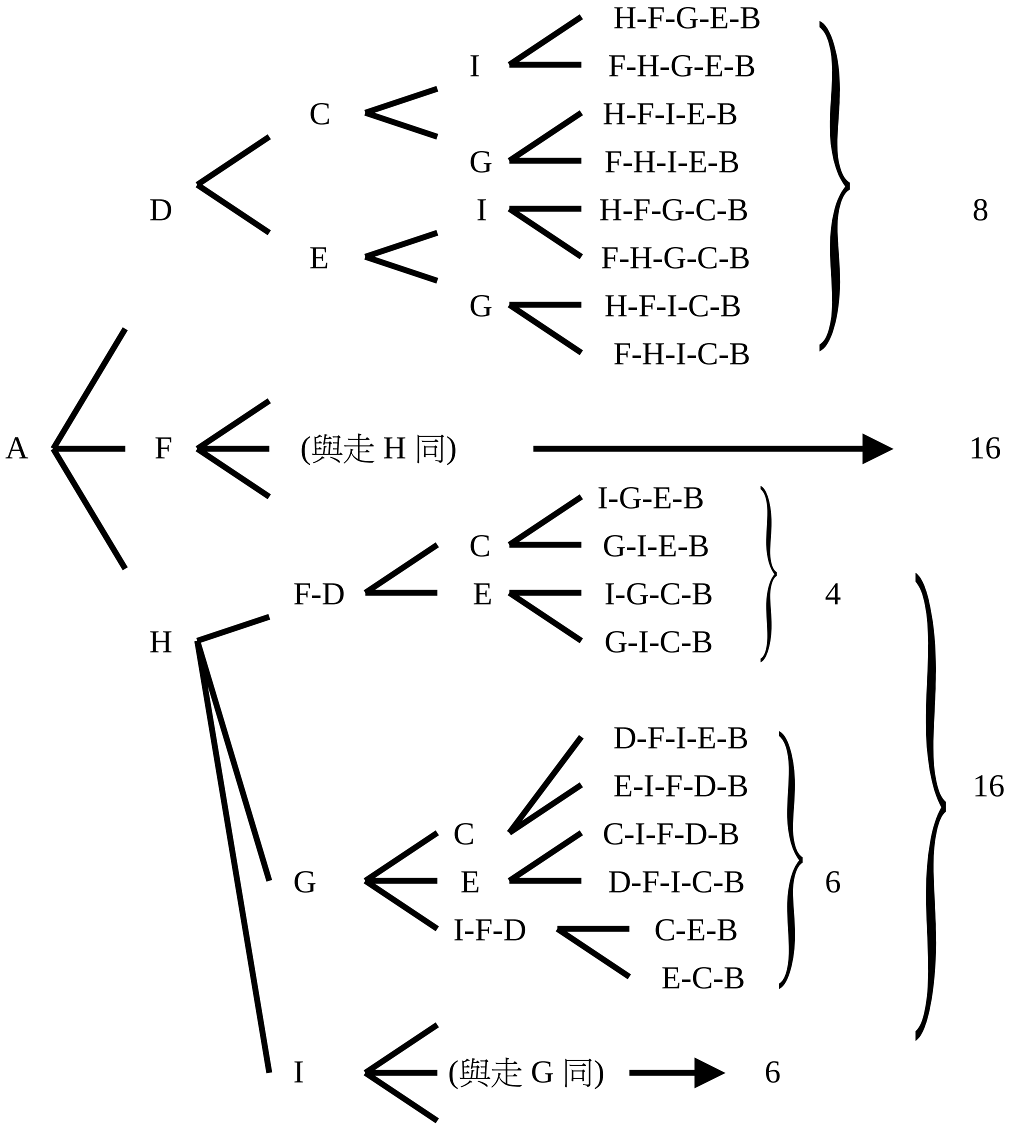
(五).偶平面：

我們發現直向圖形和平面圖形缺乏相關性，故無法由先前公式推導，所以只好把路徑命名，以樹狀圖解。

1.繪製樹狀圖：



(由起點走 A 與走 B 相同，故只考慮一種情形再乘以二。)
(同理由 A 經 F 與 A 經 H 相同，故只要列出一種情形再乘以二。)



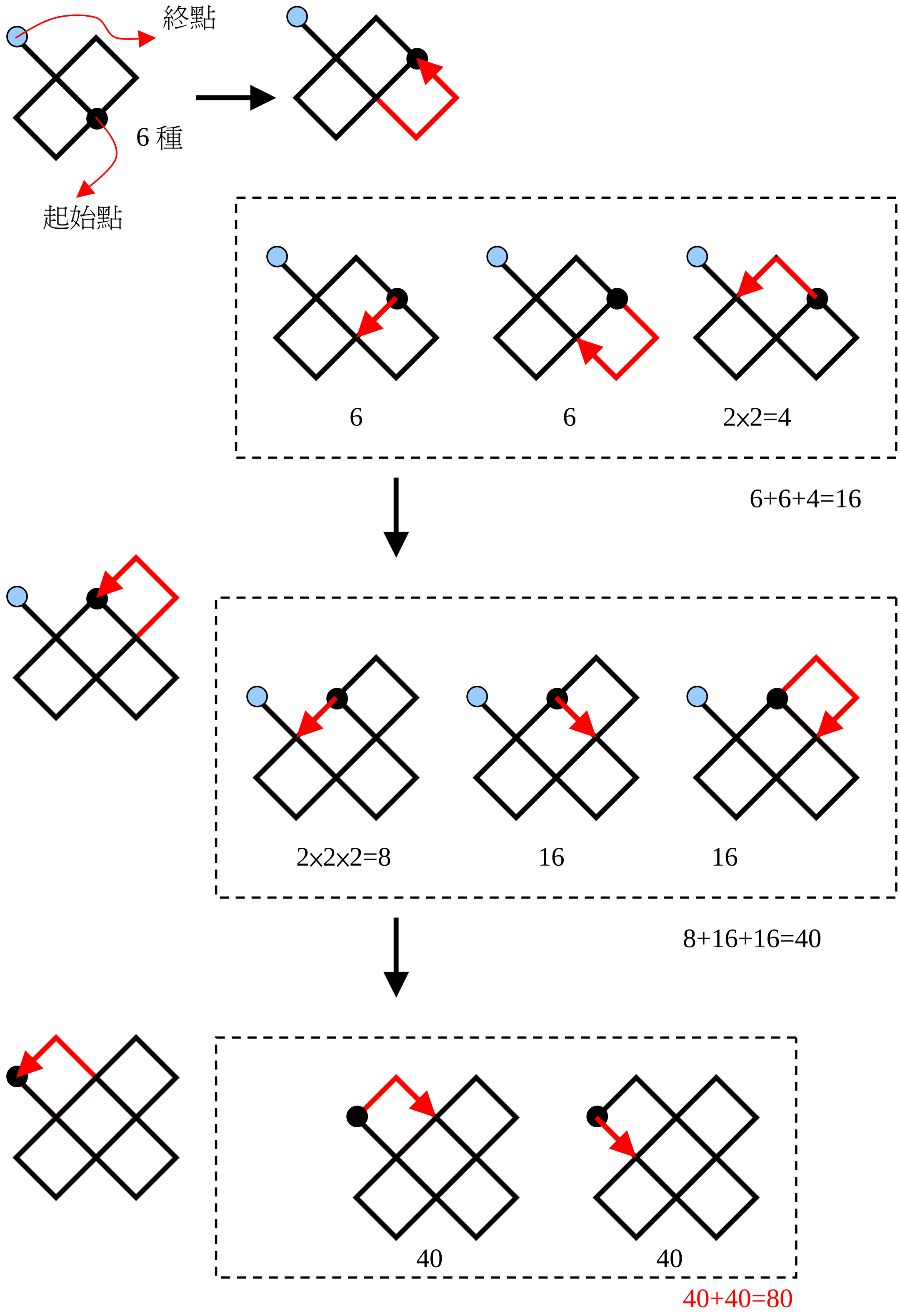
故走法數為(8+16+16)×2=80

畫樹狀圖在計算上不方便，且易出錯，因此我們想了其他方式。

2.由簡入繁：

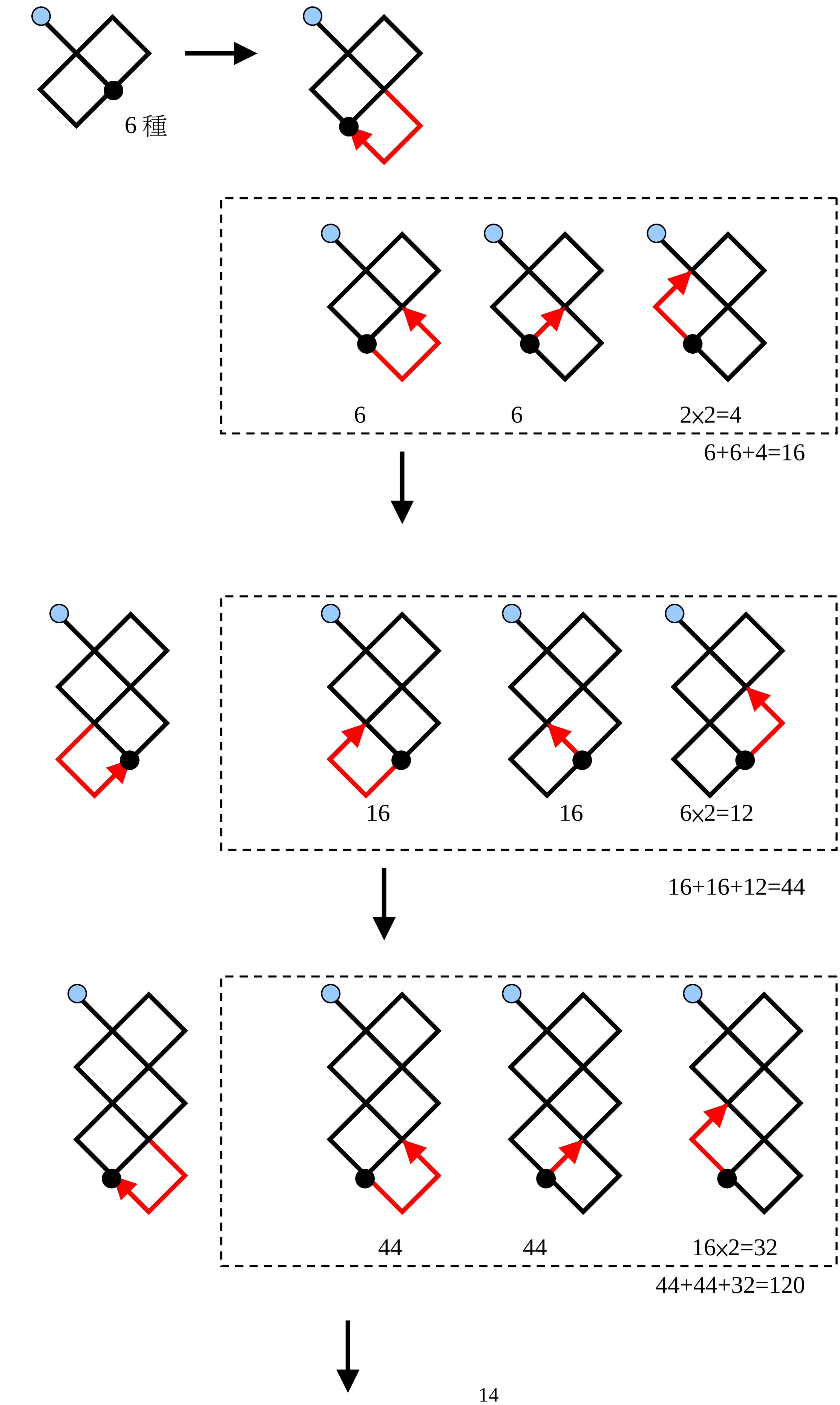
將要計算走法數的平面圖形逐步繪出，一步步計算它的走法數。

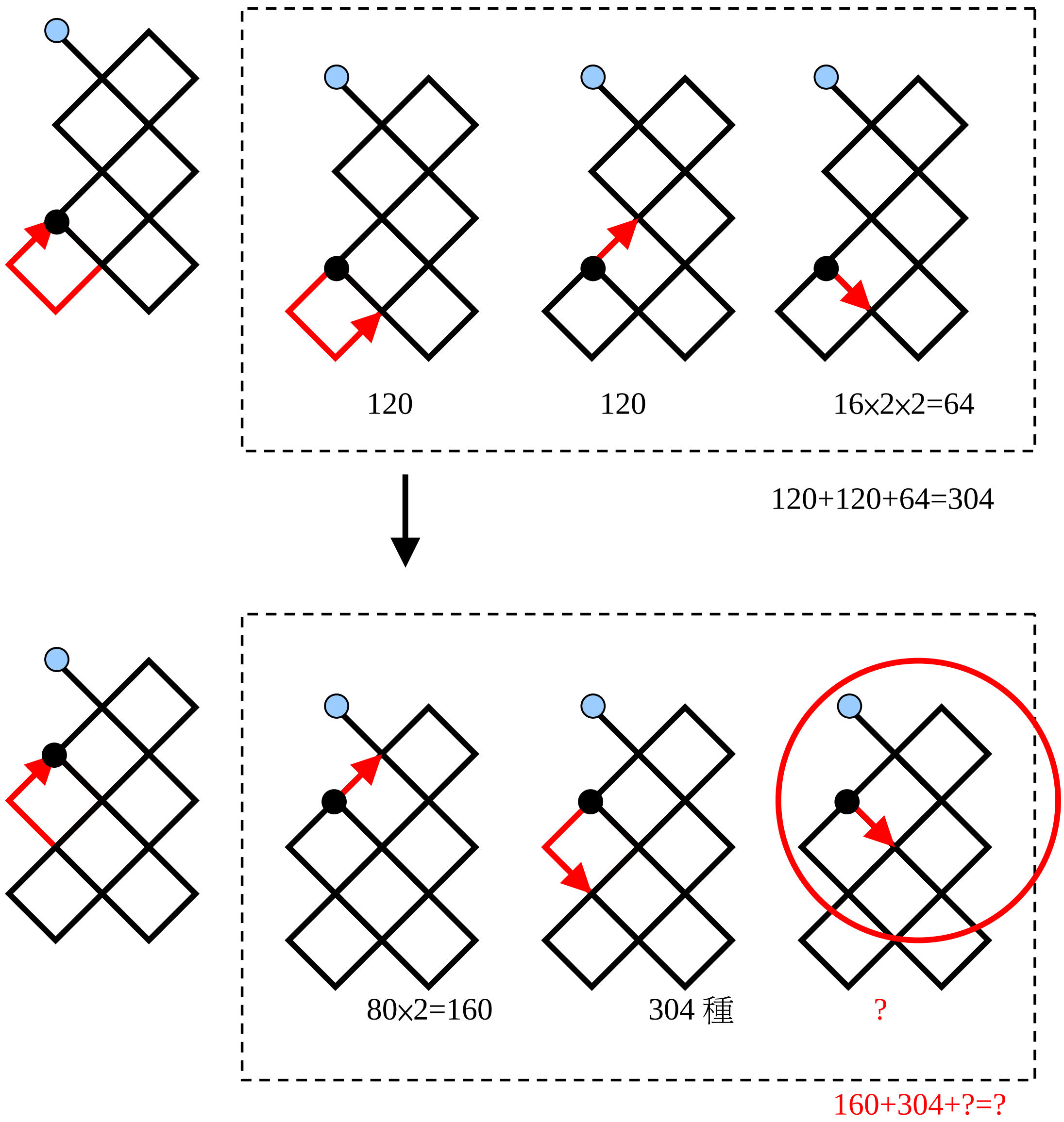
2x2 圖形



這個方法在 2x3 平面時會遇到問題：

2x3 圖形：



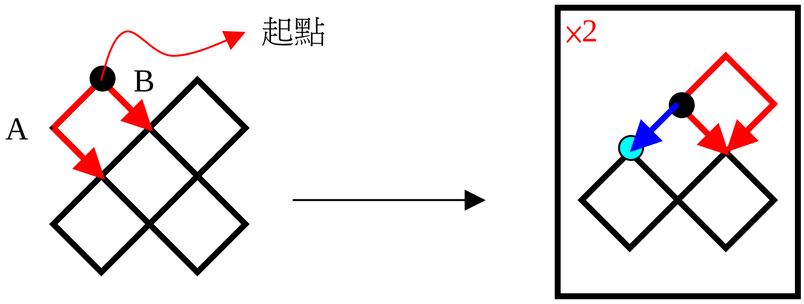


由分析發現此方法依然有問題，缺乏一般性。但在繪圖過程中發現有某種規律存在，故我們又嘗試將走過路徑刪除以簡化圖形的方法。

3.簡化圖形：

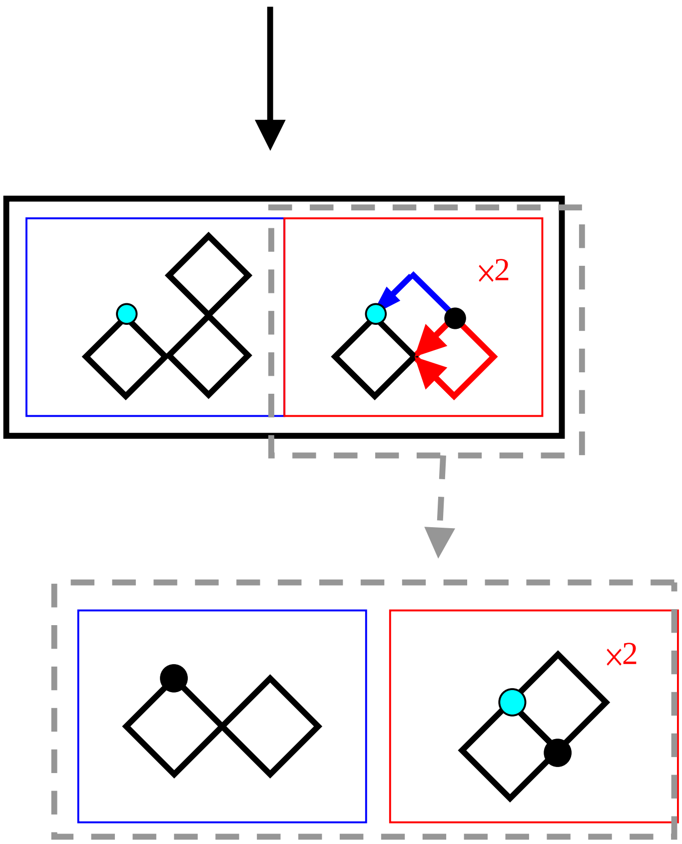
由起點出發，走過路徑消除，逐步算走法數。

(1)2×2 圖形：

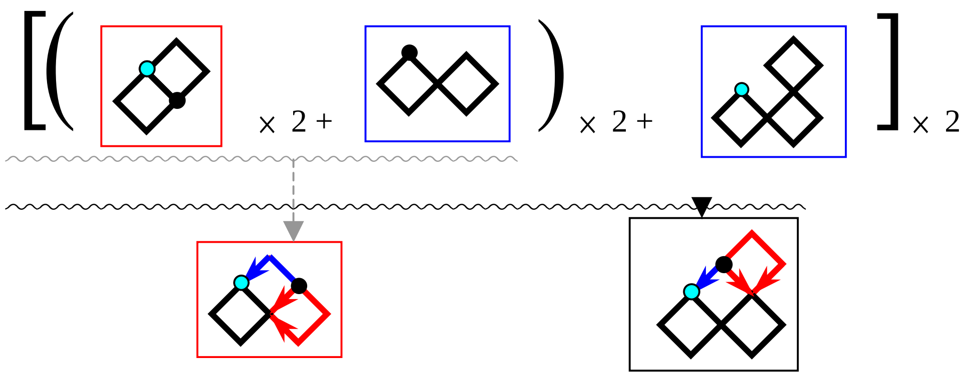


(左圖走藍線爲一種情形，走紅線爲另一種情形，從紅線出發的走法數相同，計算時乘以 2)

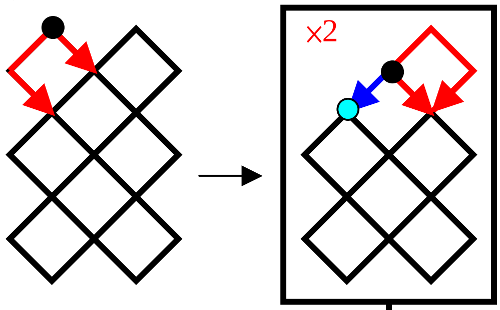
(上圖走 A 或 B 相同，故走法數乘以 2。)



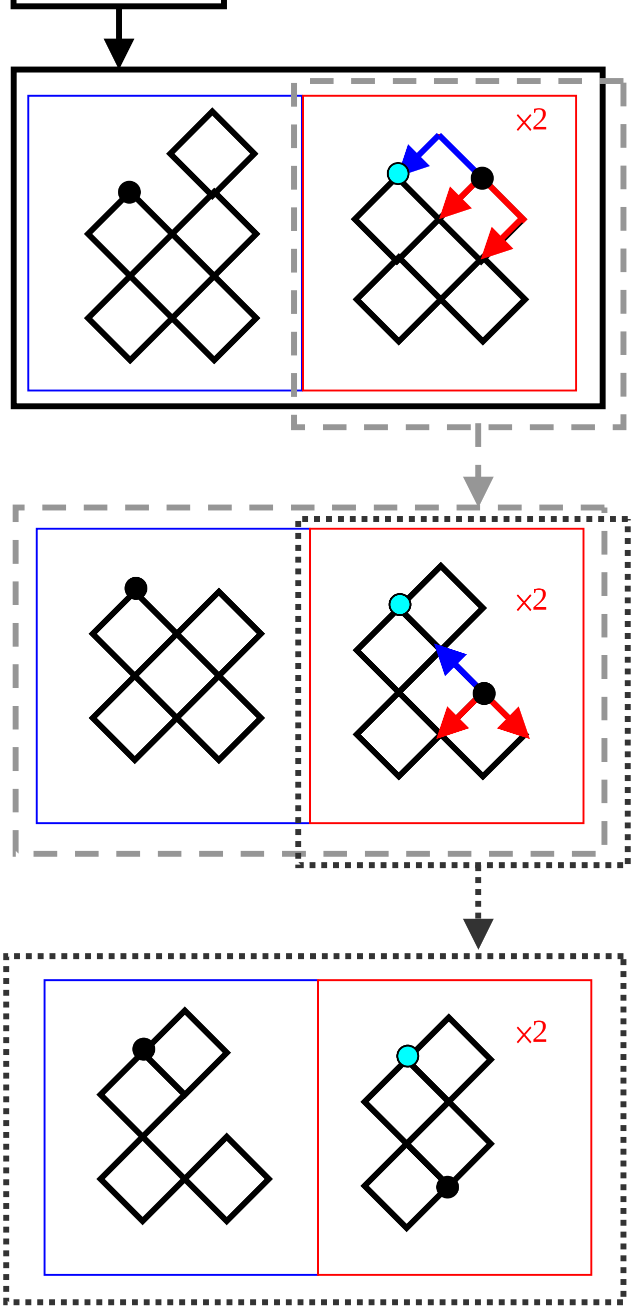
走法數爲



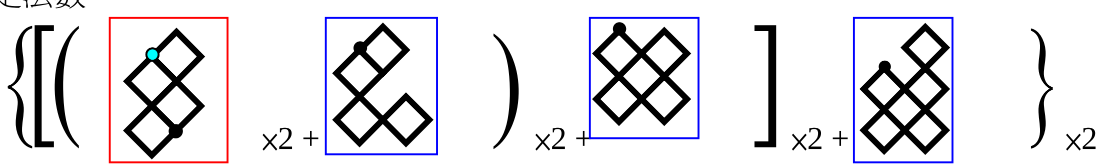
(2)2×3 圖形



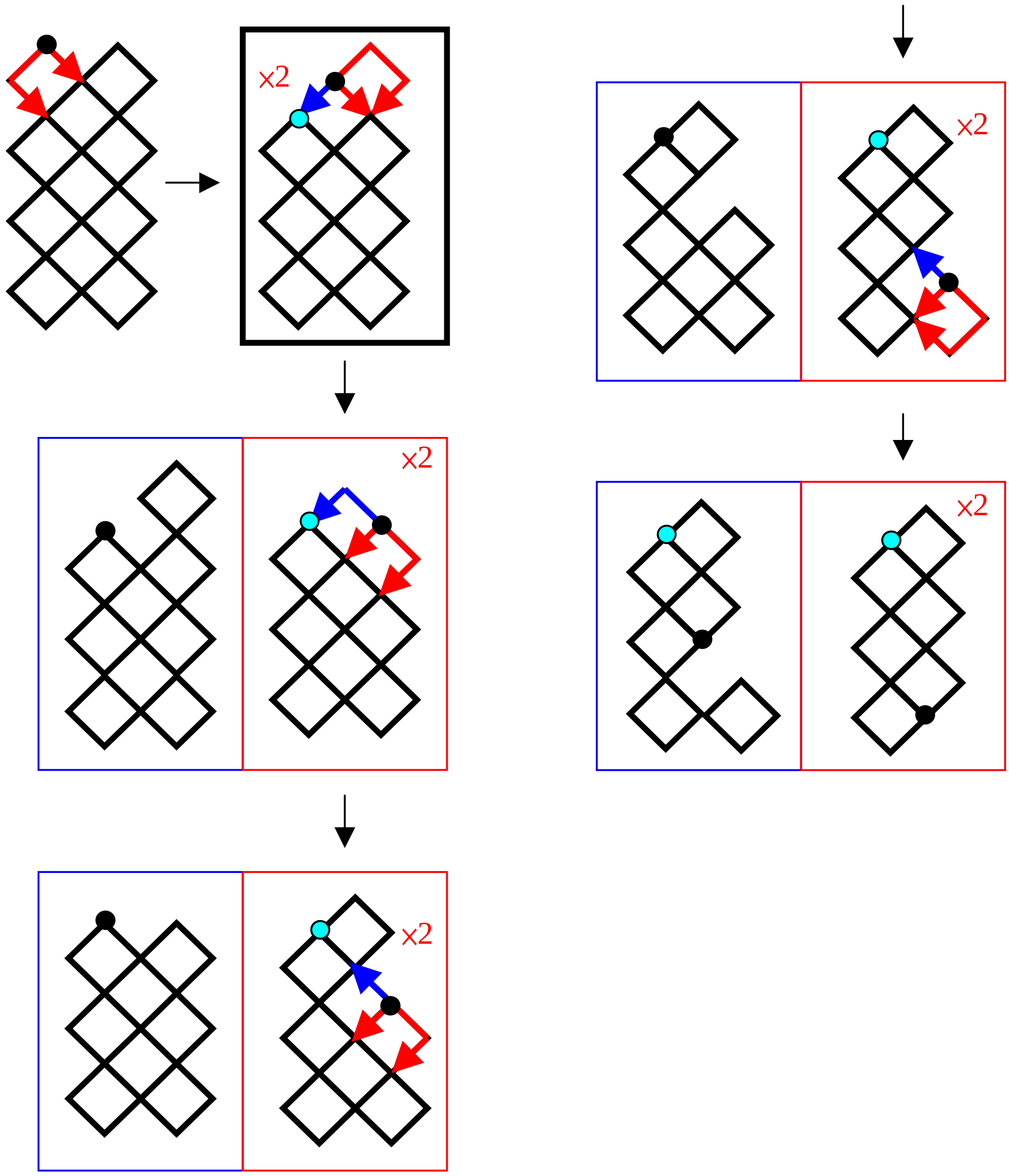
(右圖紅方塊中紅線走法數相同，詳見※註 1。)



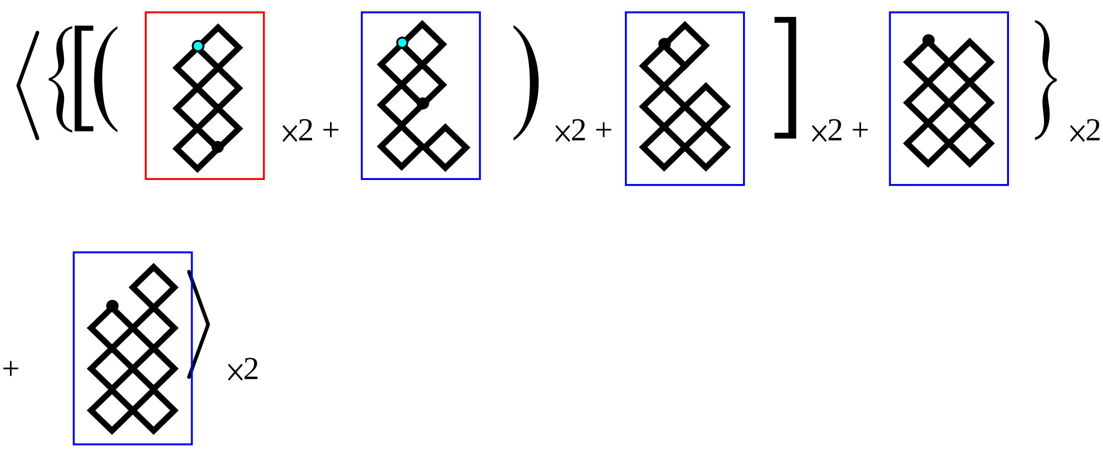
走法數



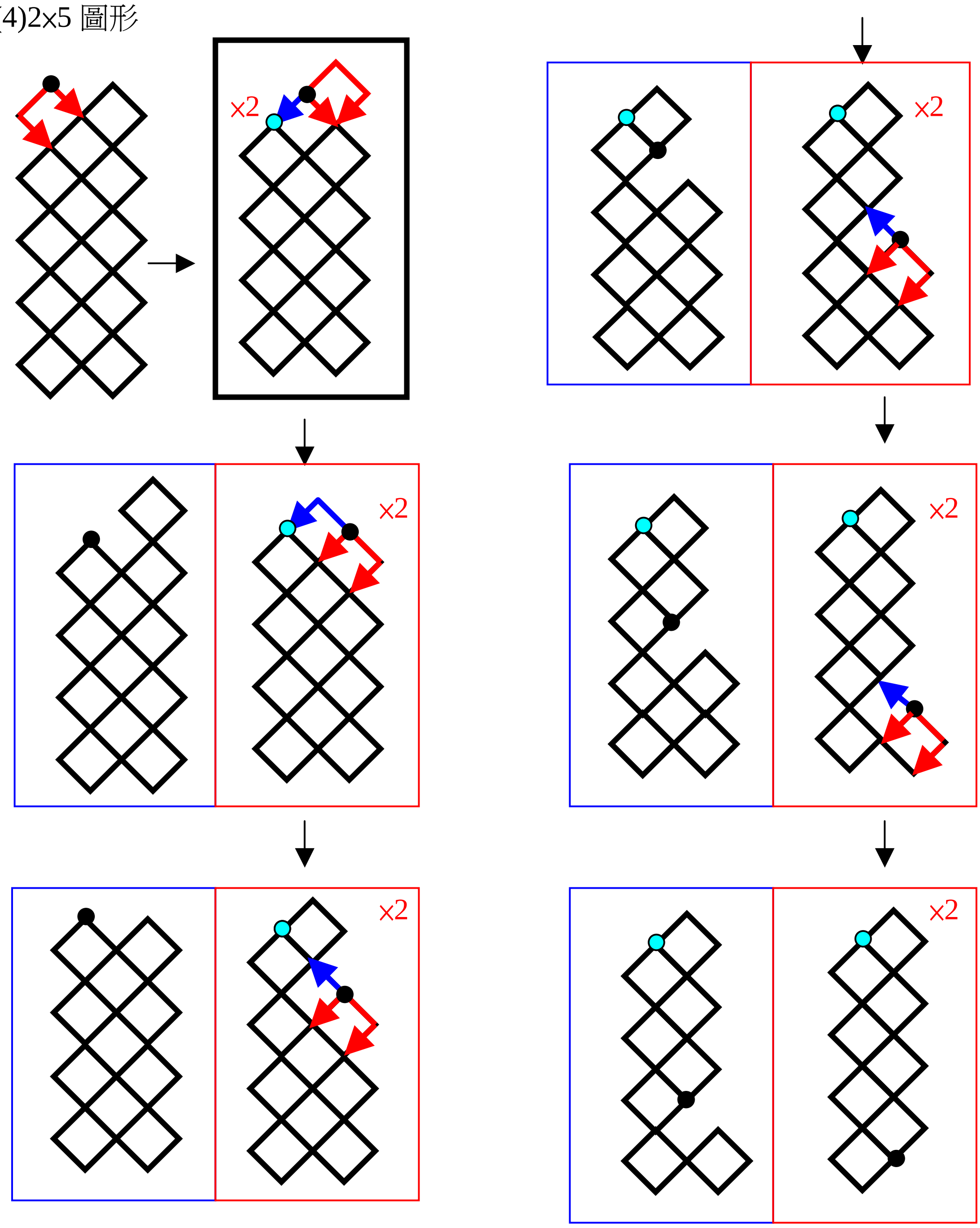
(3)2×4 圖形：



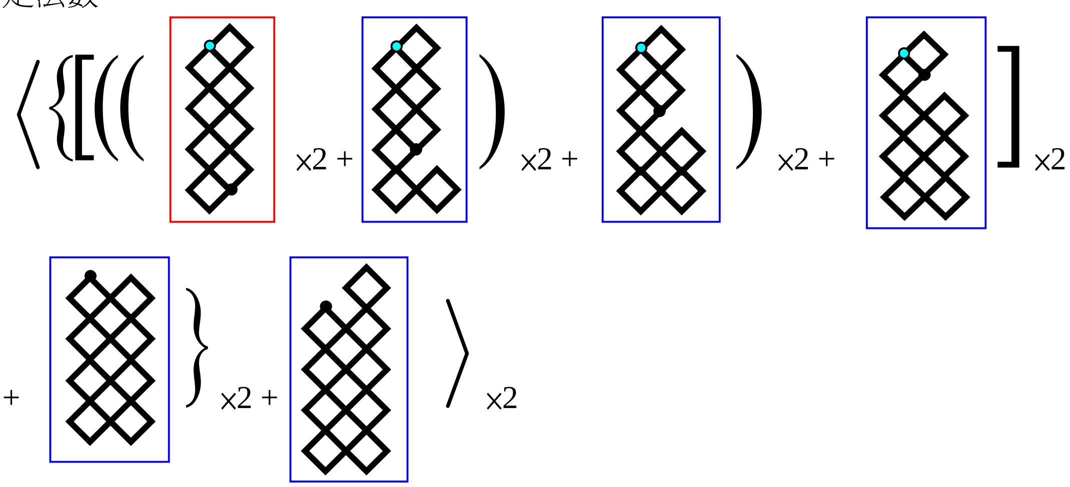
走法數



(4)2×5 圖形

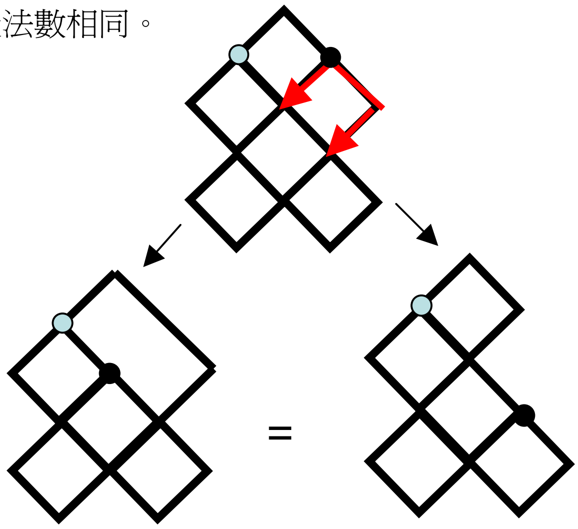


走法數



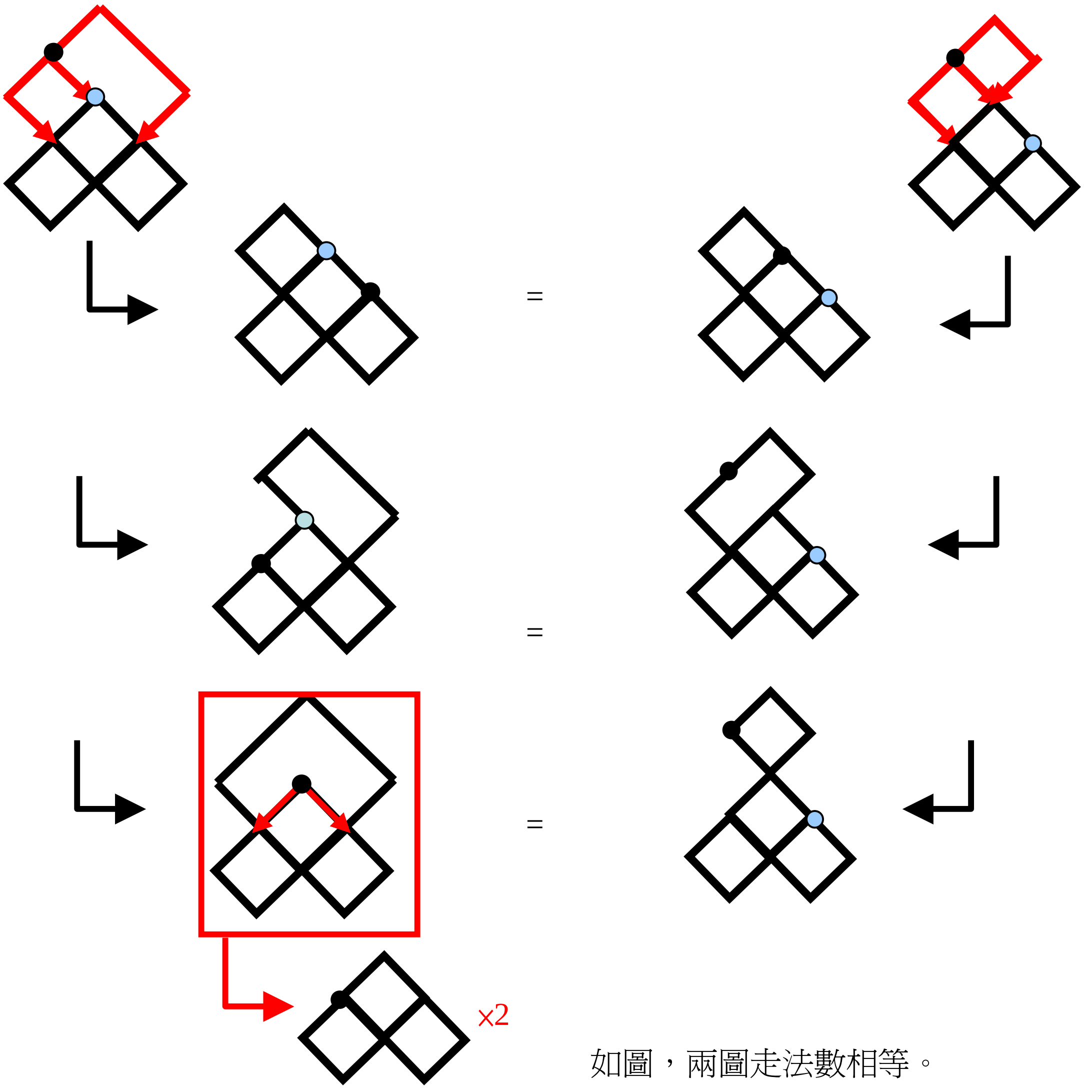
※註 1

計算得知紅線路徑走法數相同。



分析：

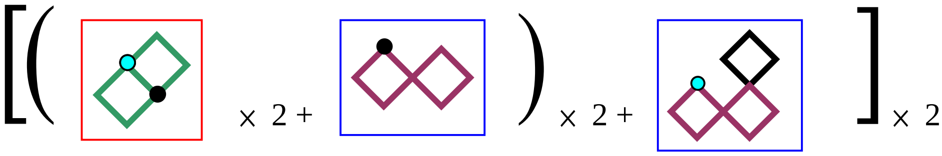
由於起點與終點爲兩個奇數點，起終點互換走法數不變，故先把起終點交換以方便計算。



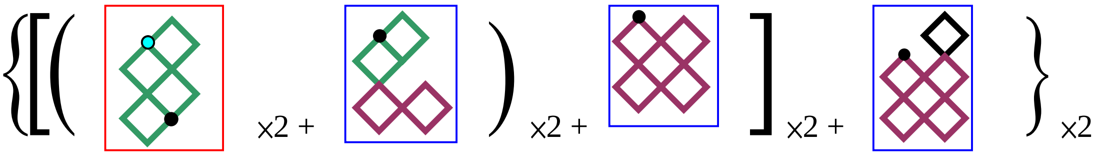
如圖，兩圖走法數相等。

觀察上述平面圖形，發現圖形皆由相似的圖形組合成，我們稱之爲基本型(閃電型)與平面型。如下圖所示：

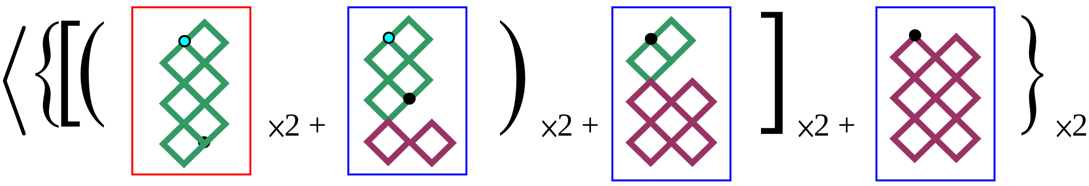
2x2 圖形：

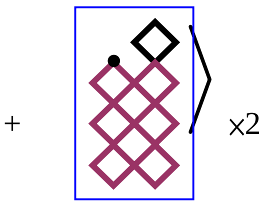


2x3 圖形：

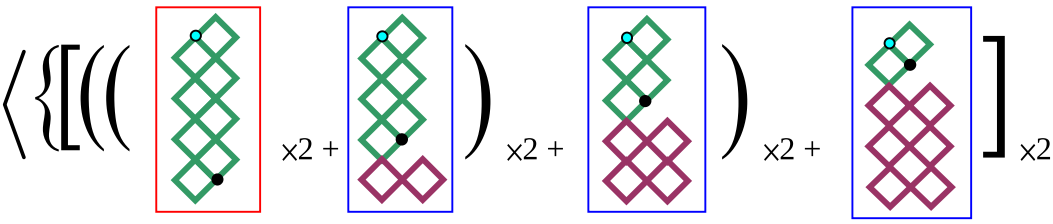


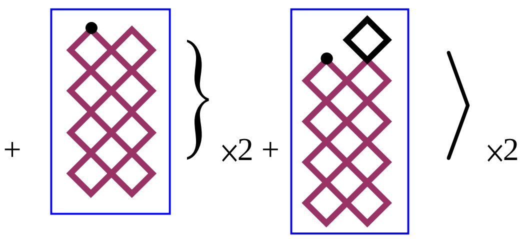
2x4 圖形：





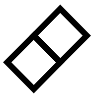
2x5 圖形：



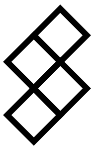


4.綜合以上分析結果整理出平面圖形的公式：

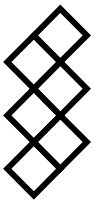
令基本型爲 X，平面型爲 Y。



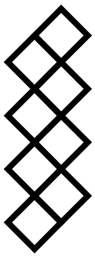
X_1



X_2

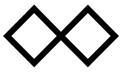


X_3



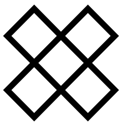
X_4

……



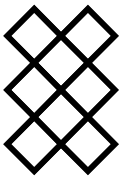
Y_1

(2x1 平面)



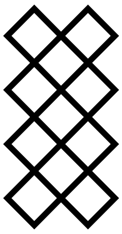
Y_2

(2x2 平面)



Y_3

(2x3 平面)



Y_4

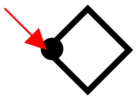
(2x4 平面)

……

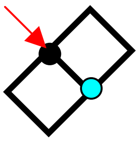
X_n 走法數可以容易導出($X_{2n} = a_n$)，而 Y_n 即是我們正在計算的平面圖形

以下先列出 X_n 的推導過程

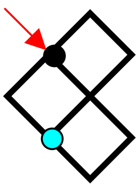
(1)基本型 X_n



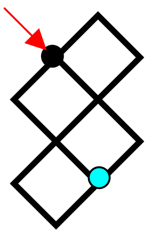
走法數:2 $\rightarrow$ a_1



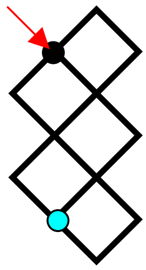
走法數:6 $\rightarrow$ a_2



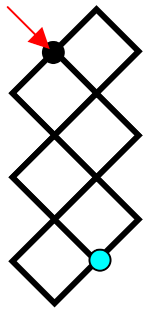
走法數 ：16 = 2 (2+6) $\rightarrow$ a_3



走法數 ：44 = 2 (6+16) $\rightarrow$ a_4



走法數 ：120 = 2 (16+44) ➡ a_5



走法數 ：328 = 2 (44+120) ➡ a_6

※註：由於a_0不影響走法數，我們將a_0視為 1。
由推論可知 $a_{n+1} = 2\,(a_n + a_{n-1})$, n≧1
為求出遞迴關係，我們把式子整理成：

$$a_{n+1} + x\,a_n = (2+x)\,a_n + 2\,a_{n-1}$$

$$=(2+x)(a_n + \frac{2}{2+x}a_{n-1})$$

若$\{a_n\}$為等比數列，則$x = \dfrac{2}{2+x}$

$\Rightarrow\ x^2 + 2x - 2 = 0$

令兩根$x_1 = -1+\sqrt{3}$ ， $x_2 = -1-\sqrt{3}$

$\Rightarrow\ x_1 + x_2 = -2$ ， $x_1 x_2 = -2$

$\Rightarrow\ a_{n+1} = -(x_1 + x_2)\,a_n + (-x_1 x_2)\,a_{n-1}$

$\Rightarrow\ a_{n+1} + x_2\,a_n = -x_1\,(a_n + x_2\,a_{n-1})$

$a_{n+1} + x_1\,a_n = -x_2\,(a_n + x_1\,a_{n-1})$

令$P_{n+1} = a_{n+1} + x_1\,a_n$ ， $Q_{n+1} = a_{n+1} + x_2\,a_n$

$\Rightarrow\ P_{n+1} - Q_{n+1} = (x_1 - x_2)\,a_n$

又$P_{n+1} = -x_2\,P_n$ ， $Q_{n+1} = -x_1\,Q_n$

$\Rightarrow\ P_{n+1} = (-x_2)^n\,P_1$ ， $Q_{n+1} = (-x_1)^n\,Q_1$

$$\Rightarrow\ a_n = \frac{P_{n+1} - Q_{n+1}}{x_1 - x_2} = \frac{(-x_2)^n P_1 - (-x_1)^n Q_1}{x_1 - x_2}$$

$$= \frac{(-x_2)^n(a_1 + x_1 a_0) - (-x_1)^n(a_1 + x_2 a_0)}{x_1 - x_2}$$

將 $x_1=-1+\sqrt{3}$，$x_2=-1-\sqrt{3}$，$a_0=1$，$a_1=2$，$P_1=1+\sqrt{3}$，$Q_1=1-\sqrt{3}$ 代入

$$\Rightarrow \quad a_n=\frac{(1+\sqrt{3})^n(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})^n(1-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \quad a_n=\frac{3+\sqrt{3}}{6}(1+\sqrt{3})^n+\frac{3-\sqrt{3}}{6}(1-\sqrt{3})^n \quad ,n\in N$$

又 $X_{2n}=a_n$，故 X 走法數可由上述公式算。

為使公式整理起來更有規律，我們創造 x_0 、 y_0，因 x_0 、 y_0 不影響走法數，計算時視為 1。

$\boxed{2\times 2}$

$((x_1\,y_0\times 2+x_0\,y_1)\times 2+y_1\times 2)\times 2$

$\boxed{2\times 3}$

$(((x_2\,y_0\times 2+x_1\,y_1)\times 2+x_0\,y_2)\times 2+y_2\times 2)\times 2$

$\boxed{2\times 4}$

$((((x_3\,y_0\times 2+x_2\,y_1)\times 2+x_1\,y_2)\times 2+x_0\,y_3)\times 2+y_3\times 2)\times 2$

$\boxed{2\times 5}$

$(((((x_4\,y_0\times 2+x_3\,y_1)\times 2+x_2\,y_2)\times 2+x_1\,y_3)\times 2+x_0\,y_4)\times 2+y_4\times 2)\times 2$

$\boxed{2\times 6}$

$((((((x_5\,y_0\times 2+x_4\,y_1)\times 2+x_3\,y_2)\times 2+x_2\,y_3)\times 2+x_1\,y_4)\times 2+x_0\,y_5)\times 2+y_5\times 2)\times 2$

$\boxed{2\times n}$

$(((((x_{n-1}\,y_0\times 2+x_{n-2}\,y_1)\times 2+x_{n-3}\,y_2)\times 2+x_{n-4}\,y_3)\times 2+\cdots x_0\,y_{n-1})\times 2+y_{n-1}\times 2)\times 2$

合併同類項，結果如下

$\boxed{2\times 2}$

$8x_1\,y_0+8x_0\,y_1$

$\boxed{2\times 3}$

$16x_2\,y_0+8x_1\,y_1+8x_0\,y_2$

$\boxed{2\times 4}$

$32x_3y_0+16x_2y_1+8x_1y_2+8x_0y_3$

$\boxed{2\times 5}$

$64x_4y_0+32x_3y_1+16x_2y_2+8x_1y_3+8x_0y_4$

$\boxed{2\times n}$

$$\sum_{k=0}^{n-1}2^{k+2}x_ky_{n-1-k}+4y_{n-1}\text{ ，}n\geq 2$$

即爲 $2\times n$ 平面圖形的通式。

陸、討論

由一連串推導的過程中，發現了一些有趣的現象:某些看似類似卻又不一樣的圖，其走法數相同，爲何會有此現象?我們尚未徹底研究出，但經過觀察許多圖形，我們大膽提出假設:對於一個能完成一筆畫的圖形，它的路徑可以移動，且移動時須注意將路徑端點移到出口數相同的點上，如圖 1-1 與 1-2，如此操作其走法數不變(移動後的圖形要仍可一筆畫) ，但是否每個圖形都能如此任意移且走法數都不變？我們發現並非如此，例如下圖 1-3 與 1-4，其中 1-4 的圖是由 1-3 圖路徑 A 的端點由 a 點移到 b 點而成的，但這兩個走法數卻不相同，推翻了我們的先前假設。

圖 1-1

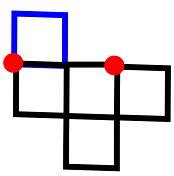


圖 1-2

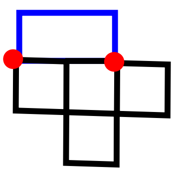


圖 1-3

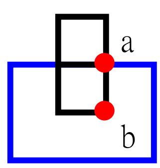
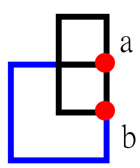


圖 1-4

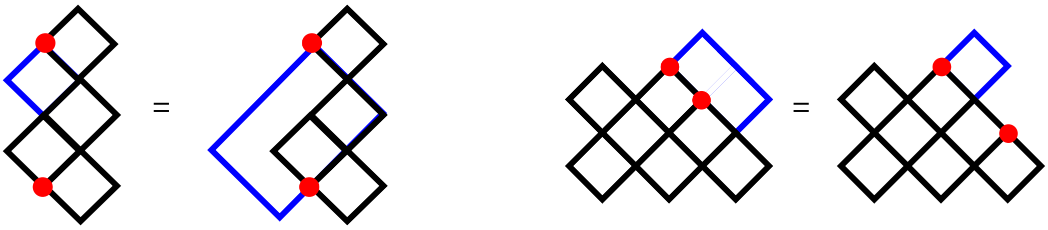


走法數 112 112 12 16

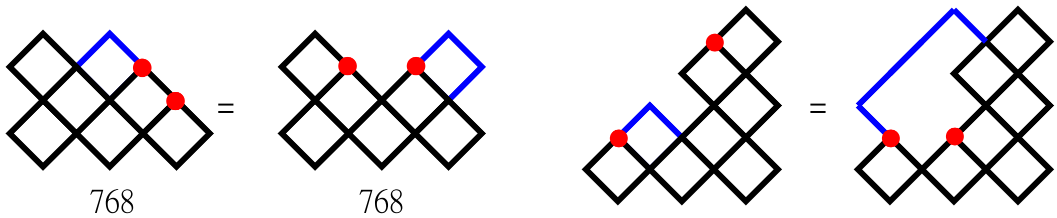
我們又利用解 3x3 平面時觀察嘗試了許多的圖，重新修正對於路徑平移的假設，經由觀察歸納出了兩點：

對於一個平面型且能完成一筆畫的圖形

(1) 若一條路徑的兩端點中，只有一點爲起點或終點，則平移時須先將起/終點的一端固定，另一端則可移動至另一個起終點。

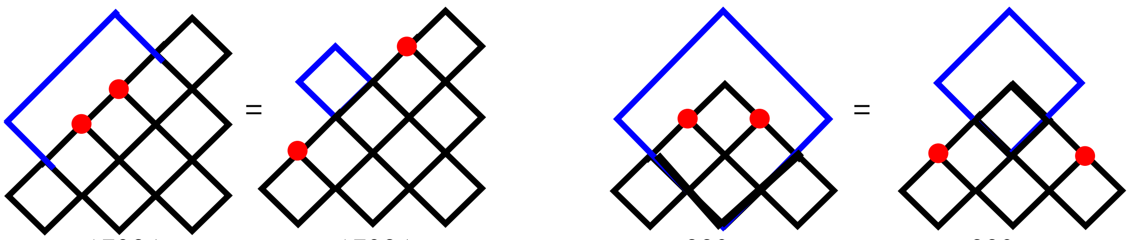


120　120　2144　2144

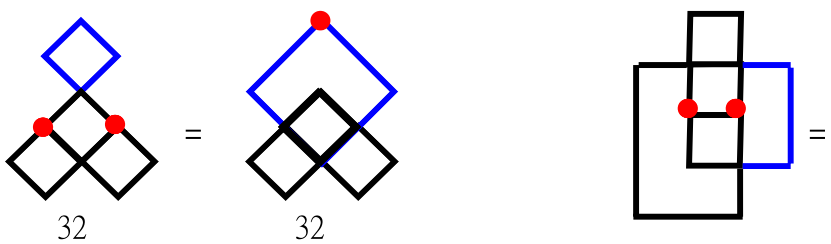


768　768　2304　2304

(2) 若一條路徑的兩端點皆不爲起點或終點，則平移時須兩端一起移動至原來的起終點。(如下附圖)



17984　17984　880　880



32　32　120　120

若照上述兩點平移路徑，則其平移前後圖形走法數皆不變，目前所推導的圖形皆符合此性質，不過尚未研究出一套完整的證明，有待後人繼續深入研究。

柒、結論

(一)奇直向通式

$$m! \times n! \times p! \times q! \ldots\ldots \times C^{\frac{m+n-2}{2}}_{\frac{m-1}{2}} \times C^{\frac{n+p-2}{2}}_{\frac{n-1}{2}} \times C^{\frac{p+q-2}{2}}_{\frac{p-1}{2}} \times \ldots\ldots$$

$(m.n.p.q.\ldots\ldots \in 2k-1, k \in N)$

(二) 偶直向通式

基本的 起點在末梢 圖形公式爲：

$$n! \times m! \times C^{\frac{m+n}{2}}_{\frac{m}{2}} \quad (m.n \in 2k, k \in N)$$

其餘圖形再利用「起終點出口路徑數與走法數成正比」的原則推論即可。

(三)2xN 平面通式

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+2} x_k y_{n-1-k} + 4y_{n-1} \text{，} n \geq 2$$

《附表：各圖形的走法數》

圖形	走法數	圖形	走法數	圖形(基本型)	走法數	圖形(平面型)	走法數
a_1	2	a_{11}	49920	x_1	6	y_1	4
a_2	6	a_{12}	136384	x_2	44	y_2	80
a_3	16	a_{13}	372608	x_3	328	y_3	1536
a_4	44	a_{14}	1017984	x_4	2448	y_4	29440
a_5	120	a_{15}	2781184	x_5	18272	y_5	564224
a_6	328	a_{16}	7598336	x_6	136384	y_6	10813440
a_7	896	a_{17}	20759040	x_7	1017984	y_7	……
a_8	2448	a_{18}	56714752	x_8	7598336	y_8	……
a_9	6688	a_{19}	154947584	x_9	17232640	y_9	……
a_{10}	18272	a_{20}	423324672	x_{10}	49661952	y_{10}	……

捌、未來展望

對於一筆畫的圖形，我們研究出直線、2xN 以及 3x3 的圖形(由於工程過於浩大，且尚未找出規律，所以沒有列出，走法數 264320，有興趣者可自行推導。)還有許多更加複雜的圖形待解，例：偶平面的無限延伸，奇偶平面，等等……，這些應該都可以解，且一定相當的有趣，希望最後能把 N ×N 平面走法數規律或公式導出，最好能做到隨意給一個網狀平面圖形(能一筆畫完成) ，即可推出走法數，若平面圖形推導完後，也許可嘗試更有挑戰性的立體圖。另外文中提到的遞迴關係基本形？像這類有規律的圖形在一筆畫中不勝枚舉，各位在往後遇到相似的一系列圖形時，不妨想想看他們的一筆畫走法數間是否存在規律，如果把他們做有系統的研究及整理，往後遇到複雜的圖形時，搞不好只要靠著眾多簡單的基本形，就能迎刃而解。這項工作也是我們在研究 3x3 圖形時努力的目標，可惜時間有限，還沒找出一套漂亮的規律，不過相信後人一定可以把一筆畫的精神發揚光大。此外，上述圖形平移走法數不變的概念，尚缺乏完整證明，有興趣者不妨深入研究，使此平移理論更完整，以利於後人解一筆畫圖形時，能快速而準確的題。也許在尚未解出其公式或規律前，會先在一連串推導的過程中突然領會到一筆畫的精神及其奧妙之所在。

玖、參考資料

一、徐力行 / 沒有數字的數學 / 第一版第一次印行 / 台北市 / 天下文化 / 213 頁 / 2003 年發行

二、吳振奎 / 斐波那契數列 / 初版 / 台北市 / 九章出版 / 115 頁 / 1993

三、九章出版社編輯部 / 組合數學—算法與分析 / 初版 / 台北市 / 九章初版/ 101 頁 / 1989

四、費氏數列
http://hk.geocities.com/mathsworld2001/themes/fi.htm

五、漫談費氏數列
http://www.kshs.kh.edu.tw/teacher/allteachers/math/zhang_ben_yuan/

評　語

040416 高中組數學科 最佳(鄉土)教材獎

迷宮的十字路口—一筆畫探密

1.以「被轟炸的心靈」作為研究設備、器材並不妥當。

2.整個作品說明書看來就像毫無組織的草稿紙，作品有待加強思路上的整理。

3. 研究題材具有多方面深入研究之可能。