

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040415

國立武陵高級中學

指導老師姓名

陳銘欽

作者姓名

楊淵堡

徐豐國

陳勁達

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

科 別：數學科

組 別：高中組

作品名稱：尋根之旅

關 鍵 詞：高斯平面、複數函數

編 號：

尋根之旅

壹、研究動機：

函數圖形是以笛卡兒座標系表示，如 $f(x) = x^2$ 。圖中可得 $f(x)$ 與 x 的關係。如 $x=0$ 時 $f(x)=0$ 、 $x=1$ 時 $f(x)=1$...等，它們在座標上都有對應點表示 $(x, f(x))$ 的關係。若 $f(x) = -1$ 則 x 為何？可算出 $x = \pm i$ 。但如何表示呢（圖 I-1）？

貳、研究目的：

繪製函數在笛卡兒—高斯座標系上之圖形，將其定義域在高斯平面上的圖形深入探討，釐清各函數關係，研究其特性。

參、研究過程：

若在垂直 xy 平面方向加一條 x 的虛軸，使座標在 $x \in C$ 時有 $(x, f(x))$ 的對應點，問題便解決了（圖 I-2）！而對應點之座標為 $(\text{Re}(x), f(x), \text{Im}(x))$

經觀察，座標系中 xz 平面為一高斯平面，再參考雙變數函數以 $z = f(x, y)$ 方法呈現後，將座標修正為

$$(\text{Re}(x), \text{Im}(x), f(x))$$

若以極座標表示，則座標可寫成：

$$(|x|, \text{Arg}(x), f(x))，柱座標$$

因這笛卡兒座標系中含有一高斯平面，故稱之為笛卡兒—高斯座標系(以下簡稱笛—高座標)，但此座標有一缺陷：無法呈現 $f(x) \notin R$ 之情形。因為若以幾何的方式呈現複數函數，需四維座標，但無法在三維世界中表示。由於希望將所有與給定 $f(x)$ 對應之 x 表示（而非將所有與給定之 x 對應 $f(x)$ 表示，例如表示出 $f(x) = x^2$ 中 $f(x) = -1$ 、 $f(x) = -2$...對應的 x （函數等於某值時的根），而非表示 $x = 1+i$ 、 $x = 1+2i$...對應之 $f(x)$ ），故犧牲 $f(x)$ 虛部的維度而限制其為實數。若有一變數 x 使得 $f(x) \notin R$ ，則該 x 不在函數的定義域內（在實數函數中的類似地有：設 $f(x) = \sqrt{x+3}$ ，則 xy 平面無法顯示 $f(-4)$ 的對應點， $x = -4$ 也不在該函數定義域中）。由於常以 Z 來表示複數，故在這邊給座標下的定義如下：

$$(\text{Re}(Z), \text{Im}(Z), f(Z)) \text{ 直角座標} \quad \text{及} \quad (|Z|, \text{Arg}(Z), f(Z)) \text{ 柱座標}$$

$$\text{其中 } Z \in C, f(Z) \in R$$

照這樣定義後， xy 平面在此座標系中等價於高斯平面。

針對不同的函數討論時，將 Z 以 $a+bi$ 代入， $a, b \in R$ ，由於限制 $f(Z) \in R$ ，故代入後可得下列聯立式：

$$\begin{cases} f(Z) = \operatorname{Re}(f(Z)) \\ 0 = \operatorname{Im}(f(Z)) \end{cases}$$

由於 a, b 分別為 $\operatorname{Re}(Z), \operatorname{Im}(Z)$ ，故可令 $R(a, b) = \operatorname{Re}(f(Z))$ 及 $D(a, b) = \operatorname{Im}(f(Z))$ 。由其在 xyz 座標系中的定義，令 $a = x, b = y, f(Z) = z$ ，便可得出笛一高座標與 xyz 座標系的關係。將 $f(Z)$ 之圖形在 xyz 座標系中寫出：

$$\begin{cases} z = R(x, y) \\ 0 = D(x, y) \end{cases}, \text{ } D \text{ 爲定義域(domain)之意, } R \text{ 爲定義域(range)之意}$$

單看其第二式 $D(x, y) = 0$ ，爲一垂直 xy 平面之柱面方程式，而其與 xy 平面之交線在笛一高座標中即爲 $f(Z)$ 之定義域（因 xy 平面在此座標系中等價於高斯平面）。因此若將其參數式代回第一式，可求出 $f(Z)$ 的圖形在 xyz 座標系中之參數式。在往後的研究中，會以此法將笛一高座標轉換成 xyz 座標系再研究。

接著我們將討論不同的函數：

一、多項函數：

(一) 若 $f(x)$ 爲實係數多項函數，則我們對其原來實變數的圖形進行分類，再將分類後導出的通式中變數 x 換爲 $Z = a + bi$ 代入，即可依上述之步驟對 $f(Z)$ 之圖形進行探討。分類過程如下

- 1、依 $f(x)$ 之導函數 $f'(x)$ 爲之根來出步分類(如實根、虛根、重根個數)。
- 2、求出 $f(Z)$ 之二階導函數，並與導函數聯合運用求出曲線之頂點和反曲點。
- 3、由導函數積分得原函數之通式，並試寫出較美觀之標準式。
- 4、分類完成後，將原實變數 x 以 $a + bi$ 代入，求出上述聯立式並轉換成 xyz 座標系。
- 5、求出其在 xyz 座標系的參數式。

<二次實係數多項函數>

通式爲： $f(x) = r(x - \alpha)^2 + c$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = r((x - \alpha)^2 - y^2) + c \\ 0 = 2(x - \alpha)y \end{cases}$$

該函數之定義域在高斯平面上的圖形爲兩相互垂直的直線，而在 xy 平面上之參數式爲

$$(t + \alpha, 0) \cup (\alpha, s), \quad t, s \in R$$

代入後求得其空間參數式： $(t + \alpha, 0, rt^2 + c) \cup (\alpha, s, -rs^2 + c), \quad t, s \in R$

<三次實係數多項函數>

推演後，據其導函數的根分成：

PR.3.1 兩相異實根 PR.3.2 兩重實根 PR.3.3 一對共軛虛根 三種形式

限於篇幅，我們分類僅列出結果：

PR.3.1 兩相異實根

$$\text{設此兩根爲 } \alpha, \beta \Rightarrow f(x) = r \left(\left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^3 - 3 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 \left(x - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \right) + c$$

PR.3.2 兩重實根

$$\text{設其根爲 } \alpha \Rightarrow f(x) = r \left((x - \alpha)^3 - 3(x - \alpha) \right) + c$$

PR.3.3 一對共軛虛根

$$\text{設該對共軛虛根爲 } A \pm Bi \Rightarrow f(x) = r \left((x - A)^3 + 3B^2(x - A) \right) + c$$

現將其放入笛—高座標系中研究。(限於篇幅，以下僅列出結果)

PR.3.1

$$\left(t + \frac{\alpha + \beta}{2}, 0, r \left(t^3 - 3 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 t \right) + c \right)$$

and

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2} \pm \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cosh \theta, \sqrt{3} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \sinh \theta, \mp 2r \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^3 \cosh 3\theta + c \right), t, \theta \in R$$

PR.3.2 :

$$(t + \alpha, 0, rt^3 + c) \cup (s + \alpha, \pm \sqrt{3}s, -8rs^3 + c) \quad t, s \in R$$

PR.3.3 :

$$(t + A, 0, r(t^3 + 3B^2t) + c) \cup (A + B \sinh \theta, \pm \sqrt{3}B \cosh \theta, -2rB^3 \sinh 3\theta + c) \quad t, \theta \in R$$

(二) 若 $f(Z)$ 爲複係數多項函數時之情形，將分爲以下步驟：

1. 複係數多項函數之通式爲

$$f(Z) = \sum_{j=1}^n a_j Z^j, \quad a_j \in C, \quad j, n \in N, \quad \text{故令：}$$

$$\operatorname{Re}(a_n) = A_R, \operatorname{Im}(a_n) = A_I \dots \dots \text{(以此類推)。}$$

2. 將 $Z = a + bi$ 代入，換回 xyz 座標系得聯立式：

$$\begin{cases} z = R(x, y) \\ 0 = D(x, y) \end{cases}$$

而此聯立式之幾何意義與原實係數多項函數時一樣，故可求出其定義域、參數式等。

<一次複係數多項函數>

設 $f(x) = (A_R + A_I i)x + (B_R + B_I i)$, $A_R, A_I \neq 0$, 聯立式 :

$$\begin{cases} z = A_R x - A_I y + B_R \\ 0 = A_I x + A_R y + B_I \end{cases}$$

由第二式知, 定義域之圖形為一直線 $A_I x + A_R y + B_I = 0$ 。現寫出其空間參數式 :

$$(A_R t, A_I(t - A_R B_I), A_R^2 t - A_I^2 t + A_R A_I^2 B_I + B_R) , t \in R$$

<二次複係數多項函數>

設 $f(Z) = (A_R + A_I i)(a + bi)^2 + (B_R + B_I i)(a + bi) + (C_R + C_I i)$, $A_R^2 + A_I^2 \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = A_R x^2 - A_R y^2 - 2A_I xy + B_R x - B_I y + C_R \\ 0 = A_I x^2 + 2A_R xy - A_I y^2 + B_R y + B_I x + C_I \end{cases}$$

將座標系以 z 軸為軸旋轉將座標軸旋轉 Φ 角 ($\cot 2\Phi = \frac{A_I}{A_R}$, 右手系) 後

$$\begin{cases} z = -2Ax'y' + Ex' - Dy' + G \\ Ax'^2 - Ay'^2 + Dx' + Ey' + F = 0 \end{cases} \quad (\text{座標系 } s')$$

其中 $A = \begin{cases} \sqrt{A_R^2 + A_I^2} , A_R > 0 \\ A_I , A_R = 0 \\ -\sqrt{A_R^2 + A_I^2} , A_R < 0 \end{cases}$, $D = B_I \cos \Phi + B_R \sin \Phi$, $E = B_R \cos \Phi - B_I \sin \Phi$, $F = C_I$ 。

本節接下來的圖形方程式皆為座標系 s'

將其第二式配方得 :

$$\left(x' + \frac{D}{2A}\right)^2 - \left(y' - \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 - E^2 - 4AF}{4A^2}$$

令 $X_0 = -\frac{D}{2A}$, $Y_0 = \frac{E}{2A}$, $\Delta = \frac{D^2 - E^2 - 4AF}{4A^2}$ 則可分為 :

1. $\Delta > 0$ $(X_0 \pm \sqrt{\Delta} \cosh \theta, Y_0 - \sqrt{\Delta} \sinh \theta, A\Delta \sinh 2\theta + 2AX_0 Y_0 + G) \theta \in R$
2. $\Delta = 0$ $(t + X_0, \pm t + Y_0, \mp 2At^2 + 2AX_0 Y_0 + G) t \in R$
3. $\Delta < 0$ $(X_0 + \sqrt{-\Delta} \sinh \theta, Y_0 \pm \sqrt{-\Delta} \cosh \theta, A\Delta \sinh \theta + 2AX_0 Y_0 + G) \theta \in R$

<三次複係數多項函數>

$$\text{設 } f(x) = (A_R + A_I i)x^3 + (B_R + B_I i)x^2 + (C_R + C_I i)x + (D_R + D_I i)$$

由於聯立式過於冗長，故不列出，但若將其定義域圖形旋轉平移後可得其標準式

$$3xy^2 + ey = x^3 + dx + f$$

接著證明其有漸近線：

令漸近線為 $y = mx + k$ ，得方程組

$$\begin{cases} (3m^2 - 1)x^3 + 6mkx^2 + (3k^2 + em - d)x + (ek - f) = 0 \\ y = mx + k \end{cases}$$

若其有漸近線，則該方程組在 $x \rightarrow \infty$ 時視為有解，代入並同除 x^3 得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ((3m^2 - 1) + 6mkx^{-1} + (3k^2 + em - d)x^{-2} + (ek - f)x^{-3}) = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

1. $m = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x - \sqrt{3}y = 0$

2. $m = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x + \sqrt{3}y = 0$

3. 由原式解 y 得 $y = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - 12(x^3 + dx + f)}}{6x}$ 故 $x = 0$ 為曲線之漸近線，則這三條漸近線皆過原點。

接著將列出圖形與 def 之間的關係

1. $d = e = f = 0$ 圖形為交於原點之三直線。
2. $d > 0, e = f = 0 \vee f = 0, \frac{|e|}{d} = -\sqrt{3}$ 圖形為一雙曲線及一通過其貫軸的直線。
3. $d < 0, e = f = 0 \vee f = 0, \frac{|e|}{d} = \sqrt{3}$ 圖形為一雙曲線及一通過其共軛軸的直線。
4. $\frac{|e|}{d} \neq \sqrt{3}, f = +or - \frac{\sqrt{6}}{9} (d\sqrt{\sqrt{d^2 + e^2} - d} + |e|\sqrt{\sqrt{d^2 + e^2} + d})$ 圖形為三支曲線且其中恰兩支交叉。
5. 若為其它情形，則圖形為三支互不相交的曲線。

以上研究可歸納出一些性質，故提出猜測並試證明

性質 1：任意 n 次複係數多項函數定義域在高斯平面上為一 n 次曲線或其退化圖形—即由多個曲線及直線所構成且總次數為 n —其圖形所有曲線皆有與次數等量之漸近線，即所有漸近線與直線總數為 n ，這 n 條線共點且相鄰兩線之間夾角為等角 $\left(\theta = \frac{\pi}{n}\right)$ 。

Proof :

任意 n 次複係數多項函數通式：

$f(Z) = \sum_{j=1}^n a_j Z^j$, $a_j \in C$, $j, n \in N$, 複數 $\xrightarrow{f(x)}$ 實數。將 $Z = a + bi$ 代入即可看出為 n 次曲

線。接著求 $g(Z) = a(Z - Z_0)^n$, $a, Z_0 \in C$, 複數 $\xrightarrow{g(x)}$ 實數 , 且 $g(Z)$ 滿足與 $f(Z)$ 之圖形

在 $|Z| \rightarrow \infty$ 時定義域無窮逼近且高度差為定值 , 即 $\lim_{|Z| \rightarrow \infty} (f(Z) - g(Z)) = h$, h 為實常數。得：

$$\lim_{|Z| \rightarrow \infty} (f(Z) - g(Z)) = h \Rightarrow \lim_{|Z| \rightarrow \infty} \left(\frac{f(Z) - g(Z) - h}{Z^n} \right) = a_n - a = 0 \Rightarrow a = a_n$$

$$\lim_{|Z| \rightarrow \infty} \left(\frac{f(Z) - g(Z) - h}{Z^{n-1}} \right) = a_{n-1} + na_n Z_0 = 0 \Rightarrow Z_0 = -\frac{a_{n-1}}{na_n}$$

故 $g(Z) = a_n \left(Z - \left(-\frac{a_{n-1}}{na_n} \right) \right)^n$, 因 $g(Z)$ 定義域與 $f(Z)$ 定義域在 $|Z| \rightarrow \infty$ 時無窮逼近為一相對關

係 , 即 $f(Z)$ 之定義域亦在 $|Z| \rightarrow \infty$ 時與 $g(Z)$ 無窮逼近。現分析 $g(Z)$ 定義域

令 $g(Z) = g \in R$

$$a_n = r e^{i\phi} , r, \phi \in R \Rightarrow g(Z) = a_n \left(Z - \left(-\frac{a_{n-1}}{na_n} \right) \right)^n \Rightarrow g = r e^{i\phi} \left(Z - \left(-\frac{a_{n-1}}{na_n} \right) \right)^n$$

$$\Rightarrow Z - \left(-\frac{a_{n-1}}{na_n} \right) = \sqrt[n]{\frac{g}{r}} e^{i\theta} , \theta = -\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n} , k \in Z$$

即 Z 之軌跡在 g 值改變時於高斯平面上投影為 n 條恆過 $\left(-\frac{a_{n-1}}{na_n} \right)$ 之直線 , 且相鄰兩線之

間夾角為等角 $\frac{\pi}{n}$, 又 $f(Z)$ 定義域在無窮遠處逼近 $g(Z)$ 定義域 , 故 $g(Z)$ 之定義域即為 $f(Z)$ 定義域圖形之漸進線 , 得證

由上可知 , 一二次多項函數 , 其定義域之圖形為二次曲線 , 且只可能為雙曲線或兩條直線 , 而不可能為其它曲線 (因為有直線+漸進線=次數=2 之恆等式 , 而其他組合皆不符合此條件) , 故可推知其它次數之多項函數定義域圖形的情形。

性質 2 : 對於任一實係數多項函數 , 在代數上的 n 重根 , 在笛 - 高座標上該重根所對應的點 , 皆有 n 條曲線通過。

研究完多項函數後 , 我們將往其它函數發展。

二、三角函數

因三角函數無分類問題，故將直接放入笛一高座標中研究。

其過程為

1. 對每一三角函數，將 $Z = a + bi, a, b \in R$ 代入。

2. 用和角公式拆開 $a + bi$ 並利用三角、雙曲函數之間的關係，將虛數單位 i 由函數內提出。

由以上步驟，可求出三角函數之 $\text{Re}(f(Z))$ 及 $\text{Im}(f(Z))$ 。且以下之 $t, s \in R, k \in Z$

$$\sin Z \quad (t, 0, \sin t) \cup \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, s, (-1)^k \cosh s \right) \quad \cos Z \quad (t, 0, \cos t) \cup \left(k\pi, s, (-1)^k \cosh s \right)$$

$$\tan Z \quad (t, 0, \tan t) \quad \cot Z \quad (t, 0, \cot t)$$

$$\sec Z \quad (t, 0, \sec t) \cup \left(k\pi, s, \frac{(-1)^k}{\cosh s} \right) \quad \csc Z \quad (t, 0, \csc t) \cup \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, s, \frac{(-1)^k}{\cosh s} \right)$$

三、指數函數

由於指數函數除底數不同外，其餘性質大同小異，故直接放入笛一高座標。

設該指數函數底數為 $p > 0, p \neq 1$ ：

$$p^Z = e^{a \ln p} (\cos(b \ln p) + i \sin(b \ln p))$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = p^x \cos(y \ln p) \\ 0 = p^x \sin(y \ln p) \end{cases}$$

由第二式，解得 $e^{a \ln p} \sin(y \ln p) = 0 \Rightarrow y \ln p = k\pi \Rightarrow y = \frac{k\pi}{\ln p} = k\pi \log_p e, k \in Z$ ，帶回第一式：

一式：

$$\cos y \ln p = (-1)^k \Rightarrow z = (-1)^k e^{x \ln p} = (-1)^k p^x, k \in Z$$

推得空間參數式為 $(t, k\pi \log_p e, (-1)^k p^t), t \in R, k \in Z$

四、對數函數

對數函數其情形與指數函數類似，不過不同的地方是：這裡複數將用極座標表示，而笛一高座標也將以柱座標形式呈現。設 $p > 0, p \neq 1$ 則：

$$f(Z) = \log_p Z \Rightarrow p^{f(Z)} = Z, \text{ 由指數函數推得}$$

$$p^{\text{Re}(f(Z))} (\cos(\text{Im}(f(Z)) \ln p) + i \sin(\text{Im}(f(Z)) \ln p)) = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

由於兩複數相等時其向徑與主幅角必相等。故推得：

$$\begin{cases} p^{\operatorname{Re}(f(Z))} = r \\ \operatorname{Im}(f(Z)) \ln p = \theta + 2k\pi \end{cases}, k \in Z$$

但奇怪的是和 θ 對應的 $\operatorname{Im}(f(Z))$ 竟隨 k 值變動而有無限多可能！顯然不符合函數的定義。但經過查考知這種現象確實是存在，為使對數函數在真數為複數時仍具函數性質，數學上特別定義一個「主值」(principal value 即 $k = 0$ 時的值) 來定義自然對數在真數為複數之值。在無法取得一般對數函數在此種狀況之情形下，我們逕行規定，類似自然對數以主值來表示以 p 為底的對數，而聯立式可修正如下：

$$\begin{cases} z = \operatorname{Log}_p r \\ \theta = \theta \operatorname{Log}_p e \end{cases} \quad (\text{柱座標})$$

由第二式解得 $\theta = 0$ ，其參數式為 $(r, 0, \operatorname{Log}_p r)$ ， $r \in R$

伍、結論：

1. 取一個高斯平面，作為函數的定義域，另取一實軸作為函數的對應域，並準備一個三維座標系。
2. 將高斯平面「貼到」三維座標系的 xy 平面，實軸「固定」在三維座標系之 z 軸上。
3. 座標系內每一點定義為 $(\operatorname{Re}(x), \operatorname{Im}(x), f(x))$
4. 多項函數其定義域在高斯平面上為一 n 次曲線或其退化圖形—即由多個曲線及直線所構成，而總次數為 n —且圖形所有曲線皆有與次數等量之漸近線，即所有漸近線與直線總數為 n ，這 n 條線共點且相鄰兩線之間夾角為等角 $\left(\theta = \frac{\pi}{n}\right)$ 。
5. 多項函數在笛—高座標中圖形為數條曲線，數量與原函數次數同。
6. 對任一實係數多項函數，在代數上的 n 重根，在笛—高座標中上該重根所對應的點，皆有 n 條曲線通過。
7. 三角函數方面由觀察其在笛—高座標中圖形可知：若兩曲線交點視為二重根，對於任意實數，任一三角函數在一上開下閉的區間 $[k\pi, (k+2)\pi)$ ， $k \in R$ 中皆有二解。
8. 指數函數方面由觀察函數在笛—高座標中圖形可知：其圖形為一連串的原圖形及其鏡像組成。
9. 對數函數由觀察函數在笛—高座標中圖形和原來單純的笛卡兒座標系中一樣。

陸、參考書目

	書名	作者/譯者	版數	出書地點	出版社	參考頁數	出版年
1	解析幾何	章學城	一版	北京	北京大學出版社	274~279	1989
2	微積分	楊維哲	六版	臺北	三民書局	504~506	1984
3	微分幾何學	鄧靜華、林輝龍	一版	臺北	國立編譯館	6,7,17~22	1984
4	MALAB—入門及應用	蘿珊智慧型 科技工作室	—	臺北	松崗電腦	4-2~4-29	1999
5	毛起來說 e	Eli Maor/鄭維厚	一版	臺北	天下文化	195~248	2000
6	毛起來說三角	Eli Maor/胡守仁	一版	臺北	天下文化	230~242	1998
7	Mathematical handbook	Murray R. Spiegel	—	New York	McGraw-Hill, Inc	21~32	2000
8	Calculus — one and several variables	Salas/ Hille/ Etgen	八版	New York	John Wiley & Sons, Inc	1~134, 1012~1017	1968
9	微積分	V.I.Smirmov 九章出版社 譯	二版	—	九章出版社	181~188, 319~326 391~393	1999
10	Matlab 在工程上的應用	William J Palm III 李宜達 麥焜燦 譯	一版	臺北	—	4-1~4-63	1986

附錄 圖形

說明：

圖形編號的形式為 Eng.n.m，其中

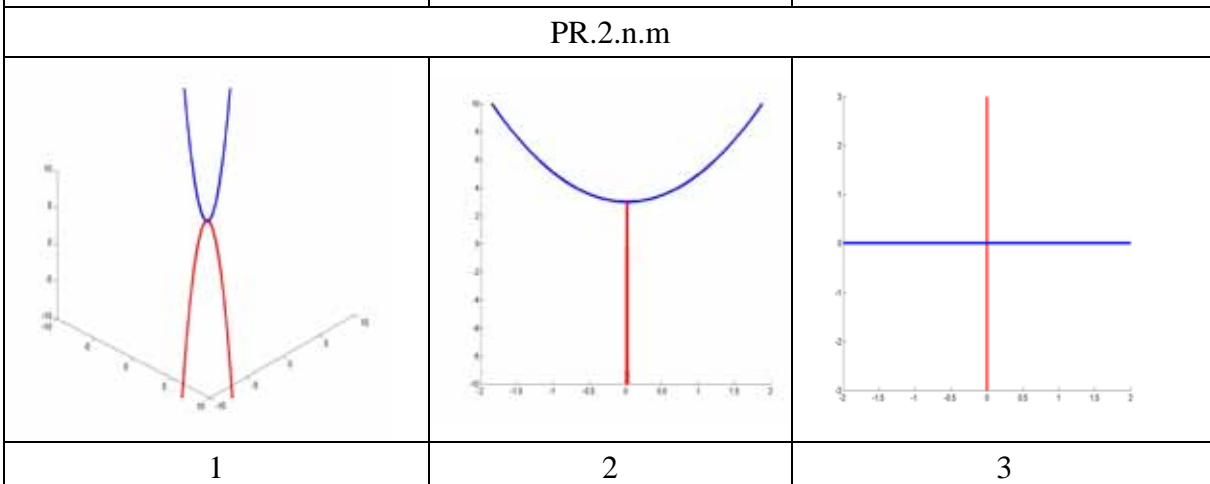
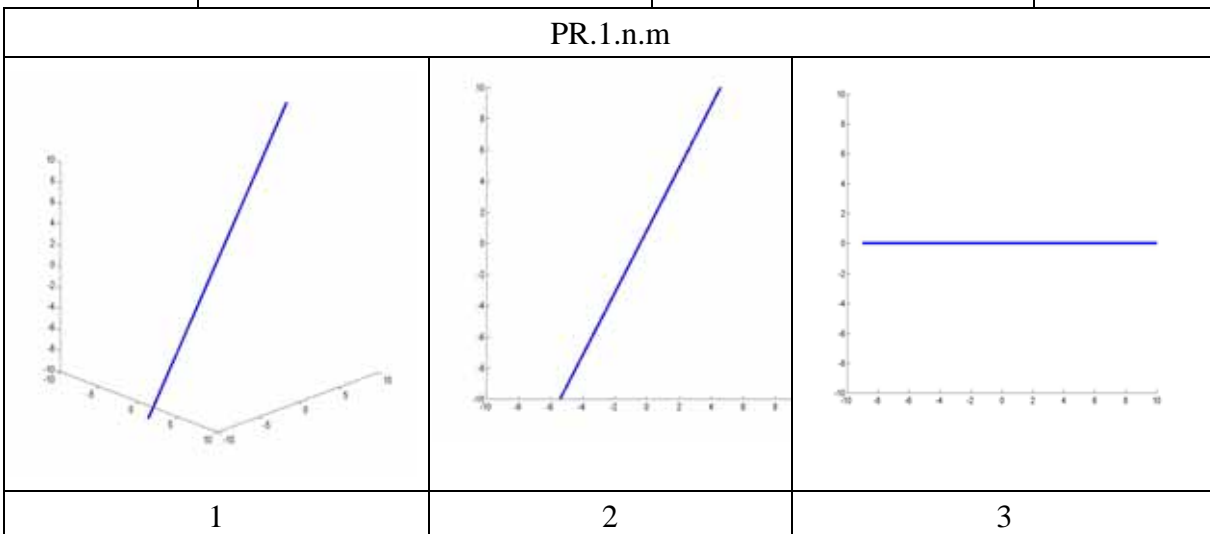
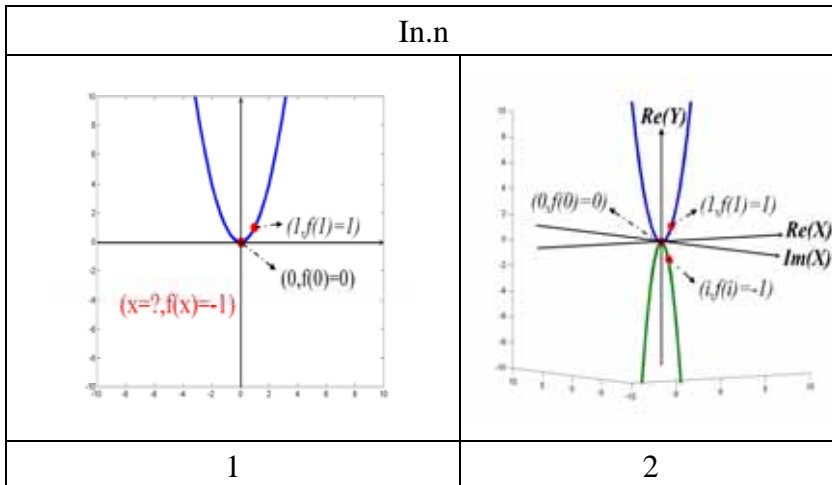
Eng	In	PR.N	PI.N	Sin...	E	L
意義	說明圖形	實係數圖形	虛係數圖形	三角函數圖形	指數圖形	對數圖形

N 為次數，n 為函數編號，可能為 n_1-n_2

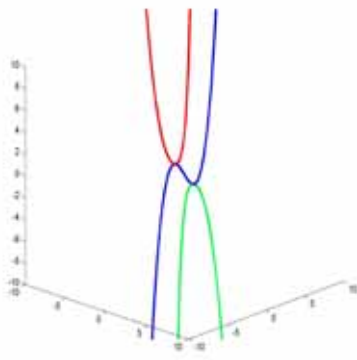
m=1：由空間中觀察圖形

m=2：由 Y 軸正向觀察圖形(xyz 座標系)

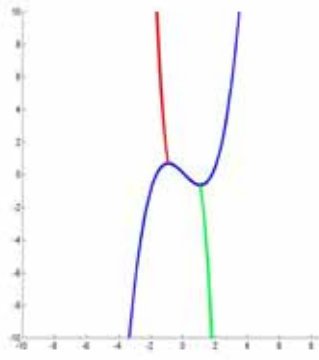
m=3：由 Z 軸正向觀察圖形（即定義域）(xyz 座標系)



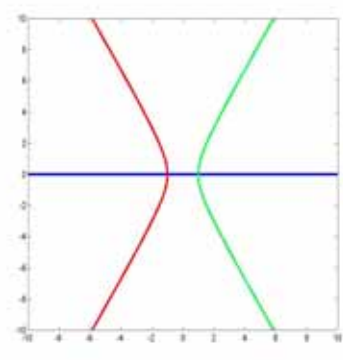
PR.3.n.m



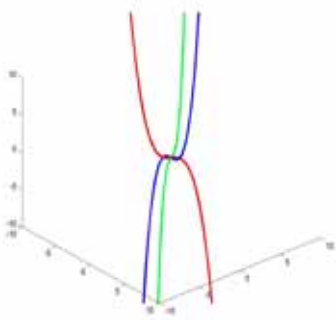
1.1



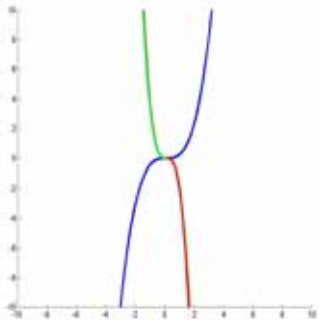
1.2



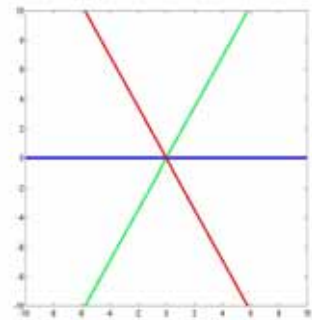
1.3



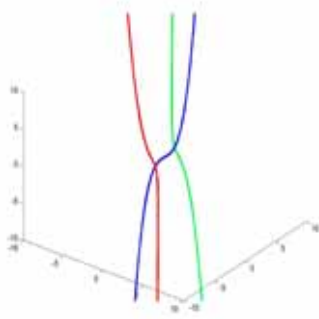
2.1



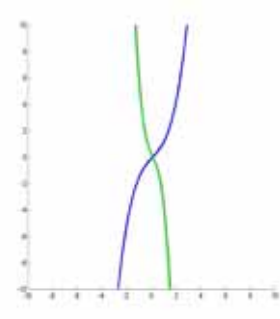
2.2



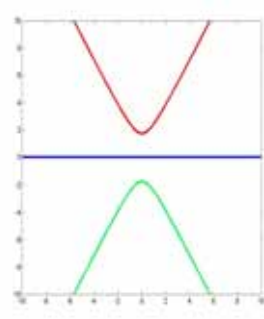
2.3



3.1

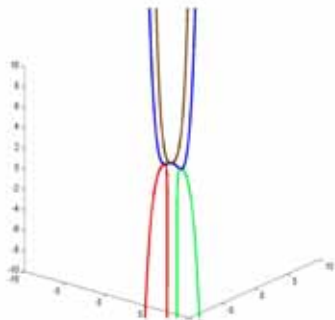


3.2

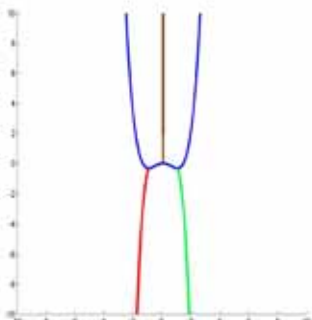


3.3

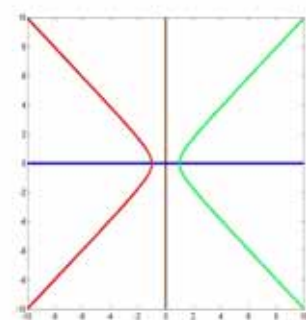
PR.4.n.m



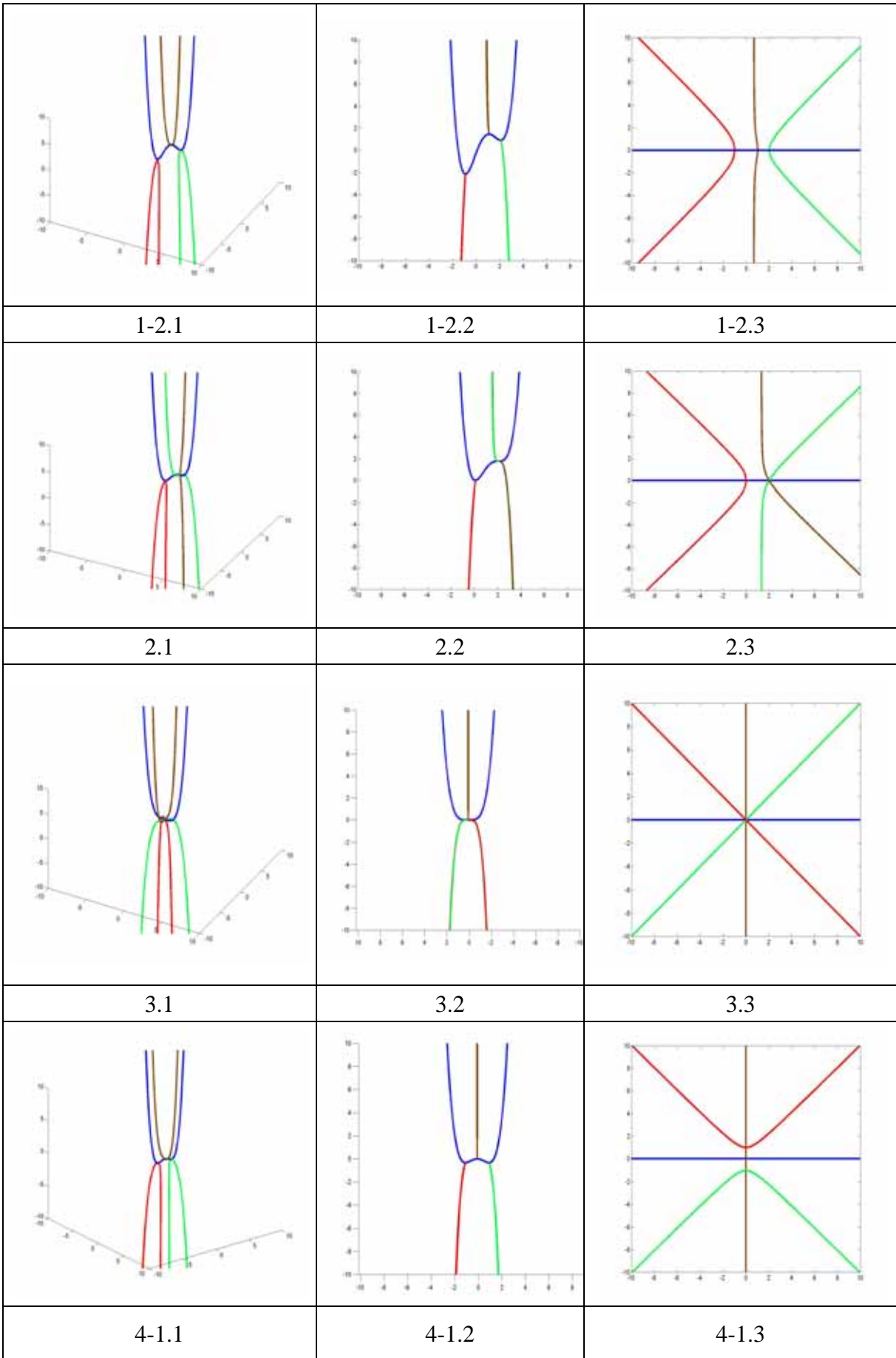
1-1.1

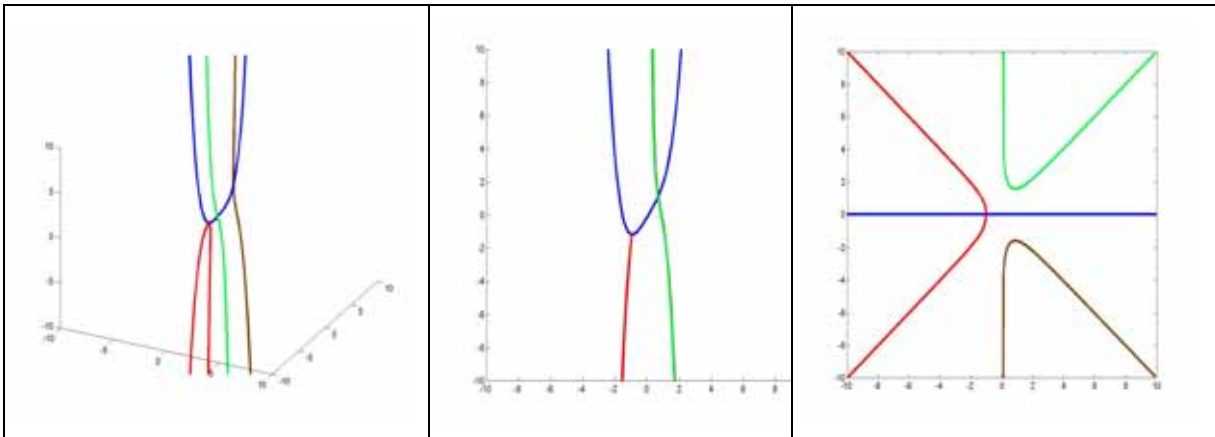


1-1.2



1-1.3

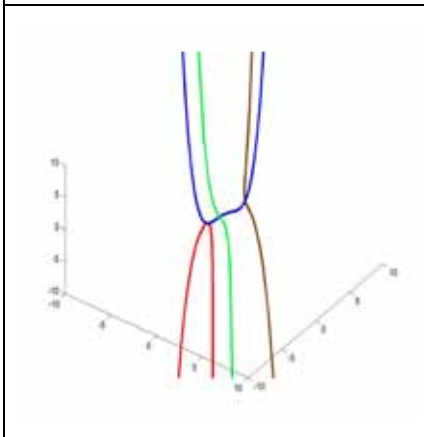




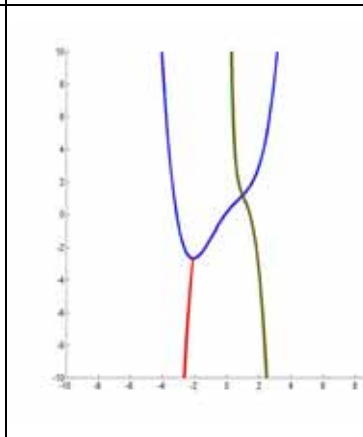
4-2.1

4-2.2

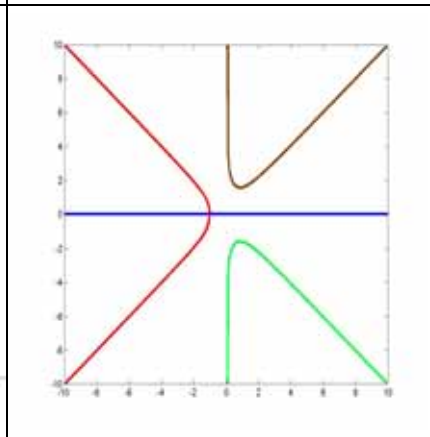
4-3.3



4-3.1

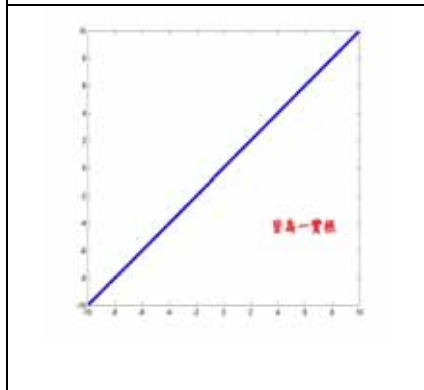


4-3.2

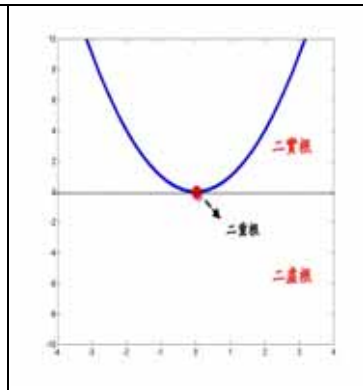


4-3.3

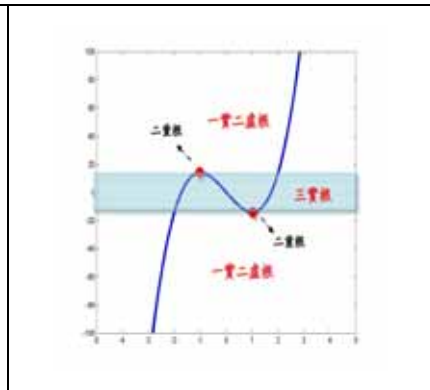
實係數多項函數根之分布圖，N.n



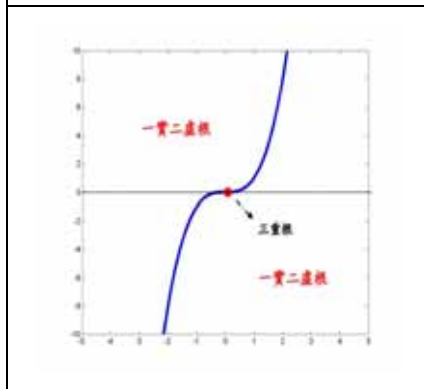
1



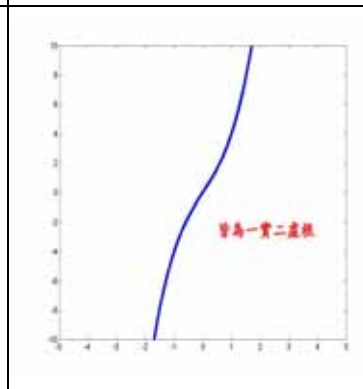
2



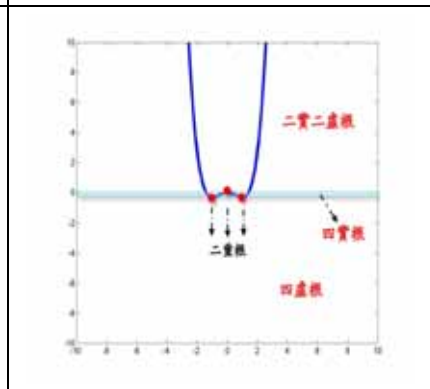
3.1



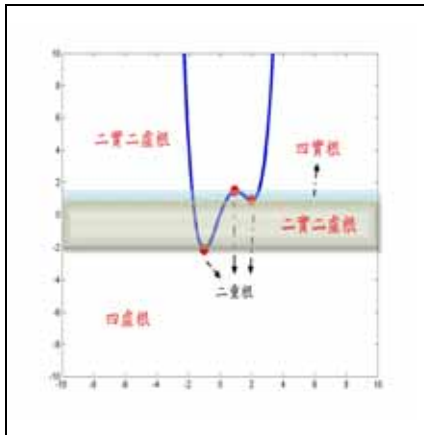
3.2



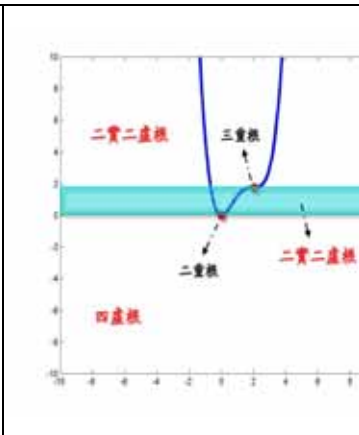
3.3



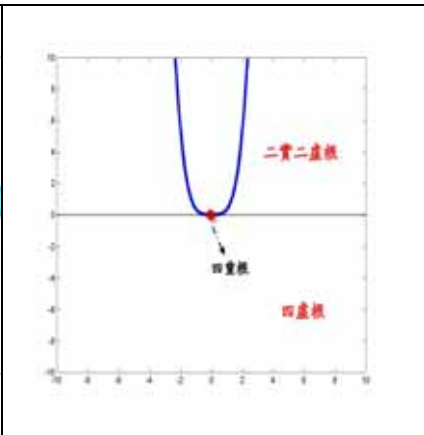
4.1-1



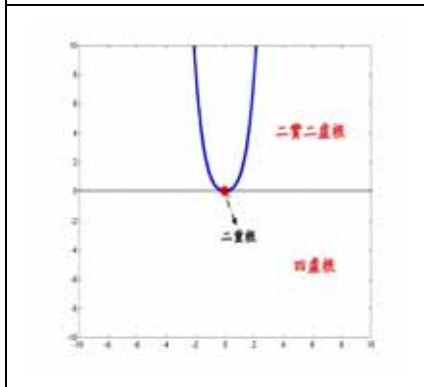
4.1-2



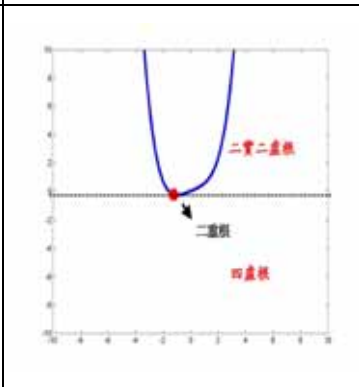
4.2



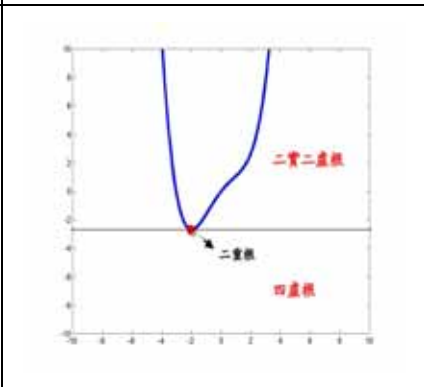
4.3



4.4-1

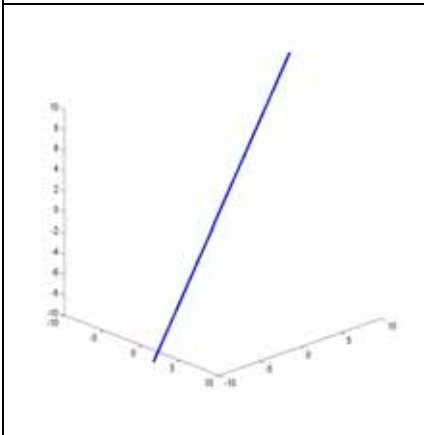


4.4-2

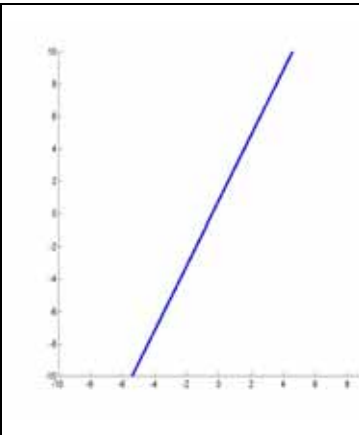


4.4-3

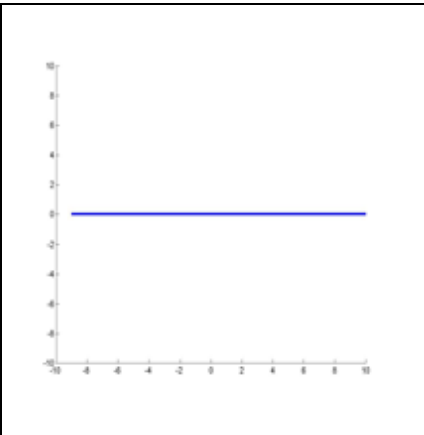
PL.N. (n) .m



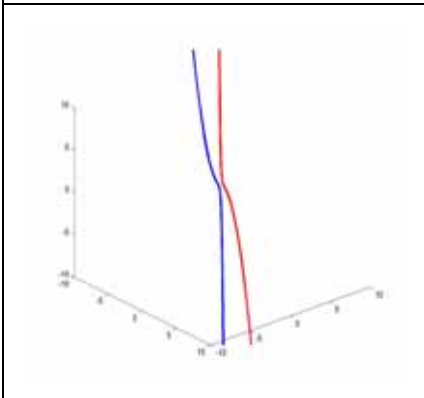
1.1



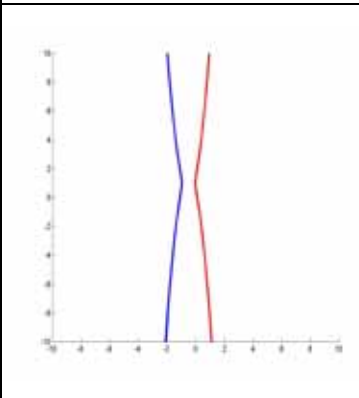
1.2



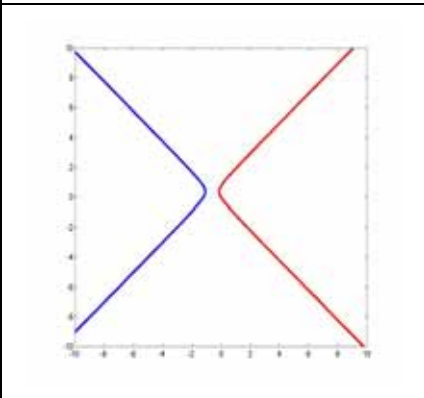
1.3



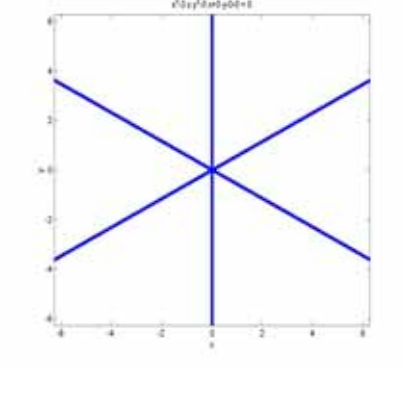
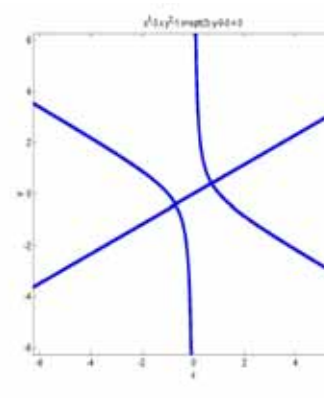
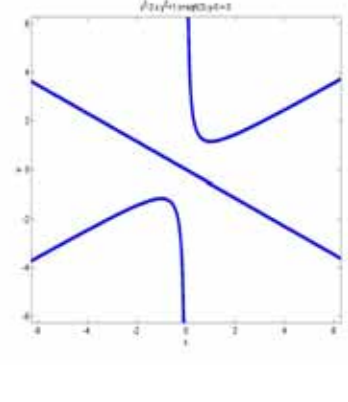
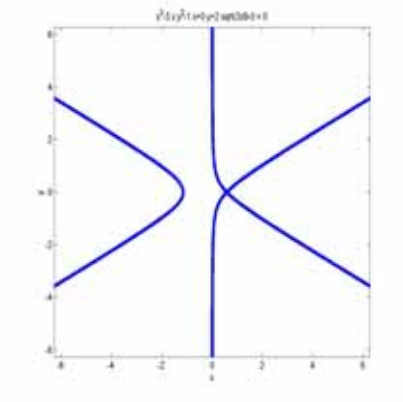
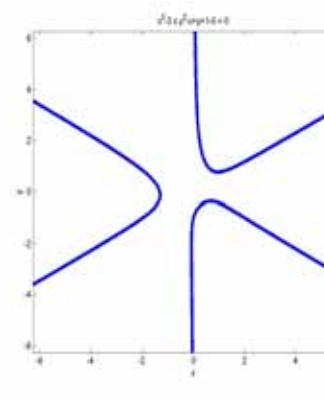
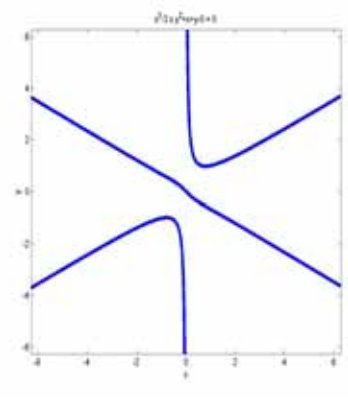
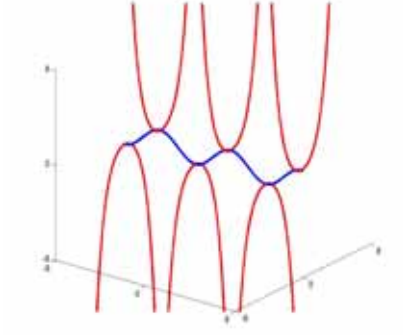
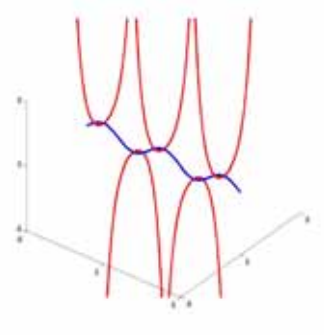
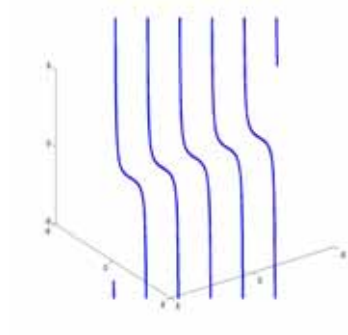
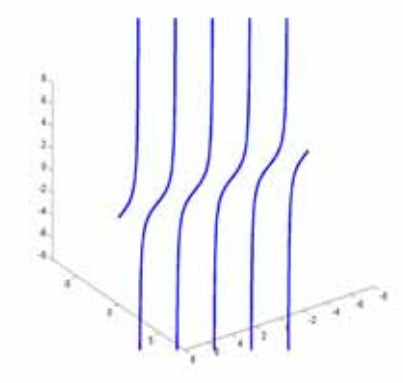
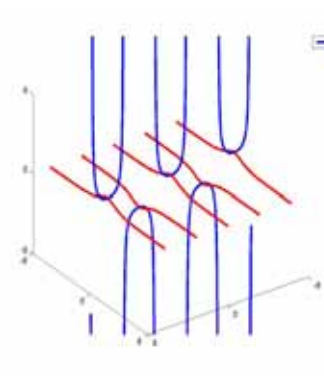
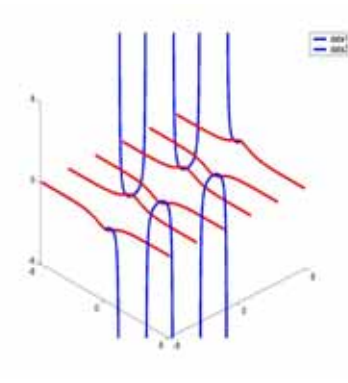
2.1

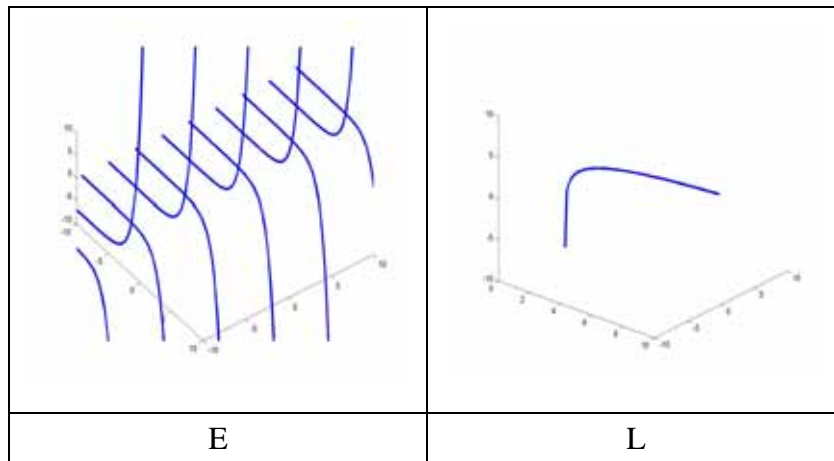


2.2



2.3

		
3.1.3	3.2.3	3.3.3
		
3.4.3	3.5-1.3	3.5-2.3
		
sin	cos	tan
		
cot	sec	csc



評語

040415 高中組數學科

尋根之旅

數學概念模糊不清，應該努力加強基本的數學訓練。