中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040414

國立臺南女子高級中學

指導老師姓名

洪士薰

廖婉雅

作者姓名

林柏含

王語萱

郭書寒

一、摘要

1. 將 cos nθ 以 cosθ 形式依高次降冪排列展開，觀察各項係數，找尋其變化規律，進一步求得各項係數的一般項公式。
2. 將 sin nθ 以 sinθ 形式依低次升冪排列展開，觀察各項係數之變化規律，進一步求得各項係數的一般項公式。
3. 找出 cos nθ 與 cos(n-1)θ，cos(n+1)θ 之間的關係式。
4. 找出 sin nθ 與 sin(n-1)θ，sin(n+1)θ 之間的關係式。
5. 利用 $\cos nq$ 的係數間的遞迴關係，找出其相對應的特徵方程式。

二、研究動機

在高中數學中，我們學過了 sinθ 及 cosθ 的半角、二倍角、及三倍角的公式,不禁讓我們納悶—為什麼沒有介紹四倍、五倍、六倍….等的 n 倍角公式呢??
我們決定來探討這個問題，看看是否能推導出 sinθ 及 cosθ 的 n 倍角公式。

三、研究目的

找出 cos nθ 與 sin nθ 各項係數之間的關係,並推導出 sinθ 及 cosθ 的 n 倍角公式。

四、研究器材

計算機、電腦

五、研究過程

壹、$\cos nq$ vs $\cos q$ 及 $\sin nq$ vs $\sin q$ 的數據表

一、將 $\cos nq$ 以 $\cos q$ 的形式降冪排列展開：

$$
\begin{aligned}
&\cos q = \cos q \\
&\cos 2q = 2\cos^2 q - 1 \\
&\cos 3q = 4\cos^3 q - 3\cos q \\
&\cos 4q = 8\cos^4 q - 8\cos^2 q + 1 \\
&\cos 5q = 16\cos^5 q - 20\cos^3 q + 5\cos q \\
&\cos 6q = 32\cos^6 q - 48\cos^4 q + 18\cos^2 q - 1 \qquad (1.1) \\
&\cos 7q = 64\cos^7 q - 112\cos^5 q + 56\cos^3 q - 7\cos q \\
&\cos 8q = 128\cos^8 q - 256\cos^6 q + 160\cos^4 q - 32\cos^2 q + 1 \\
&\cos 9q = 256\cos^9 q - 576\cos^7 q + 432\cos^5 q - 120\cos^3 q + 9\cos q \\
&\cos 10q = 512\cos^{10} q - 1280\cos^8 q + 1120\cos^6 q - 400\cos^4 q + 50\cos^2 q - 1 \\
&\cos 11q = 1024\cos^{11} q - 2816\cos^9 q + 2816\cos^7 q - 1232\cos^5 q + 220\cos^3 q - 11\cos q \\
&\cos 12q = 2048\cos^{12} q - 6144\cos^{10} q + 6912\cos^8 q - 3584\cos^6 q + 840\cos^4 q - 72\cos^2 q + 1 \\
&\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

令 $f_1(x) = x$

$$
\begin{aligned}
&f_2(x) = 2x^2 - 1 \\
&f_3(x) = 4x^3 - 3x \\
&f_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \\
&f_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
&\qquad \vdots
\end{aligned}
$$

得 $\cos q = f_1(\cos q)$

$$
\begin{aligned}
&\cos 2q = f_2(\cos q) \\
&\cos 3q = f_3(\cos q) \\
&\cos 4q = f_4(\cos q) \\
&\cos 5q = f_5(\cos q)
\end{aligned}
$$

我們希望找到多項式 $f_n(x)$，使得 $\cos nq = f_n(\cos q)$

二、將$\sin nq$ 以 $\sin q$ 形式降冪排列展開

我們發現，必須將 n 分成二類: 奇數或偶數

(一) $n = 2k - 1$ ($k\in \mathbf{N}$)：可將$\sin nq$ 完全以 $\sin q$ 的形式降冪排列展開

$$
\begin{aligned}
&\sin q = \sin q \\
&\sin 3q = -4\sin^3 q + 3\sin q \\
&\sin 5q = 16\sin^5 q - 20\sin^3 q + 5\sin q \\
&\sin 7q = -64\sin^7 q + 112\sin^5 q - 56\sin^3 q + 7\sin q \\
&\sin 9q = 256\sin^9 q - 576\sin^7 q + 432\sin^5 q - 120\sin^3 q + 9\sin q \\
&\sin 11q = -1024\sin^{11} q + 2816\sin^9 q - 2816\sin^7 q + 1232\sin^5 q - 220\sin^3 q + 11\sin q
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

令 $g_1(x) = x$

$$
\begin{aligned}
&g_3(x) = -4x^3 + 3x \\
&g_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
&g_7(x) = -64x^7 + 112x^5 - 56x^3 + 7x \\
&g_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x \\
&g_{11}(x) = -1024x^{11} + 2816x^9 - 2816x^7 + 1232x^5 - 220x^3 + 11x
\end{aligned}
$$

得 $\sin q = g_1(\sin q)$

$$
\begin{aligned}
&\sin 3q = g_3(\sin q) \\
&\sin 5q = g_5(\sin q) \\
&\sin 7q = g_7(\sin q) \\
&\quad \text{N}
\end{aligned}
$$

我們希望找到多項式 $g_n(x)$，使得$\sin nq = g_n(\sin q)$ (n 是奇數)

(二) $n = 2k$ ($k\in \mathbf{N}$)：只能將$\sin nq$ 同時以 $\sin q$ 與 $\cos q$ 的形式展開

令$\sin nq = y,\ \cos q = x$

則$\sin 2q = x(2y)$

$$
\begin{aligned}
&\sin 4q = x(4y - 8y^3) \\
&\sin 6q = x(6y - 32y^3 + 32y^5) \\
&\sin 8q = x(8y - 80y^3 + 192y^5 - 128y^7) \\
&\sin 10q = x(10y - 160y^3 + 672y^5 - 1024y^7 + 512y^9) \\
&\sin 12q = x(12y - 280y^3 + 1792y^5 - 4608y^7 + 5120y^9 - 2048y^{11}) \\
&\sin 14q = x(14y - 448y^3 + 4032y^5 - 15360y^7 + 28160y^9 - 24576y^{11} + 8192y^{13}) \\
&\quad \text{N}
\end{aligned}
$$

由上列各式，我們希望找到多項式 $q_n(x)$，使得 $\sin nq = \cos q \cdot q_n(\sin q)$

貳、$\cos nq$ 及 $\sin nq$ 的遞迴關係

本節的主要推論是定理 2.1 及定理 2.3，因為在之後各節中的關鍵結果主要來自於定理 2.1 及定理 2.3 所產生的遞迴關係。另外，我們在這一節中還嘗試著推廣定理 2.1，得到更一般性的結果，即定理 2.2。

一. 我們先觀察 $\cos nq$, $\cos(n+1)q$ 與 $\cos(n-1)q$ 的展開式中，前、後項的係數的關係。

求中間項，最先想到的就是 $\left[(n-1)+(n+1)\right]\div 2 = n$

於是，我們大膽假設---------

$$\frac{\cos nq+\cos(n+2)q}{2}=\cos(n+1)q \quad , \ \forall n\in N$$

接下來，我們探討此假設是否成立

由表(1.1) 知： 令 $\cos q = x$,

則
$$\cos q = x$$
$$\cos 2q = 2x^2-1$$
$$\cos 3q = 4x^3-3x$$
$$\cos 4q = 8x^4-8x^2+1$$
$$\cos 5q = 16x^5-20x^3+5x$$

(1) $$\frac{\cos q+\cos 3q}{2} = x(2x^2-1) = \cos q\cdot\cos 2q$$

(2) $$\frac{\cos 2q+\cos 4q}{2} = x(4x^3-3x) = \cos q\cdot\cos 3q$$

(3) $$\frac{\cos 3q+\cos 5q}{2} = x(8x^4-8x^2+1) = \cos q\cdot\cos 4q$$

由上述各式我們推論 $$\frac{\cos nq+\cos(n+2)q}{2}=\cos q\cdot\cos(n+1)q \quad , \forall n\in N$$

定理 2.1： $$\frac{\cos nq+\cos(n+2)q}{2\cos q}=\cos(n+1)q \quad , \ \forall n\in N$$

證明:
$$\begin{aligned}
\frac{\cos nq+\cos(n+2)q}{2\cos q} &= \frac{\cos nq+(\cos nq\cdot\cos 2q-\sin nq\cdot\sin 2q)}{2\cos q}\\
&= \frac{\cos nq(1+\cos 2q)-\sin nq\cdot 2\sin q\cos q}{2\cos q}\\
&= \frac{\cos nq(1+2\cos^2 q-1)-\sin nq\cdot 2\sin q\cos q}{2\cos q}\\
&= \frac{2\cos q\,(\cos nq\cos q-\sin nq\sin q)}{2\cos q}\\
&= \cos nq\cdot\cos q-\sin nq\cdot\sin q\\
&= \cos(n+1)q
\end{aligned}$$
Q.E.D

<u>註</u>: 在證明 $\cos q$ 的 n 倍角公式 $f_n(x)$ 的過程中，定理 2.1 給予我們 $f_n(x)$, $f_{n+1}(x)$, $f_{n+2}(x)$ 的係數間的遞迴關係式，發揮極關鍵的作用，

二. 若 $n = p + q \quad (\forall n, p, q \in N)$，$\cos nq$ 是否與 $\cos pq$ 和 $\cos qq$ 有某種關係存在?
先觀察下列各例：令 $\cos q = x$

(1) 3 = 1 + 2

$\cos 3q = 4x^3 - 3x$ - - - -(1)

$\cos q + \cos 2q = 2x^2 + x - 1 - - - - (2)$

$\cos q \cdot \cos 2q = 2x^3 - x - - - - (3)$

$(3) \times 2 - (1) = x$

即: $\cos 3q = 2\cos q \cos 2q - \cos q$

(2) 4 = 1 + 3 = 2 + 2

$\cos 4q = 8x^4 - 8x^2 + 1 - - - - (1)$

• $\cos q + \cos 3q = 4x^3 - 2x - - - - (2)$

$\cos q \cdot \cos 3q = 4x^4 - 3x^2 - - - - (3)$

$(3) \times 2 - (1) = 2x^2 - 1 = \cos 2q$

即: $\cos 4q = 2\cos q \cdot \cos 3q - \cos 2q$

, $\cos 2q + \cos 2q = 4x^2 - 2 - - - - (4)$

$\cos 2q \cdot \cos 2q = 4x^4 - 4x^2 + 1 - - - - (5)$

$(5) \times 2 - (1) = 1 = \cos 0q$

即: $\cos 4q = 2\cos 2q \cdot \cos 5q - \cos 0q$

(3) 5 = 1 + 4 = 2 + 3

$\cos 5q = 16x^5 - 20x^3 + 5x - - - - (1)$

• $\cos q + \cos 4q = 8x^4 - 8x^2 + x + 1 - - - - (2)$

$\cos q \cdot \cos 4q = 8x^5 - 8x^3 + x - - - - (3)$

$(3) \times 2 - (1) = 4x^3 - 3x = \cos 3q$

即: $\cos 5q = 2\cos q \cdot \cos 4q - \cos 3q$

, $\cos 2q + \cos 3q = 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 - - - - (4)$

$\cos 2q + \cos 3q = 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 - - - - (4)$

$\cos 2q \cdot \cos 3q = 8x^5 - 10x^3 + 3x - - - - (5)$

$(5) \times 2 - (1) = x$

即: $\cos 5q = 2\cos 2q \cdot \cos 3q - \cos q$

我們發現：若 $n = p + q$，其中 $n, p, q \in N$

則 $\cos nq = 2\cos pq \cdot \cos qq - \cos(p - q)q$

定理 2.2：若 $n = p + q$ ，$n, p, q \in N$

則 $\cos n\theta = 2\cos p\theta \cdot \cos q\theta - \cos(p-q)\theta$

證明： $\cos n\theta = \cos(p+q)\theta$

$= \cos p\theta \cdot \cos q\theta - \sin p\theta \cdot \sin q\theta$

$= 2\cos p\theta \cdot \cos q\theta - (\cos p\theta \cdot \cos q\theta + \sin p\theta \cdot \sin q\theta)$

$= 2\cos p\theta \cos q\theta - \cos(p-q)\theta$ Q.E.D.

註：利用定理 2.2.，可得 $\cos(n+2)\theta = \cos[(n+1)+1]\theta = 2\cos(n+1)\theta \cos\theta - \cos n\theta$

$$\Rightarrow \frac{\cos n\theta + \cos(n+2)\theta}{2\cos\theta} = \cos(n+1)\theta$$

故定理 2.1 事實上可以視為定理 2.2 的一個特例

三、由定理 2.1，得 $\frac{\cos n\theta + \cos(n+2)\theta}{2\cos\theta} = \cos(n+1)\theta$ ，我們想知道，對於 $\sin\theta$ 是否也能得到類似的關係?

令 $y = \sin\theta$, $x = \cos\theta$

則 $\sin\theta = y$

$\sin 2\theta = y \cdot 2x$

$\sin 3\theta = y \cdot (4x^2 - 1)$

$\sin 4\theta = y \cdot (8x^3 - 4x)$

$\sin 5\theta = y \cdot (16x^4 - 12x^2 + 1)$

觀察下列各式

(1) $\frac{\sin\theta + \sin 3\theta}{2} = y \cdot 2x^2 = x \cdot (y \cdot 2x) = \cos\theta \cdot \sin 2\theta$

(2) $\frac{\sin 2\theta + \sin 4\theta}{2} = y \cdot (4x^3 - x) = x \cdot y(4x^2 - 1) = \cos\theta \cdot \sin 3\theta$

(3) $\frac{\sin 3\theta + \sin 5\theta}{2} = y \cdot (8x^4 - 4x^2) = x \cdot y(8x^3 - 4x) = \cos\theta \cdot \sin 4\theta$

由上述各式我們猜測

$$\frac{\sin n\theta + \sin(n+2)\theta}{2\cos\theta} = \sin(n+1)\theta \quad , \quad \forall n \in N$$

定理 2.3： $\frac{\sin n\theta + \sin(n+2)\theta}{2\cos\theta} = \sin(n+1)\theta$, $\forall n \in N$

證明: $\frac{\sin n\theta + \sin(n+2)\theta}{2\cos\theta} = \frac{\sin n\theta + (\sin n\theta \cdot \cos 2\theta + \cos n\theta \cdot \sin 2\theta)}{2\cos\theta}$

$$= \frac{\sin n\theta \cdot (1+\cos 2\theta) + \cos n\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta}{2\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin n\theta\,(1+2\cos^2\theta - 1) + \cos n\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta}{2\cos\theta}$$

$$= \frac{2\cos\theta\,(\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta)}{2\cos\theta}$$

$$= \sin n\theta \cdot \cos\theta + \cos n\theta \cdot \sin\theta$$

$$= \sin(n+1)\theta \qquad \text{Q.E.D}$$

四、在第三部分的討論中，我們也發現一個新的關係式：

令 $y = \sin\theta$, $x = \cos\theta$

則 $\sin\theta = y$ $\qquad$ $\cos\theta = y$

$\sin 2\theta = y \cdot 2x$ $\qquad$ $\cos 2\theta = 2x^2 - 1$

$\sin 3\theta = y \cdot (4x^2 - 1)$ $\qquad$ $\cos 3\theta = 4x^3 - 3x$

$\sin 4\theta = y \cdot (8x^3 - 4x)$ $\qquad$ $\cos 4\theta = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$\sin 5\theta = y \cdot (16x^4 - 12x^2 + 1)$ $\qquad$ $\cos 5\theta = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

觀察下列各式

(1) $\dfrac{\sin 3\theta - \sin\theta}{2} = y \cdot (2x^2 - 1) = \sin\theta \cdot \cos 2\theta$

(2) $\dfrac{\sin 4\theta - \sin 2\theta}{2} = y \cdot (4x^3 - 3x) = \sin\theta \cdot \cos 3\theta$

(3) $\dfrac{\sin 5\theta - \sin 3\theta}{2} = y \cdot (8x^4 - 8x^2 + 1) = \sin\theta \cdot \cos 4\theta$

由上述各式我們猜測

$$\frac{\sin(n+2)\theta - \sin n\theta}{2\sin\theta} = \cos(n+1)\theta \quad , \quad \forall n \in N$$

定理 2.4： $\dfrac{\sin(n+2)\theta - \sin n\theta}{2\sin\theta} = \cos(n+1)\theta \quad , \quad \forall n \in N$

證明: $\dfrac{\sin(n+2)\theta - \sin n\theta}{2\sin\theta} = \dfrac{\sin n\theta \cdot \cos 2\theta + \cos n\theta \cdot \sin 2\theta - \sin n\theta}{2\sin\theta}$

$$= \frac{\sin n\theta \cdot (\cos 2\theta - 1) + \cos n\theta \cdot \sin 2\theta}{2\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin n\theta\,(1 - 2\sin^2\theta - 1) + \cos n\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta}{2\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos n\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta - 2\sin n\theta \cdot \sin^2\theta}{2\sin\theta}$$

$$= \frac{2\sin\theta\,(\cos n\theta\cos\theta - \sin n\theta\sin\theta)}{2\sin\theta}$$

$$= \cos n\theta \cdot \cos\theta - \sin n\theta \cdot \sin\theta$$

$$= \cos(n+1)\theta \qquad \text{Q.E.D.}$$

參、$\cos q$ 的 n 倍角公式

這一節的主要結果為「定理 3.4」。利用前一節的定理 2.1，我們推導了一個主要的遞迴式；這一個遞迴式連結了 $\cos nq$ ***、*** $\cos(n-1)q$ ***中*** $\cos^k q$ ***項與*** $\cos^{k-1} q$ ***項的係數關係，所以它是有二層意義的遞迴：首先是*** $\cos nq$ ***中前後項係數的關係，其二是*** $\cos nq$ ***，*** $\cos(n-1)q$ ***間的係數關係。最終目的，我們希望找到多項式*** $f_n(x)$ ***，使得*** $\cos nq = f_n(\cos q)$

由
$$f_1(x) = x$$
$$f_2(x) = 2x^2 - 1$$
$$f_3(x) = 4x^3 - 3x$$
$$f_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$f_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

我們猜測: $\deg f_n(x) = n$ 。 先證明這件事情

引理 1： $f_{n+2}(x) = 2x \cdot f_{n+1}(x) - f_n(x)$

pf :由定理 2.1，可得

$$\cos(n+2)q = 2\cos q \cos(n+1)q - \cos nq$$

即: $f_{n+2}(\cos q) = 2\cos q \cdot f_{n+1}(\cos q) - f_n(\cos q)$

故 $f_{n+2}(x) = 2x \cdot f_{n+1}(x) - f_n(x)$ Q.E.D.

定理 3.1： 若 $\cos nq = f_n(\cos q)$，其中 $f_n(x)$ 為實係數多項式，則 $\deg f_n(x) = n$

pf： 當 n = 1 時，$\cos q = \cos q$ ， $f_1(x) = x$ ，得 $\deg f_1(x) = 1$

n = 2 時，$\cos 2q = 2\cos^2 q - 1$ ， $f_2(x) = 2x^2 - 1$，得 $\deg f_2(x) = 2$

設 n = k 時，$\deg f_k(x) = k$ 成立

n = k +1 時，$\deg f_{k+1}(x) = k + 1$ 成立

則當 n = k + 2 時 由引理 1 得

$f_{k+2}(x) = 2x \cdot f_{k+1}(x) - f_k(x)$

$\Theta \deg(x \cdot f_{k+1}(x)) = k + 2$， $\deg f_k(x) = k$

$\therefore \deg f_{k+2}(x) = k + 2$

故由數學歸納法知：

若 $\cos nq = f_n(\cos q)$，其中 $f_n(x)$ 為實係數多項式 ，則 $\deg f_n(x) = n$ 。 Q.E.D.

根據定理 3.1，我們現在可以令

$$f_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + a_{n,n-2}x^{n-2} + ... + a_{n,1}x + a_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k \qquad (3.1)$$

觀察各項係數，可以發現

(1) $a_{n,n-2k-1} = 0$ ，其中 $0 \le k \le \left[\dfrac{n-1}{2}\right]$， $k \in \mathrm{Z}$

(2) $a_{n,n}, a_{n,n-2}, a_{n,n-4}$……. 之各項係數為正負值交錯。

若將 $a_{n,k}$ 之正負記為 $\operatorname{sgn} a_{n,k}$ ，記 $\left|a_{n,k}\right| = b_{n,k}$

則 $\operatorname{sgn} a_{n,n-2k} = (-1)^k$ ，$0 \le k \le \left[\frac{n}{2}\right]$ ，$k \in \mathrm{Z}$

令 $a_{n,n-2k} = (-1)^k \cdot b_{n,n-2k}$

現在我們試著計算 $b_{n,n-2k}, 0 \le k \le \left[\frac{n}{2}\right]$ ，$k \in \mathrm{Z}$

一、 探討 $b_{n,n}$ 的一般項公式

n	$b_{n,n}$	$\cos nq$
1	$1 = 2^0$	$\cos q = \cos q$
2	$2 = 2^1$	$\cos 2q = 2\cos^2 q - 1$
3	$4 = 2^2$	$\cos 3q = 4\cos^3 q - 3\cos q$
4	$8 = 2^3$	$\cos 4q = 8\cos^4 q - 8\cos^2 q + 1$
5	$16 = 2^4$	$\cos 5q = 16\cos^5 q - 20\cos^3 q + 5\cos q$
6	$32 = 2^5$	$\cos 6q = 32\cos^6 q - 48\cos^4 q + 18\cos^2 q - 1$

猜測 $b_{n,n} = 2^{n-1},\ n \in N$

<u>定理 3.2</u>：$b_{n,n} = 2^{n-1}$

pf $\Theta \operatorname{sgn} a_{n,n} = (-1)^0 = 1 \quad \therefore b_{n,n} = a_{n,n}$

考慮 $\cos nq + i\sin nq = (\cos q + i\sin q)^n$

比較左右二邊之實部，可得

$\cos nq$

$= C_0^n \cos^n q - C_2^n \cos^{n-2} q \sin^2 q + C_4^n \cos^{n-4} q \sin^4 q - C_6^n \cos^{n-6} q \sin^6 q + ...+ (-1)^{\left[\frac{n}{6}\right]} C^n_{2\cdot\left[\frac{n}{2}\right]} \sin^{2\cdot\left[\frac{n}{2}\right]} q$

利用 $\sin^2 q = 1 - \cos^2 q$

可得右式之 $\cos^n q$ 項之係數為 $C_0^n + C_2^n + C_4^n + C_6^n + ... + C^n_{2\cdot\left[\frac{n}{2}\right]} = 2^{n-1}$

另證：當 $n = 1$ 時，$f_1(x) = x$ ，得 $b_{1,1} = 1 = 2^0$

$n = 2$ 時，$f_2(x) = 2x^2 - 1$ ，得 $b_{2,2} = 2 = 2^{2-1}$

設 $n = k,\ n = k+1$ 時，$b_{k,k} = 2^{k-1}, b_{k+1,k+1} = 2^k$ 均成立，

則 $n = k+2$ 時，由引理 1， $f_{k+2}(x) = 2x \cdot f_{k+1}(x) - f_k(x)$

得 $b_{k+2,k+2} = 2b_{k+1,k+1}$

$= 2 \cdot 2^k$

$= 2^{k+1} = 2^{(k+2)-1}$ ，原式亦成立

故由數學歸納法知： $b_{n,n} = 2^{n-1}$

二、接下來，我們要推導出 $b_{n,\,(\text{n-2k})}$、$b_{(\text{n-1}),\,(\text{n-1-2k})}$、$b_{(n-2),\,(\text{n-2k})}$ 間的一個遞迴關係式，並找出 $b_{n,\,(\text{n-2k})}$ 的一般項。

引理 2： $a_{n,k}=2a_{(n-1),(k-1)}-a_{(n-2),k}$

pf： 由引理 1 可推導出 $f_n(x)=2x\cdot f_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)$

即 $\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}x^k=2x\cdot\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-1,k}x^k-\sum_{k=0}^{n-2}a_{n-2,k}x^k$

考慮 x^k 項之係數， 可得 $a_{n,k}=2a_{(n-1),(k-1)}-a_{(n-2),k}$ Q.E.D.

引理 3： $b_{n,(n-2k)}=b_{(n-1),(n-2k-1)}-b_{(n-2),(n-2k)}$

pf： 由引理 2， $a_{n,(n-2k)}=2a_{(n-1),(n-1-2k)}-a_{(n-2)(n-2k)}$

又 $a_{n,(n-2k)}=(-1)^k\cdot b_{n,(n-2k)}$ ，

$\therefore (-1)^k\cdot b_{n,(n-2k)}=2\cdot(-1)^k b_{(n-1),(n-1-2k)}-(-1)^{k-1}\cdot b_{(n-2),(n-2k)}$

$=(-1)^k\cdot b_{(n-1),(n-1-2k)}+(-1)^k\cdot b_{(n-2),(n-2k)}$

$\Rightarrow b_{n,(n-2k)}=2b_{(n-1),(n-1-2k)}+b_{n,(n-2k)}$ Q.E.D.

利用引理 3，我們要逐項推導出 $b_{n,n-2k}$ 之值

(一) $b_{n,n-2}$ 的一般項

系理 1: $b_{n,(n-2)}=2b_{(n-1),\,(n-3)}+b_{(n-2),\,(n-2)}$

pf： 由引理 3，即可得證。 Q.E.D

由系理 1，我們可得下列各式:

$b_{2,0}=1$

$b_{3,1}=2b_{2,0}+b_{1,1}=2+1=3\times 2^0$

$b_{4,2}=2b_{3,1}+b_{2,2}=2^2+2^1+2^1=4\times 2^1$

$b_{5,3}=2b_{4,2}+b_{3,3}=2^3+2^2+2^1\times 2^1+2^2=5\times 2^2$

$b_{6,4}=2b_{5,3}+b_{4,4}=16b_{2,0}+8b_{1,1}+4b_{2,2}+2b_{3,3}+b_{4,4}=2^4+2^3\times 2^0+2^2\times 2^1+2^1\times 2^2+2^0\times 2^3=6\times 2^3$

$b_{7,5}=2b_{6,4}+b_{5,5}=32b_{2,0}+16b_{1,1}+8b_{2,2}+4b_{3,3}+2b_{4,4}+b_{5,5}$

$=2^5+2^4\times 2^0+2^3\times 2^1+2^2\times 2^2+2^1\times 2^3+2^0\times 2^4=7\times 2^4$

$b_{8,6}=2b_{7,5}+b_{6,6}=64b_{2,0}+32b_{1,1}+16b_{2,2}+8b_{3,3}+4b_{4,4}+2b_{5,5}+b_{6,6}$

$=2^6+2^5\times 2^0+2^4\times 2^1+2^3\times 2^2+2^2\times 2^3+2^1\times 2^4+2^0\times 2^5=8\times 2^5$

觀察上述各式，我們猜測： $b_{n,(n-2)}=n\cdot 2^{n-3}$, $\forall n\in N$,$n\geq 2$

定理 3.3： $b_{n,(n-2)} = n\cdot 2^{n-3}$, $\forall \mathrm{n}\in \mathrm{N}$, $\mathrm{n}\geq 2$

pf： 由系理 1 $b_{n,(n-2)} = 2b_{(n-1),(n-3)} + b_{(n-2),(n-2)}$ 可得

$$
\begin{aligned}
b_{n,(n-2)} &= 2^{n-2}b_{2,0} + 2^{n-3}b_{1,1} + 2^{n-4}b_{2,2} + 2^{n-5}b_{3,3} + \ldots. + 2\cdot b_{(n-3),(\mathrm{n}-3)} + b_{(n-2),(\mathrm{n}-2)} \\
&= 2^{n-2}\times 1 + \sum_{k=1}^{n-2} 2^{n-2-k} b_{k,k} \\
&= 2^{\mathrm{n}-2} + \sum_{k=1}^{n-2} 2^{n-2-k} 2^{k-1} \qquad (\text{由定理3.2}) \\
&= 2^{\mathrm{n}-2} + \sum_{k=1}^{n-2} 2^{n-3} \\
&= 2^{\mathrm{n}-2} + (n-2)\cdot 2^{n-3} \\
&= \mathrm{n}\cdot 2^{\mathrm{n}-3}
\end{aligned}
$$

Q.E.D

(二) $b_{n,n-4}$ 的一般項的猜測

系理 2: $b_{n,(n-4)} = 2b_{(n-1),(n-5)} + b_{(n-2),(n-4)}$

pf： 由引理 3，即可得證。 Q.E.D

由系理 2，我們可得下列各式:

$b_{4,0} = 1$

$b_{5,1} = 2b_{4,0} + b_{3,1} = 2^1 + 2^0 \times 3$

$b_{6,2} = 2b_{5,1} + b_{4,2} = 4b_{4,0} + 2b_{3,1} + b_{4,2} = 2^2 + 2\times 3\times 2^0 + 1\times 4\times 2^1 = 2^2 \times 2^1 \times (3+4)$

$b_{7,3} = 2b_{6,2} + b_{5,3} = 8b_{4,0} + 4b_{3,1} + 2b_{4,2} + b_{5,3} = 2^3 + 4\times 3\times 2^0 + 2\times 4\times 2^1 + 1\times 5\times 2^2$

$\quad = 2^3 + 2^2 \times (3+4+5)$

$b_{8,4} = 2b_{7,3} + b_{6,4} = 16b_{4,0} + 8b_{3,1} + 4b_{4,2} + 2b_{5,3} + b_{6,4}$

$\quad = 2^4 + 8\times 3\times 2^0 + 4\times 4\times 2^1 + 2\times 5\times 2^2 1\times 6\times 2^3$

$\quad = 2^4 + 2^3 \times (3+4+5+6)$

$b_{9,5} = 2b_{8,4} + b_{7,5} = 32b_{4,0} + 16b_{3,1} + 8b_{4,2} + 4b_{5,3} + 2b_{6,4} + b_{7,5}$

$\quad = 2^5 + 16\times 3\times 2^0 + 8\times 4\times 2^1 + 4\times 5\times 2^2 + 2\times 6\times 2^3 + 1\times 7\times 2^4$

$\quad = 2^5 + 2^4 \times (3+4+5+6+7)$

觀察上述各式，我們猜測:

$$
\begin{aligned}
b_{n,(n-4)} &= 2^{n-4} + 2^{n-5}\left[3+4+5+\ldots+(n-2)\right] \\
&= 2^{n-5}\left[2+3+4+5+\ldots.+(n-2)\right] \\
&= 2^{n-5}\cdot \frac{n(n-3)}{2} \\
&= \frac{n(n-3)}{2!}\cdot 2^{n-5} \quad , \forall n\in N \text{ 且 } n\geq 4
\end{aligned}
$$

(三) $b_{n,n-6}$ 的一般項的猜測

系理 3: $b_{n,(n-6)} = 2b_{(n-1),(n-7)} + b_{(n-2),(n-6)}$

pf： 由引理 3，可得證 Q.E.D

由系理 3，我們可得下列各式:

$b_{6,0} = 1$

$b_{7,1} = 2b_{6,0} + b_{5,1}$

$b_{8,2} = 2b_{7,1} + b_{6,2} = 4b_{6,0} + 2b_{5,1} + b_{6,2}$

$b_{9,3} = 2b_{8,2} + b_{7,3} = 8b_{6,0} + 4b_{5,1} + 2b_{6,2} + b_{7,3}$

$b_{10,4} = 2b_{9,3} + b_{8,4} = 16b_{6,0} + 8b_{5,1} + 4b_{6,2} + 2b_{7,3} + b_{8,4}$

$b_{11,5} = 2b_{10,4} + b_{9,5} = 32b_{6,0} + 16b_{5,1} + 8b_{6,2} + 4b_{7,3} + 2b_{8,4} + b_{9,5}$

$b_{12,6} = 2b_{11,5} + b_{10,6} = 64b_{6,0} + 32b_{5,1} + 16b_{6,2} + 8b_{7,3} + 4b_{8,4} + 2b_{9,5} + b_{10,6}$

進一步計算:

$b_{6,0} = 1$

$$b_{7,1} = 2 + \frac{5\times 2}{2}\times 2^0 = 2^1 + 2^0 \times 5$$

$$b_{8,2} = 4 + 2\times\frac{5\times 2}{2}\times 2^0 + 1\times\frac{6\times 3}{2}\times 2^1 = 2^2 + 2^1 \times (5+9)$$

$$b_{9,3} = 8 + 4\times\frac{5\times 2}{2}\times 2^0 + 2\times\frac{6\times 3}{2}\times 2^1 + 1\times\frac{7\times 4}{2}\times 2^2 = 2^3 + 2^2 \times (5+9+14)$$

$$b_{10,4} = 16 + 8\times\frac{5\times 2}{2}\times 2^0 + 4\times\frac{6\times 3}{2}\times 2^1 + 2\times\frac{7\times 4}{2}\times 2^2 + 1\times\frac{8\times 5}{2}\times 2^3 = 2^4 + 2^3 \times (5+9+14+20)$$

先觀察數列 $<t_n>=<5,9,20,27,35\ldots\ldots..>$

$$b_{11,5} = 32 + 16\times\frac{5\times 2}{2}\times 2^0 + 8\times\frac{6\times 3}{2}\times 2^1 + 4\times\frac{7\times 4}{2}\times 2^2 + 2\times\frac{8\times 5}{2}\times 2^3 + 1\times\frac{9\times 6}{2}\times 2^4$$
$$= 2^5 + 2^4 \times (5+9+14+20+27)$$

$$b_{12,6} = 64 + 32\times\frac{5\times 2}{2}\times 2^0 + 16\times\frac{6\times 3}{2}\times 2^1 + 8\times\frac{7\times 4}{2}\times 2^2 + 4\times\frac{8\times 5}{2}\times 2^3 + 2\times\frac{9\times 6}{2}\times 2^4$$
$$+ 1\times\frac{10\times 7}{2}\times 2^5 = 2^6 + 2^5 \times (5+9+14+20+27+35)$$

得

$$\begin{aligned} t_1 &= 5 \\ t_2 &= t_1 + 4 \\ t_3 &= t_2 + 5 \\ t_4 &= t_3 + 6 \\ &\vdots \\ +)\, t_n &= t_{n-1} + (n+2) \end{aligned}$$

$$t_n = 5 + [4+5+6+\ldots+(n+2)] = 5 + \frac{(n+6)(n-1)}{2} = \frac{n^2+5n+4}{2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n-6} t_k = \sum_{k=1}^{n-6} \frac{k^2+5k+4}{2}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{(n-6)(n-5)(2n-11)}{6} + \frac{5}{2} \times \frac{(n-5)(n-6)}{2} + 2(n-6)$$
$$= \frac{(n-6)(n-2)(n-1)}{6}$$

所以我們猜測:

$$b_{n,n-6} = 2^{n-6} + 2^{n-7} \times \frac{(n-6)(n-2)(n-1)}{6} = 2^{n-7} \times \frac{n^3-9n^2+20n}{6}$$
$$= \frac{n(n-4)(n-5)}{3!} \times 2^{n-7} \quad (\text{n} \in \text{N 且 n} \geq 6)$$

(四) $b_{n,n-8}$ 的一般項的猜測

系理 4： $b_{n,(n-8)} = 2b_{(n-1),(n-9)} + b_{(n-2),(n-8)}$

pf: 由引理 3，可得證 Q.E.D

由系理 4，我們可得下列各式

$b_{8,0} = 1$

$b_{9,1} = 2b_{8,0} + b_{7,1} = 2b_{8,0} + b_{7,1}$

$b_{10,2} = 2b_{9,1} + b_{8,2} = 4b_{8,0} + 2b_{7,1} + b_{8,2}$

$b_{11,3} = 2b_{10,2} + b_{9,3} = 8b_{8,0} + 4b_{7,1} + 2b_{8,2} + b_{9,3}$

$b_{12,4} = 2b_{11,3} + b_{10,4} = 16b_{8,0} + 8b_{7,1} + 4b_{8,2} + 2b_{9,3} + b_{10,4}$

$b_{13,5} = 2b_{12,4} + b_{11,5} = 32b_{8,0} + 16b_{7,1} + 8b_{8,2} + 4b_{9,3} + 2b_{10,4} + b_{11,5}$

$b_{14,6} = 2b_{13,5} + b_{12,6} = 64b_{8,0} + 32b_{7,1} + 16b_{8,2} + 8b_{9,3} + 4b_{10,4} + 2b_{11,5} + b_{12,6}$

進一步計算:

$b_{8,0} = 1$

$$b_{9,1} = 2 + 1 \times \frac{7 \cdot 3 \cdot 2}{3!} \cdot 2^0 = 2^0 \cdot 7$$

$$b_{10,2} = 2^2 + 2^1 \cdot \frac{7 \cdot 3 \cdot 2}{3!} \cdot 2^0 + 1 \cdot \frac{8 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 2^1 = 2^2 + 2^1 \cdot (7+16)$$

$$b_{11,3} = 2^3 + 2^2 \cdot \frac{7 \cdot 3 \cdot 2}{3!} \cdot 2^0 + 2 \cdot \frac{8 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 2^1 + 1 \cdot \frac{9 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 2^2 = 2^3 + 2^2 \cdot (7+16+30)$$

$$b_{12,4} = 2^4 + 2^3 \cdot \frac{7 \cdot 3 \cdot 2}{3!} \cdot 2^0 + 2^2 \cdot \frac{8 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 2^1 + 2 \cdot \frac{9 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 2^2 + 1 \cdot \frac{10 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot 2^3 = 2^4 + 2^3 \cdot (7+16+30+50)$$

$$b_{13,5} = 2^5 + 2^4 \cdot \frac{7 \cdot 3 \cdot 2}{3!} \cdot 2^0 + 2^3 \cdot \frac{8 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 2^1 + 2^2 \cdot \frac{9 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 2^2 + 2 \cdot \frac{10 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot 2^3 + 1 \cdot \frac{11 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot 2^4$$
$$= 2^5 + 2^4 \cdot (7+16+30+50+77)$$

$$b_{14,6} = 2^6 + 2^5 \cdot \frac{7 \cdot 3 \cdot 2}{3!} \cdot 2^0 + 2^4 \cdot \frac{8 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot 2^1 + 2^3 \cdot \frac{9 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot 2^2 + 2^2 \cdot \frac{10 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot 2^3 + 2 \cdot \frac{11 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot 2^4 + 1 \cdot \frac{12 \cdot 8 \cdot 7}{3!} \cdot 2^5$$
$$= 2^6 + 2^5 \cdot (7+16+30+50+77+112)$$

先觀察數列 $<t_n>=<7,16,30,50,77,112,......>$

考慮 $<q_n>=<t_{n+1}-t_n>=<9,14,20,27,......>$

得遞迴關係式

$$q_1=9$$
$$q_2=q_1+5$$
$$q_3=q_2+6$$
$$q_4=q_3+7$$

$$\underline{+)q_n=q_{n-1}+(n+3)}$$

$$q_n=9+[5+6+...+(n+3)]$$
$$=9+\frac{(\mathrm{n}+8)(\mathrm{n}-4)}{2}=\frac{n^2+7n+10}{2}$$

則 $t_n=7+\sum_{k=1}^{n-1}q_k=7+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2+7k+10}{2}$

$$=7+\frac{1}{2}\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{7}{2}\times\frac{(n-1)n}{2}+5(n-1)$$
$$=\frac{\mathrm{n}^3+9n^2+20n+12}{6}$$

所以 ,我們猜測

$$b_{n,n-8}$$
$$=2^{n-8}+2^{n-9}\sum_{k=1}^{n-8}\frac{k^3+9k^2+20k+12}{6}$$
$$=2^{\mathrm{n}-8}+2^{n-9}\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{(n-8)^2(n-7)^2}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{(n-8)(n-7)(2n-15)}{6}+\frac{10}{3}\cdot\frac{(n-8)(n-7)}{2}+2\cdot(n-8)\right]$$
$$=2^{\mathrm{n}-9}\times\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}\qquad(\mathrm{n}\in\mathrm{N}\text{且}\mathrm{n}\geq 8)$$

(五) $b_{n,n-10}$ 的一般項的猜測

因為計算越趨繁雜，於是，我們由之前 $b_{nn}\sim b_{n(n-8)}$ 等五項所推得的公式猜測：若 $b_{n.n}\sim b_{n.n-8}$ 之結論均為正確，則 $b_{n(n-10)}$ 的一般項公式可能是----

$$\frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{5!}\times 2^{n-11},\text{ 其中 } n\in\mathrm{N}\text{且}\mathrm{n}\geq 10$$

pf：(1)當 $n=10$ 時， $2^{10-11}\times\frac{10\cdot(10-6)(10-7)(10-8)(10-9)}{5!}=1$ 成立

(2)設$n=k(k\geq 10)$時， $b_{k,(k-10)}=2^{k-11}\times\dfrac{k(k-6)(k-7)(k-8)(k-9)}{5!}$ 成立

(3)則$n=k+1(k\geq 10)$時，

$$
\begin{aligned}
b_{(k+1)(k+1)-10} &= 2b_{k,(k-10)}+b_{(k-1),(k-9)} \\
&= 2\times 2^{k-11}\times\frac{k(k-6)(k-7)(k-8)(k-9)}{5!}+2^{k-10}\times\frac{(k-1)(k-6)(k-7)(k-8)}{4!} \\
&= 2^{k-10}\times\left[\frac{k(k-6)(k-7)(k-8)(k-9)}{5!}+\frac{(k-1)(k-6)(k-7)(k-8)}{4!}\right] \\
&= 2^{k-10}\times\left\{\frac{(k-6)(k-7)(k-8)\left[(k^2-9k)+(5k-5)\right]}{5!}\right\} \\
&= 2^{k-10}\times\frac{(k-6)(k-7)(k-8)(k^2-4k-5)}{5!} \\
&= 2^{k-10}\times\frac{(k+1)(k-5)(k-6)(k-7)(k-8)}{5!} \\
&= 2^{(k+1)-11}\times\frac{(k+1)\left[(k+1)-6\right]\cdot\left[(k+1)-7\right]\cdot\left[(k+1)-8\right]\cdot\left[(k+1)-9\right]}{5!}
\end{aligned}
$$

由數學歸納法證得原式$b_{n,n-10}=2^{n-11}\times\dfrac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{5!}$，其中$n\in\mathrm{N}$且$n\geq 10$

(六)、綜合之前的各項猜測，我們想歸納出$b_{n,n-2k}$的一般項公式

觀察:

$b_{n,n}=2^{n-1}$，$n\in\mathrm{N}$

$b_{n,n-2}=n\cdot 2^{n-3}$，$n\in\mathrm{N}$且$n\geq 2$

$b_{n,n-4}=\dfrac{n(n-3)}{2!}\cdot 2^{n-5}$，$n\in\mathrm{N}$ 且$n\geq 4$

$b_{n,n-6}=\dfrac{n(n-4)(n-5)}{3!}\cdot 2^{n-7}$，$n\in\mathrm{N}$ 且$n\geq 6$

$b_{n,n-8}=\dfrac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}\cdot 2^{n-9}$，$n\in\mathrm{N}$且$n\geq 8$

$b_{n,n-10}=\dfrac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{5!}\cdot 2^{n-11}$，$n\in\mathrm{N}$且$n\geq 10$

歸納得:

$$
\begin{aligned}
b_{n,n-2k} &= n\cdot\frac{\left[n-(k+1)\right]\cdot\left[n-(k+2)\right]\cdot\ldots\cdot\left[n-(2k-1)\right]}{k!}\cdot 2^{n-2k-1} \\
&= n\cdot\frac{\left[n-(k+1)\right]\cdot\left[n-(k+2)\right]\cdot\ldots\cdot\left[n-(2k-1)\right]\cdot(n-2k)}{k!(n-2k)}\times 2^{n-2k-1} \\
&= \frac{n}{n-2k}\cdot C_{k}^{n-k-1}\times 2^{n-2k-1}
\end{aligned}
$$

三、$\cos q$ 的 n 倍角公式

***定理* 3.4 ($\cos q$ 的 n 倍角公式)：**

$$\cos nq = f_n(\cos q)\text{，}\quad \text{其中 } f_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\times\frac{n}{n-2k}\times C_k^{n-k-1}\times 2^{n-2k-1}\cdot x^{n-2k}$$

pf: 由定理 2‧1 $\cos nq+\cos(n+2)q = 2\cos q\cos(n+1)q, \forall n\in N$

$$\cos nq = 2\cos q\cos(n-1)q-\cos(n-2)q$$

(1)當 $n=1$ 時，$b_{1,1}=2^0=1$ 成立

(2)設 $n<m$ 時，即 $\cos mq = b_{m,m}\cos^m q + b_{m,m-2}\cos^{m-2}q+....+b_{m,1}\cos q + b_{m,0}$

其中 $b_{m-1,m-1-2k} = \dfrac{m-1}{m-1-2k}C_k^{m-1-k-1}\times 2^{m-1-2k-1}$ 成立

$b_{m-2,m-2-2k'} = \dfrac{m-2}{m-2-2(k-1)}C_{(k-1)}^{m-2-2(k-1)-1}\times 2^{m-1-2(k-1)-1}$ 成立

則 $b_{m,m-2k} = 2b_{m-1,m-1-2k}+b_{m-2,m-2-2k'}$

$$= 2b_{m-1,m-1-2k}+b_{m-2,m-2-2(k-1)}$$

$$=\frac{2(m-1)}{m-1-2k}C_k^{m-k-2}\times 2^{m-2k-2}+\frac{m-2}{m-2k}C_{k-1}^{m-k-2}\times 2^{m-2k-1}$$

$$=2^{m-2k-1}\left[\frac{m-1}{m-2k-1}\cdot\frac{(m-k-2)!}{k!(m-2k-2)!}+\frac{m-2}{m-2k}\cdot\frac{(m-k-2)!}{(k-1)!(m-2k-1)!}\right]$$

$$=2^{m-2k-1}\times(m-k-2)!\frac{m(m-k-1)}{k!(m-2k-1)!(m-2k)}$$

$$=\frac{m}{m-2k}\times\frac{(m-k-1)!}{k!(m-2k-1)!}\times 2^{m-2k-1}\qquad\text{原式成立}$$

故由數學歸納法知

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\times\frac{n}{n-2k}\times C_k^{n-k-1}\times 2^{n-2k-1}\cdot x^{n-2k}\qquad\text{Q.E.D.}$$

肆. $\sin q$ 的 n 倍角公式

這一節的主要結果是 $\sin q$ ***的 n 倍角公式：「定理4.1」及「定理 4.2」。***

(一) n 為奇數

$$\sin q = \sin q$$
$$\sin 3q = 3\sin q - 4\sin^3 q$$
$$\sin 5q = 5\sin q - 20\sin^3 q + 16\sin^5 q$$
$$\sin 7q = 7\sin q - 56\sin^3 q + 112\sin^5 q - 64\sin^7 q \qquad (4.1)$$
$$\sin 9q = 9\sin q - 120\sin^3 q + 432\sin^5 q - 576\sin^7 q + 256\sin^9 q$$
$$\sin 11q = 11\sin q - 220\sin^3 q + 1232\sin^5 q - 2816\sin^7 q + 2816\sin^9 q - 1024\sin^{11} q$$

我們希望將 $\sin nq$ 以 $\sin q$ 的形式由低而高依次展開，即:找出多項式 $g_n(x)$,使得

$$\sin nq = g_n(\sin q)$$

由表(4.1),我們猜測:

1. $\deg g_n(x) = n$

設 $g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} x^k$

2. $b_{n,2k} = 0, \quad 0 \le \mathrm{k} \le \frac{\mathrm{n-1}}{2}$
3. $b_{n,1}, b_{n,3}, b_{n,5}, \ldots\ldots$ 之各項係數為正負值交錯,

   若將 $b_{n,k}$ 之正負記成 $\operatorname{sgn} b_{n,k}$ 　記 $|b_{n,k}| = a_{n,k}$

   則 $\operatorname{sgn} b_{n,2k+1} = (-1)^k, \quad 0 \le \mathrm{k} \le \frac{\mathrm{n-1}}{2}$

   令 $b_{n,2k+1} = (-1)^k \cdot a_{n,2k+1} \quad ,0 \le \mathrm{k} \le \frac{\mathrm{n-1}}{2}$

現在我們試著計算 $a_{n,2k+1}$

（1） $a_{n,1} = n$

（2）關於 $a_{n,3}$：

$$a_{3,3} = a_{3,1} + 1$$
$$a_{5,3} = a_{5,1} + 15 = a_{5,1} + 1 + 14$$
$$a_{7,3} = a_{7,1} + 49 = a_{7,1} + 1 + 14 + 34$$
$$a_{9,3} = a_{9,1} + 111 = a_{9,1} + 1 + 14 + 34 + 62$$
$$a_{11,3} = a_{11,1} + 209 = a_{11,1} + 1 + 14 + 34 + 62 + 98$$
$$\mathrm{N}$$

數列 14，34，62，98……的一般項為 $4k^2 + 8k + 2$

$$\therefore a_{n,3} = a_{n,1} + 1 + \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} (4k^2 + 8k + 2) \; = n + 1 + \sum_{k=1}^{\frac{n-3}{2}} (4k^2 + 8k + 2)$$
$$= \frac{(n-1)n(n+1)}{3\,!} \quad (\mathrm{n = 2t + 1, t \in N})$$

(3)關於 $a_{n,5}$：

$a_{5,5}=16=a_{53}-4$

60

$a_{7,5}=112=a_{7,3}+56$ 196

256 248

$a_{9,5}=432=a_{9,3}+312$ 444 144

700 392 32

$a_{11,5}=1232=a_{11,3}+1012$ 836 176

1536 568 32

$a_{13,5}=2912=a_{13,3}+2548$ 1404 208

2940 776

$a_{15,5}=6048=a_{15,3}+5488$ 2180

5120

$a_{17,5}=11424=a_{17,3}+10608$

考慮數列 $<a_n>=<-4,56,312,1012,2548.......>$

$<b_n>=<60,256,700,1536,2940.......>$

$<c_n>=<196,444,836,1404,2180.......>$

$<d_n>=<248,392,568,776.......>$

$d_n=16n^2+96n+136$ $c_n=196+\sum_{k=1}^{n-1}d_k=196+\sum_{k=1}^{n-1}(16k^2+96k+136)=\frac{16n^3+120n^2+272n+180}{3}$

$b_n=60+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=60+\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{16k^3+120k^2+272k+180}{3})=\frac{4n^4+32n^3+80n^2+64n}{3}$

$a_n=-4+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=-4+\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{4k^4+32k^3+80k^2+64k}{3})=\frac{2(n+1)(2n^4+13n^3+17n^2-17n-30)}{15}$

$$\therefore a_{n,5}=a_{n,3}+\frac{2\left(\frac{n-3}{2}+1\right)\left[2\left(\frac{n-3}{2}\right)^4+13\left(\frac{n-3}{2}\right)^3+7\left(\frac{n-3}{2}\right)^2-17\left(\frac{n-3}{2}\right)-30\right]}{15}$$

$$=\frac{(n-1)n(n+1)}{6}+\frac{(n-1)n(n+1)(n^2-29)}{120}$$

$$=\frac{(n-3)(n-1)n(n+1)(n+3)}{5!}$$

歸納(1)(2)(3)之結果，我們推測:

$$a_{n,7}=\frac{(n-5)(n-3)(n-1)n(n+1)(n+3)(n+5)}{7!}$$

$$a_{n,9}=\frac{(n-7)(n-5)(n-3)(n-1)n(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}{9!}$$

代入檢查 ，$a_{7,7}$ ，$a_{9,7}$ ，$a_{11,7}\ldots\ldots a_{9,9}$ ，$a_{11,9}$ ，$a_{13,9}$ 確實均符合此推測

最後，我們猜想:

$$a_{n,k}=\frac{[n-(k-2)]\cdot[n-(k-4)]\cdot\ldots\cdot(n-3)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot[n-(k-4)]\cdot[n-(k-2)]}{k!}$$

我們發現$a_{n,n-2k}$竟然等於第（參）節中之$b_{n,n-2k}$!

再考慮$\operatorname{sgn} b_{n,n-2k}$及$\operatorname{sgn} a_{n,n-2k}$ ：

$$\operatorname{sgn} b_{n,n-2k}=(-1)^{\frac{n-2k-1}{2}}$$

(1) $\mathrm{n}=4\mathrm{t}+1$，$\Rightarrow \operatorname{sgn} b_{n,n-2k}=(-1)^{\frac{4t-2k}{2}}=(-1)^{2t-k}=(-1)^{k}=\operatorname{sgn} a_{n,n-2k}$

(2) $\mathrm{n}=4\mathrm{t}+3$ ，$\Rightarrow \operatorname{sgn} b_{n,n-2k}=(-1)^{\frac{4t-2k+2}{2}}=(-1)^{2t-k+1}=(-1)^{k+1}=-\operatorname{sgn} a_{n,n-2k}$

所以我們可以得到: $b_{n,n-2k}=\begin{cases}a_{n,n-2k}\text{，當 } \mathrm{n}=4\mathrm{t}+1\\-a_{n,n-2k}\text{，當 } \mathrm{n}=4\mathrm{t}+3\end{cases}$

即: $g_n(x)=\begin{cases}f_n(x)\text{，當 } \mathrm{n}=4\mathrm{t}+1\\-f_n(x)\text{，當 } \mathrm{n}=4\mathrm{t}+3\end{cases}$

<u>定理 4.1</u>：$\sin nq=g_n(\sin q)$

其中 $g_n(x)=\begin{cases}f_n(x), & \text{當} n=4t+1,\forall t\in N\cup\{0\}\\-f_n(x), & \text{當} n=4t+1,\forall t\in N\cup\{0\}\end{cases}$

pf：(1) $\mathrm{n}=4\mathrm{t}+1$

$$\begin{aligned}\sin nq&=\sin(4t+1)q\\&=\cos\left[(4t+1)\frac{p}{2}-(4t+1)q\right]\\&=\cos\left[(4\mathrm{t}+1)(\frac{p}{2}-q)\right]\\&=\cos(4t+1)f\qquad(\text{令}\frac{p}{2}-q=f)\\&=\cos nf\\&=f_n(\cos f)\\&=f_n(\sin q)\qquad(\Theta\ \frac{p}{2}-q=f\ \therefore \sin q=\cos f)\end{aligned}$$

得 $g_n(x)=f_n(x)$

(2) $\mathrm{n} = 4\mathrm{t} + 3$

$$\sin nq = \sin(4t+1)q$$
$$= -\cos\left[(4t+3)\frac{p}{2} - (4t+3)q\right]$$
$$= -\cos\left[(4\mathrm{t}+3)(\frac{p}{2} - q)\right]$$
$$= -\cos nf$$
$$= -f_n(\cos f)$$
$$= -f_n(\sin q)$$

得 $g_n(x) = -f_n(x)$ Q.E.D.

(二) n 為偶數,

令 $\sin q = x, \cos q = y$

由 第壹部分(三)可得

$$\sin 2q = y\cdot(2x)$$
$$\sin 4q = y\cdot(-8x^3+4x)$$
$$\sin 6q = y\cdot(32x^5-32x^3+6x) \qquad (4.2)$$
$$\sin 8q = y\cdot(-128x^7+192x^5-80x^3+8x)$$
$$\sin 10q = y\cdot(512x^9-1024x^7+672x^5-160x^3+10x)$$
$$\sin 8q = y\cdot(-2048x^{11}+5120x^9-4608x^7+1792x^5-280x^3+12x)$$
$$\mathrm{N}$$

我們希望能找到多項式 $q_n(x)$, 使得 $\sin nq = \cos q \cdot q_n(\sin q)$

由表(4.2),我們猜測:

1. $\deg q_n(x) = n-1$

設 $q_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{n,k}x^k$

2. $r_{n,n-2k} = 0 \quad ,1 \le k \le \frac{n}{2}$
3. $r_{n,n-1}, r_{n,n-3}, r_{n,n-5}, \ldots\ldots$ 之各項係數正負值交錯

   若將 $r_{n,k}$ 之正負記為 $\operatorname{sgn} r_{n,k}$,記 $\left|r_{n,k}\right| = s_{n,k}$

   則 $\operatorname{sgn} r_{n,n-2k+1} = (-1)^k \quad ,0 \le \mathrm{k} \le \frac{\mathrm{n}}{2}$

   令 $r_{n,k} = (-1)^k \cdot s_{n,k} \quad ,0 \le \mathrm{k} \le \frac{\mathrm{n}}{2}$

現在我們試著計算 $s_{n,k}$

(1) $s_{n,n-1}$ ：

$$
\begin{aligned}
s_{2,1} &= 2 \\
s_{4,3} &= 8 = s_{2,1}\cdot 4 \\
s_{6,5} &= 32 = s_{4,3}\cdot 4 \\
s_{8,7} &= 128 = s_{6,5}\cdot 4 \\
&\vdots \\
s_{n,n-1} &= s_{n-2,n-3}\cdot 4
\end{aligned}
$$

$$s_{n,n-1} = 2\cdot 4^{\frac{n-2}{2}} = 2\cdot 2^{n-2} = 2^{n}\cdot\frac{1}{2} = 2^{n-1}$$

(2) $s_{n,n-3}$ ：

$$
\begin{aligned}
s_{4,1} &= 4 \\
s_{6,3} &= 32 = 4s_{4,1}+8s_{2,1} \\
s_{8,5} &= 192 = 4s_{6,3}+8s_{4,3} \\
s_{10,7} &= 1024 = 4s_{8,5}+8s_{6,5} \\
s_{12,9} &= 5120 = 4s_{10,7}+8s_{8,7} \\
&\vdots \\
\times)\ s_{n,n-3} &= 4s_{n-2,n-5}+8s_{n-4,n-5}
\end{aligned}
$$

$$s_{4,1}\cdot s_{6,3}\cdot s_{8,5}\cdot\ldots\cdot s_{n,n-3} = 4(4s_{4,1}+8s_{2,1})\cdot(4s_{6,3}+8s_{4,3})\cdot\ldots\cdot(4s_{n-2,n-5}+8s_{n-4,n-5})$$

$$
\begin{aligned}
s_{n,n-3} &= 4^{\frac{n-2}{2}}(1+2\cdot\frac{1}{2})(1+2\cdot\frac{1}{4})(1+2\cdot\frac{1}{6})\cdot\ldots\cdot(1+2\cdot\frac{1}{n-4}) \\
&= 2^{n-2}(1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{1}{\frac{n-4}{2}}) \\
&= 2^{n-2}\cdot 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n-2}{n-4} \\
&= 2^{n-2}(\frac{n}{2}-1) \\
&= 2^{n-3}(n-2) \\
&= 2^{n-1}\frac{(n-4)}{2}
\end{aligned}
$$

(3) $s_{n,n-5}$ ：

$$
\begin{aligned}
s_{6,1} &= 6 \\
s_{8,3} &= 4s_{6,1}+8s_{4,1}+12s_{2,1} \\
s_{10,5} &= 4s_{8,3}+8s_{6,3}+12s_{4,3} \\
s_{12,7} &= 4s_{10,5}+8s_{8,5}+12s_{6,5} \\
&\vdots \\
\times)\ s_{n,n-5} &= 4s_{n-2,n-7}+8s_{n-4,n-7}+12s_{n-6,n-7}
\end{aligned}
$$

$$s_{6,1}\cdot s_{8,3}\cdot s_{10,5}\cdot\ldots\cdot s_{n,n-5} = 6\cdot 4^{\frac{n-6}{2}}(s_{6,1}+2s_{4,1}+3s_{2,1})\cdot(s_{8,3}+2s_{6,3}+3s_{4,3})\cdot\ldots\cdot(s_{n-2,n-7}+2s_{n-4,n-7}+3s_{n-6,n-7})$$

$$s_{n,n-5}=6\cdot 2^{n-6}(1+2\cdot\frac{2}{3}+3\cdot\frac{1}{3})(1+2\cdot\frac{2}{5}+3\cdot\frac{1}{10})\cdot\ldots\cdot\left[1+2\cdot\frac{2}{n-5}+3\cdot\frac{1}{\frac{(n-5)(n-6)}{2}}\right]$$

$$=6\cdot 2^{n-6}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{21}{10}\cdot\frac{36}{21}\cdot\frac{55}{36}\cdot\ldots\cdot\frac{\frac{(n-3)(n-4)}{2}}{\frac{(n-6)(n-5)}{2}}$$

$$=2^{n-5}\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{2}$$

$$=2^{n-6}\cdot(n-3)(n-4)$$

$$=2^{n-2}\cdot\frac{(n-3)(n-4)}{16}$$

由(1),(2),(3),我們推測

$$s_{n,n-7}=2^{n-3}\cdot\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{96}$$

$$s_{n,n-9}=2^{n-4}\cdot\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{768}$$

代入檢查: $s_{8,1},s_{10,3},s_{12,9},s_{10,1},s_{12,3},\ldots\ldots$都符合此推測

最後推測 $s_{n,n-2k+1}=2^{n-(k-1)}\cdot\dfrac{(n-k)[n-(k+1)]\cdot\ldots\cdot(n-2k)}{2^k\cdot(k-1)!}$

$$=2^{n-2k+1}\cdot\frac{(n-k)[n-(k+1)][n-(k+2)]\cdot\ldots\cdot(n-2k)}{(k-1)!}$$

$$\Rightarrow r_{n,n-2k+1}=(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\cdot 2^{n-2k+1}\cdot\frac{(n-k)[n-(k+1)][n-(k+2)]\cdot\ldots\cdot(n-2k)}{(k-1)!}$$

定理 4.2: 若 n 為偶數

則 $\sin nq=\cos q\cdot\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}r_{n,n-1k+1}\sin^{n-2k+1}q$

$$=\cos q\cdot(r_{n,n-1}\sin^{n-1}q+r_{n,n-3}\sin^{n-3}q+\ldots+r_{n,1}\sin q)$$

其中 $r_{n,n-2k+1}=(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\cdot 2^{n-2k+1}\cdot\dfrac{(n-k)[n-(k+1)][n-(k+2)]\cdot\ldots\cdot(n-2k)}{(k-1)!}$

pf : 當 $n=2$ 時, $a_n=2^n\times\dfrac{1}{2}$ 成立

設 $n=m$ 時成立,即 $\sin mq=\cos q\left[a_{m,m-1}\sin^{m-1}q+a_{m,m-3}\sin q+\ldots\ldots\ldots+a_{m,1}\sin q\right]$

其中 $a_{m,[m-(2k-1)]}=2^{m-(2k-1)}\times\dfrac{(m-k)[m-(k+1)]\ldots.[m-(2k-2)]}{(k-1)!}\times(-1)^{\frac{m-2k}{2}}$

則當 $n=m+2$ 時

$\sin(m+2)q=2\cos q\sin(m+1)q-\sin mq$,(由定理 2.3)

(1) $m=4t$，則$\mathrm{m}+1=4\mathrm{t}+1$ $\quad (k'=k+1)$

$$a_{m+2,[(m+2)-(2k'-1)]}=r_{m+2,(m-2k+1)}$$

$$=2\times\frac{m+1}{m+1-2k}\times C_k^{m+1-k-1}\times 2^{m+1-2k-1}-2^{m-(2k-1)}\times\frac{(m-k)[m-(k+1)].....[m-(2k-2)]}{(k-1)!}\times(-1)^{\frac{m-2k}{2}}$$

$$=2\times\frac{m+1}{m-2k+1}\times C_k^{m-k}\times 2^{m-2k}-2^{m-2k+1}\times\frac{(m-k)(m-k-1)......(m-2k+2)}{(k-1)!}$$

$$=2^{m-2k+1}\times\left[\frac{(m+1)(m-k)!}{k!(m-2k+1)!}-\frac{k(m-k)(m-k-1)....(m-2k+2)(m-2k+1)}{k!(m-2k+1)!}\right]$$

$$=2^{m-2k+1}\times\frac{(m+1)(m-k)!-k(m-k)!}{k!(m-2k+1)!}$$

$$=2^{m-2k+1}\times\frac{(m-k+1)(m-k)!}{k!(m-2k+1)!}$$

$$=2^{m-2k+1}\times\frac{(m-k+1)(m-k)......(m-2k+2)}{k!}$$

$$=2^{(m+2)-[2(k+1)-1]}\times\frac{[(m+2)-(k+1)]\{(m+2)-[(k+1)-1]\}......\{(m+2)-[2(k+1)-2]\}}{k!}(-1)^{\frac{(m+2)-2(k+1)}{2}}$$

原式成立

(2) $m=4t+2$，則$\mathrm{m}+1=4\mathrm{t}+3$

$$a_{m+2,[(m+2)-(2k'-1)]}=r_{m+2,(m-2k+1)} \qquad (k'=k+1)$$

$$=-2\times\frac{m+1}{m+1-2k}\times C_k^{m+1-k-1}\times 2^{m+1-2k-1}-2^{m-(2k-1)}\times\frac{(m-k)[m-(k+1)].....[m-(2k-2)]}{(k-1)!}\times(-1)^{\frac{m-2k}{2}}$$

$$=-2\times\frac{m+1}{m-2k+1}\times C_k^{m-k}\times 2^{m-2k}+2^{m-2k+1}\times\frac{(m-k)(m-k-1)......(m-2k+2)}{(k-1)!}$$

$$=-2^{m-2k+1}\times\left[\frac{(m+1)(m-k)!}{k!(m-2k+1)!}-\frac{k(m-k)(m-k-1)....(m-2k+2)(m-2k+1)}{k!(m-2k+1)!}\right]$$

$$=-2^{m-2k+1}\times\frac{(m+1)(m-k)!-k(m-k)!}{k!(m-2k+1)!}$$

$$=-2^{m-2k+1}\times\frac{(m-k+1)(m-k)!}{k!(m-2k+1)!}$$

$$=-2^{m-2k+1}\times\frac{(m-k+1)(m-k)......(m-2k+2)}{k!}$$

$$=2^{(m+2)-[2(k+1)-1]}\times\frac{[(m+2)-(k+1)]\{(m+2)-[(k+1)-1]\}......\{(m+2)-[2(k+1)-2]\}}{k!}(-1)^{\frac{(m+2)-2(k+1)}{2}}$$

原式成立

故由數學歸納法知原式成立，$\forall n\in N$

伍、以遞迴數列的觀點來看 *cos* nq 之係數

因為前一節中我們發現 $\cos nq$ ***的係數間有一些遞迴關係，所以這一節中我們嘗試以遞迴數列的技巧來了解*** $\cos nq$ ***的一般項公式。遞迴關係可以化簡成一所謂特徵方程式，而我們很驚訝的發現，前一節中所導出的*** $\cos nq$ ***的係數間的遞迴關係，其相對應的特徵方程式，竟相當的簡單。***

令 $\cos nq = f_n(\cos q)$ 　其中 $f_n(x) = 2^{n-1}\cdot x^n + \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k x_n^k \cdot x^{n-2k}$

令數列 $<x_n^1> = <1,3,8,20,48,112,...> = <f_n(x)$展開式中的 n-2 次項係數>

$<x_n^2> = <1,5,18,56,160,432,...> = <f_n(x)$展開式中的 n-4 次項係數>

$<x_n^3> = <1,7,32,120,400,...> = <f_n(x)$展開式中的 n-6 次項係數>

Ν

$<x_n^k> = <f_n(x)$展開式中的 n-2k 次項係數>

一、再次觀察以下係數：

n		x_n^1	x_n^2	x_n^3		
1	1					
2	2	1= x_2^1				
3	4	3= x_3^1				
4	8	8= x_4^1	1= x_4^2			
5	16	20= x_5^1	5= x_5^2			
6	32	48= x_6^1	18= x_6^2	1= x_6^3		
7	64	112= x_7^1	56= x_7^2	7= x_7^3		
8	128	256= x_8^1	160= x_8^2	32= x_8^3	1	
9	256	576= x_9^1	432= x_9^2	120= x_9^3	9	
10	512	1280= x_{10}^1	1120= x_{10}^2	400= x_{10}^3	50	1

(一)考慮數列 $<x_n^1>$：

$$x_3^1 = 2x_2^1 + 2^0$$

$$x_4^1 = 2x_3^1 + 2^1$$

Ν

$$x_{n-1}^1 = 2x_{n-2}^1 + 2^{n-4} \text{ ------ } (1)$$

$$x_n^1 = 2x_{n-1}^1 + 2^{n-3} \text{ ------ } (2)$$

$$\Rightarrow x_n^1 - 2x_{n-1}^1 = 2x_{n-1}^1 - 4x_{n-2}^1 \qquad (\text{利用 } (2) - 2\times(1))$$

$$\Rightarrow x_n^1 = 4x_{n-1}^1 - 4x_{n-2}^1 \text{ ------ } (3)$$

$\therefore <x_n^1>$ 是一個遞迴數列且滿足特徵方程式 $x^2 = 4x - 4$

即： $(x-2)^2=0$

故 滿足(3)式之遞迴數列有 2 個特解 $<2^{n-1}>;<(n-1)\cdot 2^{n-1}>$

由遞迴數列的特性知，一般解可寫成此 2 個特解的線性組合

即： $x_n^1 = r\cdot 2^{n-1} + s\cdot (n-1)2^{n-1}$

利用 $x_2^1=1$，$x_3^1=3$，可求得係數 $r=\frac{1}{4}$, $s=\frac{1}{4}$

故得 $x_n^1 = 2^{n-3}+(n-1)2^{n-3} = n\cdot 2^{n-3}$ ，滿足定理 3.4

(二)考慮數列 $<x_n^2>$：

$$x_5^2 = 2x_4^2 + x_3^1$$
$$x_6^2 = 2x_5^2 + x_4^1$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1}^2 = 2x_{n-2}^2 + x_{n-3}^1 = 2x_{n-2}^2 + (n-3)\cdot 2^{n-6} \text{ ------ } (1)$$
$$x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + x_{n-2}^1 = 2x_{n-1}^2 + (n-2)\cdot 2^{n-5} \text{ ------ } (2)$$

$\Rightarrow$ $x_n^2 = 4x_{n-1}^2 - 4x_{n-2}^2 + 2^{n-5}$ ------ (3) (利用 $(2)-2\times(1)$ 整理可得)

同理 $x_{n-1}^2 = 4x_{n-2}^2 - 4x_{n-3}^2 + 2^{n-6}$ ------ (4)

$\Rightarrow x_n^2 = 6x_{n-1}^2 - 12x_{n-2}^2 + 8x_{n-3}^2$ ------ (5) (利用 $(3)-2\times(4)$ 整理可得)

$\therefore <x_n^2>$ 是一個遞迴數列且滿足特徵方程式 $x^3 = 6x^2 - 12x + 8$

即：$(x-2)^3=0$

故 滿足(5)式之遞迴數列有 3 個特解 $<2^{n-1}>;<(n-1)\cdot 2^{n-1}>;<(n-1)^2\cdot 2^{n-1}>$

由遞迴數列的特性知，一般解可寫成此 3 特解的線性組合

即： $x_n^2 = r\cdot 2^{n-1} + s\cdot (n-1)2^{n-1} + t\cdot (n-1)^2 2^{n-1}$

利用 $x_4^2=1$，$x_5^2=5, x_6^2=18$，可求得係數 $r=-\frac{1}{16}$, $s=-\frac{1}{32}$, $t=\frac{1}{32}$

故得 $x_n^2 = -2^{n-5}-(n-1)2^{n-6}+(n-1)^2 2^{n-6} = (n^2-3n)\cdot 2^{n-6} = \frac{n(n-3)}{2!}\cdot 2^{n-5}$ ，滿足定理 3.4

(三)考慮數列 $<x_n^3>$：

$$x_2^3 = 2x_1^3 + x_2^2$$
$$x_3^3 = 2x_2^3 + x_3^2$$
$$\vdots$$
$$x_{n-1}^3 = 2x_{n-2}^3 + x_{n-3}^2 = 2x_{n-2}^3 + \frac{(n-3)(n-6)}{2!}2^{n-8} \quad .....(1)$$
$$x_n^3 = 2x_{n-1}^3 + x_{n-2}^2 = 2x_{n-1}^3 + \frac{(n-2)(n-5)}{2!}2^{n-7} \quad .....(2)$$

$\Rightarrow$ $x_n^3 = 4x_{n-1}^3 - 4x_{n-2}^3 + (n-4)\cdot 2^{n-7}$.....(3) (利用 $(2)-2\times(1)$ 整理可得)

又 $x_{n-1}^3 = 4x_{n-2}^3 - 4x_{n-3}^3 + (n-5)\cdot 2^{n-8}$.....(4)

$\Rightarrow\ x_n^3 = 6x_{n-1}^3 - 12x_{n-2}^3 + 8x_{n-3}^3 + 2^{n-7}.....(5)$ (利用 (3) - 2×(4) 整理可得)

又 $x_{n-1}^3 = 6x_{n-2}^3 - 12x_{n-3}^3 + 8x_{n-4}^3 2^{n-8}.....(6)$

$\Rightarrow\ x_n^3 = 8x_{n-1}^3 - 24x_{n-2}^3 + 32x_{n-3}^3 - 16x_{n-4}^3$ ------ (7) (利用 (5) - 2×(6) 整理可得)

$\therefore\ < x_n^3 >$ 是一個遞迴數列且滿足特徵方程式 $x^4 = 8x^3 - 24x^2 + 32x - 16$

即： $(x-2)^4 = 0$

故 滿足(7)式之遞迴數列有 4 個特解

$< 2^{n-1} >; < (n-1)\cdot 2^{n-1} >; < (n-1)^2 \cdot 2^{n-1} >; < (n-1)^3 \cdot 2^{n-1} >$

由遞迴數列的特性知，一般解可寫成此 4 特解的線性組合

即： $x_n^3 = r\cdot 2^{n-1} + s\cdot (n-1)2^{n-1} + t\cdot (n-1)^2 2^{n-1} + u\cdot (n-1)^3 2^{n-1}$

利用 $x_6^3 = 1, x_7^3 = 7, x_8^3 = 32, x_9^3 = 120$ ，可求得係數 $r = \frac{1}{32}, s = -\frac{5}{384}, \quad t = -\frac{1}{64}, u = \frac{1}{384}$

$$\Rightarrow x_n^3 = \frac{1}{32}\cdot 2^{n-1} + \frac{5}{384}\cdot (n-1)\cdot 2^{n-1} - \frac{1}{64}(n-1)^2\cdot 2^{n-1} + \frac{1}{384}\cdot (n-1)^3\cdot 2^{n-1} = \frac{n(n-4)(n-5)}{3!}\cdot 2^{n-7}$$

滿足定理 3.4

由(一) ~ (三)，我們猜測

$< x_n^k >$ 所滿足特徵方程式為 $(x-2)^{k+1} = 0$

二、結論

<u>定理 5.1</u>：對任意 $k \in N$ ，$< x_n^k >$ 是一個遞迴數列且滿足特徵方程式 $(x-2)^{k+1} = 0$ ，且

$$x_n^k = \frac{n\cdot (n-k-1)\cdot (n-k-2)....(n-2k+1)}{k!}\cdot 2^{n-2k-1}$$

pf：(1)當 $k = 1$ 時，由一、(一)知 $< x_n^1 >$ 的特徵方程為 $(x-2)^2 = 0$ 。

(2)設當 $k = p$ 時成立

即設 $< x_n^p >$ 的特徵方程為 $(x-2)^{p+1} = 0$ ，

展開 $(x-2)^{p+1} = x^{p+1} + C_1^{p+1}\cdot (-2)\cdot x^p + ... + C_{p+1}^{p+1}(-2)^{p+1}$

即 $x_{n+1}^p - 2\cdot C_1^{p+1} x_n^p + ... + (-2)^{p+1}\cdot C_{p+1}^{p+1} x_{n-p}^p = 0$

則當 $k = p+1$ 時，考慮數列 $< x_n^{p+1} >$

由引理 3. $x_n^{p+1} = 2\cdot x_{n-1}^{p+1} + x_n^p \quad \Rightarrow \quad x_n^p = x_n^{p+1} - 2x_{n-1}^{p+1}$

因為 $< x_n^p >$， 滿足遞迴關係 $x_{n+1}^p - 2\cdot C_1^{p+1} x_n^p + ... + (-2)^{p+1}\cdot C_{p+1}^{p+1} x_{n-p}^p = 0$

$$\therefore \left(x_{n+1}^{p+1} - 2x_n^{p+1}\right) + C_1^{p+1}\cdot(-2)\cdot\left(x_n^{p+1} - 2x_{n-1}^{p+1}\right) + \cdots + (-2)^{p+1}\cdot C_{p+1}^{p+1}\cdot\left(x_{n-p}^{p+1} - 2x_{n-p-1}^{p+1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_{n+1}^{p+1} + \left(a_1^{\ p+1} - 2\right)x_n^{p+1} + \left(a_2^{\ p+1} - 2a_1^{\ p+1}\right)x_{n-1}^{p+1} + \cdots + \left(a_{p+1}^{\ p+1} - 2a_p^{\ p+1}\right)x_{n-p}^{p+1} - 2a_{p+1}^{\ p+1} x_{n-p-1}^{p+1} = 0$$

其中 $a_k^{\ p+1} = C_k^{p+1}\cdot(-2)^k$ ，$k=1, 2, 3, \cdots, p+1$

令 $a_1^{\ p+2} \equiv a_1^{\ p+1} - 2,\ a_2^{\ p+2} \equiv a_2^{\ p+1} - 2a_1^{\ p+1},\ \cdots a_{p+2}^{\ p+2} \equiv -2a_{p+1}^{\ p+1}$

$$\Rightarrow x_{n+1}^{p+1} + a_1^{\ p+2} x_n^{p+1} + \cdots + a_{p+2}^{\ p+2} x_{n-p-1}^{p+1} = 0$$

而

$$a_k^{\ p+2} = a_k^{\ p+1} - 2a_{k-1}^{\ P+1} = C_k^{p+1}\cdot(-2)^k - 2\cdot C_{k-1}^{P+1}\cdot(-2)^{k-1} = C_k^{p+2}\cdot(-2)^k \quad ,k=1,2,3,\ldots,p+1$$

$$C_{p+1}^{p+1}\cdot(-2)^{p+1}\cdot(-2) = C_{p+2}^{p+2}\cdot(-2)^{p+2} = (-2)^{p+2} = a_{p+2}^{\ p+2}$$

故 $< x_n^{p+1} >$ 滿足遞迴關係 $x_{n+1}^{p+1} - 2\cdot C_1^{p+2} x_n^{p+1} + ... + (-2)^{p+2}\cdot x_{n-p-1}^{p+1} = 0$

所以 $< x_n^{p+1} >$ 的特徵方程為 $(x-2)^{p+2} = 0$

根據上述定理，利用遞迴數列的特性，$< x_n^k >$ 可寫成 $< 2^{n-1} >; < (n-1)\cdot 2^{n-1} >;$
$< (n-1)^2\cdot 2^{n-1} > \ldots < (n-1)^k \cdot 2^{n-1} >$ 的線性組合，再利用初始條件即可求出 $< x_n^k >$ 。

$$x_n^2 = \frac{(n-3)\cdot n}{2!}\cdot 2^{n-5}$$

$$x_n^2 = \frac{(n-4)\cdot(n-5)\cdot n}{3!}\cdot 2^{n-7}$$

$$\vdots$$

$$x_n^k = \frac{n\cdot(n-k-1)\cdot(n-k-2)....(n-2k+1)}{k!}\cdot 2^{n-2k-1}$$

我們想要証明上列的公式。

考慮由數列 $< x_n^2 >$ 推至 $< x_n^3 >$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .. \\ -2 & 1 & 0 & 0 & .. \\ 0 & -2 & 1 & 0 & .. \\ 0 & 0 & -2 & 1 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_5^3 \\ x_6^3 \\ x_7^3 \\ x_8^3 \\ \ldots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3^2 \\ x_4^2 \\ x_5^2 \\ x_6^2 \\ \ldots \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} x_5^3 \\ x_6^3 \\ x_7^3 \\ x_8^3 \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .. \\ 2 & 1 & 0 & 0 & .. \\ 4 & 2 & 1 & 0 & .. \\ 8 & 4 & 2 & 1 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_3^2 \\ x_4^2 \\ x_5^2 \\ x_6^2 \\ \cdots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{n+4}^3 = 2^{n-1} \cdot x_3^2 + 2^{n-2} \cdot x_4^2 + \ldots + 2^0 \cdot x_{n+2}^2 = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \cdot x_{k+2}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \cdot \frac{k(k+3)}{2!} \cdot 2^{k-2} = 2^{n-2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+3)}{2!}$$

$$= \frac{(n+5)\cdot(n+1)\cdot n}{3!} \cdot 2^{n-2}$$

依同樣的計算

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .. \\ -2 & 1 & 0 & 0 & .. \\ 0 & -2 & 1 & 0 & .. \\ 0 & 0 & -2 & 1 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{2k+1}^{k+1} \\ x_{2k+2}^{k+1} \\ x_{2k+3}^{k+1} \\ x_{2k+4}^{k+1} \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2k-1}^{k} \\ x_{2k}^{k} \\ x_{2k+1}^{k} \\ x_{2k+2}^{k} \\ \cdots \end{bmatrix}$$

所以

$$\begin{bmatrix} x_{2k+1}^{k+1} \\ x_{2k+2}^{k+1} \\ x_{2k+3}^{k+1} \\ x_{2k+4}^{k+1} \\ \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & .. \\ 2 & 1 & 0 & 0 & .. \\ 4 & 2 & 1 & 0 & .. \\ 8 & 4 & 2 & 1 & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{2k-1}^{k} \\ x_{2k}^{k} \\ x_{2k+1}^{k} \\ x_{2k+2}^{k} \\ \cdots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{n+2k}^{k+1} = 2^{n-1} \cdot x_{2k-1}^{k} + 2^{n-2} \cdot x_{2k}^{k} + \ldots + 2^0 \cdot x_{n+2k-2}^{k} = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} \cdot x_{2k-2}^{2}$$

$$= \sum_{t=1}^{n} 2^{n-t} \cdot \frac{(t+2k-1)\cdot(t+k-2)(t+k-3)\ldots(t)}{k!} \cdot 2^{t-2}$$

$$= 2^{n-2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(t+2k-1)\cdot(t+k-2)(t+k-3)\ldots t}{k!}$$

$$= \frac{(n+2k+1)\cdot(n+k-1)(n+k-2)\cdot\ldots\cdot n}{(k+1)!} \cdot 2^{n-2}$$

Q,E.D.

六、參考資料

1.**循環數列**：王萬良、馬淑華譯; 九章出版社

評　語

040414 高中組數學科

cos nθ和 sin nθ的一般項公式

作品說明書之數學符號無法正確呈現，破壞了整體的表現。