中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040413

國立臺南第一高級中學

指導老師姓名

巫權祐

作者姓名

康竣閔

王宇廷

蔡孟修

郭育仁

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學科

組別：高中組

作品名稱：曲率的奧秘

關鍵詞：曲率、密切圓

編號：

中文摘要：

本次研究的主題為曲率，且以高中所學的函數為主。雖然大學已有曲率公式，但我們將其表示成高中生較易了解的型式，並且以 f(x) 的方式呈現。

我們在函數曲線上取不共線三點，構成一個三角形，並求出此三角形的外接圓半徑。再將所取三點逼近，所求之半徑即為特定點的密切圓，也就是曲率半徑。而此曲率半徑的倒數，就是所求的曲率，同時我們將公式帶入高中各常見函數，以導出函數上各點曲率。

一、研究動機

在一堂與平面運動有關的物理課中，我們接觸到一個陌生的名詞—曲率半徑。對於這個不論在數學或物理界，都佔有一席之地的嶄新名詞，我們心中充滿好奇。於是乎，我們開始尋找與此有關的資料。正常來說，曲率半徑須等到大學後，才有較詳細的解說、更深入的探討與應用。在大學的公式中，曲率的公式是由三維空間降階至二維空間所推展而成的。但是，我們希望藉由座標推出曲線的曲率。我們不但希望將其研究透徹，更希望能利用高中程度的數學推出公式，使曲率半徑更容易被同學們接受與理解。

二、研究目的

(1) 了解密切圓及曲率的意義

(2) 利用極限求曲率半徑

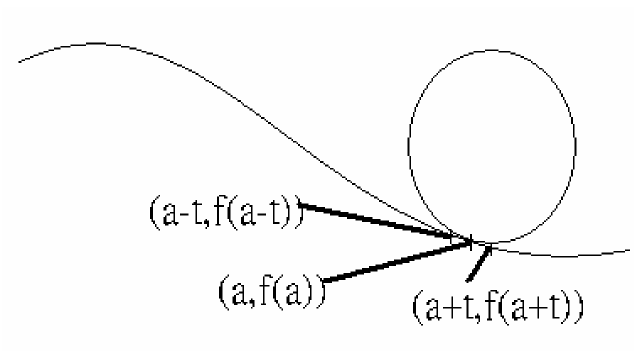
(3) 將曲率半徑表為 $f(x)$ 形式

(4) 求出高中常用函數之曲率一般解

三、研究原理

密切圓：曲線上任一點切線所對應的圓即為此點的密切圓。

求法是在曲線上取一點$(a,f(a))$，接著在兩邊分別取$(a-t,f(a-t))$及$(a+t,f(a+t))$，此三點若不共線，則成一三角形。利用 $R=\frac{abc}{4\Delta}$ 求出三點外接圓半徑，然後將結果對 t 縮小(即 $t\to 0$ 使$(a-t, f(a-t))$ 及$(a+t, f(a+t))$向$(a,f(a))$逼近，最後幾近同點)，所得 R 即$(a, f(a))$之密切圓半徑‧

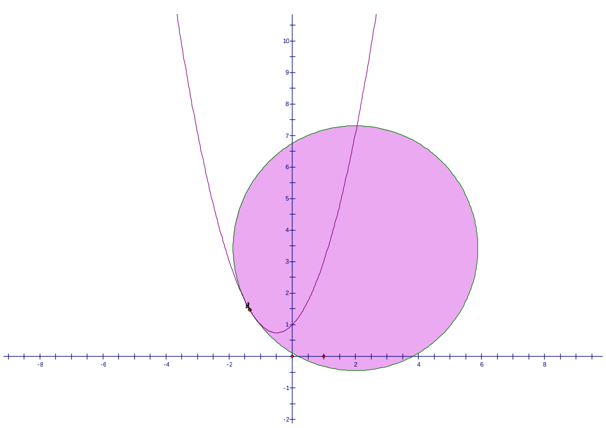


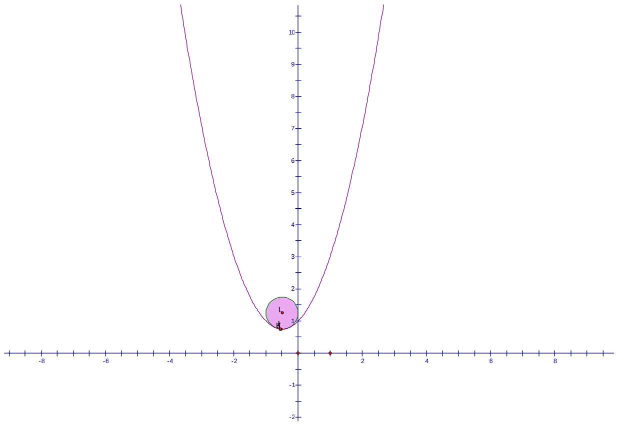
曲率：以密切圓半徑之倒數$\frac{1}{R}$為此點的曲率，因為一點附近的彎曲率越大，其密切圓半徑越小‧直線的曲率半徑為∞，故曲率為零‧

GSP 作圖：利用 GSP 找出所需要的曲線圖形，並在其上觀察

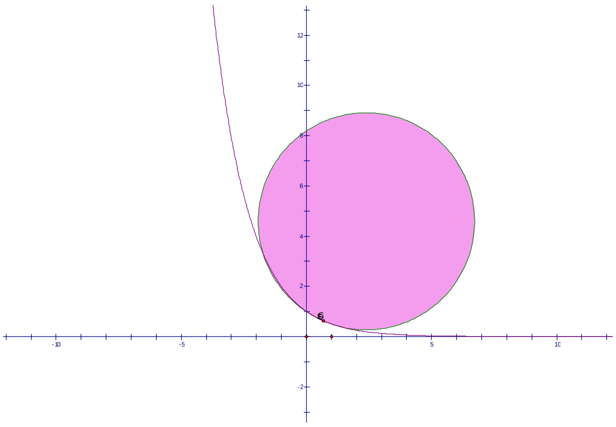
密切圓的變化趨勢。

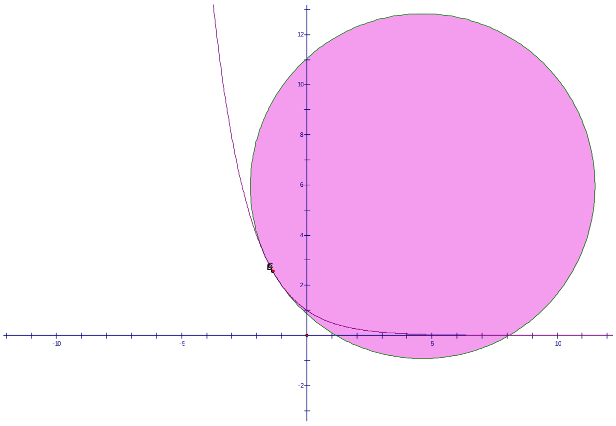
(一) .二次曲線 $y = x^2 + x + 1$



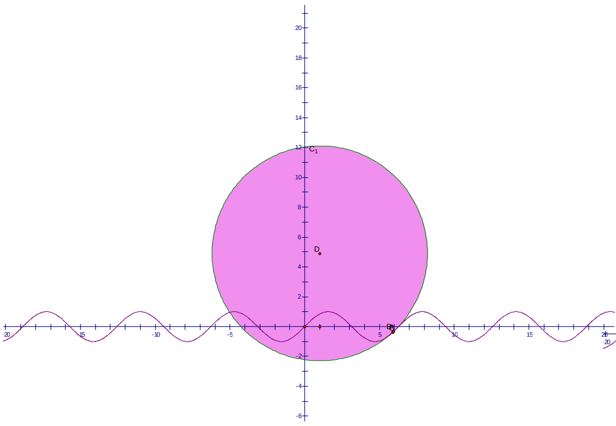


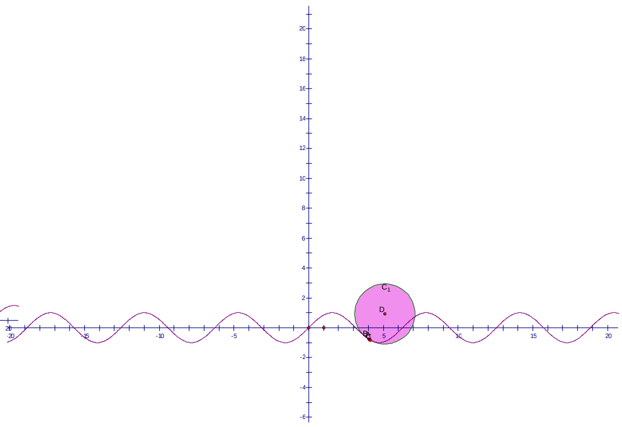
(二) .指數函數 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



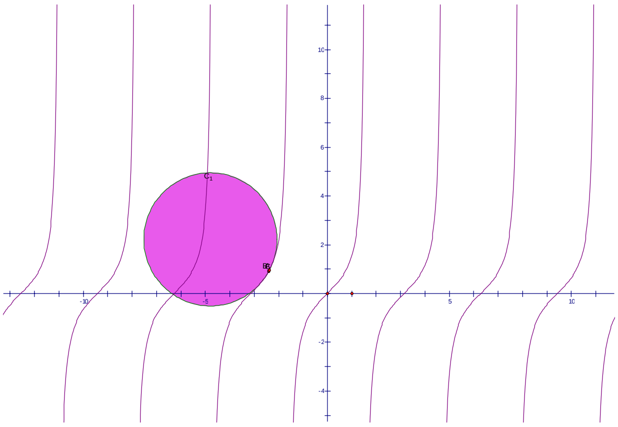


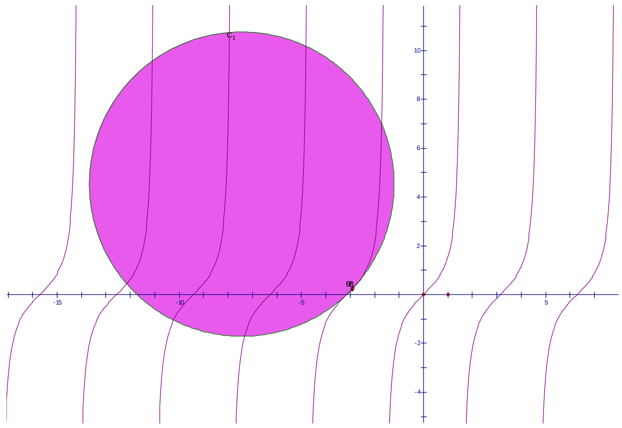
(三).正弦函數 y=sinx





(四).正切函數 y=tanx





四、研究步驟

(1)一曲線上任取一點(a,f(a))及其周圍兩點(a-t,f(a-t))，

(a+t,f(a+t))，若不共線則成三角形。其外接圓半徑可表為 R=$\frac{abc}{4\Delta}$

(2)導出的公式中使 t→0，求出(a, f (a))點之密切圓半徑 R(a)

以此求出曲率 $\kappa=\frac{1}{R}$ 之表示式

(3)藉此求出各函數曲率通式

五、研究結果

(1) 曲率公式：我們由 R=$\frac{abc}{4\Delta}$ 導出

$$R(t)=\frac{\sqrt{[f(a)-f(a-t)]^2+[a-(a-t)]^2}\times\sqrt{[f(a+t)-f(a)]^2+[(a+t)-a]^2}\times\sqrt{[f(a+t)-f(a-t)]^2+[(a+t)-(a-t)]^2}}{4\times\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & f(a) & 1 \\ a-t & f(a-t) & 1 \\ a+t & f(a+t) & 1 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{\sqrt{[f(a)-f(a-t)]^2+t^2}\times\sqrt{[f(a+t)-f(a)]^2+t^2}\times\sqrt{[f(a+t)-f(a-t)]^2+4t^2}}{2|t[f(a+t)-f(a)]+[f(a-t)-f(a)]|}$$

$$=\frac{\sqrt{\left[\frac{f(a)-f(a-t)}{t}\right]^2+1}\times\sqrt{\left[\frac{f(a+t)-f(a)}{t}\right]^2+1}\times\sqrt{\left[\frac{f(a+t)-f(a-t)}{t}\right]^2+4}}{4\left|\frac{f(a+t)-f(a)}{t^2}+\frac{f(a-t)-f(a)}{t^2}\right|}$$

$$=\frac{\sqrt{\left[\frac{f(a)-f(a-t)}{t}\right]^2+1}\times\sqrt{\left[\frac{f(a+t)-f(a)}{t}\right]^2+1}\times\sqrt{\left[\frac{f(a+t)-f(a-t)}{t}\right]^2+4}}{2\left|\frac{f(a+t)+f(a-t)-2f(a)}{t^2}\right|}$$

而 $\lim_{t\to 0}\sqrt{\left[\frac{f(a)-f(a+t)}{t}\right]^2+1}=\sqrt{1+\left[\lim_{t\to 0}\frac{f(a-t)-f(a)}{-t}\right]^2}=\sqrt{1+[f'(a)]^2}$

$$\lim_{t\to 0}\sqrt{\left[\frac{f(a+t)-f(a)}{t}\right]^2+1}=\sqrt{1+\left[\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)-f(a)}{t}\right]^2}=\sqrt{1+[f'(a)]^2}$$

$$\lim_{t\to 0}\sqrt{\left[\frac{f(a+t)-f(a-t)}{t}\right]^2+4}=\sqrt{4+\left\{\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(a+t)-f(a)}{t}+\frac{f(a-t)-f(a)}{-t}\right]\right\}^2}$$

$$=\sqrt{4+[f'(a)+f'(a)]^2}=2\sqrt{1+[f'(a)]^2}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t)+f(a-t)-2f(a)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(a+t)-f'(a-t)}{2t}$$

$$=\frac{f''(a)-f''(a)(-1)}{2}=f''(a)$$

$$\lim_{t\to 0}R(t)=\frac{\sqrt{1+[f'(a)]^2}\times\sqrt{1+[f'(a)]^2}\times 2\sqrt{1+[f'(a)]^2}}{2|f''(a)|}=\frac{\left(\sqrt{1+[f'(a)]^2}\right)^3}{|f''(a)|}$$

由以上計算我們得到了

$y=f(x)$在 $x=\text{a}$ 之密切圓半徑 $r(a)=\lim_{t\to 0}R(t)=\dfrac{\left(\sqrt{1+[f'(a)]^2}\right)^3}{|f''(a)|}$

因此，y=f(x)在 x=a 之曲率為 $\kappa(a)=\dfrac{1}{r(a)}=\dfrac{|f''(a)|}{\left(\sqrt{1+[f'(a)]^2}\right)^3}$

利用 $y=f(x)$ 之曲率公式 $\kappa(x)=\dfrac{\left|f''(x)\right|}{\left(\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\right)^3}$

(2) 高中各常見函數之曲率：

1. 直線 $y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$：

$$\kappa(x)=\frac{\left|f''(x)\right|}{(\sqrt{1+(f'(x))^2})^3}=\frac{|0|}{(\sqrt{1+a^2})^3}=0$$

2. 拋物線：

I. $y=ax^{2}$

$$\kappa(x)=\frac{|2a|}{\left(\sqrt{1+(2ax)^2}\right)^3}=\frac{|2a|}{\left(\sqrt{1+4a^2x^2}\right)^3}$$ ，在 $x=0$ 時出現最大值

II. $y=ax^2+bx+c$

$$\kappa(x)=\frac{|2a|}{\left(\sqrt{1+(2ax+b)^2}\right)^3}=\frac{|2a|}{\left(\sqrt{1+4a^2\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2}\right)^3}$$

在 $x=\dfrac{-b}{2a}$ 時出現最大值

3. 多次函數：$y=ax^n$ ($n\geq 3 \quad n\in N$)

$$\kappa(x)=\frac{\left|n(n-1)a^{n-2}\right|}{\left(\sqrt{1+\left(nax^{n-1}\right)^2}\right)^3}=\frac{\left|\left(n^2-n\right)a^{n-2}\right|}{\left(\sqrt{1+n^2a^2x^{2n-2}}\right)^3}$$

I. $y=x^3, \kappa=\dfrac{\left|f''(x)\right|}{\left\{1+\left[f'(x)\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{|6x|}{\left(1+3x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

取 $x>0, \kappa(x)=\dfrac{6x}{\left(1+9x^4\right)^{\frac{3}{2}}}=6x\left(1+9x^4\right)^{-\frac{3}{2}}$

$$\kappa'(x)=6\left[\left(1+9x^4\right)^{-\frac{3}{2}}+x\left(-\frac{3}{2}\right)\left(1+9x^4\right)^{-\frac{5}{2}}\left(36x^3\right)\right]$$

$$=6\left[\left(1+9x^4\right)^{-\frac{3}{2}}-54x^4\left(1+9x^4\right)^{-\frac{5}{2}}\right]=6\left[\frac{1+9x^4-54x^4}{\left(1+9x^4\right)^{\frac{5}{2}}}\right]$$

$$=\frac{6\left(1-36x^4\right)}{\left(1+9x^4\right)^{\frac{5}{2}}}$$

當$\kappa'(x)=0$時,$x=\frac{1}{\sqrt{6}}$,κ 有最大值,此時 $y=\frac{1}{6\sqrt{6}}$

又圖形對稱於原點,$\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{6\sqrt{6}}\right)$也爲最大值出現處

II. $y=ax^3$, $\kappa=\dfrac{\left|f''(x)\right|}{\left\{1+\left[f'(x)\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{|6ax|}{\left(1+9a^2x^4\right)^{\frac{3}{2}}}$

4. 指數函數：$y=a^x$

$$\kappa(x)=\frac{\left|a^x(\ln a)^2\right|}{\left(\sqrt{1+\left(a^x\times\ln a\right)^2}\right)^3}$$

則

$$\kappa'(x)=\frac{a^x(\ln a)^3\left[1+a^{2x}(\ln a)^2\right]^{\frac{3}{2}}-a^x(\ln a)^2\cdot\frac{3}{2}\left[1+a^{2x}(\ln a)^2\right]^{\frac{1}{2}}\cdot a^{2x}(\ln a)^3\cdot 2}{\left[1+a^{2x}(\ln a)^2\right]^3}$$

$$=\frac{a^x\cdot(\ln a)^3\left[1+a^{2x}(\ln a)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[1+a^{2x}(\ln a)^2-3\cdot a^{2x}(\ln a)^2\right]}{\left[1+a^{2x}(\ln a)^2\right]^3}$$

$$=\frac{a^x(\ln a)^3\left[1+a^{2x}(\ln a)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[1-2(\ln a)^2\bullet a^{2x}\right]}{\left[1+a^{2x}(\ln a)^2\right]^3}$$

在 $x=\frac{1}{2}\log_a \frac{1}{2(\ln a)^2}=-\log_a \sqrt{2}\left|\ln a\right|$ 有最大值

5. 對數函數：$y=\log_a x$

$$\kappa(x)=\frac{\left|\frac{1}{\ln a}\times x^{-2}\right|}{(\sqrt{1+(\frac{1}{x\ln a})^2})^3}$$

$$x>0,\kappa(x)=\frac{1}{\left|\ln a\right|\left[1+\left(\frac{1}{x\ln a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left|\ln a\right|\left[x^{\frac{4}{3}}+\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{(\ln a)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{\left|\ln a\right|}\left[x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{(\ln a)^2}x^{-\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{3}{2}}$$

$$\kappa'(x)=\frac{1}{\left|\ln a\right|}\left\{-\frac{3}{2}\left[x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{(\ln a)^2}x^{-\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{5}{2}}\right\}\left[\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{(\ln a)^2}\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}}\right]$$

$$=\frac{1}{\left|\ln a\right|}\left[x^{\frac{4}{3}}+\frac{1}{(\ln a)^2}x^{-\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{5}{2}}\left\{x^{-\frac{5}{3}}\left[\frac{1}{(\ln a)^2}-2x^2\right]\right\}$$

在 $x=\frac{1}{\sqrt{2}\left|\ln a\right|}$ 時有最大值

註：指數函數及對數函數圖形對稱於直線：$x=y$ ，而指數函數曲率最大值出現處 $x=-\log_a \sqrt{2}\left|\ln a\right|$ 代入所得 y 值 $\frac{1}{\sqrt{2}\left|\ln a\right|}$ 恰為對數函數曲率最大處之 x 值。可知兩點亦對稱於 $x=y$ 直線。兩點在圖形上之相對位置同。

6. 三角函數：

Ⅰ.$y=\sin x$

$\kappa(x)=\frac{\left|-\sin x\right|}{\left(\sqrt{1+cox^2 x}\right)^3}$ ，在 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$ 時出現最大值

II.y=cos$x$

$$\kappa(x)=\frac{|-\cos x|}{\left(\sqrt{1+\sin^2 x}\right)^3}$$，在 $x=k\pi(k\in Z)$ 時出現最大值

III. $f(x)=\tan x,\ f'(x)=\sec^2 x,\ f''(x)=2\sec^2 x\cdot\tan x$

$$\kappa(x)=\frac{2\sec^2 x\cdot\tan x}{\left(1+\sec^4 x\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\sin\cdot\cos^3 x}{\left(cos^4 x+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa'(x)=\frac{2\left(\cos x\cdot\cos^3 x-\sin^2 x\cdot 3\cos^2 x\right)\left(\cos^4 x+1\right)^{\frac{3}{2}}-2\sin x\cdot\cos^3 x\cdot\frac{3}{2}\left(\cos^4 x+1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 4\cos^3 x\left(-\sin x\right)}{\left(\cos^4 x+1\right)^3}$$

$$=\frac{2\cos^2 x\left(\cos^4 x+1\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\cos^2 x-3\sin^2 x\right)\left(\cos^4 x+1\right)+6\sin^2 x\cdot\cos^4 x\right]}{\left(\cos^4 x+1\right)^3}$$

$$=\frac{2\cos^2 x\left(\cos^4 x+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(-2\cos^6 x+3\cos^4 x+4\cos^2 x-3\right)}{\left(\cos^4 x+1\right)^3}$$

取 $g(x)=-2\cos^6 x+3\cos^4 x+4\cos^2 x-3=0$

$$x=\cos^{-1}\left\{\frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{6}\sqrt{\left(-27+6i\sqrt{978}\right)^{\frac{1}{3}}\left[\left(-27+6i\sqrt{978}\right)^{\frac{2}{3}}+33+3\left(-27+6i\sqrt{978}\right)^{\frac{1}{3}}\right]}}{\left(-27+6i\sqrt{978}\right)^{\frac{1}{3}}}\right\}$$ 時

出現最大值

六、結論

(1)曲率的公式為 $\kappa(x)=\dfrac{|f''(x)|}{\left(\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\right)^3}$

(2)下列為高中各常見函數的曲率半徑：

	曲率公式	曲率最大處 (座標位置)

直線函數 y=ax+b	0	不存在
二次函數 y=ax^2	$\dfrac{\lvert 2a\rvert}{\left[1+4a^2x^2\right]^{\frac{3}{2}}}$	(0,0)
二次函數 y=ax^2+bx+c	$\dfrac{\lvert 2a\rvert}{\left[1+4a^2\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$	$(-\dfrac{b}{2a},-\dfrac{b^2-4ac}{4a})$
三次函數 $y=x^3$	$\dfrac{\lvert 6x\rvert}{\left(1+9x^4\right)^{\frac{3}{2}}}$	$\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{6\sqrt{6}}\right)$ 及 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}},-\dfrac{1}{6\sqrt{6}}\right)$
三次函數 $y=ax^3$	$\dfrac{\lvert 6ax\rvert}{\left(1+9a^2x^4\right)^{\frac{3}{2}}}$	
高次函數 y=ax^n (n≧3,n∈N)	$\dfrac{\lvert n(n-1)ax^{n-2}\rvert}{\left[1+\left(nax^{n-1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$	
指數函數 y=a^x	$\dfrac{\lvert a^x(\ln a)^2\rvert}{\left[1+\left(a^x\times\ln a\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$	$(-\log_a\sqrt{2}\lvert\ln a\rvert,\dfrac{1}{\sqrt{2}\lvert\ln a\rvert})$
對數函數 $y=\log_a x$	$\dfrac{\left\lvert\dfrac{1}{\ln a}\times x^{-2}\right\rvert}{\left[1+\left(\dfrac{1}{x\times\ln a}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$	$(\dfrac{1}{\sqrt{2}\lvert\ln a\rvert},-\log_a\sqrt{2}\lvert\ln a\rvert)$
三角函數 y=sin$x$	$\dfrac{\lvert -\sin x\rvert}{\left[1+\cos^2 x\right]^{\frac{3}{2}}}$	$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 處 $(k\in Z)$
三角函數 y=cos$x$	$\dfrac{\lvert -\cos x\rvert}{\left[1+\sin^2 x\right]^{\frac{3}{2}}}$	$x=k\pi$ 處 $(k\in Z)$

七、未來展望：

在我們推導的過程中，是以三點共平面的方式求出曲率，但只能侷限於平面。因此，我們希望以四點共球面的方式，求出空間中曲面的曲率。將平面拓展到空間將是我們努力的目標。

評　語

040413 高中組數學科

曲率的秘密

展示中無法表現研究過程應有的興奮與快樂。