中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040412

臺北市立建國高級中學

指導老師姓名

曾俊雄

作者姓名

陳欣銳

王琨傑

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會
作品說明書

科　　別：數學

組　　別：高中組

作品名稱：有理矩陣週期性的探討

關 鍵 詞：矩陣、特徵根、　　　　（最多三個）

編　　號：

目錄

一. 、摘要：

用矩陣的特殊性質，如特徵根、行列式值，來解出有關矩陣週期的問題。

二. 、研究動機：

讀到高中數學甲(上)時，常會作到許多『使成單位矩陣的最小次冪』問題：
例如：
1.民國八十三年大學聯考自然組考題
矩陣 A＝$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，若 A^4＝$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，且 0＜θ＜π，則 θ＝________。

2.設 A＝$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，使 A^n＝$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$之最小正整數 n＝________。

此時矩陣的元都是實數，最小次冪也可以是任意正整數(透過旋轉矩陣可輕易了解)，但若將矩陣的元只限定在有理數的範圍，那麼最小次冪也可以是任意正整數嗎？

經與老師及教授討論認爲這是極具挑戰性的問題，我們便著手展開一連串的『複雜』、『轉折』、以及到最後『驚豔』之『數研奇幻三部曲』之旅。

三. 、研究目的：

首先我們將單位矩陣的部份放寬爲$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$的形式，因爲後來發現這會與複數上著名的 mobius 變換(或分式線性變換) $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad-bc\neq 0)$
有密切的關聯。

而探討以下問題：

『是不是對於所有的正整數n，皆存在有理數元矩陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $(a,b,c,d\in Q)$，使其以n爲一週期？』

【說明】：以n爲一週期，是指$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$且$\forall m|n,\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^m\neq\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$，其中$a,b,c,d,\alpha,\beta\in Q$且$\alpha,\beta\neq 0$。

並試著找出：

『由正整數組成的集合S，使得$\forall n\in S$，$\exists a,b,c,d\in Q$使$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$以$n$爲一週期。』

四. 、研究器材：紙，筆，兩顆腦袋，電腦

五. 、研究過程及方法：

(一)首部曲：『複雜』

1.減少變數個數：

一開始想從 $n=1,2,3,\ldots$ 直接展開 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$，透過矩陣相等性質，比較各元求解。但有四個變數，複雜度高。於是利用對稱的性質，我們可將其變成三個變數。爲了方便起見，我們將 a 變爲 1，而導出下列定理：

定理一：所有可能符合條件的矩陣，皆可將其設爲 $\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & r \end{bmatrix}$。

pf：設 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$，則分下列三種情形：

(1) 若 $a \neq 0$，則 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} & \frac{d}{a} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = a^n\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{a^n} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{a^n} \end{bmatrix}$

，此時 $\left(a\begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} & \frac{d}{a} \end{bmatrix}\right)^n = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = a^n\begin{bmatrix} \frac{\alpha}{a^n} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{a^n} \end{bmatrix}$

，比較係數得 $\begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ \frac{c}{a} & \frac{d}{a} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{a^n} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{a^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \alpha' \end{bmatrix}$ 亦爲一解，

若設 $p=\frac{b}{a}$，$q=\frac{c}{a}$，$r=\frac{d}{a}$，此時可設原矩陣爲 $\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & r \end{bmatrix}$。

(2)若 $a=0$ 且 $d \neq 0$，則若 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 爲一解，根據對稱性，$\begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$ 應亦爲一解，此時，根據(1)，亦可將原矩陣設爲 $\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & r \end{bmatrix}$。

(3)若 $a=0$，$d=0$，則當 n 是偶數時，$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$

而當 n 是奇數時$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 0 & b\gamma' \\ c\gamma' & 0 \end{bmatrix}$，所以在此種情形下，

因爲要符合前面的條件，於是只有在$n=2$時爲解。

所以不妨假設原矩陣爲$\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & r \end{bmatrix}$。

2.嘗試求解：

此時需用到牛頓找整係數多項方程式的所有有理根的方法，

整係數多項式的一次因式檢驗法：(或稱牛頓定理)
設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots.. + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 是整係數 n 多項式，$p, q \in Z$,
$(p, q) = 1$，若一次式$(px - q)$是 $f(x)$的因式，則 $p|a_n$ 且 $q|a_0$。

利用定理一及牛頓定理，我們便從$n = 1,2,3,\ldots,12$開始逐次展開求解，並觀察它是否有規律可循？

由於過程相當龐大及複雜，因此將$7 \le n \le 12$的部份寫在附錄一。請參閱。

(1) $n=1$時：$\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & r \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & p \\ q & r \end{bmatrix}$，有解時須符合$r = 1 \wedge p = q = 0$

(2) $n=2$時：$\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & r \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1+pq & p+pr \\ q+qr & r^2+pq \end{bmatrix}$，有解時須符合$1+r=0$

(3) $n=3$時：$\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & r \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1+2pq+pqr & p(pq+1+r+r^2) \\ q(pq+1+r+r^2) & r^3+2pqr^2+pq \end{bmatrix}$，

有解時須符合 $pq+1+r+r^2=0$

(4) $n=4$時：$\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & r \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} (1+pq)^2+pq(1+r)^2 & p(1+r)(2pq+1+r^2) \\ q(1+r)(2pq+1+r^2) & (r^2+pq)^2+pq(1+r)^2 \end{bmatrix}$，

有解時須符合$2pq+1+r^2=0$

(5) $n=5$時：先設$\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & r \end{bmatrix}^5 = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$，則不難得：

$$w = (1+2pq+pqr)(1+pq) + pq(1+r)(pq+1+r+r^2)$$

$$x = p\left[p^2q^2 + (3+4r+3r^2)pq + (1+r+r^2+r^3+r^4)\right]$$

$$y = q\left[p^2q^2 + (3+4r+3r^2)pq + (1+r+r^2+r^3+r^4)\right]$$

$$z = (pq+2pqr+r^3)(r^3+pq) + pq(1+r)(pq+1+r+r^2)$$

則若$\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}$爲一解時，$x=y=0$

由$x=0$可知$p\left[p^2q^2+\left(3+4r+3r^2\right)pq+\left(1+r+r^2+r^3+r^4\right)\right]=0$

若$p=0$代入$y=q\left[p^2q^2+\left(3+4r+3r^2\right)pq+\left(1+r+r^2+r^3+r^4\right)\right]=0$

得$q\left(1+r+r^2+r^3+r^4\right)=0$，又由牛頓定理知$\left(1+r+r^2+r^3+r^4\right)$在有理數的範圍中恆不爲 0，所以此時$q=0$，將$p=0$、$q=0$代入$w=z$的式子中，會得$r^6=1$，所以$r=\pm 1$

(i)當$r=1$時，此矩陣在$n=1$時即成立，不合

(ii)當$r=-1$時，得$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，不合

所以$p\neq 0\Rightarrow\left[p^2q^2+\left(3+4r+3r^2\right)pq+\left(1+r+r^2+r^3+r^4\right)\right]=0$

令$pq=a$,可得 $a^2+\left(3+4r+3r^2\right)a+\left(1+r+r^2+r^3+r^4\right)=0\Rightarrow$

$$a=\frac{-\left(3+4r+3r^2\right)\pm\sqrt{\left(3+4r+3r^2\right)^2-4\left(1+r+r^2+r^3+r^4\right)}}{2}$$

$$=\frac{-\left(3+4r+3r^2\right)\pm\sqrt{5+20r+30r^2+20r^3+5r^4}}{2}=\frac{-\left(3+4r+3r^2\right)\pm\sqrt{5}\left(1+r\right)^2}{2}$$

所以得 若$r\neq -1$，a和r至少有一不無有理數。

若$r=-1$，得$\begin{bmatrix}1 & p\\ q & -1\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}1 & p\\ q & -1\end{bmatrix}$，皆不爲解，所以$n=5$時無解。

(6) $n=6$時：$\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}^6=$

$$\begin{bmatrix}(1+pq(2+r))^2+pq(pq+1+r+r^2)^2 & p(pq+1+r+r^2)(1+pq(3+3r)+r^3)\\ q(pq+1+r+r^2)(1+pq(3+3r)+r^3) & pq(pq+1+r+r^2)^2+(pq(1+2r)+r^3)^2\end{bmatrix}$$

有解時須符合$1+pq(3+3r)+r^3$=0

而這樣一直做下去，發現$1\leq n\leq 12$只有1,2,3,4,6 有有理數解而對$n=5,7,8,9,10,12$時我們證明了是找不到有理數解的。(附錄一)

我們在這樣做下去後發現，若只是用硬拆繼續推廣，似乎沒有辦法證一般的n是否有解，於是我們決定用其他方向發展。

由上述與及附錄一的推論，我們對於$n=1,2,3,\ldots,12$可得一些初步的結果，並將其寫成以下定理：

定理二：設集合$S=\{1,2,3,4,6\}$，$\forall n\in S$，$\exists a,b,c,d\in Q$使$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$以$n$爲一週期。而對集合$S'=\{5,7,8,9,10,12\}$，$\forall n\in S'$及$\forall$ $a,b,c,d\in Q$，皆無法使$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$以$n$爲一週期。

透過上面的結果，我們可以構造出有理數元矩陣$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ($a,b,c,d \in Q$)，使其以n爲一週期，其中$n = 1,2,3,4,6$。
舉出實例如下：

$n = 1$時，$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$n = 2$時，$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$n = 3$時，$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$n = 4$時，$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^4 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

$n = 6$時，$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^6 = \begin{bmatrix} -27 & 0 \\ 0 & -27 \end{bmatrix}$

到目前爲止我們解決了$n = 1,2,3,\ldots,12$的部份。並有了以下的觀察及感想：
1. n 爲質數時，只有 2，3 有解。而因爲其餘的質數皆爲$6k \pm 1$形式的數，於是大膽猜測：大於 3 的質數無解。
2. 至於 8，10，12 等合成數無解。是否也可猜測：所有大於 6 的合成數皆無解？
3.不能以歸納法作簡易的臆測，$n = 1,2,3,4$時皆成立，就猜測$n \geq 5$時亦成立。

想到著名的代數問題『哥德巴赫猜想』及『費瑪最後定理』，每跳動一個數字困難度增加的程度令人難以想像。研究的方法、工具都必須作改變才可能有機會突破，達陣成功。

所以我們必須改變之前的方法，以尋求解決之道。

(二)二部曲：『轉折』

我們轉入矩陣的特性進一步探尋。爲了慎重與避免困擾起見，將一些後面證明將使用到的符號及名詞意義，在此作個說明。

令$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則

(1) 以$|A|$表示A的行列式值$ad - bc$。

(2) 以($Tr(A)$)表示$a + d$。

(3) $\begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = 0$稱爲$A$的特徵方程式，其解稱爲$A$的特徵根。

底下所有討論的矩陣都限定在二階方陣。不在引理及定理中重複說明。

首先我們先證四個引理：

引理一：若有兩個矩陣 A,B 則$|A\times B|=|A|\times|B|$

pf：設矩陣$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

$$\left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right|\times\left|\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right|$$

左式=$\begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix}=(ae+bg)(cf+dh)-(ce+dg)(af+bh)$

$=\underline{acef}+aedh+bcfg+\underline{bdgh}-\underline{acef}-bceh-adfg-\underline{bdgh}$

$=(ad-bc)(eh-fg)$=右式

引理二：若矩陣A的特稱根是λ，μ，則矩陣A的特稱根是λ,μ的充要條件爲$Tr(A)=\lambda+\mu$且$\lambda\mu=|A|$。

pf：令$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，其特徵方程式爲$(a-x)(d-x)-bc=0$，它可以化爲$x^2-Tr(A)x+|A|=0$，這與我們要證明的式子是等價的。

引理三：若矩陣A的特稱根是λ,μ，則對任意的自然數 k，λ^k及μ^k是A^k的特徵根。

pf：我們用數學歸納法證明。
k=1 時，顯然成立。

k=2 時，$A^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix}$，則

$$Tr(A)=a^2+bc+d^2+bc=(a+d)^2-2(ad-bc)=(\lambda+\mu)^2-2\lambda\mu=\lambda^2+\mu^2$$

$$|A^2|=(a^2+bc)(d^2+bc)-b(a+d)c(a+d)$$

$$=a^2d^2+\underline{a^2bc}+\underline{d^2bc}+b^2c^2-\underline{a^2bc}-\underline{d^2bc}-2abcd$$

$$=a^2d^2-2abcd+b^2c^2=(ad-bc)^2=\lambda^2\mu^2$$

故成立。

而 $A^{k+1}=\begin{bmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ c_{k+1} & d_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} aa_k+bc_k & ab_k+bd_k \\ ca_k+dc_k & cb_k+dd_k\end{bmatrix}$，於是有

$$\left|A^{k+1}\right|=(aa_k+bc_k)(cb_k+dd_k)-(ab_k+bd_k)(ca_k+dc_k)$$

$$=\underline{aca_kb_k}+ada_kd_k+bcb_kc_k+\underline{bdc_kd_k}-\underline{aca_kb_k}-adb_kc_k-bca_kd_k-\underline{bdc_kd_k}$$

$$=ada_kd_k+bcb_kc_k-adb_kc_k-bca_kd_k \quad =(ad-bc)(a_kd_k-b_kc_k) \quad =\lambda\mu\lambda^k\mu^k=\lambda^{k+1}\mu^{k+1}$$

而 $\lambda^{k+1}+\mu^{k+1}=(\lambda+\mu)(\lambda^k+\mu^k)-\lambda\mu(\lambda^{k-1}+\mu^{k-1})$

$$=(a+d)(a_k+d_k)-(ad-bc)(a^{k-1}+d^{k-1})$$

$$=aa_k+dd_k+acb_{k-1}+\underline{add_{k-1}}+\underline{ada_{k-1}}+bdc_{k-1}-\underline{ada_{k-1}}-\underline{add_{k-1}}+bca_{k-1}+bcd_{k-1}$$

$$=aa_k+dd_k+a(ab_{k-1}+bd_{k-1})+b(ca_{k-1}+dc_{k-1})$$
$$=aa_k+bc_k+cb_k+dd_k$$
$$=Tr(A^{k+1})$$

引理 4：若 $\dfrac{\theta}{\pi}$ 和 $\cos\theta$ 同爲有理數，那麼 $\cos\theta$ 必爲 $-1,-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2},1$ 五數之一。

Pf：設 $\dfrac{\theta}{\pi}=\dfrac{m}{n}$ ，m,n 都是整數且 $n>0$，

則 $\cos n\theta=\cos m\pi=(-1)^m$

又 $2\cos n\theta=(2\cos\theta)^n+a_1(2\cos\theta)^{n-1}+......+a_n$

其中 $a_i\in N$ (用歸納法易證)

則 $2\cos\theta$ 爲 $x^n+a_1x^{n-1}+......+a_n=0$ 之一有理數解

因首項係數爲 1，所以 $2\cos\theta$ 必爲整數

所以 $\cos\theta$ 必爲 $-1,-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2},1$ 五數之一。

我們將週期 n 分爲奇數與偶數的情形分別探討。

1.奇數的情形

現設 n 爲奇數

我們希望能順利的使用上面兩個引理，所以將原條件改為$\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt[n]{\alpha}} & \frac{b}{\sqrt[n]{\alpha}} \\ \frac{c}{\sqrt[n]{\alpha}} & \frac{d}{\sqrt[n]{\alpha}} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，我們證明存在 $p,q,r,s \in Q \ni \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

定理三：若有一$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$，我們必可構造出 $p,q,r,s \in Q$，使得$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

pf：我們構造的方式很簡單，考慮$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{2n}$

不難知$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} = \alpha^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{a^2+bc}{\sqrt[n]{\alpha^2}} & \frac{b(a+d)}{\sqrt[n]{\alpha^2}} \\ \frac{c(a+d)}{\sqrt[n]{\alpha^2}} & \frac{d^2+bc}{\sqrt[n]{\alpha^2}} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(令$\begin{bmatrix} \frac{a^2+bc}{\sqrt[n]{\alpha^2}} & \frac{b(a+d)}{\sqrt[n]{\alpha^2}} \\ \frac{c(a+d)}{\sqrt[n]{\alpha^2}} & \frac{d^2+bc}{\sqrt[n]{\alpha^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$)

但若將$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$兩邊取行列式

$\Rightarrow (ad-bc)^n = \alpha^2 \Rightarrow \sqrt[n]{\alpha^2} = ad-bc \in Q$

則可知 $p,q,r,s \in Q$ 且$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

令 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，設它對某些 n 有$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，則根據引理 1，

$|A|^n = |A^n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$。因為 n 是奇數，$|A| = ad-bc = 1$，令 λ, μ 是 A 的特徵根，根據引理 3，

λ^n,μ^n 應該是 $A^n=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ 的特徵根。因此 $\lambda^n=1$，$\mu^n=1$，又根據引理 2，$\lambda\mu=|A|=1$，因此可知，$\mu=\overline{\lambda}$，又根據引理 2，知 $\lambda+\mu=Tr(A)=a+d\in Q$。

令 $\lambda=\cos\theta+i\sin\theta$ 其中 $\theta=\dfrac{2t\pi}{n}$ ($0\le t<n,(n,t)=1$)，此時有

$\cos\theta=\dfrac{\lambda+\overline{\lambda}}{2}=\dfrac{\lambda+\mu}{2}=\dfrac{a+d}{2}\in Q$，又 $\dfrac{\theta}{\pi}=\dfrac{2t}{n}$，根據引理 4，我們知 $\cos\dfrac{2t\pi}{n}=0,\pm1,\pm\dfrac{1}{2}$，因此可符合條件的奇數只有 1、3。

2.偶數情形：

定理四：若有一 n 有解，則對 $\forall m\|n$ 的 m 皆有解

pf：設 $n=ml$，設存在 a,b,c,d 即不爲 0 的 $\alpha\ni\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\alpha\end{bmatrix}$。

令 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^l=\begin{bmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{bmatrix}$，則 $\begin{bmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{bmatrix}^m=\begin{bmatrix}\alpha&0\\0&\alpha\end{bmatrix}$。而且，若有一

$h<m\ni\begin{bmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{bmatrix}$，則 $x=hl<n$ 亦有 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}^x=\begin{bmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{bmatrix}$，這與 n 爲解矛盾。故可知 m 亦爲解。

又由第四部分的奇數情形可知，若有一偶數 u 有解，則它必長成如 $2^v\cdot1$ 或 $2^v\cdot3$ 的型式。但又由我們之前的證明知道，$n=8$ 及 $n=12$ 時無解，故在偶數部分只有 $n=2,4,6$ 有解，由定理二知 $n=2,4,6$ 均有解。

(三) 三部曲：『驚豔』

至此綜合了前面的討論及定理，我們獲得了令人非常**驚豔的結果！**

定理五：設 $S=\{n\|\ \exists a,b,c,d\in Q$ 使 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ 以 n 爲一週期，n 爲正整數$\}$。則 $S=\{1,2,3,4,6\}$

六. 、研究結果：設 $S=\{n \mid \exists a,b,c,d \in Q$ 使 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 以 n 爲一週期， n 爲正整數$\}$。則

$S=\{1,2,3,4,6\}$

七. 、討論：

若行列式值不等於 0，則矩陣存在反矩陣，

則 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 與我們的原本研究題目相同

若行列式值等於 0

首先我們也可以將行列式值等於 0 的矩陣都設成 $\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & pq \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & pq \end{bmatrix}$ 若其中 p=0 或 q=0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 0 \end{bmatrix}$$

若 $p \neq 0$ 且 $q \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & pq \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1+pq & p(1+pq) \\ q(1+pq) & pq(1+pq) \end{bmatrix} = (1+pq)\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & pq \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & pq \end{bmatrix}^3 = (1+pq)\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & pq \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & p \\ q & pq \end{bmatrix} = (1+pq)^2\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & pq \end{bmatrix}$$

以此類推 $\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & pq \end{bmatrix}^k = (1+pq)^{k-1}\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & pq \end{bmatrix}$

若矩陣 $A^k = A$ 則 pq=0 or -2(A=-A)

pq=0 在之前就討論到了

若 pq=-2

則$\begin{bmatrix}1 & p\\ q & -2\end{bmatrix}^2=-\begin{bmatrix}1 & p\\ q & -2\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1 & p\\ q & -2\end{bmatrix}^3=-\begin{bmatrix}1 & p\\ q & -2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & p\\ q & -2\end{bmatrix}$

所以 k=2 or 3

跟我題目比較就是 1.2

(一) 應用：我們試著回答本結論是否有何應用？

我們想到複數上的 mobius 變換(或分式線性變換)

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\ (ad-bc\neq 0)$$

其中 a、b、c、d 皆爲爲複數。

$$Z_{n+1}=\frac{az_n+b}{cz_n+d}$$

定理六：若$Z_n=\dfrac{a_nZ_0+b_n}{c_nZ_0+d_n}$，則$\begin{bmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^n$

pf：我們用歸納法證明，

設$Z_k=\dfrac{a_kZ_0+b_k}{c_kZ_0+d_k}$，且$\begin{bmatrix}a_k & b_k\\ c_k & d_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^k$

則$Z_k=\dfrac{(aa_k+b_kc)Z_0+a_kb+b_kd}{(ac_k+c_kd)Z_0+bc_k+dd_k}$

且$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_k & b_k\\ c_k & d_k\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}aa_k+bc_k & ab_k+bd_k\\ ca_k+dc_k & cb_k+dd_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{k+1} & b_{k+1}\\ c_{k+1} & d_{k+1}\end{bmatrix}$$

故定理六成立。

透過定理六我們可以知道分式線性遞推數列

$$Z_0=Z_1，Z_{k+1}=\frac{az_k+b}{cz_k+d}，ad\neq bc，Z\neq\frac{-d}{c}$$

若將原本一般$a,b,c,d\in C$ 的條件改成$a,b,c,d\in Q$，則數列$\langle Z_k\rangle$的”週期爲也只能

是 1、2、3、4、6 的情形。

(舉例

當 $Z_{n+1}=Z_n(n\ge 0)$, 則 $Z_1=Z_0$ ，這是 n=1 的解

$Z_1=Z_0$

當 $Z_{n+1}=-Z_n(n\ge 0)$, 則 $Z_2=Z_0$，這是 n=2 的解

$Z_1=-Z_0$, $Z_2=-(-Z_0)\ \Rightarrow\ Z_2=Z_0$

當 $Z_{n+1}=\dfrac{Z_n+1}{-3Z_n+1}(n\ge 0)$, 則 $Z_3=Z_0$ ，這是 n=3 的解

$$Z_1=\frac{Z_0+1}{-3Z_0+1}\qquad Z_2=\frac{Z_1+1}{-3Z_1+1}\Rightarrow Z_2=\frac{\frac{Z_0+1}{-3Z_0+1}+1}{-3\frac{Z_0+1}{-3Z_0+1}+1}=\frac{-Z_0+1}{-3Z_0-1}$$

$$Z_3=\frac{Z_2+1}{-3Z_2+1}\Rightarrow\frac{\frac{-Z_0+1}{-3Z_0-1}+1}{-3\frac{-Z_0+1}{-3Z_0-1}+1}=\frac{-4Z_0}{-4}=Z_0$$

當 $Z_{n+1}=\dfrac{Z_n-1}{Z_n+1}(n\ge 0)$, 則 $Z_4=Z_0$ ，這是 n=4 的解

$$Z_1=\frac{Z_0-1}{Z_0+1}\ Z_2=\frac{Z_1-1}{Z_1+1}=\frac{\frac{Z_0-1}{Z_0+1}-1}{\frac{Z_0-1}{Z_0+1}+1}=\frac{-1}{Z_0}$$

$$Z_3=\frac{Z_2-1}{Z_2+1}=\frac{\frac{-1}{Z_0}-1}{\frac{-1}{Z_0}+1}=\frac{-1-Z_0}{-1+Z_0}$$

$$Z_4=\frac{Z_3-1}{Z_3+1}=\frac{\frac{-1-Z_0}{-1+Z_0}-1}{\frac{-1-Z_0}{-1+Z_0}+1}=\frac{-2Z_0}{-2}=Z_0$$

當 $Z_{n+1}=\dfrac{Z_n+1}{-Z_n+2}(n\ge 0)$, 則 $Z_6=Z_0$ ，這是 n=6 的解

$$Z_1=\frac{Z_0+1}{-Z_0+2}$$

$$Z_2=\frac{Z_1+1}{-Z_1+2}=\frac{\dfrac{Z_0+1}{-Z_0+2}+1}{-\dfrac{Z_0+1}{-Z_0+2}+2}=\frac{1}{-Z_0+1}$$

$$Z_3=\frac{Z_2+1}{-Z_2+2}=\frac{\dfrac{1}{-Z_0+1}+1}{-\dfrac{1}{-Z_0+1}+2}=\frac{-Z_0+2}{-2Z_0+1}$$

$$Z_4=\frac{Z_3+1}{-Z_3+2}=\frac{\dfrac{-Z_0+2}{-2Z_0+1}+1}{-\dfrac{-Z_0+2}{-2Z_0+1}+2}=\frac{Z_0-1}{Z_0}$$

$$Z_5=\frac{Z_4+1}{-Z_4+2}=\frac{\dfrac{Z_0-1}{Z_0}+1}{-\dfrac{Z_0-1}{Z_0}+2}=\frac{2Z_0-1}{Z_0+1}$$

$$Z_6=\frac{Z_5+1}{-Z_5+2}=\frac{\dfrac{2Z_0-1}{Z_0+1}+1}{-\dfrac{2Z_0-1}{Z_0+1}+2}=\frac{3Z_0}{3}=Z_0)$$

其中，數列$\langle Z_k \rangle$的"週期爲 n"的意義是指$\Rightarrow Z_{k+n}=Z_k$

且$\forall m|n$ 使得 $Z_{k+m}\neq Z_k$ 。

(二)若將$\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$改爲單位矩陣$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，則結果又如何呢？我們可得如下定理。

> 定理七：設$S=\{n|\ \exists a,b,c,d\in Q$使$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$以$n$爲一週期， n爲正整數$\}$。則$S=\{1,2,3\}$，
>
> 其中以n爲一週期是指$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$且$\forall m|n,\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^m\neq\begin{bmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix}$，其中
>
> $a,b,c,d,,\beta\in Q$ 且 $a,,\beta\neq 0$ 。

Pf：原題的解所成集合爲$\{1,2,3,4,6\}$，故知$S\subset\{1,2,3,4,6\}$，令原矩陣爲$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

當$n=4$時，$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix}(a^2+bc)^2+bc(a+d)^2 & b(a+d)(2bc+a^2+d^2)\\ c(a+d)(2bc+a^2+d^2) & (d^2+bc)^2+bc(a+d)^2\end{bmatrix}$

又因$n=4$爲偶數，所以若$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，須符合：

$\underline{2bc+a^2+d^2=0}$　且　$\underline{\left(a^2+bc\right)^2+bc(a+d)^2=1}$

前式帶入後式得$-\frac{1}{4}(a+d)^4-\frac{3}{4}d^4-1=0$，這是不可能的。

當$n=6$時，

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^6=\begin{bmatrix} \left(a^3+bc(2a+d)\right)^2+bc\left(bc+a^2+ad+d^2\right)^2 & b\left(bc+a^2+ad+d^2\right)\left(a^3+3bc(a+d)+d^3\right) \\ c\left(bc+a^2+ad+d^2\right)\left(a^3+3bc(a+d)+d^3\right) & \left(d^3+bc(a+2d)\right)^2+bc\left(bc+a^2+ad+d^2\right)^2 \end{bmatrix}$$

又因$n=6$爲偶數，所以若$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^6=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，須符合：

$\underline{a^3+3bc(a+d)+d^3=0}$　且　$\underline{\left(a^3+bc(2a+d)\right)^2+bc\left(bc+a^2+ad+d^2\right)=1}$

前式帶入後式便知不合。

若$\forall m|n, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^m=\begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$可以成立

則 n=1,2,3,4,6 皆可滿足$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^m=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

n=1　$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

n=2　$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

n=3　$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

n=4　$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

n=6　$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^6=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(三) 若將$a,b,c,d\in Q$改爲$a,b,c,d\in Z$，則我們就將原矩陣令爲$\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & r \end{bmatrix}$，在之前我們便作出

$n=1,2,3,4,6$ 須符合的條件，而我們也一一找到了它的整數解。

$n=1$ 時，$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$n=2$ 時，$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$n=3$ 時，$\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}$

$n=4$ 時，$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}^4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$n=6$ 時，$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}^6=\begin{bmatrix}-27 & 0\\ 0 & -27\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}^6=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

於是我們知道了：若將 $a,b,c,d\in Q$ 改爲 $a,b,c,d\in Z$，其解依然爲 $\{1,2,3,4,6\}$。

(四) 關於這個結果，令我們想到正 n 邊形可鋪滿整個平面的問題。只有正 3、4、6 邊形可鋪滿整個平面(點和線也可以)。這兩者之間是否有密切巧妙的關聯？令我們非常好奇，已經著手在研究當中，希望能恨快的有結果出現。

八、結論：

1.我們終於了解並不是對於所有的正整數 n，皆存在有理數元矩陣 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ($a,b,c,d\in Q$)，使其以 n 爲一週期。

2. 若 $\exists a,b,c,d\in Q$ 使 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 以 n 爲一週期。則 n 只會是 1、2、3、4、6。

另外，我們知道『分式線性變換可以將一複雜的平面區域 D 化爲比較簡單的平面區域 D_1，把分布在區域 D 上問題，如流體力學、彈性力學及電磁場理論中的問題，轉換到區域 D_1 上來研究，從而使問題變的比較容易。』[1]

因爲矩陣的應用相當廣泛，所以若 a,b,c,d 只限定爲有理數，是否在物理、自然科學或經濟、社會科學上具有特別的意義及應用？還得老師及專家們幫我們指教才是。

九、參考文獻

[1] 嚴鎮軍　反射和反演　九章出版社　2002.9

[2] 單墫　算兩次　中國科學技術大學出版社　2001

[3] 林義雄　初等線性代數(第一冊)行列式　1986.8

[4] 林義雄　初等線性代數(第二冊)矩陣　1986.8

[5] 林義雄　初等線性代數(第四冊)內積空間及特殊方陣固有值　1986.8

[6] 華羅庚　複變函數導引　凡異出版社 1991.8

[7] 賴漢卿/楊重駿　複變數函數論及其應用　東華出版社 1995.1

十、附錄

$n=5$ 時：先設 $\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}w & x\\ y & z\end{bmatrix}$，則不難得：

$$w=(1+2pq+pqr)(1+pq)+pq(1+r)(pq+1+r+r^2)$$

$$x=p\left[p^2q^2+(3+4r+3r^2)pq+(1+r+r^2+r^3+r^4)\right]$$

$$y=q\left[p^2q^2+(3+4r+3r^2)pq+(1+r+r^2+r^3+r^4)\right]$$

$$z=(pq+2pqr+r^3)(r^3+pq)+pq(1+r)(pq+1+r+r^2)$$

則若 $\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}$ 為一解時，$x=y=0$

由 $x=0$ 可知 $p\left[p^2q^2+(3+4r+3r^2)pq+(1+r+r^2+r^3+r^4)\right]=0$

若 $p=0$ 代入 $y=q\left[p^2q^2+(3+4r+3r^2)pq+(1+r+r^2+r^3+r^4)\right]=0$

得 $q(1+r+r^2+r^3+r^4)=0$，又由於 $(1+r+r^2+r^3+r^4)$ 在有理數的範圍中恆不為 0 所以此時 $q=0$，將 $p=0$、$q=0$ 代入 $w=z$ 的式子中，會得 $r^6=1$，所以 $r=\pm1$

當 $r=1$ 時，此矩陣在 $n=1$ 時即成立，不合

當 $r=-1$ 時，此矩陣在 $n=2$ 時即成立，不合

所以 $p\neq0\Rightarrow\left[p^2q^2+(3+4r+3r^2)pq+(1+r+r^2+r^3+r^4)\right]=0$

令 $pq=a$，可得 $a^2+(3+4r+3r^2)a+(1+r+r^2+r^3+r^4)=0\Rightarrow$

$$a=\frac{-(3+4r+3r^2)\pm\sqrt{(3+4r+3r^2)^2-4(1+r+r^2+r^3+r^4)}}{2}$$

$$=\frac{-(3+4r+3r^2)\pm\sqrt{5+20r+30r^2+20r^3+5r^4}}{2}=\frac{-(3+4r+3r^2)\pm\sqrt{5}(1+r)^2}{2}$$

所以得若 $r \neq -1$，a和 r 至少有一不為有理數

及 p，q，r 至少有一數不為有理數

$n=8$時：先設$\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}^8=\begin{bmatrix}w & x\\ y & z\end{bmatrix}$，則不難得：

$$w=\left[(1+pq)^2+pq(1+r)^2\right]^2+pq(1+r)^2\left(1+r^2+2pq\right)^2$$

$$x=p(1+r)(1+r^2+2pq)\left[(1+pq)^2+\left(r^2+pq\right)^2+2pq(1+r)^2\right]$$

$$y=q(1+r)(1+r^2+2pq)\left[(1+pq)^2+\left(r^2+pq\right)^2+2pq(1+r)^2\right]$$

$$z=\left[\left(r^2+pq\right)^2+pq(1+r)^2\right]^2+pq(1+r)^2\left(1+r^2+2pq\right)^2$$

則若$\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}$為一解時，$x=y=0$

若 $p=0$，代入 $y=q(1+r)(1+r^2+2pq)\left[(1+pq)^2+\left(r^2+pq\right)^2+2pq(1+r)^2\right]=0$，得 $q(1+r)(1+r^2)\left(1+r^4\right)=0$，得$q=0$，則此矩陣在$n=1$時即為解

若$1+r=0$，這是$n=2$的條件方程式，所以此矩陣在$n=2$時即為解。

若$1+r^2+2pq=0$，這是$n=4$的條件方程式，所以此矩陣在$n=4$時即為解。

所以，$(1+pq)^2+\left(r^2+pq\right)^2+2pq(1+r)^2=2p^2q^2+4pq\left(1+r+r^2\right)+\left(1+r^4\right)=0$

令$pq=a$，得$2a^2+4a\left(1+r+r^2\right)+\left(1+r^4\right)=0$，利用公式解得

$$a=\frac{-4\left(1+r+r^2\right)\pm\sqrt{16\left(1+r+r^2\right)^2-8\left(1+r^4\right)}}{4}=\frac{-4\left(1+r+r^2\right)\pm\sqrt{8+32r+48r^2+32r^3+8r^4}}{4}$$

$$=\frac{-2\left(1+r+r^2\right)\pm\sqrt{2}(1+r)^2}{2}$$

所以得若$r \neq -1$，a和r至少有一不為有理數

及 p，q，r 至少有一數不為有理數

$n=10$時$\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}^{10}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}^{10}=\left(\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}^5\right)^2=\left(\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}^1\times\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}^4\right)^2$$

$$=\left(\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1+pq & p(1+r)\\ q(1+r) & pq+r^2\end{bmatrix}^2\right)^2$$

$$=\left(\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}(1+pq)^2+pq(1+r)^2 & p(1+r)(r^2+2pq+1)\\ q(1+r)(r^2+2pq+1) & pq(1+r)^2+(pq+r^2)^2\end{bmatrix}\right)^2$$

$$=\left(\begin{bmatrix}p^2q^2(3+2r)+pq(r^3+2r^2+3r+4)+1 & p[p^2q^2+(3r^2+4r+3)pq+r^4+r^3+r^2+r+1]\\ q[p^2q^2+(3r^2+4r+3)pq+r^4+r^3+r^2+r+1] & p^2q^2(3r+2)+pq(4r^3+3r^2+2r+1)+r^5\end{bmatrix}\right)^2$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}\Rightarrow$$

y=

$$p[p^2q^2+(3r^2+4r+3)pq+r^4+r^3+r^2+r+1][5(1+r)p^2q^2+5(r^3+r^2+r+1)+r^5+1]=0$$

又 $p[p^2q^2+(3r^2+4r+3)pq+r^4+r^3+r^2+r+1]$ 不等於 0

$5(1+r)p^2q^2+5(r^3+r^2+r+1)p+r^5+1=0$

接著我們令 $pq=a$

即之 $5(1+r)a^2+5(r^3+r^2+r+1)a+r^5+1=0$

接著解 a

判別式：$\sqrt{5^2(r^3+r^2+r+1)^2-4\cdot 5(1+r)(r^5+1)}$

$$\Rightarrow\sqrt{25(r^6+2r^5+3r^4+4r^3+3r^2+2r+1)-20(r^6+r^5+r+1)}\Rightarrow$$

$$\sqrt{5(r^6+6r^5+15r^4+20r^3+15r^2+6r+1)}$$

$$=\sqrt{5}(1+r)^3$$

所以 $a=\dfrac{-5(r^3+r^2+r+1)\pm\sqrt{5}(1+r)^3}{10(1+r)}$

所以結果跟之前相同

$n=12$ 時

$$\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}^{12}=\left(\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}^3\right)^4$$

$$=\left(\begin{bmatrix}1 & p\\ q & r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+pq & p(1+r)\\ q(1+r) & pq+r^2\end{bmatrix}\right)^4$$

$$=\begin{bmatrix}1+pq(2+r) & p(pq+1+r+r^2)\\ q(pq+1+r+r\ \ ) & pq(1+2r)+r^3\end{bmatrix}^4$$

$$=\begin{bmatrix}(1+pq(2+r))^2+pq(pq+1+r+r^2)^2 & p(pq+1+r+r^2)(1+pq(3+3r)+r^3)\\ q(pq+1+r+r^2)(1+pq(3+3r)+r^3) & pq(pq+1+r+r^2)^2+(pq(1+2r)+r^3)^2\end{bmatrix}^2$$

$\Rightarrow p\ (pq+1+r+r^2)(1+pq(3+3r)+r^3)\times$

$((1+pq(2+r))^2+pq(pq+1+r+r^2)^2+pq(pq+1+r+r^2)^2+(pq(1+2r)+r^3)^2)$

=0

又我們知道 $p(pq+1+r+r^2)(1+pq(3+3r)+r^3)\neq 0$

$\therefore (1+pq(2+r))^2+2pq(pq+1+r+r^2)^2++(pq(1+2r)+r^3)^2=0$

因此我們另 $pq=a$

則原式

$\Rightarrow 1+2a(2+r)+a^2(r^2+4r+4)+2a(a^2+2a(1+r+r^2)+r^4+2r^3+3r^2+2r+1)+$

$a^2(1+4r+4r^2)+2a(r^3+2r^4)+r^6$=0

$\Rightarrow 2a^3+a^2(9r^2+12r+9)+a(6r^4+6r^3+6r^2+6r+6)+r^6+1$

因爲題目之因素，我們要將 n=4 的條件方程式除掉

n=4 時 $2a+r^2+1=0$

$\Rightarrow a^2+(4r^2+6r+4)a+(r^4-r^2+1)=0$

則 $a=\dfrac{-(4r^2+6r+4)\pm\sqrt{12}(r+1)^2}{2}$

$a=-(2r^2+3r+2)\pm\sqrt{3}(r+1)^2$

評　語

040412 高中組數學科　佳作

有理矩陣週期性的探討

問題集中研究以有理數為係數的二階矩陣，研究者必須具備高深的數學基礎才能說明研究動機。