中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040411

國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導老師姓名

蔡秋穎

作者姓名

林鈺傑

吳梓豪

林東岳

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：高中組

作品名稱：摺出排列的奧妙－摺紙的規則與探討

關 鍵 詞：單排規則

編　　號：

壹、 摘要

紙條是一個日常生活都會隨處可得的東西，在這裡我們討論他們的性質，一方面是想要看看一個直線組成的圖形是否有任何的組合關係，當我們把一些數字化的資料整理過了以後，這個題目也已經有些成果了。

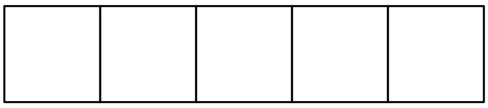
貳、 研究動機

某天，因為要考英文，拿著一條長條的單字表在背，為了方便，將其 1×4 的方格摺為一疊 1x1，下課後，拿出以前的單字表整理時，突然發現有不同的摺疊方式，便想考慮還有其他的摺法嗎?而作者之一剛好有研究類似東西，就開始研究了。

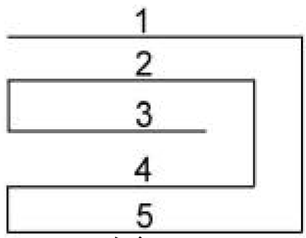
參、 研究目的

一、摺紙是指把紙分割為幾塊正方格，在這幾方塊標上數字，看看是否能在不破壞紙張的情形下，把紙張經過有限次摺疊下摺成一塊，而從上到下剛好是 1 到 n。(俯視第一張為 1，忽略第一張往下透視到第二層為 2，…，透視到第 n 層時，看到數字為 n)

(俯視圖如 $\boxed{1}$ 側視圖如圖一)。



側視圖



圖一

二、看是否有規則去掌握圖形個數，以方便討論其它的規則。

三、討論紙的摺法(圖形)以及如何分類紙條的種類(相同圖形所造成的不同排列數字)。

四、找出可以摺疊成功的排列數字規則。

五、找出不可摺疊成功的原因及規則。

肆、 研究設備器材

一、紙、筆、電腦、程式設計軟體(C++Builder6)、正方格的紙條。

二、紙條：一串列成一列的格子組成的，格子是正方形的，經過有限次摺疊可以摺成 1x1 的一疊，從上方俯視會成為單一方格。

伍、 研究過程及方法

一、利用摺好的紙條，思考如何在其上加入數字以方便討論性質。

二、將紙條攤開以後將數字列出，猜測數字的規則。

三、檢視數字所摺出的圖形，思考如何將檢查的數字數目減少以方便研究。

四、先列好一串排列數字，再來考慮排列數字是否可以摺疊(運用畫成如圖一的方式來檢驗)，

於其中討論有些數字之可摺與不可摺的有何相異之處。

五、找出$1\times n$的所有的數字排列與圖形數，再一一畫出所有的圖形。(或採實際摺疊)

六、利用數字推得的紙條$1\times n$圖形，反向思考單排規則的正確性和圖形$1\times(n+1)$總數的觀察。

七、將圖形摺好，利用摺痕來思考，找尋摺痕的性質與圖形的關係。

八、用不同方法做的結果之間，互相檢查，來驗證結果。

陸、 研究結果

一、計算紙條 1×n 的所有種類個數：

(一) 相同圖形排列數字不同的數字間的關係：

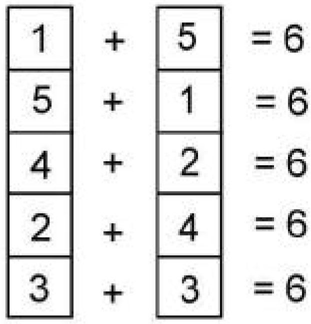
在下列情況，這些排列數字會導致相同的圖形。

(1) 原形(e)：最初的數字排列。

(2) 翻轉(R)：將原本的數字倒過來填寫。如 21534 與 43512。

(3) 鏡射(M)：將$1\times n$的的兩個排列數字上下重疊後，同一格相加恆為$n+1$，如 15423 與 51243(參考圖二)。

(4) 先翻轉再鏡射或先鏡射再翻轉(MR)：如 43215 與 15432。



圖二

(二) 動作之來源：

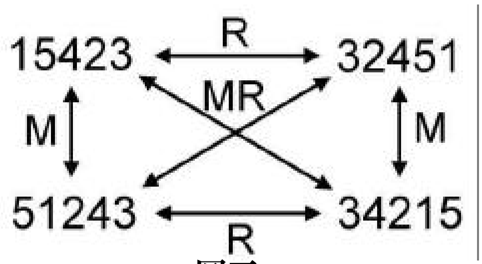
一開始的數字排列中，首先觀察到有翻轉與鏡射的規則，為了檢驗是否在連續執行數個動作時，會產生不同的數字，我們有了下列表格以檢驗之。

一開始只有 e、M、R 三種動作，檢驗連續經過其中任兩個動作是否會產生令一種數字排列，發現多一個 MR(=RM)，而在將 MR 的部分加入檢驗三個動作時，發現已經沒有別種動作會產別種數字排列。證實了只有 e、R、M、MR 四種動作。

	e	M	R	MR
e	e	M	R	MR
M	M	e	MR	R
R	R	MR	e	M
MR	MR	R	M	e

(三) 猜測 1：

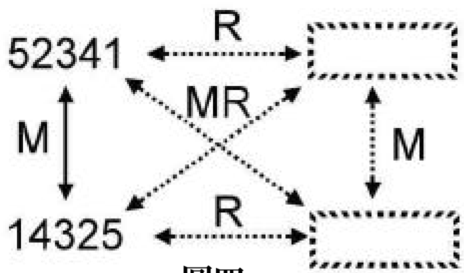
如果每個圖形都只有 4 個排列數字(如圖三)，那麼$1\times n$的圖形將會有$\frac{n!}{4}$種圖形，但是在列出$1\times 2 \sim 1\times 5$的結果並檢查發現這是不對的，因為有的圖形只有 2 個排列數字，並沒有發現有圖形是擁有 3 個或 1 個的排列數字，這使得我們的答案不是$\frac{n!}{4}$種了。



圖三

(四) 猜測 2：

因為有的圖形只有兩種排列數字，它到底是少了哪兩個動作所表出來的排列數字呢？如果我們算出這些的數字會有多少個，我們就可以將它們加回來，使得每個圖形的排列數字的個數都是 4，然後再除以 4 就會是我們的目前所要的答案了(圖四)，於是我們所臆測的結果是 $\frac{n!+q}{4}$ 種。

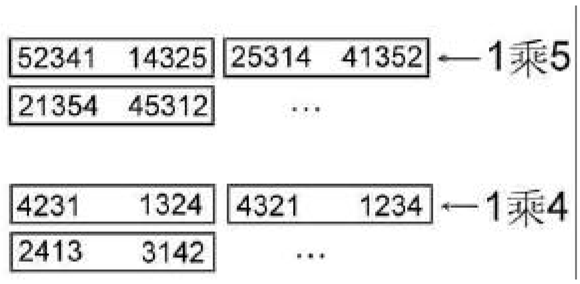


圖四

(五) 重覆的數字(缺少的部分)推導：

回到剛才的問題，只有 2 個排列數字的圖形如圖五，一個框框裡代表同一種圖形，而缺的部分(圖四)剛好是所有的兩排列數字經過 MR 的動作等於本身時，但我們在去除以 4 種的變化方法(e、M、R、MR)時，缺的部分就要將它補上，也就是補上 MR=e 的情況(M=e 與 R=e 也是需要考慮的，但不可能有這種情形)。

此處列出 1×5 和 1×4 的圖形，是為了比較偶數與奇數間的差別。它們的關係如下：



圖五

(六) MR=e 的個數

當 n 為奇數時，令 $n=2k-1,(k\in N)$，觀察圖五裡的 1×5，發現有以下關係，它們第 k 格(最中間那格)的格子裡的個數都會是 k，以第 k 格為左右分界，請參考圖六，第 1 格

的數字加第 n 格的數字和，和第 2 格的數字加第 n-1 格的數字和，…和第 m 格裡的數字加第 n-m+1 格的數字和都會是 n+1，$(1 \le m < n)$，且第 k 格的數字一定是 k，所以依據此關係，我們可以算出當 n 為奇數時，有多少個這種排列數字。填入第 1 格你有 2k-2 種選擇，當你填入第 1 格就等於填入了第 n 格，因為它們的和一定，所以填入第 2 格只有 2k-4 種選擇，…，填入第 k-2 格只有 4 種選擇，填入第 k-1 格只有 2 種選擇，依據乘法原理共有 $(2k-2)(2k-4)(2k-6)\times\cdots\times 4\times 2$ 種，也就是 $\prod_{i=1}^{k-1}(2k-2i) = 2^{k-1}\times(k-1)!$ 種。

當 n 為偶數時，令 $n = 2k, (k \in N)$，以第 k 格和第 k+1 格的接線分為左右兩邊(參考圖七)，同理，填入第 1 格有 2k 種選擇，填入第 2 格有 2k-2 種選擇，…，填入第 k-1 格有 4 種選擇，填入第 k 格有 2 種選擇，同樣的依據乘法原理共有

$(2k)(2k-2)(2k-4)(2k-6)\times\cdots\times 4\times 2$ 種，也就是 $\prod_{i=0}^{k-1}(2k-2i) = 2^{k}\times k!$ 種。

圖七

(七) 全部紙條的個數

當 n 為奇數時，令 $n = 2k-1, (k \in N)$，總共有 $\dfrac{n! + 2^{k-1}\times(k-1)!}{4}$ 個圖形數。

當 n 為偶數時，令 $n = 2k, (k \in N)$，總共有 $\dfrac{n! + 2^{k}\times k!}{4}$ 個圖形數。

這將不會是 $1\times n$ 所有「可以」摺的圖形數，因為我們並沒有將不能摺的因素加進去討論(不能摺的因素在後節有詳細的介紹)，所以上面的式子是連不能摺的圖形我們也都把它給簡化掉了，這已經大大的幫助我們加快研究了。

現在我們知道，有多少個圖形數了，包括可以摺與不能摺的，我們要如何填入圖形並只用一個排列數字來表示？注意：因為一種圖形可以有 2 或 4 種排列數字，我們取其數碼最小的為代表，例：15432>23451>43215>51234，我們取 15432 為代表。至於實際

列出紙條方式如下：列出的排列數字的第一個數字一定要小於等於 $\frac{n}{2}$(因為當開頭為 1 時，經過 M 就會變成 5，其他數字開頭也有相同的性質，故可省略)，而排列時我們先列頭尾(避免有 R 的重複，例：若開頭為 1，尾為 4，就沒有需要考慮開頭為 4，尾為 1 的狀況，且中間所排的數字經過 R 都會有相對應的數列，故可以省略不需考慮)，首先考慮所有 MR=e 的所有排列，然後再從頭列下來，將 MR 的情況刪去後，剩下的就是我們需要檢驗的排列數字了，尚可利用上面公式檢查個數。

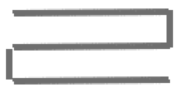
二、直觀判別可否摺疊：

利用已有的排列數字，思考可否摺疊時，我們先假設有一個可以摺疊的圖形，從紙條的橫切面來看的話，會發現它改變成為好幾條線段所組合而成的圖形如圖一，所以，我們考慮由一個數字代表一個線段，在線段不中斷的情況下，要畫的線段的數字的大小和已有的線段數字大小比較，放置在適合的位置，由上到下分出 1~n 層，數字 k 畫在第 k 層為橫線，為了將圖形畫的整齊所以把連結數字相鄰的兩個格子的摺痕畫成縱線，只要能畫成一個不交錯的圖形，此種排列數字即可摺疊。(例：15423 即畫成圖一的樣子，而圖十三則為交錯的圖形)

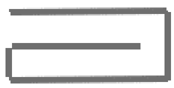
三、排列數字判別部分 1(單排規則)：

(一) 想法

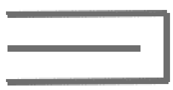
1. 因為在最基礎的 1×2 和 1×3 的圖形都能摺疊的情況，所以只要數字的大小排列和 1×2 和 1×3 的特情一樣，就可以摺。


圖八

2. 1×2 和 1×3 中 1×3 的頭端和尾端是分別位於左右的，和 1×1 的一格方格一樣，所以把 1×3 的圖形當作 1×1 處理。


圖九

3. 在摺好的一個圖形的側視圖中，任意三個連續數字的圖形必是以下四種圖形圖八和圖九是如果三個格間互相相連的情形，而圖十和圖十一中沒有相連的格子必是一串格子的尾端插入一個摺痕中，沒有其他的情形了。而在有圖十和圖十一中，需注意其前後所接的圖形樣式不能是原來的尾端不能相碰的情形。


圖十


圖十一

4. 依(2)我們每 3 橫線段一組化簡，直到最後 1×2 或 1×3 的樣子。

(二) 將圖形改成數字的特性：

連續判讀以下(1)至(4)規則(分別為圖八、九、十和十一的數字特性)，直到簡化至 1x2 或 1x3 時，即可摺疊。

注意需要考慮由上往下排列與由下往上排列的判斷。

1. 如圖十二。若紙條中的任意三個相鄰的方格中，$y+2=z+1=w$時，三數作為一數y，而紙條中大於w的數字皆-2。

如：41235 可變為 213$(4-2=2, 123 \Rightarrow 1, 5-2=2)$

2. 在於邊端(頭端或尾端)的的三個相鄰的方格中，$|q-r|=1$且$|p-r|=1$時，三數作為一數$\min(p,q)$，而紙條中大於$\max(p,q)$的數字皆-2。(在經過動作(3)和(4)後需多加一個判斷，$|s-\min(p,q)|=1$或$s+4=t+3=p+2=r+1=q$，不能化簡)

如：21534 可變為 213$(2 \Rightarrow 2, 1 \Rightarrow 1, 534 \Rightarrow 3$

3. 當格子數為奇數格，其中一邊端的相鄰二方格 q、r 與另一端的一方格 x，$r+2=x+1=q$或$q+2=x+1=r$時。可將 x 消去，q、r 視為一數 min(q ,r)，而大於 max(q ,r)的數字皆-2。

如：24513 可變為 231$(24 \Rightarrow 2, 5-2=3, 1 \Rightarrow 1\,3$ 刪去)

4. 當格子數為偶數格的時候，如果兩邊端的方格 x、r 中$|x-r|=1$)時，且其一邊端方格 r 與隔壁的方格 q 中 $|q-r|=1$時，x 刪去，q、r 視為一數 x 而大於 max(q ,r)的數字皆-2。

如：361254 可變為 4123(3 刪去$, 6-2=4, 1 \Rightarrow 1, 2 \Rightarrow 2, 54 \Rightarrow 3)$

x	…	y	z	w	…	t	s	p	q	r

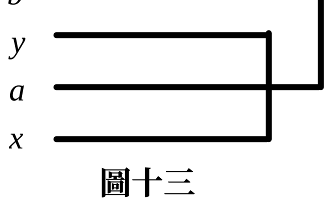
圖十二

四、排列數字判別部分 2：

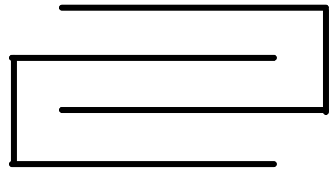
要如何建構出錯誤的圖形呢？

(一) 格子繪圖方向：在一 1×n 的方格裡，依<直觀判別可否摺疊>檢驗時格子部分(即橫線)必定是一左一右的畫，在同為奇數格的方向必定相同，在同為偶數格的方向必定相同，且偶數格與奇數格方向必相反。

(二) 而在構造紙條的過程中，只要產生兩個連接的線段產生交錯就不能夠摺疊，而不能摺疊的是兩個連續格的數字和另外兩個連續格的數字，有(三)的關係時，因為格子繪圖方向的左右，我們可以知道它們必定交錯。可以想像先有一個摺痕的中間要加上一個數字，而格子繪圖方向的來源一定不是來自左方就是右方其中之一，而其方向由格字是奇數格或偶數格來決定。交錯的就如圖十三，不交錯的就如圖十四。



圖十三



圖十四

(三) 在一 1×n 的方格裡首先有兩種情況如圖十五，規則如下：

		第 m 格	第 $m+1$ 格		第 p 格	第 $p+1$ 格		$m,p\in odd$
	$\cdots$	a	b	$\cdots$	x	y	$\cdots$	

		第 m 格	第 $m+1$ 格		第 p 格	第 $p+1$ 格		$m,p\in even$
	$\cdots$	a	b	$\cdots$	x	y	$\cdots$	

圖十五

$$a>b\begin{cases} x>y\begin{cases} x>a,b<y<a-(*) \\ y<b,b<x<a \end{cases} \\ x<y\begin{cases} y>a,b<x<a \\ x<b,b<y<a \end{cases} \end{cases}$$

$$a<b\begin{cases} x>y\begin{cases} x>b,a<y<b \\ y<a,a<x<b \end{cases} \\ x<y\begin{cases} y>b,a<x<b \\ x<a,a<y<b \end{cases} \end{cases}$$

有 2^4 種情況。只要符合其中的任何一種，即產生圖形交錯。而我們以此規則來當作撰寫程式的基礎，來檢驗個數。圖十一即為(*)的情況。

五、檢驗部分，列出所有圖形：

考慮用紙的摺痕處來判斷紙的種類，令攤開的摺痕向上計為+，向下計為-，將可以摺疊方格紙重新分類。如 1×4 可以為+++,++-,+-+,---,--+,-+-這六種，又+-完全對調可視為同種，故同 3 種。

因為圖形重複的數據太高，所以我們為了將相同的圖形用符號表示出來，就使用了 e M R 這些代號表示圖形重複狀況，e 代表原來的圖形；M 代表對 e 而言，加號變為減號，減號變為加號(即是乘以一個負號)；R 就是將 e 圖形符號做左右翻轉(例：++--變為--++)，又與前面一樣，MR=RM 即擁有交換律。

依照算紙條種類個數方法一樣，我們先列出以下的表格，考慮各種情形 MRM,RMR 等，知道只有以下這些置換方式，相同的，我們找出它的置換動作有哪些。

	E	M	R	MR
E	E	M	R	MR
M	M	E	MR	R
R	R	MR	e	M
MR	MR	R	M	E

當紙痕數為奇數時，令 2k-1 代表個數。討論經過以下動作後的情形，在 e 的狀況下，每條摺痕都有向上(+)和向下(-)兩種狀況，故共有 2^{2k-1} 種，而 M=e 的狀況有 0 種，R=e 的狀況有 2^k 種，MR=e 的情況就沒有了。

依此可得當符號個數為奇數時，$2k-1$ 代表個數，摺痕為 $\frac{2^{2k-1}+2^k}{4}$ 個。

當紙痕數為偶數時，令 $2k$ 代表個數。e 的狀況下，共有 2^{2k} 種，而 M 的狀況有 0 種，R 的狀況有 2^k 種，MR 的狀況有 2^k 種。

依此可得當符號個數為偶數時，$2k$ 代表個數，摺痕為 $\frac{2^{2k}+2^{2k+1}}{4}$ 個。

利用所得的正負號來判斷紙條的摺疊方式，依照列表以及分析得出由摺痕來判斷圖形的方法。我們採用包含的方式來區分圖形，也就是當翻開一個摺痕 A 時，如有另一摺痕 B 在其中，稱為 A 包含 B。計為 A⊃B。

(一) 連續的兩個同號(++,--)中間一定有包含的關係，而在連續的兩個異號(+-,-+)中間一定沒有包含的關係。

(二) 當連續的三個摺痕有兩個相同時，不同號的東西指向同號的東西時，而同號間的包含開口相同時，可以將不同號的摺入相隔一個的另一個符號。如+⊃+-時，考慮，將包含於相隔一個計為⊃⊃，將包含於相隔二個計為⊃⊃⊃。思考其中有無特定關係。

(三) 將一個正負號列出時，先摺出一種最簡單的圖形，此時若將摺痕可以上下移動，找出所有不同的摺痕包含的關係，以此找出這種摺痕的所有圖形，利用此來做檢驗數字方面的成果。

六、程式設計部分：

有鑒於在單排方格格數稍大時會有上百種摺法，為了研究需要及加速研究過程，利用<排列數字判別部分 2>為基礎撰寫程式，其程式架構如下：

(一) 利用程式將折紙的最終順序轉化為數字組合為基礎，製成排列組合表，刪除重複部分(M，R 旋轉)，用於判定所需之運算資料用。

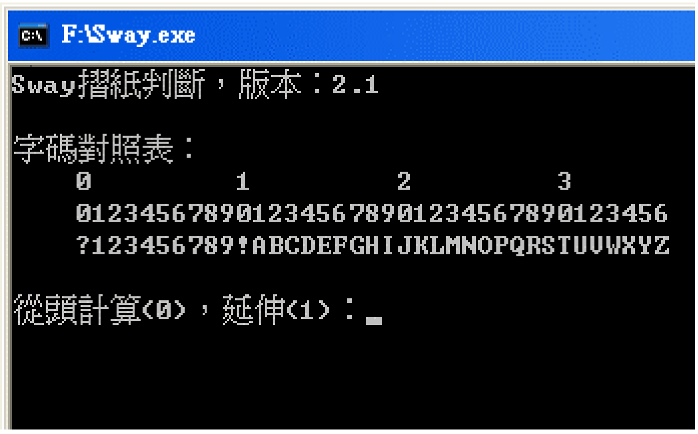
(二) 將上述<排列數字判別部分 2>作為判斷時的重要基礎。

(三) 採直線判定，當判斷中出現錯誤立即跳出，該筆數據將不再被處理

(四) 若該數據判定為可以摺，就對於該數據作進一步分析，算出圖形摺痕，圖形是否旋轉對稱(e = MR)等，輸出至檔案，作為統計時的重要資訊。

(五) 因格數增加時，所需計算的資料是以倍數成長，程式運作速度會大幅降低，因此設計 ” 前置碼 ” 功能，將所有計算資料分批作運算，改善運算速度，以發揮程式之最高效率

(六) 最新規劃：希望以 n-1 格所作資料作為基礎運算 n 格時的結論，因在 n-1 格時已經大幅刪除不合法的圖形型態，所以可以將程式作更大幅的加速處理，雖然這部分已經完成，但是程式之中有許多地方沒有考慮完全，導致呈現結果產生錯誤。此部分仍需改正。

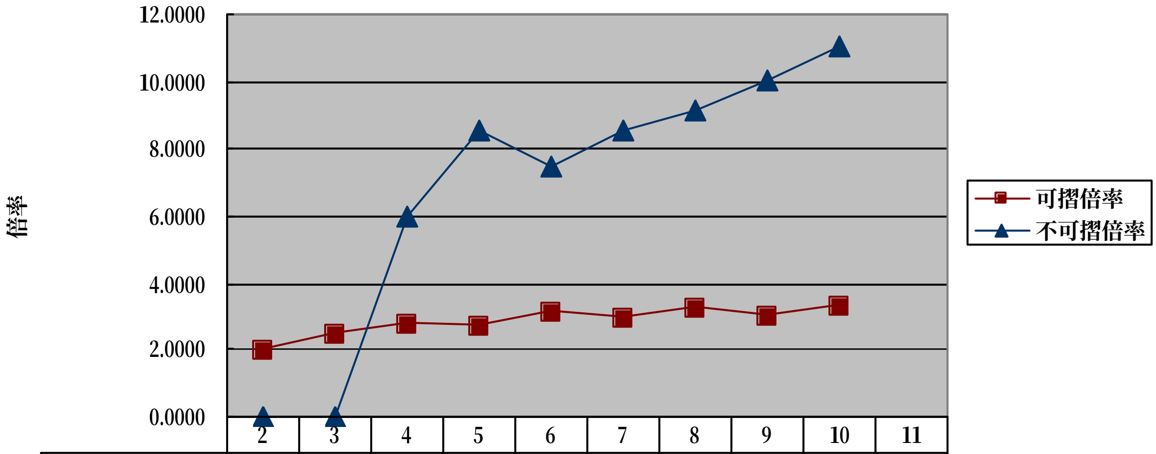


程式執行顯示←

七、已有紙條間的關係：

以下是利用電腦所跑出來的資料：

n	可摺紙條數(a_n)	成長倍率(A_n)	不可摺紙條數(b_n)	成長倍率(B_n)	總數	X 倍率
1	1		0	-	1	
2	1	1.0000	0	-	1	1.0000
3	2	2.0000	0	-	2	2.0000
4	5	2.5000	3	-	8	4.0000
5	14	2.8000	18	6.0000	32	4.0000
6	38	2.7143	154	8.5556	192	6.0000
7	120	3.1579	1152	7.4805	1272	6.6250
8	353	2.9417	9823	8.5269	10176	8.0000
9	1148	3.2521	89668	9.1284	90816	8.9245
10	3498	3.0470	902358	10.0633	905856	9.9746
11	11622	3.3225	9968538	11.0472	9980160	11.0174



	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
可摺倍率	2.0000	2.5000	2.8000	2.7143	3.1579	2.9417	3.2521	3.0470	3.3225	
不可摺倍率	0.0000	0.0000	6.0000	8.5556	7.4805	8.5269	9.1284	10.0633	11.0472	

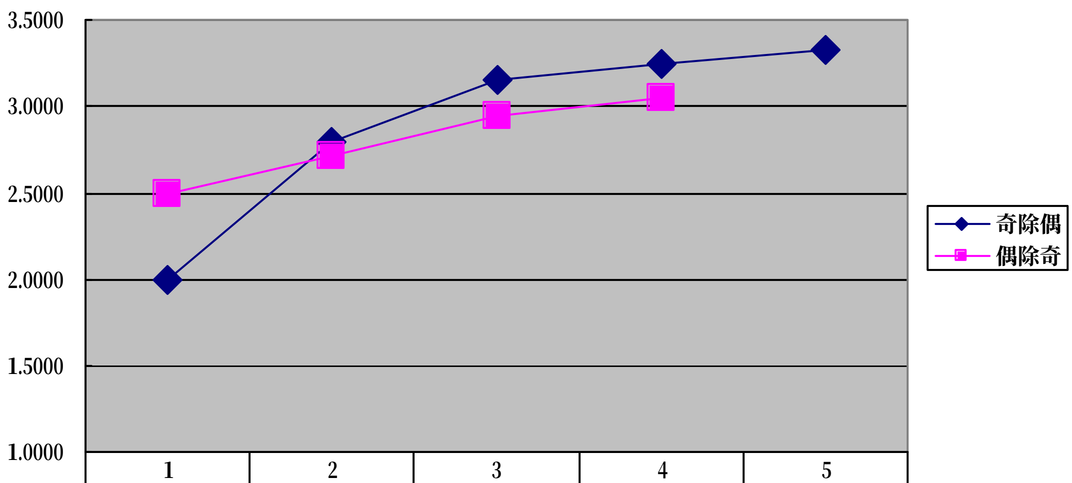
格數

(一) 可摺紙條的個數間的關係

上表格中 $A_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$， $B_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$。我們發現 $\begin{cases} A_4=2.5 \\ A_6=2.7143 \\ A_8=2.9417 \\ A_{10}=3.0470 \end{cases}$ $\begin{cases} A_5=2.8 \\ A_7=3.1579 \\ A_9=3.2521 \\ A_{11}=3.3225 \end{cases}$

$<A_{2k+1}>$ 為遞增。$<A_{2l}>$ 為遞增。

猜測：因為可摺紙條之間的倍率中，奇數項為遞增、偶數項也為遞增，從觀察折線圖似乎最後會收斂到一個數字。



	1	2	3	4	5
奇除偶	2.0000	2.8000	3.1579	3.2521	3.3225
偶除奇	2.5000	2.7143	2.9417	3.0470	

(二) 可摺紙條間的倍率與不可摺紙條間的倍率

依數字判別方法 2，在不可摺的紙條中，可以用一種想法，就是說每兩格兩格一組，在其中的只要產生不能摺疊的數字大小排列，就不能摺。

A	B	C	D	E	F

假設原有1×5的紙條 ABCDE，其中只要 AB 與 CD、BC 與 DE 中有不能摺的，這些種不能摺，而如果加上一格 F 後，便增加了 AB 與 EF、CD 與 EF，也就是增加[6/2]-1 種，此外，在大小的排列組合中，又多了一個數字 6 的選擇。

在數字與格子數逐漸增加的同時，不能摺的格字選擇 $(\sum_{4}^{n}\{[n/2]-1\})$快速增加，且又多了一種數字可加入排列，雖然尚未考慮到重覆的問題，但是其增加速率的快速大概可以了解了。且它的倍率遠大於能摺的倍率，所以當格子越大時，兩者的比例會差越多。

柒、 討論

一、是否於其上的各種性質之中，能夠找出所有可以摺的圖形個數，並找出規律？

(1) 我們猜測，個數是否與一些最基本的圖形中的個數推廣出來，亦或是由紙條中的線段以及開口的一些排列方式來決定，但從之前的結果來看，應該是基本圖形，加上那一組方格的特殊摺法(單排規則的第三、四型判斷方式)組成新的摺法。

(2) 是否能夠利用計算錯誤的圖形之後，再用總數相減以找出可以摺的圖形個數。

(3) 利用圖形間的倍率關係，猜測其可能接下來的倍率，用來計算可以摺的圖形個數。

(4) 沒有規律可言。

二、做出來的數字、摺痕、圖形組合，能不能在其他地方有什麼應用？

目前想不出有什麼比較實際的用途，但是這種組合的技巧、和組合的元素的刪去整理，感覺上有某種連結的關係或許會有別的應用。

三、因為在觀察可以摺疊的數字與圖形時，想到其實還可以將可以摺疊的紙條分為幾種不的樣式，如何再去分類，以利於計算可摺紙條個數。

捌、 結論

一、$1 \times n$的方格紙包括可以摺與不能摺的紙條數如下：

(一) 當 n 為奇數時，令 $n = 2k-1,(k \in N)$，總共有$\dfrac{n! + 2^{k-1} \times (k-1)!}{4}$個圖形數。

(二) 當 n 為偶數時，令 $n = 2k,(k \in N)$，總共有$\dfrac{n! + 2^{k} \times k!}{4}$個圖形數。

二、在一個$1\times n$的方格裡：

		第m格	第$m+1$格		第p格	第$p+1$格		$m,p\in odd$
	$\cdots$	a	b	$\cdots$	x	y	$\cdots$	

		第m格	第$m+1$格		第p格	第$p+1$格		$m,p\in even$
	$\cdots$	a	b	$\cdots$	x	y	$\cdots$	

$$a>b\begin{cases} x>y\begin{cases} x>a,b<y<a \\ y<b,b<x<a \end{cases} \\ x<y\begin{cases} y>a,b<x<a \\ x<b,b<y<a \end{cases} \end{cases}$$

$$a<b\begin{cases} x>y\begin{cases} x>b,a<y<b \\ y<a,a<x<b \end{cases} \\ x<y\begin{cases} y>b,a<x<b \\ x<a,a<y<b \end{cases} \end{cases}$$

只要符合以上 16 種條件的其中一種即不可摺疊。

三、將圖形改成數字的特性：

連續判讀以下(1)至(4)規則(分別為圖八、九、十和十一的數字特性)，直到簡化至 1x2 或 1x3 時，即可摺疊。

注意需要考慮由上往下排列與由下往上排列的判斷。

1. **如圖十二。若紙條中的任意三個相鄰的方格中，$y+2=z+1=w$時，三數作為一數 y，而紙條中大於 w 的數字皆-2。**
2. **在於邊端(頭端或尾端)的的三個相鄰的方格中，$|q-r|=1$且$|p-r|=1$時，三數作為一數$\min(p,q)$，而紙條中大於$\max(p,q)$的數字皆-2。(在經過動作(3)和(4)後需多加一個判斷，$|s-\min(p,q)|=1$或$s+4=t+3=p+2=r+1=q$，不能化簡)**
3. **當格子數為奇數格，其中一邊端的相鄰二方格 q、r 與另一端的一方格 x，$r+2=x+1=q$或$q+2=x+1=r$時。可將 x 消去，q、r 視為一數 min(q ,r)，而大於 max(q ,r)的數字皆-2。**
4. **當格子數為偶數格的時候，如果兩邊端的方格 x、r 中$|x-r|=1$)時，且其一邊端方格 r 與隔壁的方格 q 中 $|q-r|=1$時，x 刪去，q、r 視為一數 x 而大於 max(q ,r)的數字皆-2。**

玖、 參考資料及其他

一、參考資料

(一) 蕭文強 波利亞計數定理 初版 新竹市 凡異出版社 p.41~p.68 1994 年

(二) 蔡聰明 數學的發現趣談 初版四刷 台北市 三民 p.191~p.195 2004 年

二、未來發展

(一) 改變方格表形狀：不使用「正方形方格表」，進而以三角形格表、正六邊形格表代之，使折疊的模式有不一樣的策略。

(二) 發展成二維空間：也就是改成$n \times m$的長方形，來考慮其的摺疊方式？

(三) 這些東西，是否能在其他有實際用途？

評 語

040411 高中組數學科

摺出排列的奧妙—摺紙的規則與探討

Ulam 所提出的摺圖問題具有悠久的歷史，相關的資料及介紹可見網頁 http://mathworld.wolfram.com/StampFolding.html 及 Martin Gardner 所撰寫的 "The Combinatorics of Paper-Folding." In Wheels, Life, and Other Mathematical Amusements. New York: W. H. Freeman, pp. 60-73, 1983.