中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040410

臺北市立成淵高級中學

指導老師姓名

徐錫賢

作者姓名

林旺聖

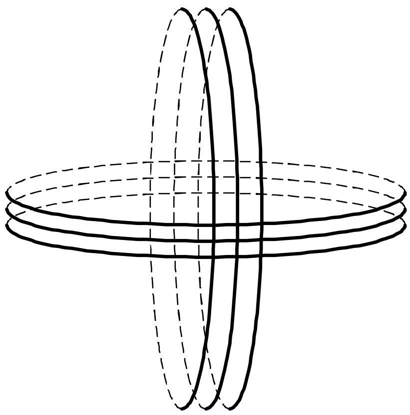
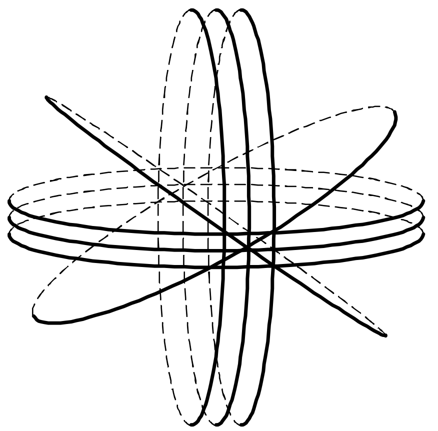
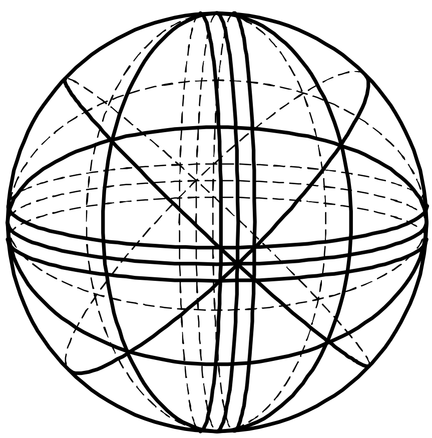
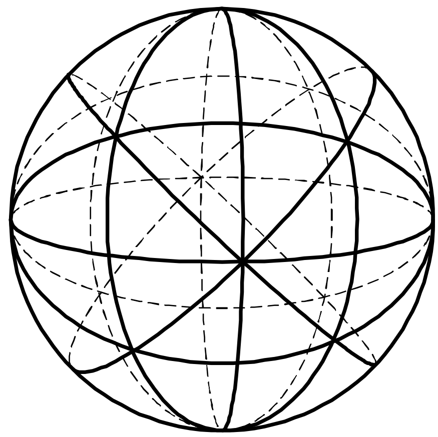
# 中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

科別: 數學科

組別: 高中組

主題: 魔球陣之研究

關鍵字: 魔球陣、複合點、排列組合

編號:

## 壹、摘要

在去年的「魔圓陣之研究」中，探討的是平面上相交的圓之間的排列組合，但是立體的球形「魔球陣」也是令人非常感興趣的主題。

## 貳、研究動機

在去年的科展作了魔圓陣的深入探討，發現到其實圓之間的排列組合關係是更為引人入勝的，今年希望能把去年的結果推廣到三度空間中的立體圖形。

## 參、研究目的

當有 Q 個圓，形成一個立體的球面骨架，而且每個圓上的交點數要相等，討論形成的圖形的相交狀態，及了解其結構。

## 肆、研究器材

電腦、紙、筆

## 伍、研究過程及方法

### 一、　前提、定義和符號

**前提：**

(1) 圖形不能中斷。

(2) 所有圓皆為正圓。

(3) 所有圓上的交點個數要相等。

**(4)** 立體空間中，圖形以球面的形狀來進行排列。

**定義：**

(1) 兩個圓相交的相交處為交點。

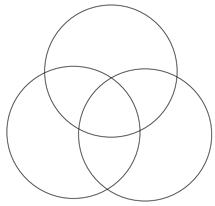
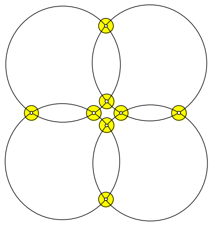
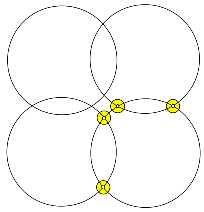
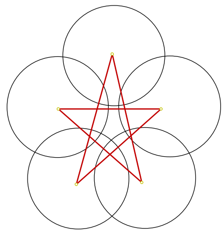
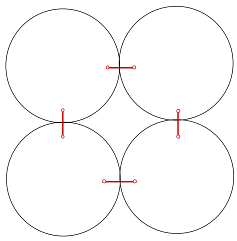
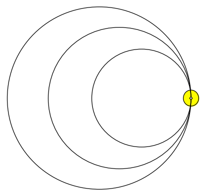
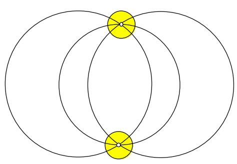
(2) 一圖形中，所有圓排列的狀況稱為”相交狀態”。例如：相交、相切、相離、複合點……。

(3) 一圖形中，兩圓之間相交的狀況不算相交狀態。

(4) 當一個交點是由 n 個圓相交所構成時，稱為「n 次複合點」，也可簡稱「複合點」。

**(5)** 圖形中，任兩圓都只相交於兩點的圖形稱為”基本圖形”。

## 符號：

| 項目 | 符號 | 定義 | 圖示 | 表示方式 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | Q | 所有圓的個數。<br>(圓數) |  | Q＝3 |
| 2 | W | 所有圓上的交點個數。<br>(交點) |  | W＝8 |
| 3 | w | 單一個圓上的交點個數。<br>(交點) |  | w＝4 |
| 4 | R | 圖形中的不相交的組數。<br>(相離組) |  | R＝5 |
| 5 | Y | 圖形中的相切的組數。<br>(相切組) |  | Y＝4 |
| 6 | $T_n$ | 圖形中，多圓組成的的交點。<br>(n 次複合點) |  | $T_3$ |
| 7 | T | 表示所有的複合點。<br>(複合點) |  | T＝2$T_3$ |

## 二、討論重點：

平面上的研究：

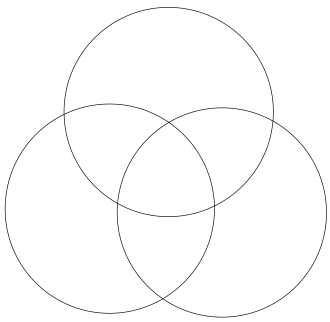
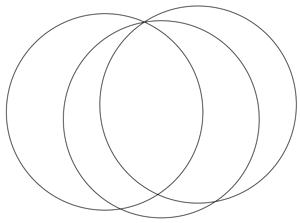
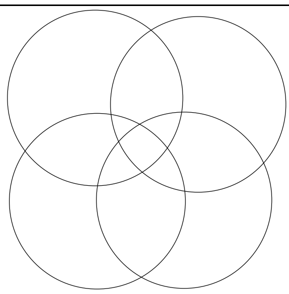
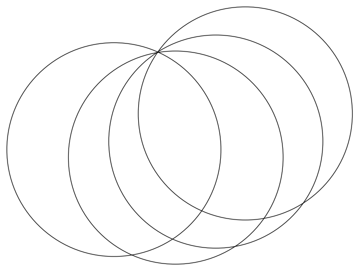
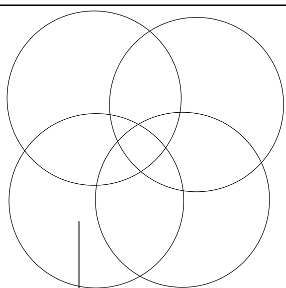
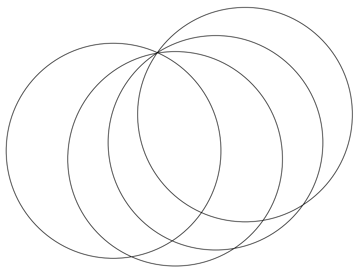
1. 各相交狀態對圖形的交點有何影響？
2. 相交狀態的最大值？
3. 圓的個數對狀態有何影響？

立體上的研究：

4. 如何建構立體魔球陣？
5. 特殊的魔球陣。

### 討論一、各相交狀態對圖形的交點有何影響？

在加入了「複合點」的概念後，我們試著探討複合點 T 與交點數 W 之間的關係。首先，在不改變其他相交狀態的前提下，一次加入一個複合點並且觀察交點個數的變化情形，作出歸納。

| | | |
|---|---|---|
| 圖形<br>Q=3<br>$T=T_3$ |  |  |
| 交點個數 W | 6 | 4 |
| 圖形<br>Q=4<br>$T=T_4$ |  |  |
| 交點個數 W | 12 | 7 |
| 圖形<br>Q=5<br>$T=T_5$ |  |  |

上表的結果可歸納成下表：

| $T=T_n$ | 左圖交點數 | 右圖交點數 | 交點個數的變化量 |
|---|---|---|---|
| n=3 | 6 | 4 | 2 |
| n=4 | 12 | 7 | 5(n=3 時的值+ 3) |
| n=5 | 20 | 11 | 9(n=4 時的值+4) |
| (推論一) | | | |
| n=n | (n-1)n | $(n-1)n-\alpha$ | $\alpha$<br>( n=n-1 時的值+(n-1) ) |

推論一 ：

$T_3=2$

$T_4=T_3+(4-1)$

$T_5=T_4+(5-1)$

…

…

$+)\ T_n=T_{n-1}+(n-1)$

$T_n=(n^2-n)\div 2-1$ 使用數學歸納法，這個結果很容易證明。

**結論一：**

$W=Q(Q-1)-(2R+Y+T)$……………..(1)

$T=T_{n1}+T_{n2}+T_{n3}+\ldots\ldots+T_{nk}$…………(2)

$T_n=(n^2-n)\div 2-1$………………………..(3)

由(1)可以得知複合點影響交點個數的關係，

而複合點的計算方式為(2)，其中的 $T_{n1}$ 計算方式為(3)。

了解 T 與 W 之間的關係後，探討 T 對每個圓的交點個數 w 的影響。

由上次的研究中可以得知下列式子：

$w=2W\div Q$

$W=Q(Q-1)-(2R+Y)$

$w=2[Q(Q-1)-(2R+Y)]\div Q$ (成立)

加入 T 後

$w=2[Q(Q-1)-(2R+Y+T)]\div Q$ (不成立)

這次因爲加入複合點的情形，所以圓上的交點不一定只重複 1 次，可以重複無限次。設變數 $T'$代表未算到的交點個數。

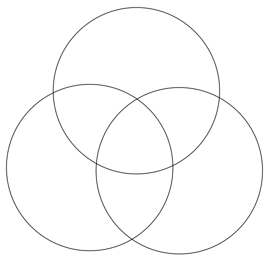
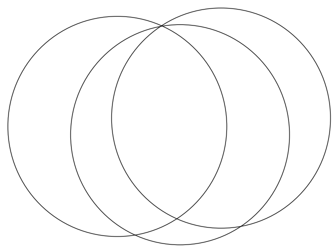
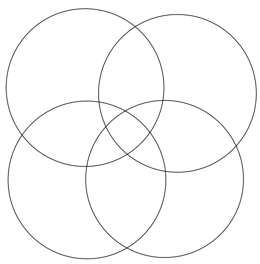
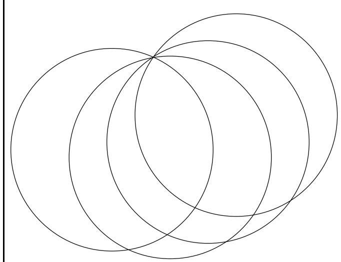
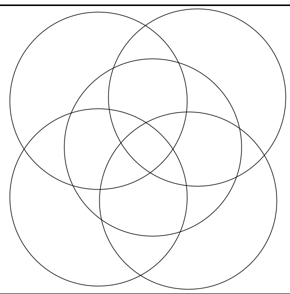
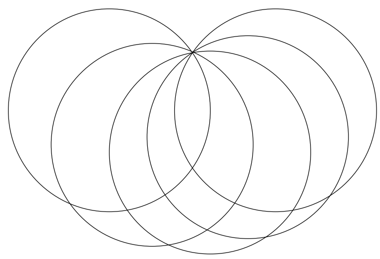
變數 $T'$定義：

在計算 W 轉換成 w，有複合點時，代表未算到的交點個數，

$$T' = T'_{n1} + T'_{n2} + T'_{n3} + \ldots\ldots + T'_{nk}$$
$$w = (2W + T') \div Q$$

W 與變數 $T'$有何關係？

觀察下列圖形，尋找出規律性：

| | | |
|---|---|---|
| 圖形<br>Q=3<br>$T'=T'_3$ |  |  |
| 交點個數 w | 4 | 3 |
| 圖形<br>Q=4<br>$T'=T'_4$ |  |  |
| 交點個數 w | 6 | 4 |
| 圖形<br>Q=5<br>$T'=T'_5$ |  |  |
| 交點個數 w | 8 | 5 |

推論二：

$T'_n=(n-2)$

$T' = T'_{n1}+T'_{n2}+T'_{n3}+\ldots\ldots+T'_{nk}$

$\quad =(n_1-2)+(n_2-2)+(n_3-2)+\ldots\ldots+(n_k-2)$

證明：$w=(2W+T')\div Q$

每個交點重複的次數總和，再除以圓的個數，就會是單一圓上的交點個數。

設 Q 個圓有 $n_k$ 的交點

所以單一圓上交點數爲：

$w=(k_1+k_2+k_3+\ldots\ldots)\div n$

$=[2+2+2\ldots\ldots+(k_1-2+k_2-2+k_3-2+\ldots\ldots)]\div n$

有 $n_k$ 個交點，故有 $n_k$ 個 2 相加，$n_k=W$

$k_1-2$、 $k_2-2$、$k_3-2$、……與 $T'_{nk}$ 相同

$w=[2W+(T'_{n1}+T'_{n2}+T'_{n3}+\ldots\ldots)]\div Q$

$(T'_{n1}+T'_{n2}+T'_{n3}+\ldots\ldots)=T'$

$w=(2W+T')\div Q$ (故得証)

**結論二：**

$w=(2W+T')\div Q$……………………………………(1)

$T' = T'_{n1}+T'_{n2}+T'_{n3}+\ldots\ldots+T'_{nk}$

$\quad =(n_1-2)+(n_2-2)+(n_3-2)+\ldots\ldots+(n_k-2)$……(2)

$T'_n=(n-2)$……………………………………………(3)

由(1)可以得知 $T'$對單一圓上的交點影響，

而 $T'$的計算方式爲(2)得知

## 討論二、相交狀態的最大值。

在討論這個問題前，先做以下的定義：

上限值：用利用計算推論的方式，預估相交狀態在圖形中的最大值。

最大值：相交狀態在圖中的最大數值。

複合點的加入，可以使 Y 的上限值＝Y 的最大值：圖形只有一個交點，此交點爲複合點，而複合點的次數是圓的個數。

複合點次數的最大值：

(1) 一個複合點是由多個圓所組成的，用另外一個方向去思考，一個複合點也是由數個交點所組成的。在上面的研究中，可以發現複合點出現會影響所有的交點個數，因爲有些交點重疊成一點。

(2) 三次複合點會使（$3^2-3$）÷2－1 個交點消失，換句話說三次複合點也就是由（$3^2-3$）÷2 交點所組成。

(3) 一個基本型的交點最多（Q－1）×Q。

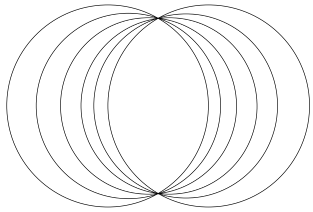
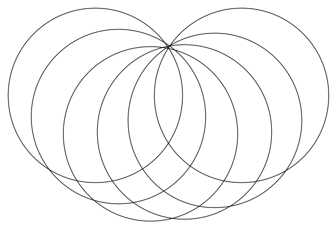
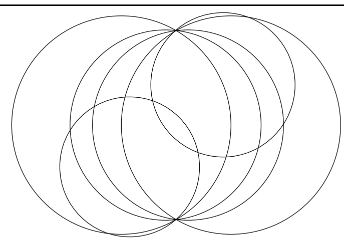
綜合以上三項可得到下列關係：

$T = m_1T_{n1} + m_2T_{n2} + m_3T_{n3} + \ldots\ldots + m_kT_{nk}$，

$(Q-1)\times Q \geq [(n_1^2-n_1)\div 2]\times m_1 + [(n_2^2-n_2)\div 2]\times m_2 + \ldots\ldots$。

這個式子所代表的意義，讓我們舉例說明如下：

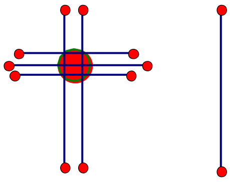
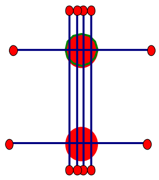
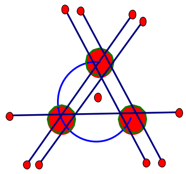
Q＝6，（Q－1）×Q＝30。

| 相交狀態 | $T=2T_6$，【$(6^2-6)\div 2$】$\times 2=30$ | $T=T_6$，【$(6^2-6)\div 2$】$\times 1=15$ |
|---|---|---|
| 圖形 |  |  |
| $T_6$ 在 Q＝6 時，上限值是 2。 | | |
| 相交狀態 | $T=3T_5$，【$(5^2-5)\div 2$】$\times 3=30$ | $T=2T_5$，【$(5^2-5)\div 2$】$\times 2=20$ |
| 圖形 | 不存在。 |  |
| $T_5$ 在 Q＝6 時，上限值是 3，但圖形卻無法排出 $T=3T_5$。 | | |

在上面的過程之中發現雖然符合計算上的式子，還是會有排不出圖形的情況，而這次研究複合點時，發現使用「點」來進行排列更爲簡單。從這個想法出發，我們發展出了「點排法」，利用點來探討複合點的數目在該圖形中的最大值。

點排法：

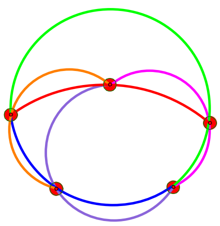
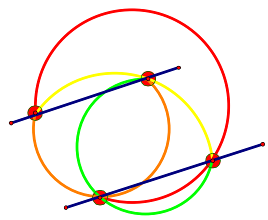
點排法是先將複合點點出，用直線來代表圓，一個四次複合點就會有四條線經過，一個圓也可以有數個複合點。因爲三點可以決定一個圓，所以不可以有兩條縣同時經過相同的三點。（如下圖：下列圖形 Q 皆等於 6。）

| 圖一、$T=T_5$ | 圖二、$T=2T_5$ | 圖三、$T=3T_5$ |
|---|---|---|
|  (可) |  (可) |  (不可) |

例：

在 Q＝6，找出 $T_4$ 的最大值。

【$(4^2-4)\div 2$】$\times m \le 30$　　$m \le 5$

| m＝5 | m＝4 |
|---|---|
|  (不可) |  (可) |
| $T_4$ 在 Q＝6 時，上限值是 5，最大值是 4 | |

結論三：

R 的上限值＝（Q－3）×Q÷2。

Y 的上限值＝（Q－1）×Q÷2。

$T=mT_n$，m 的上限值符合下列式子：

$(Q-1)\times Q \ge$【$(n^2-n)\div 2$】$\times m$

上限值：用利用計算推論的方式，預估相交狀態在圖形中的最大值。

最大值：相交狀態在圖中的最大數值。

※ 點排法可以檢驗複合點的最大值。

點排法：

1. 以點爲交點，直接用線段代表圓。
2. 一條線可以經過無數點。
3. 不可以有兩條線同時經過三個相同的點，那會使兩圓重合。

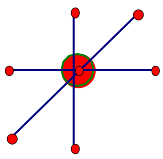
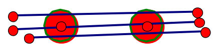
在上一次的研究中(沒有複合點爲前提)，發現當 Q ≥ 5 時，Y ≥ 4 必有 R 值的出現。當圓的個數大於或等於 5 時，相切數也大於或等於 4 時，一定出現相離的情形，也就是說圓的個數和相切數會間接影響相離數。而在這次的研究中，當複合點出現時， Y 的最大值＝Y 的上限＝（Q－1）×Q÷2。複合點也會影響相切數的最大值。

經過觀察歸納，在沒有複合點的情形下，R、Y 之間的影響如下

$$R+Y \le (Q-1)\times Q\div 2$$。

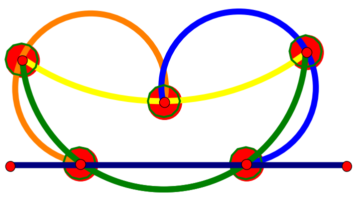
複合點的加入會影響影響相離組與相切組：

利用點排法來檢驗：Q＝3

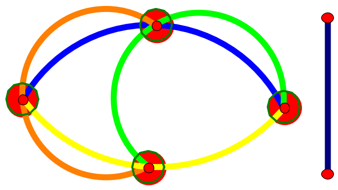
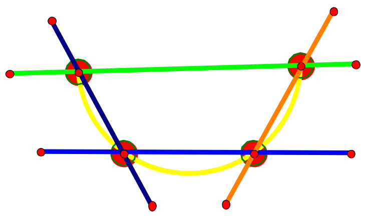
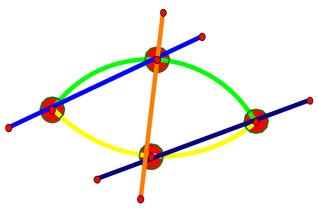
| 圖一、1 個三次複合點 | 圖二、2 個三次複合點 |
|---|---|
|  |  |

圖一中，三圓交於一點，不可能出現相離，但可以出現 1~3 組的相切。
圖二中，任兩圓都交於兩點，故不可能相切，也不可能相離。

舉例觀察：
Q＝5，改變 T 值，觀察 R、Y 的最大值有何變化

| 圖一、T＝5$T_3$ | 影響 |
|---|---|
|  | 在此圖形中，<br>R 的最大值爲 1(黃和深藍)<br>Y 的最大值爲 4(深藍和橘、深藍和藍、藍和橘、黃和深藍)<br>當 R＝1 時，則 Y≤3。<br>當 Y＝4 時，則 R＝0。 |

在點排法中，可以是相離的兩個圓，也可以是相切。

| 圖二、$T＝4T_3$ | 影響 |
|---|---|
|  | 在此圖形中，<br>R 的最大值爲 4<br>Y 的最大值爲 4<br>當 R＝4 時，則 Y＝0。<br>當 Y＝4 時，則 R＝0。 |
|  | 在此圖形中，<br>R 的最大值爲 2<br>Y 的最大值爲 6<br>當 R＝2 時，則 Y≤4。<br>當 Y＝6 時，則 R＝0。 |
|  | 在此圖形中，<br>R 的最大值爲 1<br>Y 的最大值爲 5<br>當 R＝1 時，則 Y≤4。<br>當 Y＝5 時，則 R＝0。 |

排法不唯一，排法的不同會影響 R 和 Y 的最大值。

**結論四：**

1. R+Y≤（Q－1）×Q÷2。
2. 有 Q 個圓時，T 值會影響到 R、Y 的最大值。而 R、Y 之間也會互相影響，可以利用點排法，以 Q、T 固定，進行檢驗。
3. 固定 Q、T，排法不唯一，不同的排法會影響到 R、Y 的最大值。

## 討論三、圖形出現，相交狀態有何關聯？

上次的研究對於圖形的產生，所給予的條件是：
前提：每個圓的影響類型皆相同。
當有 Q 個圓的時候，
4R÷Q 是整數，也是偶數，R 不超過 R 的最大值（Q－3）×Q÷2，
2Y÷Q 是整數，Y 不超過 Y 的最大值（Q－1）×Q÷2，
1≤w，圖形成立。

將上次的前提刪去，而上次的結果是由 $w=2W\div Q$ 所推論出來的，而這次的研究中，已經把 $w=2W\div Q$ 修正爲 $w=(2W+T^{/})\div Q$。w 必定爲整數，所以 Q 必須整除 $2[Q(Q-1)-(2R+Y+T)]+T^{/}$。$1\leq w$，所以 $(2W+T^{/})\div Q\geq 1$。

$(2W+T^{/})\div Q\geq 1$ 的展開：

$$【2[Q(Q-1)-(2R+Y+T)]+T^{/}】\div Q \geq 1$$

$$2[Q(Q-1)-(2R+Y+T)]+T^{/} \geq Q$$

$$2Q^{2}-2Q-(4R+2Y+2T-T^{/}) \geq Q$$

$$(2Q-3)\times Q \geq 4R+2Y+2T-T^{/}$$

統整上列及結合之前的研究，得知下列結論：

**結論五：**

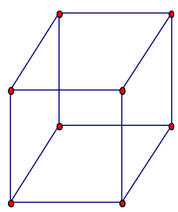
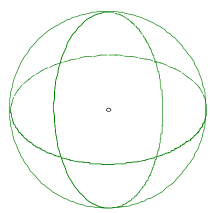
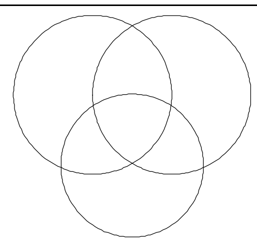
當有 Q 個圓，R 組相離，Y 組相切，$T=m_{1}T_{n1}+m_{2}T_{n2}+m_{3}T_{n3}+\ldots\ldots+m_{k}T_{nk}$，

1. Q 必須整除 $2[Q(Q-1)-(2R+Y+T)]+T^{/}$。
2. $(2Q-3)\times Q \geq 4R+2Y+2T-T^{/}$。

## 討論四、如何建構立體魔球陣？

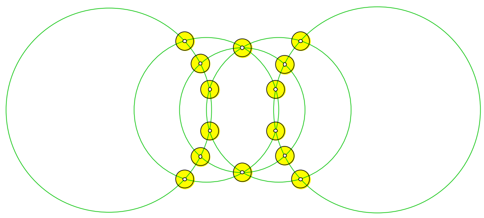
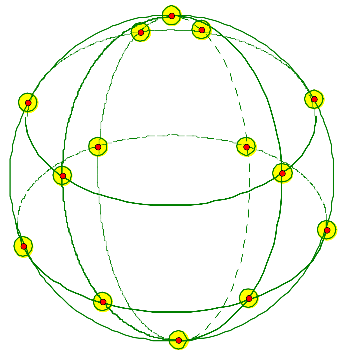
在趙文敏教授的『數學寓於遊戲』裡，平面裡的魔圓陣是由立體空間的魔球陣所推演出來的，而立體空間的魔球陣是由骰子所推演出來的。

如下圖：

| 骰子 | 立體魔球陣 | 平面魔圓陣 |
|---|---|---|
|  |  |  |

正六面體，每一面代表一個交點，形成一個魔球陣，再由魔球陣的壓扁後，形成魔圓陣。可以推測，魔圓陣必定可以推回魔球陣。

$Q=5$，$R=1$，$Y=0$，$T=2T_3$，$W=14$

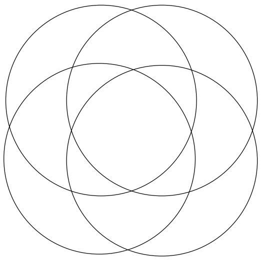
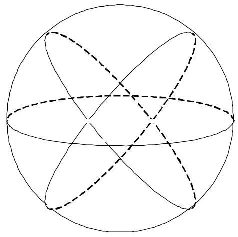
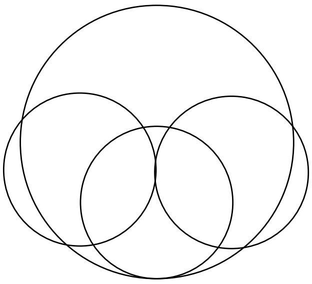
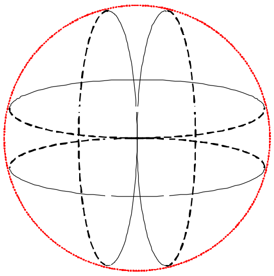
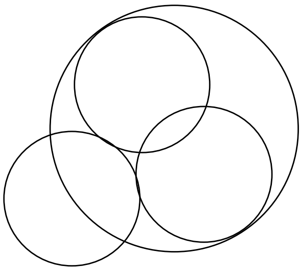
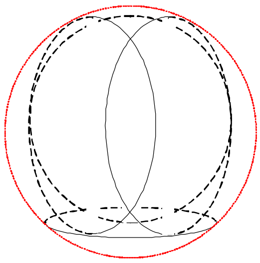
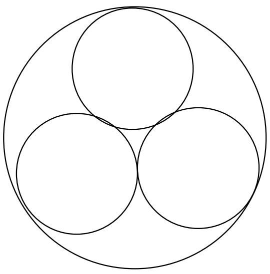
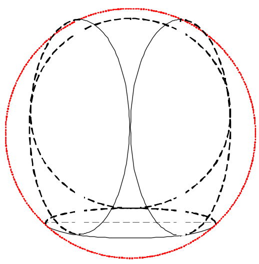
| 平面：魔圓陣 | 立體：魔球陣 |
| --- | --- |
|  |  |

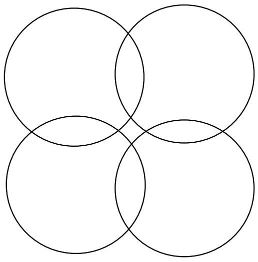
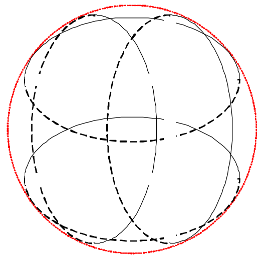
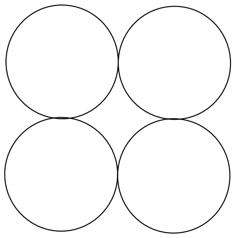
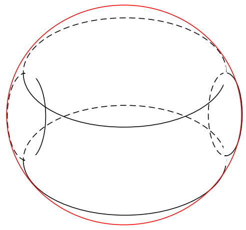
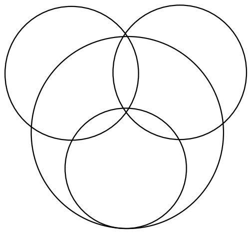
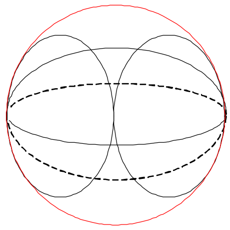
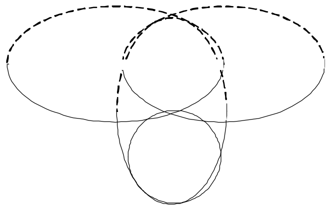
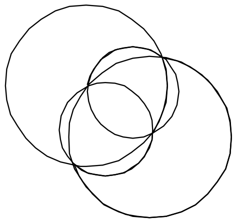
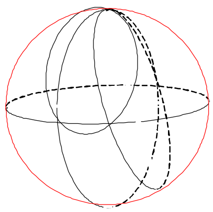
結論六：

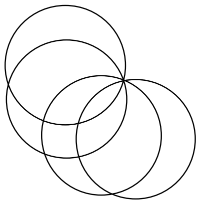
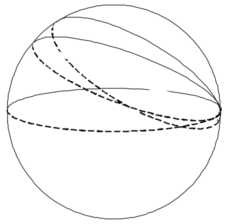
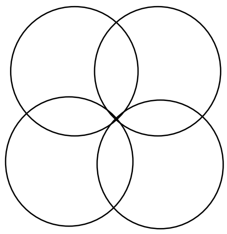
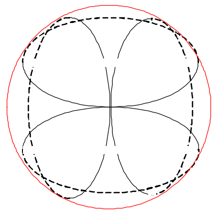
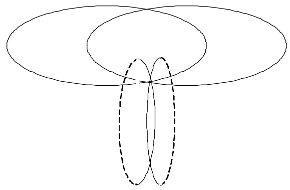
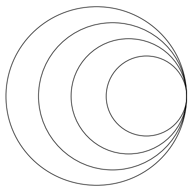
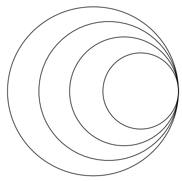
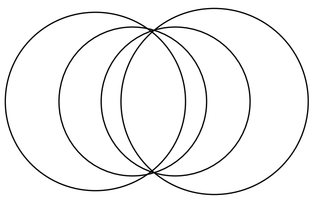
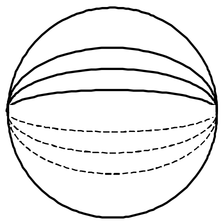
在平面上的圖形都可以形成立體圖形。

## 討論五、特殊的魔球陣。

利用以上的結論，作出 Q＝4 的所有圖形，且將圖形以魔圓陣和魔球陣(或立體)兩種形式作出。

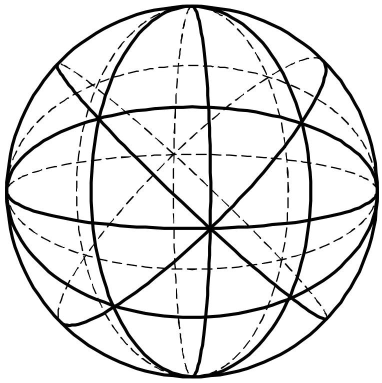
| 平面 | 球體 |
|---|---|
| R＝0、Y＝0、T=0 | |
|  |  |
| R＝0、Y＝2、T＝0 | |
|  |  |
| R＝0、Y＝4、T＝0 | |
|  |  |
| R＝0、Y＝6、T＝0 | |
|  |  |
| R=1 | |
| 符合的 Y 值，但排列不出圖形 | |

<table>
<tr><td colspan="2">R＝2、Y＝0、T＝0</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">R＝2、Y＝4、T＝0</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">R＝0、Y＝1、T＝2$T_3$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">R＝0、Y＝3、T＝2$T_3$</td></tr>
<tr><td>符合的 Y 值，但排列不出圖形</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">R＝0、Y＝5、T＝2$T_3$</td></tr>
<tr><td>只能存在於立體的空間裡</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">R＝1、T＝2$T_3$</td></tr>
<tr><td>可找到符合的 Y 值，但排列不出圖形</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">T＝3$T_3$</td></tr>
<tr><td>R、Y 無符合的狀況</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">R＝0、Y＝0、T＝4$T_3$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| R＝0、Y＝0、T＝$T_4$ | |
|  |  |
| R＝0、Y＝2、T＝$T_4$ | |
|  |  |
| R＝0、Y＝4、T＝$T_4$ | |
| 只能存在於立體的空間裡 |  |
| R＝0、Y＝6、T＝$T_4$ | |
|  |  |
| R＝0、Y＝0、T＝$2T_4$ | |
|  |  |

由上面可以觀察到有些圖形只能存在於立體的空間中，不能在魔圓陣中呈現。而在觀察只能在立體中呈現的圖形，有一共同相交狀態，三次複合點是由兩組相切、一組相交的情形所組成。

接下來挑出較爲特別的情況來進行觀察比較：

<table>
<tr><td colspan="2">圓的個數：9</td></tr>
<tr><td colspan="2">相交狀態：R＝0、Y＝0、$T=6T_4+8T_3$</td></tr>
<tr><td>魔圓陣</td><td>魔球陣</td></tr>
<tr><td>無法呈現</td><td></td></tr>
</table>

在排列魔球陣時，發現不是所有的魔球陣皆可推回魔圓陣。

## 討論六、魔球陣是否皆可魔圓陣化。

觀察最後發現，魔球陣不一定可以在平面上呈現，哪些圖形無法以魔圓陣呈現？

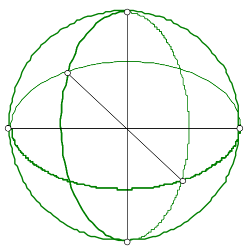
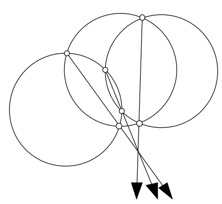
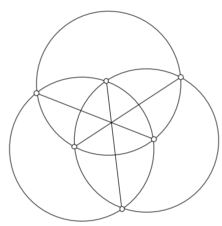
首先先將魔球陣裡面的圓分成「直徑圓」和「非直徑圓」。

**直徑圓：球面上最大的圓。**

1. 圖形是由直徑圓所組成，相交情形只存在複合點。
2. 呈現的圖形，任兩圓相對應的交點連線，爲直徑且必過球心。

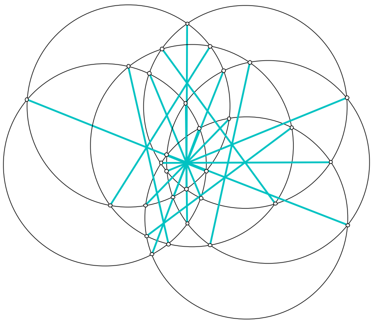
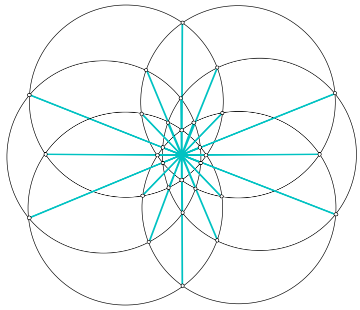
綜合以上兩點推論，其平面圖形一定可以排出，將任兩圓所交出的兩交點做一直線，所有做出的直線，必經過一點的平面圖形。此交點成爲「平面球心」 ，而相對應的交點連線稱爲「交點弦」。平面球心可以在交點弦所在的直線上，也就是說，線段內與線段外都可以。

舉例：

<table>
<tr><td colspan="3">Q＝3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">魔球陣</td><td colspan="2">魔圓陣</td></tr>
<tr><td>線段延長線</td><td>線段內</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

但在研究”平面球心”時發現，當「交點弦」太多時，球心可能不只一個，不過還是能夠利用移動的方式使所有的球心都重合。

舉例：

| Q＝6 | |
|---|---|
| 有數個球心 | 利用移動的方式，使球心只有一個 |
|  |  |

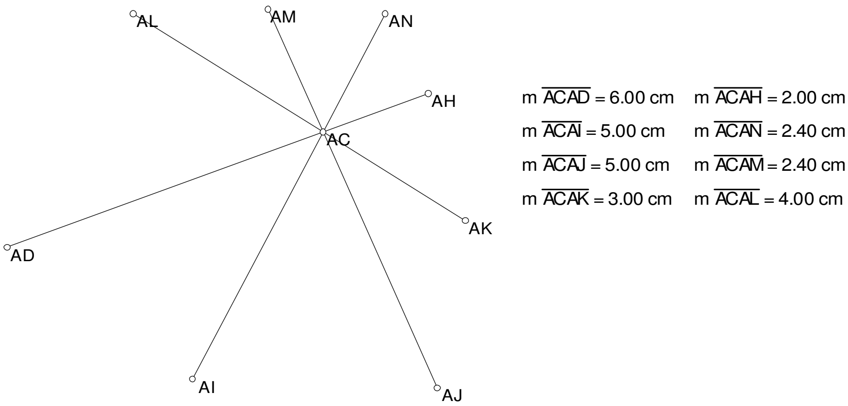
由上所推論出的結果，再做進一步的延伸，利用平面球心(線段內)和交點弦來排列圖形，排列方式如下(作出 Q=6、T=8$T_3$)：

1. 計算圖形的形狀：

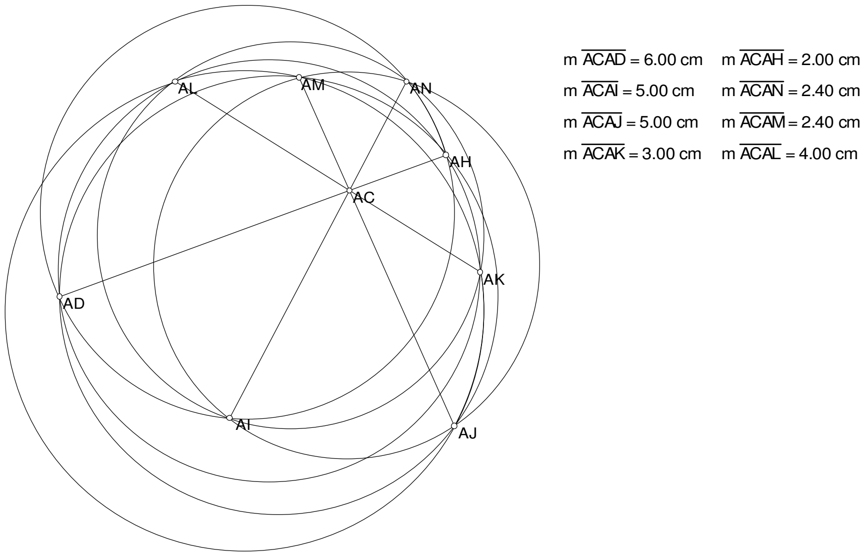
將交相情形進行分配，8 * 3 / 6 = 4。
圖形：每個圓都有 4 個 $T_3$。

2. 將平面球心點出。已知道若圓內的相交的兩條弦，可行成兩個相似三角形，其線段成比例，在做圖中發現，複合點所形成的交點弦最爲複雜，所以先將複合點形成的交點弦作出。

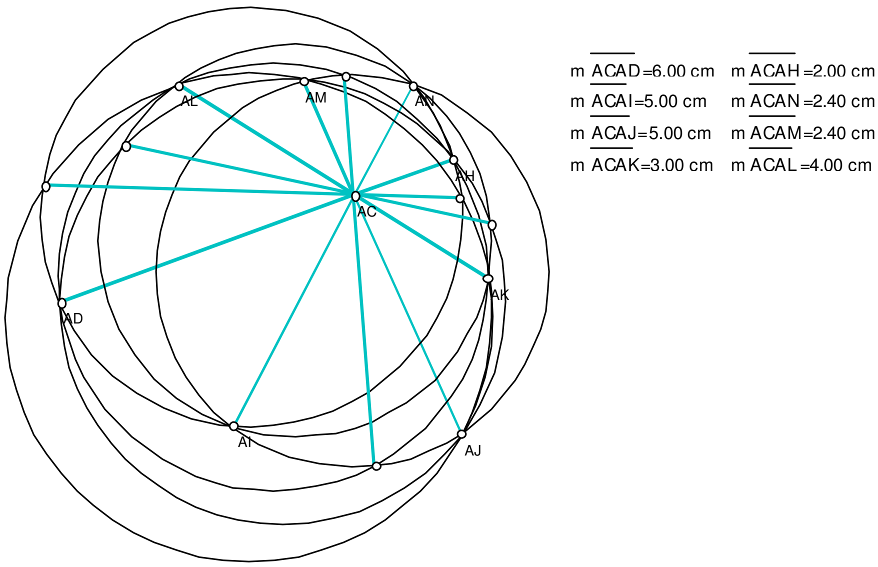
下圖每個相對應的線段乘積皆爲 12



3. 知道每個圓上皆有 4 個複合點，則每個圓內皆有 2 條 $T_4$ 所形成的交點弦，所以任兩條弦組成一個圓。




4. 再將剩下的交點弦做出，發現所有的剩下的交點弦必定會經過平面球心。




在這次的作圖過程中可以觀察到複合點所形成的交點弦，就可以使圖形完整，所以複合點對於魔球陣是否可以推回平面有很大的關係。利用剛剛的作圖方式，做出 Q＝9、R＝0、Y＝0、T=$6T_4$＋$8T_3$ 的平面圖形。

1. 計算圖形的形狀：

   6 * 4 / 9 = 2…6

   每個圓上有 2 個 $T_4$

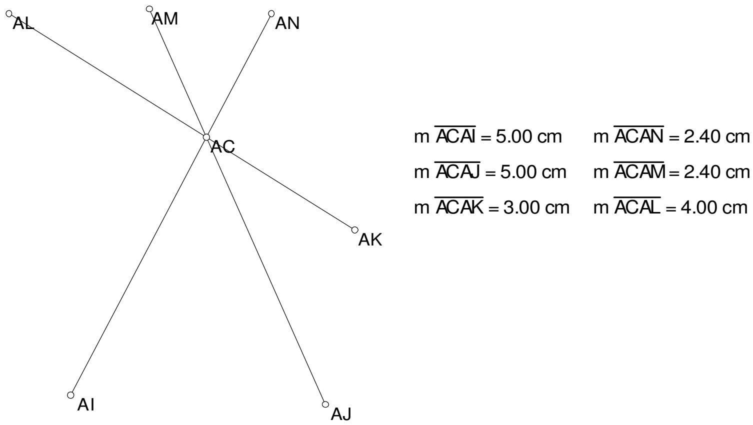
   1 個 $T_4$ 影響單圓的交點 = 2 個 $T_3$ 影響單圓的交點

   6 * 2 + 8 * 3 / 9 = 4

   圖形：有 3 個圓有 4 個 $T_4$，剩下的圓皆有 2 個 $T_4$ 和 4 個 $T_3$。

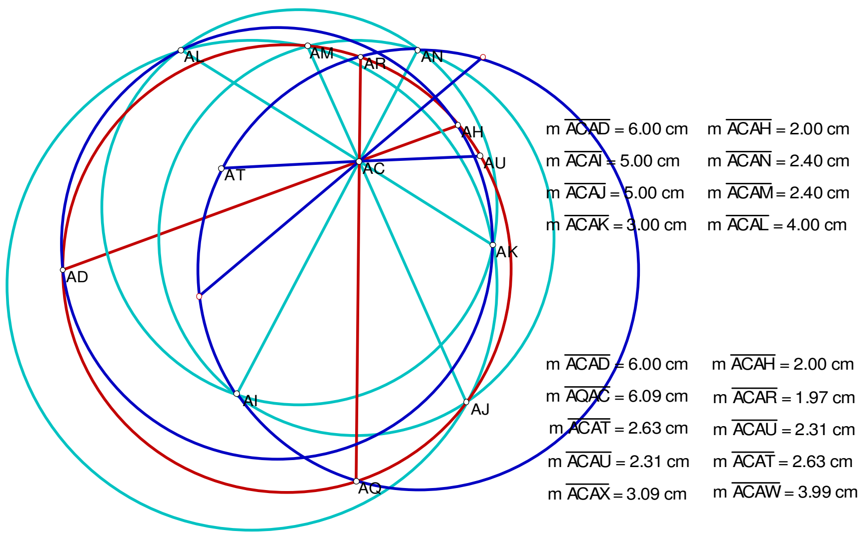
2. 將平面球心點出，先做出四次複合點的交點弦。

下圖每個相對應的線段乘積皆爲 12




3. 把三個圓畫入，已經知道剩下的每一個圓還有 2 個 $T_4$ 和 4 個 $T_3$，所以 1 條 $T_4$ 的交點弦和 2 條 $T_3$ 的交點弦，構成一個圓，且 2 條 $T_3$ 交點弦的端點不可以和已經做出的三圓重疊。

放第四、五、六個圓



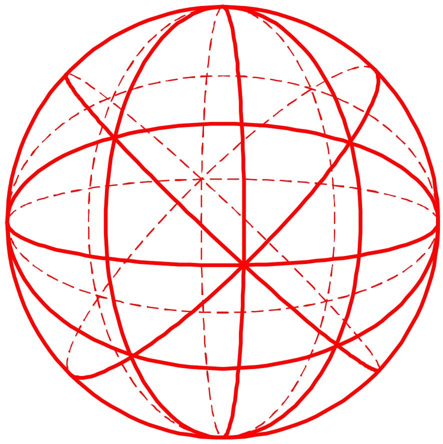
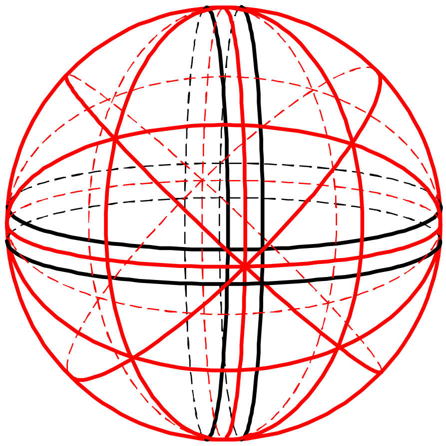

第七、八、九個圓三個圓要取三種顏色各一條線來進行排列，但是三條線即使成比例也不一定可以形成一個圓。

從作圖過程中發現，當一個直徑圓上有 6 個複合點時，便會形成三條交點弦，一個圓上具有三條複合點的交點弦且交點弦皆過球心時，便不一定可以可以形成一個魔圓陣。

**非直徑圓：不是球面中最大的圓。**

在上一個討論中得知，魔球陣是否可以轉回魔圓陣的關鍵在於複合點，所以在討論非直徑圓時，一樣以複合點爲研究重心。但是在研究的過程中發現，無法用任何記號或方法來標示出兩圓不相交或相切的情形，所以在排列非直徑圓的部分，尚還無法找出適當的關鍵點。

只要具有最後一個圖形的骨架，便不可能推回平面，如下：

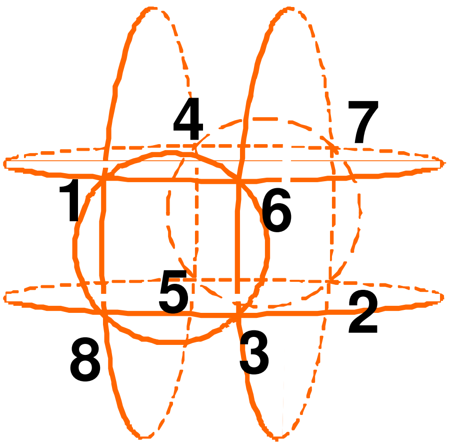
| Q＝9、R＝0、Y＝0、$T=6T_4+8T_3$ | Q＝15、R＝9、Y＝0、$T=6T_4+32T_3$ |
|---|---|
|  |  |

結論七：

1. 只要有一個三次複合點是由兩組相切、一組相交，圖形就只能在立體空間中呈現。
2. 由觀察猜測，直徑圓所形成的魔球陣，若有一個圓內具有三條以上的交點弦，且交點弦過球心，此魔球陣便不一定可以推回魔圓陣。
3. 圖形只要存有不能推回平面的球面骨架，便無法推回平面。
4. 複合點爲影響魔球陣是否可以在平面中呈現的重要因素。

由於圓之間的相互關係的複雜性比排數字的問題要引人入勝，所以這次在排列數字上並沒有著墨太多，不過利用上次研究的結果，依然可以在交點上排入數字，使得每個圓上的數字和都相等，來看下面這個例子：

Q＝6、R＝3、Y＝0、T=8$T_3$：




每個圓上的數字和皆爲 18。

## 陸、研究結果

**一、當圖形成立時必須符合下列性質：**

(1) Q 必須整除 $2[Q(Q-1)-(2R+Y+T)]+T^{/}$。

(2) （2Q－3）×Q ≥ 4R＋2Y＋2T－$T^{/}$。

(3) 相交狀態不超過其最大值

1. R 最大值（Q－3）×Q÷2
2. Y 最大值（Q－1）×Q÷2
3. T 最大值需用點排法來檢驗

(4) 相交狀態除了不超過其最大值以外，還必須遵守下列情況：

1. R+Y≤（Q－1）×Q÷2。
2. T 所影響 R、Y 需用點排法來進行觀察。
3. Y 有最大值時，必恰有一複合點，且複合點的次數爲 Q 次。

**二、空間中和平面上的不同：**

(1) 平面可以形成的圖形，必定可以形成立體的圖形。

(2) 以球面爲主的立體圖形，不見得可以全部推回魔圓陣。

(3) 「複合點」是影響球體無法推回魔圓陣的重要因素。

**三、直徑圓所形成的魔球陣：**

(1) 對應的交點連線後，必定過球心。

(2) 平面圖形，必可以排出對應的交點連線後，只過一點的圖形。

(3) 可以利用「平面球心」和「交點弦」來排列圖形。

(4) 一個圓上具有三條複合點的交點弦時，便不一定可以可以形成魔圓陣。

**四、非全直徑圓所形成的魔球陣：**

(1) 無法得適當的關鍵點，來證明圖形無法以魔圓陣的形式呈現。

**五、只能在立體空間中呈現的圖形：**

(1) 只要有一個三次複合點是由兩組相切、一組相交，圖形就只能在立體空間中呈現。

## 柒、討論

在第十七頁的例子中，可以發現雖然符合計算上的公式，卻不能形成圖形，目前還未找出一般化的結果，那是可以再進行研究的課題。

這次的研究只有討論交點數，並沒有在排列數字上著墨，或許將數字放入可以發現更多有趣的結果。

魔球陣無法魔圓陣化的部分，還可以再深入地探討。

## 捌、結論

一個魔圓陣或魔球陣的形成，影響的因素很多，魔圓陣只探討了較為簡單的交點形式，而魔球陣牽涉了相當複雜的相交狀態圖形上的排列較為困難，在這次研究中雖然在數字上的排列並沒有去探討，但是光在圖形的排列組合上，就已經是困難重重了，也令我感到當愈深入探討一個問題時，就會發現更多的問題。

## 玖、參考資料及其他


1. 寓數學於遊戲(第二輯) 趙文敏 九章 1997
2. 魔圓陣之研究　第四十三屆全國中小學科學展覽會　2003

## 評　語

040410 高中組數學科　第二名

魔球陣之研究

1. 要如何將魔球之解有效並具視覺意味呈現出來即為科展的挑戰問題。

2. 作品為去年 43 屆科展成果推廣延伸。具有研究潛力。