中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040409

臺北縣立海山高級中學

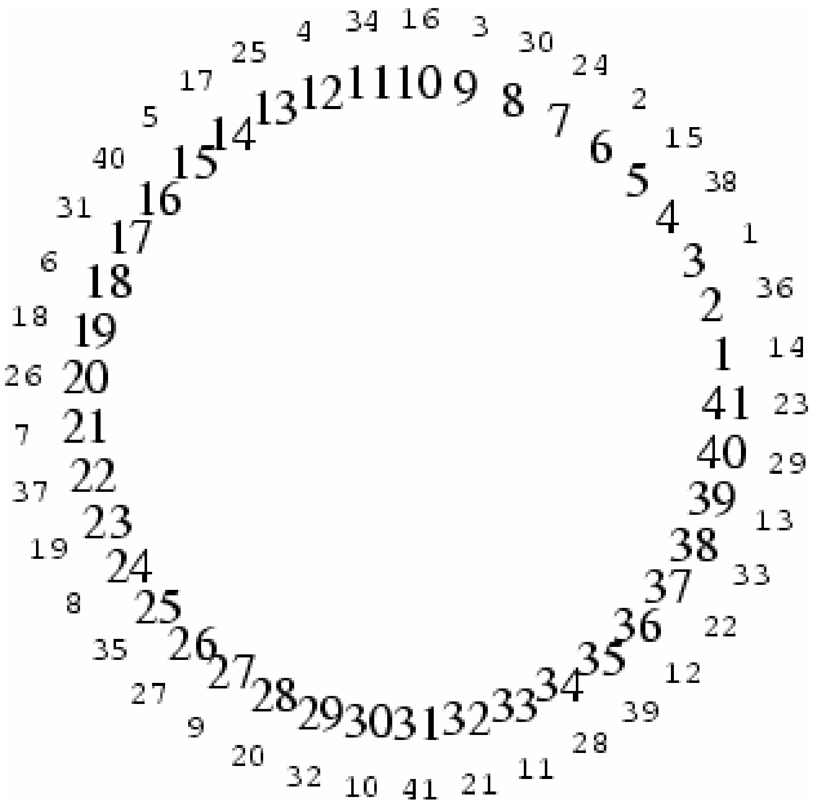
指導老師姓名

董維新

作者姓名

戴于珽

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會
作品說明書



L(N) v.s J(N)

科　　別：數學科

組　　別：高中組

作品名稱：我要活下去

關 鍵 詞：<u>遞迴數列</u>、<u>約瑟夫排列</u>、<u>數學歸納法</u>

編　　號：

壹、摘要

N 個人圍成圓圈並編號，由第一個人開始，先留一人再淘汰一人，以此類推，此乃約瑟夫問題。而由第一個人開始，先淘汰 α 人再留 β 人以此類推，以求倒數第 K 個人的是汰留問題。解決 $\alpha=1$、$\beta=1$ 與任意的 γ、N 即是我們的第一步。找到任意的 α、γ、N 及 $\beta=1$ 是我們的第二步，轉成進位法以找出演算法是我們比較大的突破，也推出了演算法的通式。雖一般任意 α、β、γ、N 尚未完全的解決，但在一些特殊的情況下，如 $\alpha=\beta$ 我們也得到了結果。我們在約瑟夫問題與汰留問題之間找到了關係式，並加以討論與研究。

貳、研究動機

在第四十三屆全國中小學科學展覽會中，學長所做的「九死一生」，已對汰α留β倒數第 K 人總數 N 人存活的編號 L(α, β,K,N)的汰留問題作初步的詳盡討論。會中教授指出該專題的思考過程中尚有些瑕疵需待改進，而未完成的部分還可以做更深入的探索，且我們在教授的指導下知道汰留問題和約瑟夫問題(Josephus Problem)有密切關係，引起我對後續發展產生莫大的興趣，也促使我廢寢忘食的去探討，期使這份作品更加完整。

叁、研究目的

由研究先汰α留β的汰留問題與先留β汰α的約瑟夫問題的現有處理方法出發，藉以啓發處理此兩種問題的方法並研究其關聯性，進而找出解決之道以處理「九死一生」專題中未來展望所未解決的問題。

肆、研究設備及器材

一、紙筆若干

二、計算機

硬體	軟體
桌上型電腦	Microsoft Excel XP
筆記型電腦	Microsoft Word XP

伍、研究過程或方法

一、文獻回顧

「九死一生」專題中討論到汰留問題如下:有一支 N 個人的軍隊在戰敗後決定自殺，方式為整個隊伍排成圓圈，在某人自殺後，跳過一人下一人再自殺，若有人想獨活，應位於隊伍中的何處？專題將此問題定義如下：L(α, β,K,N)表示人數為 N 人時由 1 號開始先淘汰α人留β人而倒數第 K 人存活的編號。在汰留時，若人數少於汰α人→則規定淘汰前 N－1 人，留最後一人當存活者，若汰α人後，人數少於留β人→則規定按圓形排列再從α＋1 留起。

專題中由汰一留一、汰二留一開始討論，導出其遞迴式與跳項條件，並由其倒數項找出規律性並推出汰α留一倒數項的跳項條件與汰α留β遞迴通式如下：

$$\boxed{\text{跳項條件}}\text{：當 N＝}\begin{cases}1\times(\alpha+1)^{n-1}\\ 2\times(\alpha+1)^{n-1}\\ \vdots\\ \alpha\times(\alpha+1)^{n-1}\end{cases}\text{、N＝}\begin{cases}(\alpha+2)\times(\alpha+1)^{n-1}\\ \vdots\\ 2\alpha\times(\alpha+1)^{n-1}\\ (2\alpha+1)\times(\alpha+1)^{n-1}\end{cases}\text{、N＝}\begin{cases}(2\alpha+3)\times(\alpha+1)^{n-1}\\ \vdots\\ (3\alpha+1)\times(\alpha+1)^{n-1}\\ (3\alpha+2)\times(\alpha+1)^{n-1}\end{cases}\cdots\text{；}$$

L（α,1,1,N）、L（α,1,2,N）、L（α,1,3,N）…依序發生跳項

$\boxed{\text{遞迴通式}}$：啓始條件：$L(\alpha,\beta,K,K)=1$, $L(\alpha,\beta,K,K+1)=2$, $\cdots$, $L(\alpha,\beta,K,K+\alpha-1)=\alpha$,

L（α,β,K,N＋α＋β）＝L（α,β,K,N＋β）＋α＋β，當 L（α,β,K,N＋β）≦N

L（α,β,K,N＋α＋β）＝L（α,β,K,N＋β）－N＋α，當 L（α,β,K,N＋β）＞N

其於汰一留一中推導出最後一位的演算法如下：

若 N 爲總人數，表成二進位法，則 L(1,1,1,N)爲將其二進位法的最高位數字刪除，而位於末位補零，再化成十進位。即 $N_A=A_1A_2A_3\cdots A_n$，→L（1,1,1,N）＝$A_2A_3\cdots A_nA_0$（A_0爲零）

專題中再轉向汰一留二與汰一留三的討論，導出其遞迴式，在求跳項時發現無法找到很良好的跳項條件，於是專題利用迴歸分析，找到跳項近似表示式：

汰一留二, 當 $N=1.8250543158\times(\frac{3}{2})^n$, $L(1,2,1,N)$ 發生跳項

汰一留三, 當 $N=3.77162\times(\frac{4}{3})^n$, $L(1,3,1,N)$ 發生跳項

既然汰一留β在處理時遇到困難無法解決，專題就先處理汰一留一的推廣：汰α留α，發現汰二留二，當人數 N 爲奇數，$N=\dfrac{4\times 2^n+(-1)^{n+1}}{3}$時，呈循環跳項。當人數 N 爲偶數，$N=2\times 2^{n-1}=L(2,2,1,N)$時跳項。相同地，再討論汰三留三至汰十留十，發現有類似性質。於是猜測：人數 N 分成模α的餘數 0、1、…、α－1 個系統，各有不同的循環跳項，但皆形同 $\dfrac{(\alpha\times A)\times 2^n+B}{2^\alpha-1}$，但 A、B 爲定值，當人數$N=\alpha\times 2^n$時，則$N=L(\alpha,\alpha,1,N)$跳項。但這猜測於專題中無法解決，尚待本文於後解決。

若我們於文後使用到參考資料內的內容，我們將用**粗體**表示

二、汰留問題與約瑟夫問題的緣起和定義

（一）、汰留問題的緣起

在高中數學歸納法裡有一個題目是這樣子的:在戰亂快結束時，有一支 n 個人的軍隊因彈盡援絕而打算全體自殺，其決定全體圍成一個圓圈，按順時針方向依次編號 1,2,3,…,n，由 1 號開始自殺，然後，順時針方向，每次跳過一個人，然後下一個人在自殺若小王在此 n 個人中想獨活，試問其要位於幾號位置？若其好友小陳亦想和小王殘活，試問其要位於幾號位置？

在這個問題中，是將 n 個人圍成圓圈，以淘汰 1 人再留 1 人，反覆下去，直到僅剩 1 人的編號，或是問倒數第 2 人的編號，這即是汰留問題。

（二）、約瑟夫問題的緣起

在猶太-羅馬戰爭時，Flavius Josephus 是被羅馬人包圍在一個山洞的 41 人之一，由於這些猶太人不願被羅馬人所俘虜，因此他們決定自殺，這 41 人圍成一圓圈，按圓圈方向進行，每隔一人就自殺一個，直到這 41 人都死光為止，而他和他朋友認為這種死法毫無意義，所以他很快的算出他和朋友應站在這圓圈的哪個位置才不會被殺。

在這個問題中，是將 n 個人圍成圓圈，以留 1 人再淘汰 1 人，反覆下去，直到僅剩 1 人的編號，或是問倒數第 2 人的編號，這即是約瑟夫問題。

（三）、汰留問題的定義及修正

1、**L(**α,β**,K,N)表示為總人數為 N 人時，由 1 號開始先淘汰**α**個人，留**β**個人，反覆進行，而倒數第 K 個人存活的編號。**

2、**在汰留時，若人數少於汰**α**人→則規定淘汰前 N-1 人，留最後一人當存活者，若汰**α**個人後，人數少於留**β**人→則規定按圓形排列再從**α**+1 留起。**

由於「九死一生」專題中所定義的 L(α,β,K,N)符號過長且 K 這個數字容易在數學歸納法過程中造成混淆，為了符號的簡便性，將符號改成 $L_{\alpha,\beta}(N,\gamma)$ 表示成汰 α 留 β，有 N 人時，倒數第 γ 號的編號取代 L(α,β,K,N)。

其中若 γ=1 時，我們將其簡化成 $L_{\alpha,\beta}(N)$，若對任意 γ 皆正確時，我們將其簡化成 $L_{\alpha,\beta}(N,)$，而當 α,β 在處理上沒有疑義或固定時，再簡化成 $L(N)$ 來取代。

（四）、約瑟夫問題的定義及修正

1、$J_{\alpha,\beta}(N,\gamma)$ 表示為總人數為 N 人時，由 1 號先開始留 β 個人，淘汰 α 個人，反覆進行，而倒數第 K 個人存活的編號。

2、在汰留時，若人數少於汰 α 人→則規定淘汰前 N-1 人，留最後一人當存活者，若汰 α 個人後，人數少於留 β 人→則規定按圓形排列再從 α+1 留起。

其中若 γ=1 時，我們將其簡化成 $J_{\alpha,\beta}(N)$，若對任意 γ 皆正確時，我們將其簡化成 $J_{\alpha,\beta}(N,)$，而當 α,β 在處理上沒有疑義或固定時，再簡化成 $J(N)$ 來取代。

三、我們先仿照 Graham、Knuth、Patashnrk 所著的具體數學（Concrete Mathematics）中對約瑟夫問題遞迴式的定義(詳見參考資料)，我們將汰留問題的遞迴式表達如下

汰一留一：1. $L(1)=1$　　2. $L(2n)=2L(n)$, $L(2n-1)=2L(n)-2$, 對於所有的 $n\geq 1$

汰二留一：1. $L(1)=1$, $L(2)=2$

2. $L(3n)=3L(n)$, $L(3n-2)=3L(n)-3$, $L(3n-1)=3L(n+1)-6$, 對於所有的 $n\geq 1$

汰三留一：1. $L(1)=1$, $L(2)=2, L(3)=3$　　2.$L(4n)=4L(n)$, $L(4n-3)=4L(n)-4$

$L(4n-2)=4L(n+1)-8$, $L(4n-1)=4L(n+2)-12$, 對於所有的 $n\geq 1$

汰 α 留一：1. $L(1)=1$, $L(2)=2, L(3)=3 \ldots L(\alpha)=\alpha$

$$2.\begin{cases} L((\alpha+1)n)=(\alpha+1)\times L(n) \\ L((\alpha+1)n-\alpha)=(\alpha+1)\times L(n)-(\alpha+1) \\ L((\alpha+1)n-\alpha+1)=(\alpha+1)\times L(n+1)-2(\alpha+1) \\ \vdots \\ L((\alpha+1)-\alpha+\alpha-1)=(\alpha+1)\times L(n+(\alpha-1))-\alpha(\alpha+1) \end{cases} \text{, 對於所有的 } n\geq 1$$

分析上述遞迴式計算 $L(N)$ 的值時，需利用到遞迴次數為 $\log_{(\alpha+1)} N$ ，共需計算約 $2\log_{(\alpha+1)} N$ 次

汰 α 留 β ：1. $L(1)=1$, $L(2)=2, L(3)=3 \ldots L(\alpha)=\alpha$

$$2.\begin{cases} L((\alpha+\beta)n)=(\alpha+\beta)\times L(n) \\ L((\alpha+\beta)n-\alpha)=(\alpha+\beta)\times L(n)-(\alpha+1) \\ L((\alpha+\beta)n-\alpha+1)=(\alpha+\beta)\times L(n+1)-2(\alpha+1) \\ \vdots \\ L((\alpha+\beta)-\alpha+\alpha-1)=(\alpha+\beta)\times L(n+(\alpha-1))-\alpha(\alpha+1) \end{cases} \text{, 對於所有的 } n\geq 1$$

四、汰一留一時，我們仿照 $\gamma=1$ 的演算法，建立起 $\gamma=2,3,4,5,\cdots$ 的演算法如下：

演算法 若 N 為總人數，先將其表示成二進位法 N_2 ，再將 γ 也化為二進位法 γ_2，在末尾補 0 後再減去 1（即將 $2\gamma-1$ 化為二進位）得到的數字末尾盡量補 0，但不超過 N_2 , 得數 M_2 , 將 (N_2-M_2) 後於末尾補 0 , 即為 $L(N,\gamma)$ 的二進位答案 。今舉例子如下：

例子：當總人數 $N=150=(10010110)_2$

$\gamma=1$, $M_2=(10000000)_2$, $N_2-M_2=(10110)_2$, $L(N,1)=(101100)_2=44$

$\gamma=2$, $M_2=(1100000)_2$, $N_2-M_2=(110110)_2$, $L(N,2)=(1101100)_2=108$

而「九死一生」專題中原始解法為

$2^{n-1}\le 150\le 2^n \Rightarrow n=8$, $2^{8-1}=128$, $L(N,1)=L(128+22,1)=L(128,1)+44=44$

$3\times 2^{n-1}\le 150\le 3\times 2^n \Rightarrow n=6$, $3\times 2^{6-1}=96$, $L(N,2)=L(96+54,2)=L(98,2)+108=108$

比較兩種方法，新採用的方法較適用於計算機上。

五、仿照汰一留一的演算法，建立起汰二留一的演算法如下：

$\boxed{\text{演算法}}$ 若 N 為總人數，先將其表示成三進位法 N_3 ，再將 $(\gamma-1)$ 也化為三進位法 $(\gamma-1)_3$ ，

$N\equiv k \pmod 2$, $k=0,1$，在末尾補平衡位後得到數 M_3' , (即 $M_3'=(\gamma-1)_3\oplus$ 平衡位)

，使得 $M_3'\equiv k \pmod 2$, 其中平衡位為 0 或 1，在末尾盡量補 0，但不超過 N_3 , 得數

M_3 , 將 (N_3-M_3) 後除以 2 再於末尾補 0， 即為 $L(N,\gamma)$ 的三進位答案 。

六、建立汰 α 留一的演算法如下：

$\boxed{\text{演算法}}$ 若 N 為總人數，先將其表示成($\alpha+1$)進位法 $N_{\alpha+1}$ ，再將 $(\gamma-1)$ 也化為 ($\alpha+1$)進位法

$(\gamma-1)_{\alpha+1}$ ， $N\equiv k \pmod \alpha$, $k=0,1,2\cdots,\alpha-1$ 在末尾補平衡位後得到數 $M_{\alpha+1}'$,

(即 $M_{\alpha+1}'=(\gamma-1)_{\alpha+1}\oplus$ 平衡位) ，使得 $M_{\alpha+1}'\equiv k \pmod \alpha$, 其中平衡位為 0 或 1

或 2 , $\cdots$,或 $\alpha-1$，在末尾盡量補 0，但不超過 $N_{\alpha+1}$, 得數 $M_{\alpha+1}$, 將 $(N_{\alpha+1}-M_{\alpha+1})$ 後

除以 α 再於末尾補 0， 即為 $L(N,\gamma)$ 的 $\alpha+1$ 進位答案 。

七、汰留問題與約瑟夫問題之間的關聯性

我們根據汰留問題與約瑟夫問題之間的結果討論其關係，整理如下：

（一）、 汰一留一時，我們可發現 $J(N,\gamma)=L(N,\gamma)+1$ ，證明從略。

（二）、仿照汰一留一，我們可以得到汰 α 留 1 的關聯： $J_{\alpha,1}(N,\gamma)\equiv L_{\alpha,1}(N,\gamma)+1 \pmod N$

證明： $J_{\alpha,1}(N,\gamma)$ 當留 1 後,剩 2,3,4,.....N,1 共 N 個,使用重編碼 1^*=(2),2^*=(3), 3^*=(4).....

(N-1)*=(N),N*=(1)，開始汰 1 就變成我們所討論的汰留問題，有 1^*, 2^*, 3^*.... N^*

共 N 個，殘留號碼為 $L_{\alpha,1}(N,\gamma)^*=L_{\alpha,1}(N,\gamma)+1=J_{\alpha,1}(N,\gamma) \pmod N$

但當 $J_{\alpha,1}(N,\gamma)-1=0$, 即 $L_{\alpha,1}(N,\gamma)=0=N$, 產生跳項

（三）、仿照汰α留一，我們可以得到汰α留β的關聯：$J_{\alpha,\beta}(N,\gamma)\equiv L_{\alpha,\beta}(N,\gamma)+\beta(\mathrm{mod}\,N)$

<pf> $J_{\alpha,\beta}(N,\gamma)$當留$\beta$後，剩$\beta+1$, $\beta+2$, $\cdots$, N, 1, 2, $\cdots$, β，共 N 個，使用重編碼

$1^*=(\beta+1)$, $2^*=(\beta+2)$, $\cdots$, $(N-\beta)^*=N$, $(N-\beta+1)^*=(1)$, $\cdots$, $N^*=(\beta)$

開始汰$\beta+1$就變成我們所討論的汰留問題，有 $1^*, 2^*, 3^*$.... N^*共 N 個，

殘留號碼爲$L_{\alpha,\beta}(N,\gamma)^*=L(N,\gamma)+\beta=J(N,\gamma)\ (\mathrm{mod}\ n)$

但當$J_{\alpha,\beta}(N,\gamma)-1=0$, 即$L_{\alpha,\beta}(N,\gamma)=0=N$，產生跳項

陸、研究結果與討論

我們重新定義汰留問題與約瑟夫問題的符號，並仿照具體數學中對約瑟夫問題遞迴式的定義，我們將汰留問題的遞迴式導出，由此推出汰α留一的演算法，而專題中汰二留一，根據遞迴通式也導出倍率式 L(3N)=3L(N)，但是我們發現其僅包含了 3N 項的答案，所以我們再增加了$L(3n-1)=3L(n+1)-6$, $L(3n-2)=3L(n)-3$，這樣子就能使在汰二留一中所包含的倍率式的結構更加完整。當我們知道起始條件和汰留的規則時，我們即可用倍率式算出。

而在汰三留三中，專題將其遞迴式表達如下：1. $L(4)=4$, $L(5)=5$, $L(6)=6$

$$2.\ L(N+3)=\begin{cases} L(N)+6 & ,\text{當 } L(N)\le N-3 \\ L(N)+6-N & ,\text{當 } L(N)=N-2, N-1, N \end{cases}$$

由遞迴通式可知已知 N 時可求 N+3 由數學歸納法原理知需分成$N=3t,3t+1,3t+2$討論，

由遞迴通式可知跳項條件爲$L(N)=N-2, N-1, N$

一、若$N=N_0=3t$跳項，$L(N_0)=N_0\Rightarrow L(N_0+3)=6\Rightarrow L(N_0+3k)=6k=N_0+3k\Rightarrow 3k=N_0$

$\Rightarrow$下次跳項爲$2N_0$，且$L(N)=N$，由等比公式得知$N=3t$時，跳項$a_n=3\times 2^n$

註：$L(N_0)=N_0-1, N_0-2$ 不可能成立

二、若$N=N_0=3t+1$跳項，$L(N_0)=N_0\Rightarrow L(N_0+3)=6\Rightarrow L(N_0+3k)=6k=N_0+3k-1$

$\Rightarrow 3k=N_0-1\Rightarrow$下次跳項爲 $2N_0-1=3t'+1$且$L(N)=N-1$

三、若$N=N_0=3t+1$跳項，$L(N_0)=N_0-1\Rightarrow L(N_0+3)=5\Rightarrow L(N_0+3k)=6k-1=N_0+3k-2$

$\Rightarrow 3k=N_0-1\Rightarrow$下次跳項爲 $2N_0-1=3t'+1$且$L(N)=N-2$

四、若 $N=N_0=3t+1$ 跳項，$L(N_0)=N_0-2 \Rightarrow L(N_0+3)=4 \Rightarrow L(N_0+3k)=6k-2=N_0+3k$

$\Rightarrow 3k=N_0+2 \Rightarrow$ 下次跳項爲 $2N_0+2=3t'+1$ 且 $L(N)=N$

取 3*t*+1 的跳項：$a_1=4$，$a_2=7$，$a_3=13$，$a_4=28$ 可知 $a_2=2a_1-1$，$a_3=2a_2-1$，$a_4=2a_3+2$

$$a_{3m+3}=2a_{3m+2}-1=2(2a_{3m+1}-1)-1=4a_{3m+1}-3=4(2a_{3m}+2)-3=8a_{3m}+5$$

取 $b_m=a_{3m}$，$b_{m+1}=a_{3m+3}$，$b_1=a_3=13$，$b_{m+1}=8b_m+5$，解特徵方程式 $\alpha=8\alpha+5$，$\alpha=-\frac{5}{7}$

即 $b_m=A\times 8^m-\frac{5}{7}$，$b_1=8A-\frac{5}{7}=13$，$A=\frac{12}{7}$，$a_{3m}=b_m=\frac{12\times 8^m-5}{7}=\frac{12\times 2^{3m}-5}{7}$

$$a_{3m-2}=2a_{3m-3}+2=2\times\frac{12\times 2^{3m-3}-5}{7}+2=\frac{12\times 2^{3m-2}+4}{7}$$

$$a_{3m-1}=2a_{3m-2}-1=2\times\frac{12\times 2^{3m-2}+4}{7}-1=\frac{12\times 2^{3m-1}+1}{7}$$ ，整合所有結果得出

$$a_n=\frac{12\times 2^n+\begin{cases}-5 & n=3m\\ 4 & n=3m-2\\ 1 & n=3m-1\end{cases}}{7}$$ ，同理，取 3*t*+2 的跳項可得 $$a_n'=\frac{18\times 2^n+\begin{cases}5 & n=3m+2\\ -4 & n=3m\\ -1 & n=3m+1\end{cases}}{7}$$

觀察分母皆爲 $2^3-1=7$，故知其分母必爲 $2^3-1=7$

仿照汰三留三的證明，專題將汰 α 留 α 遞迴式表達如下

$L(\alpha+1)=\alpha+1$，$L(\alpha+2)=\alpha+2$，$\cdots$，$L(2\alpha)=2\alpha$，

$$L(N+\alpha)=\begin{cases}L(N)+2\alpha & \text{當 } L(N)\le N-\alpha\\ L(N)+2\alpha-N & \text{當 } L(N)=N-(\alpha-1),N-(\alpha-2),\cdots,\ N\end{cases}$$

由遞迴通式可知已知 N 時可求 $N+\alpha$ 由數學歸納法原理知需分成 $N=\alpha t$，$\alpha t+1$，$\alpha t+2$，

$\cdots$，$\alpha t+\alpha-1$ 討論，由遞迴通式可知跳項條件爲 $L(N)=N-(\alpha-1),N-(\alpha-2),\cdots,N$

若 $N=N_0=\alpha t$ 跳項且 $L(N_0)=N_0 \Rightarrow L(N_0+\alpha)=2\alpha \Rightarrow L(N_0+\alpha k)=2\alpha k=N_0+\alpha k$

$\Rightarrow \alpha k=N_0 \Rightarrow$ 下次跳項爲 $2N_0$，且 $L(N)=N$，由等比公式得知 $N=\alpha t$ 時，跳項 $a_n=\alpha\times 2^n$

註：$L(N)=N-(\alpha-1),N-(\alpha-2),\cdots,N-1$ 不可能成立

仿照汰二留二及汰三留三，其結果呈現週期爲 α 的循環跳項，取某個系統 $a_n, b_m^k=a_{\alpha(m-1)+k}$

最後會得到$b_{m+1}^{k}=2^{\alpha}b_{m}^{k}-$某定數，解特徵方程式 $p=2^{\alpha}p-$某定數$\Rightarrow p=\dfrac{\text{某定數}}{2^{\alpha}-1}$

$$b_{m}^{k}=A\times(2^{\alpha})^{m}+p=\frac{\text{某數}\times 2^{\alpha m}+\text{某定數}}{2^{\alpha}-1}=a_{\alpha(m-1)+k}\Rightarrow a_{n}=\frac{\text{某數}\times 2^{n}+\text{某定數}}{2^{\alpha}-1}$$

觀察分母為$2^{\alpha}-1$，即可証出汰α留α的跳項條件中分母必為$2^{\alpha}-1$。

在汰一留二中，我們調整專題中 N 的跳項近似表示式由

$N=1.8250543158\times(\frac{3}{2})^{n}$成$N=1.216702877\times(\frac{3}{2})^{n}$。由汰一留二的數據，我們分析出：

$$a_1=2=1\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2},\ a_2=2\times\frac{3}{2}=(1\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2})\times\frac{3}{2}=(\frac{3}{2})^{2}\times(1+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}),$$

$$a_3=4=3\times\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=(\frac{3}{2})^{3}\times(1+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{3}),\ a_4=6=4\times\frac{3}{2}=(\frac{3}{2})^{4}\times(1+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{3})$$

$$a_5=9=6\times\frac{3}{2}=(\frac{3}{2})^{5}\times(1+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{3}),$$

$$a_6=14=9\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=(\frac{3}{2})^{6}\times(1+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{3}+\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{6}),$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}a_{30}=233304=&(\frac{3}{2})^{30}\times(1+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{3}+\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{6}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{8})+\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{9}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{10}\\&+\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{12}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{14}+\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{15}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{16}+\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{17}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{18}+\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{20}\\&-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{22}+\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{23}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{24}+\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{26}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{27}+\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{28}-\frac{1}{2}\times(\frac{2}{3})^{29})\\=&1.216702877\times(\frac{3}{2})^{30}\end{aligned}$$

我們觀察到項與項之間是正負相間的，但在次方上(1、3、6、8、9、10、12、14、15、16、17、18、20、22、23、24、26、27、28、29)我們仍然找不出規律性，只能由數據得知。

柒、討論

我們由「九死一生」專題中的方法與數學歸納法與遞迴數列，建立起汰 1 留 1、汰 2 留 1、汰 3 留 1、汰α留 1 到汰α留β問題的各種遞迴式，及汰α留一的各種演算法。

並分析汰留問題與約瑟夫問題的關聯性為$J_{\alpha,\beta}(N,\gamma)\equiv L_{\alpha,\beta}(N,\gamma)+1(\bmod N)$

與$J_{\alpha,\beta}(N,\gamma)\equiv L_{\alpha,\beta}(N,\gamma)+\beta(\bmod N)$，由遞迴數列的特徵方程式解法來證明跳項

的分母為$2^{\alpha}-1$，再由項與項的關係式說明 1. 216702877 的原因理由。雖然還是沒有

辦法處理到一般的汰α留β問題，但是已經將「九死一生」專題中未來展望所未解決的問題給一個適當的解決。

捌、結論

我們建立起汰α留β問題的各種遞迴式，及汰α留一的各種演算法。

並分析汰留問題與約瑟夫問題的關聯性爲 $J_{\alpha,\beta}(N,\gamma) \equiv L_{\alpha,\beta}(N,\gamma)+1(\bmod N)$

與 $J_{\alpha,\beta}(N,\gamma) \equiv L_{\alpha,\beta}(N,\gamma)+\beta(\bmod N)$ ，證明跳項的分母爲 $2^{\alpha}-1$

與說明 1. 216702877 的原因理由。雖然還是沒有辦法處理到一般的汰α留β問題，但是已經將「九死一生」專題中未來展望所未解決的問題給一個適當的解決。

至於一般的汰α留β問題，只能留給後人處理。

玖、參考資料

一、夏興國，數學歸納法縱橫談　台北市　九章出版社　1999 年出版

二、陳家聲、徐惠芳，遞歸數列，凡異出版社

三、簡子爲、詹朱聰、林豐正、林育翔，2003，九死一生，第四十三屆全國中小學科學展覽會

四、Graham、Knuth、Patashnrk，賴飛羆譯具體數學 東華出版社，一版，台北市，1-30，1988 年出版

評　語

040409 高中組數學科　佳作

我要活下去

Josephus 問題以被 Knuth 在具體數學一書中闡述無遺。人們必定會將任何與 Joesphus 相關的問題與 Knuth 所寫的相比較。要想作得比該書還好，可是一巨大挑戰！