中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040408

基隆市立安樂高級中學

指導老師姓名

蘇承芳

作者姓名

李雨濃

江天勤

談整數分組問題

壹、研究摘要

我們的主題是「已知有1^k 、 $2^k \cdots m^k$ （$m\in N$ 且 $k\in N$），將這些數分成 n 組，使每組的數字皆有$\frac{m}{n}$個，而且每組的數字和皆相等，試問應如何分法？」，研究重點放在 k、n、m 之間的關係，希望對於1^k 、 $2^k \cdots m^k$ 來說，我們能很快求得到一組分法解。

貳、研究動機

我們是學校數理研究社的社員，在某次的社團集會活動中，指導老師出了幾道與數字相關的難題考考大家，而「整數分組問題」便是其中的一道難題。本來我們覺得這應該是當中較容易的題目，沒想到愈做愈覺得繁瑣，所以決定深入探討，看看從1^k 、 $2^k \cdots m^k$ （$m\in N$ 且 $k\in N$）是否能夠找出規律平分成 n 組，而且每組的數字和都能相等，在應用上，我們也希望發現整數分組問題與其他數學問題的連結。

參、研究目的

一、對於「已知有 m 個數分別爲1^k 、 $2^k \cdots m^k$ （$m\in N$ 且 $k\in N$），今將這些數分成 n 組，其中 n 爲 m 之因數，使每組的數字皆有$\frac{m}{n}$個，而且每組的數字和皆相等，試問應如何分法？」這個問題，討論 m、n、k 之間的關係。

二、對於「試平分1^k 、 $2^k \cdots m^k$ （$m\in N$ 且 $k\in N$）成 n 組，而且每組的數字和皆相等」，在其成立的情形下，找出一組必存在的數字分法。

三、找出分法的規律，並利用電腦程式來驗證我們研究的結果。

肆、研究設備與器材

紙、筆、計算機、電腦、Microsoft Excel、Visual Basic

伍、研究過程與方法

已知有 m 個數分別爲1^k 、 $2^k \cdots m^k$ （$m\in N$ 且 $k\in N$），今將這些數分成 n 組，其中 n 爲 m 之因數，使每組的數字皆有$\frac{m}{n}$個，而且每組的數字和皆相等，試問應如何分法？

一、研究策略

1.我們先從最基本的 1、2⋯m（即 k＝1）開始討論，先觀察平分成兩組（n＝2）的情形，再推廣至 $n\in N$。

2.k＝1 的情形證明完畢之後，再試著按照一樣的順序，尋找並證明 k＝2，$n\in N$ 的結果。

3.解題的步驟如下：

(1)先瞭解在 k 及 n 固定的情形下，m 有什麼條件。

(2)在 m 固定的情形下，如果要平分成 n 組，且每組數字和相等，n 除了必須是 m 的因數之外，還必須滿足什麼條件呢？

(3)找出一組固定，且適用於「滿足題目要求的 m」的平分數字法。

二、k＝1（欲將 1、2⋯m 平分成 n 組，且每一組的和相等）

1.m 與 n 的關係：

(1)當 n＝1 時，直接分成一組。

(2)當 n＝2 時，m 首先必須是 2 的倍數，當我們將 m 個數字平分成兩堆時，每一堆會有$\frac{m}{2}$個數字。

假設 $1=a_1$、$2=a_2$、$3=a_3 \cdots m=a_m$ ，其中$\langle a_s \rangle$顯然爲一公差爲 1 的等差數列。

由等差中項的概念，得到 $a_1+a_m=a_2+a_{m-1}=a_3+a_{m-2}=\cdots=a_{\frac{m}{2}}+a_{\frac{m}{2}+1}$，如此每兩項和爲一定值，共可得到$\frac{m}{2}$堆和相等的情形。

若$\frac{m}{2}$爲奇數，即 m 個數字會分成奇數堆，由等差中項分法，兩個數字分成一堆，但奇數堆到最後會剩下一堆無法歸類，所以$\frac{m}{2}$必爲偶數。因爲$\frac{m}{2}$是 2 的倍數，

所以當 n＝2 時，m 必爲 4 之倍數。

(3)當 n＝3 時，m 首先必是 3 的倍數，當我們把 m 個數字分成三堆時，每一堆會有 $\frac{m}{3}$ 個數字，當然 $\frac{m}{3}$ 也一樣有可能是奇數或者是偶數。假設兩數相加會成一定值（從上述的等差中項概念而得），兩個數爲一組，若 $\frac{m}{3}$ 爲奇數，則中間會有一組數無法分類，所以當 n＝3 時 $\frac{m}{3}$ 爲偶數，即 $\frac{m}{3}$ 爲 6 之倍數。

(4)以此類推，當 n＝4 時 m 爲 8 之倍數，當 n＝5 時，m 爲 10 之倍數。所以，當 k＝1 時，若 m 爲 2n 之倍數，必能將m平分成 n 組，且 n 組數字和相等。

(5)<u>命題</u>：當 k＝1 時，若 m 爲 2n 之倍數，必能平分成 n 組。

<u>證明</u>：當 k＝1 時 m 首先爲 n 之倍數，然後把 m 分成 n 堆，每一堆會有 $\frac{m}{n}$ 個數字，而 1、2⋯m 中的兩個數加起來除以二會爲 $\frac{m}{2}$ 爲一組，然後再將一組分作一堆，而若 $\frac{m}{n}$ 爲奇數，這時會有一些數字無法分堆或無法分組，所以當 k＝1 時，$\frac{m}{n}$ 爲偶數，而 m 必爲 2n 之倍數。

2.若 m 滿足題目要求，則 n 可有哪些值？

(1)數字 1、2⋯m 可以平分的堆數必爲 m 之因數，但並非每一個 m 的因數都可以用來當做平分的組數。

我們可利用數字 1、2⋯m 的總和來判斷，如果數字 1、2⋯m 欲平分成 n 組，那就比較 $\frac{\sum_{t=1}^{m} t}{n}$ 與 m 的大小，且 m 須比 $\frac{\sum_{t=1}^{m} t}{n}$ 值小，否則無法將 m 放在任何一組中，即：

$$\frac{\sum_{t=1}^{m} t}{n} > m，$$

亦可寫成：$\frac{(1+m)m}{2n}>m$，

消去 m 得到：$\frac{1+m}{2n}>1$　　（公式一）

(2)舉例說明：如果當 m＝4 代入公式可得 n 爲 1、2 也就是說當 m＝4 時有可能平分成數字和相等的情形是 1 堆或 2 堆。根據上面的算法，我們得知

m＝2 時，n＝1	m＝3 時，n＝1	m＝4 時，n＝1、2
m＝5 時，n＝1	m＝6 時，n＝1、2、3	m＝7 時，n＝1
m＝8 時，n＝1、2、4	m＝9 時，n＝1、3	m＝10 時，n＝1、2、5

三、k＝2（欲將 1^2、2^2⋯m^2 平分成 n 組，且每一組的和相等）

1.m 與 n 的關係：

(1)當 n＝1 時，直接分成一組。

(2)當 n＝2 時，利用觀察法，得知，奇數不可平分成兩組，所以所有的奇數都不考慮。m＝2、4、6 時都不可將 1^2、2^2⋯m^2 平分成兩組。

8 是滿足 1^2、2^2⋯m^2 平分成兩組時，最小的 m 值，故以每 8 個數一循環，所以 9^2 到 16^2、17^2 到 24^2、1^2 到 16^2、1^2 到 24^2⋯皆可平分成兩組，所以當 n＝2 時，若 m 爲 8 的倍數，必可平分成兩組，且兩組的數字和相等。

【證明】數字 1^2、2^2、⋯、8^2 平分成兩組時，

可分成(1^2、4^2、6^2、7^2)及(2^2、3^2、5^2、8^2)

將 9 視爲 8t＋1，10 視爲 8t＋2，⋯，16 視爲 8t＋8，

則 9、10⋯16 可視爲 8 的一循環，結構與 1、2、⋯、8 相同。

又 $9^2=(8t+1)^2=64t^2+16t+1^2$，

$10^2=(8t+2)^2=64t^2+32t+2^2$，

$11^2=(8t+3)^2=64t^2+48t+3^2$，

…

$16^2=(8t+8)^2=64t^2+128t+8^2$

其中末項 1^2、2^2、…、8^2 可分成

(1^2、4^2、6^2、7^2)及(2^2、3^2、5^2、8^2)兩組數字和相等，

中間項 16t、32t、48t、…、128t

亦可提出 16t 成爲一等差數列 1、2、3、…、8，

而且對於數字 1、2、3、…、8 來說，

(1、4、6、7)及(2、3、5、8)亦爲數字和相等的分法，

所以 9^2、10^2、11^2、…、16^2 亦可按照 1^2、2^2、…、8^2 的結構分成

(9^2、12^2、14^2、15^2)及(10^2、11^2、13^2、16^2)

兩組數字和相等。

由此可知：

A.只要滿足 8 的循環結構（例如 9^2 到 16^2、17^2 到 24^2…）都可以分成與 1^2、2^2、…、8^2 結構相同的兩組數字和相等。

B.因爲每８個數字都可以分成兩組數字和相等的情形，所以 1^2 到 16^2、1^2 到 24^2 都可以平分成兩組數字和相等。

C.因爲 8 是 m 在 k＝2，n＝2 的最小整數，所以欲將 1^2、2^2…m^2 平分成 n 組，且每一組的和相等，當 m 爲 8 的倍數時，一定可以找到一組解，並滿足以上的分法。

D.當考慮 k＝2 該如何平分成 n 組時，可先找 m 的最小整數值，再討論 k＝1 生成循環的問題，就可找到滿足主題的分組法。

(3)當 n＝3 時，利用觀察法，得知 18 是滿足 1^2、2^2…m^2 平分成三組時，最小的 m 值，故以每 18 個數一循環，所以 19^2 到 36^2、37^2 到 54^2、1^2 到 36^2、1^2 到 54^2…

皆可平分成三組，所以當 n＝3 時，m 若為 18 之倍數，必能平分成三組，且三組的數字和相等。

【證明】數字 1^2、2^2、…、18^2 平分成三組時，

可分成(1^2、6^2、9^2、10^2、14^2、17^2)

(2^2、3^2、11^2、12^2、13^2、16^2)

(4^2、5^2、7^2、8^2、15^2、18^2)

將 19 視為 18t＋1，20 視為 18t＋2，…，36 視為 18t＋18，

則 19、20、…、36 可視為 18 的一循環，

結構與 1、2、…、18 相同。

又 $19^2=(18t+1)^2=324t^2+36t+1^2$，

$20^2=(18t+2)^2=324t^2+72t+2^2$，

$31^2=(18t+3)^2=324t^2+108t+3^2$，

…

$36^2=(18t+18)^2=324t^2+648t+18^2$

其中末項 1^2、2^2、…、18^2

可分成(1^2、6^2、9^2、10^2、14^2、17^2)

(2^2、3^2、11^2、12^2、13^2、16^2)

(4^2、5^2、7^2、8^2、15^2、18^2)三組數字和相等，

中間項 36t、72t、108t、…、648t 亦可提出 36t 成為一等差數列 1、2、3、…、18，

而且對於數字 1、2、3、…、18 來說，

(1、6、9、10、14、17)、

(2、3、11、12、13、16)

(4、5、7、8、15、18) 亦為數字和相等的分法，

所以 19^2、20^2、21^2、…、36^2 亦可按照 1^2、2^2、…、18^2 的結構分成(19^2、24^2、27^2、28^2、32^2、35^2)

$(20^2、21^2、29^2、30^2、31^2、34^2)$

$(22^2、23^2、25^2、26^2、33^2、36^2)$

三組數字和相等。

由此可知：

A.只要滿足 18 的循環結構（例 19^2 到 36^2、37^2 到 54^2），都可以分成與 1^2、2^2、⋯、18^2 結構相同的三組數字和相等。

B.因為每 1８個數字都可以分成三組數字和相等的情形，所以 1^2 到 36^2、1^2 到 54^2 都可以平分成三組數字和相等。

C.因為 18 是 m 在 k＝2，n＝3 的最小整數，所以欲將 1^2、2^2⋯m^2 平分成 n 組，且每一組的和相等，當 m 為 18 的倍數時，一定可以找到一組解，並滿足以上的分法。

D.當考慮 k＝2 該如何平分成 n 組時，可先尋找 m 的最小整數值，再討論生成循環的問題，就可找到滿足主題的分組法。

(4)以此類推，當 n＝4 時 m 為 32 之倍數，當 n＝5 時，m 為 50 之倍數。所以，當 k＝2 時，若需將ｍ平分成 n 組，且 n 組數字和相等，則當 m 為 $2n^2$ 之倍數時，一定可以找到分法滿足上列條件。

2.若 m 滿足題目要求，則 n 可有哪些值？

(1)數字 1^2、2^2⋯m^2 可以平分的堆數必為 m 之因數，但並非每一個 m 的因數都可以用來當做平分的組數。

我們可利用數字 1^2、$2^2\cdots m^2$ 的總和來判斷，如果數字 1^2、$2^2\cdots m^2$ 欲平分成 n 組，那就比較 $\dfrac{\sum_{t=1}^{m} t^2}{n}$ 與 m^2 的大小，且 m^2 須比 $\dfrac{\sum_{t=1}^{m} t^2}{n}$ 值小，否則無法將 m^2 放在任何一組中，即：

$$\frac{\sum_{t=1}^{m} t^2}{n} > m^2 \text{，亦可寫成：} \frac{m(m+1)(2m+1)}{6n} > m^2 \text{，}$$

消去 m 得到：$\dfrac{(m+1)(2m+1)}{6n} > m$　　（公式二）

四、k＝3（欲將 1^3、$2^3\cdots m^3$ 平分成 n 組，且每一組的和相等）

1.m 與 n 的關係：

(1)當 n＝1 時，直接分成一組。

(2)當 n＝2 時，利用觀察法，得知，奇數不可平分成兩組，所以所有的奇數都不考慮。m＝2、4、6、8、10 時都不可將 1^3、$2^3\cdots m^3$ 平分成兩組。12 是滿足 1^3、2^3、…、m^3 平分成兩組時，最小的 m 值，但這裡產生一個問題，12 是 1^3、2^3、…、m^3 平分成兩組的循環數嗎？

之所以有這樣的質疑，是因為 12 並非 8 的倍數，換句話說，如果 12 個數為一循環，1^2、2^2、…、12^2 沒辦法平分成兩組，

那在考慮 $(12t+1)^3=1728t^3+432t^2+36t+1^3$

$(12t+2)^3=1728t^3+864t^2+144t+2^3$

…

$(12t+12)^3=1728t^3+5184t^2+5184t+12^3$ 時，

將無法處理 $432t^2$、$864t^2$、…、$5184t^2$ 的部份平分成兩組，所以 12 不會是 1^3、2^3、…、m^3 分成兩組時，m 的循環數字。

接著考慮 1^3、2^3、…、16^3，m＝16 時亦可分爲兩組數字和相等：

(1^3、4^3、6^3、7^3、10^3、11^3、13^3、16^3)

(2^3、3^3、5^3、8^3、9^3、12^3、14^3、15^3)

故以每 16 個數一循環，所以 17^3 到 32^3、33^3 到 48^3、1^3 到 32^3、1^3 到 48^3…皆可平分成兩組，所以當 n＝2 時，m 若爲 16 之倍數，則必可平分成兩組，且此兩組數字和相等。

【證明】數字 1^3、2^3、…、16^3 平分成兩組時，

可分成

(1^3、4^3、6^3、7^3、10^3、11^3、13^3、16^3)

(2^3、3^3、5^3、8^3、9^3、12^3、14^3、15^3)

將 17 視爲 16t＋1，18 視爲 16t＋2，…，32 視爲 16t＋16，

則 17、18…32 可視爲 16 的一循環，

結構與 1、2、…、16 相同。

又 $(16t+1)^3=4096t^3+768t^2+48t+1^3$

$(16t+2)^3=4096t^3+1536t^2+192t+2^3$

…

$(16t+16)^3=4096t^3+12288t^2+12288t+16^3$ 時，

其中末項 1^3、2^3、…、16^3 可分成

(1^3、4^3、6^3、7^3、10^3、11^3、13^3、16^3)

(2^3、3^3、5^3、8^3、9^3、12^3、14^3、15^3) 兩組數字和相等，

中間項 48t、192t、…、12288t 亦可提出 48t 成爲一平方數列 1^2、2^2、3^2、…、16^2，這可分成

(1^2、4^2、6^2、7^2、10^2、11^2、13^2、16^2)

(2^2、3^2、5^2、8^2、9^2、12^2、14^2、15^2) 兩組數字和相等，

中間項 $768t^2$、$1536t^2$、…、$12288t^2$ 亦可提出 $768t^2$ 成爲一等差數列 1、2、3、…、16，這可分成

(1、4、6、7、10、11、13、16)

(2、3、5、8、9、12、14、15) 兩組數字和相等，

所以 17^2、18^2、19^2、…、32^2 亦可按照 1^2、2^2、…、16^2 的結構分成

(17^3、20^3、22^3、23^3、26^3、27^3、29^3、32^3)

(18^3、19^3、21^3、24^3、25^3、28^3、30^3、31^3)

兩組數字和相等。

由此可知：

A.只要滿足 16 的循環結構（例 17^3 到 32^3、33^3 到 48^3…）可以分成與 1^3、2^3、…、16^3 結構相同的兩組數字和相等。
B.因爲每 16 個數字都可以分成兩組數字和相等的情形，所以 1^3 到 32^3、1^3 到 48^3 都可以平分成兩組數字和相等。
C.因爲 16 是 m 在 k＝3，n＝2 的最小循環整數，所以欲將 1^3、2^3…m^3 平分成 n 組，每一組的和相等，當 m 爲 16 的倍數時，一定可以找到一組解，並滿足以上的分法。
D.k＝3，n＝2 時，m＝12 爲一個特殊解。
E.當考慮 k＝3 該如何平分成 n 組時，可先尋找 m 的最小整數值，再討論 k＝1 及 k＝2 生成循環的問題，就可找到滿足主題的分組法。

(3)當 n＝3 時，利用觀察法，得知 54 是滿足 1^3、2^3…m^3 平分成三組時，最小的 m 值，故以每 54 個數一循環，所以 55^3 到 108^3、1^3 到 108^3…皆可平分成三組，所以當 n＝3 時，m 若爲 54 之倍數，則必可平分成三組，且三組數字和相等。

(4)以此類推，當 n＝4 時，m 若為 128 之倍數，必可平分成四組數字和相等的數；當 n＝5 時，m 若為 250 之倍數，必可平分成五組數字和相等的數。所以，當 k＝3 時，m 若為 $2n^3$ 之倍數，必可將 1^3、2^3、…、m^3 平分成 n 組，且 n 組數字和相等。(不考慮特殊解)

2.若 m 滿足題目要求，則 n 可有哪些值？

數字 1^3、$2^3 \cdots m^3$ 可以平分的堆數必為 m 之因數，但並非每一個 m 的因數都可以用來當做平分的組數。

我們可利用數字 1^3、$2^3 \cdots m^3$ 的總和來判斷，如果數字 1^3、$2^3 \cdots m^3$ 欲平分成 n 組，那就比較 $\frac{\sum_{t=1}^{m} t^3}{n}$ 與 m^3 的大小，且 m^3 須比 $\frac{\sum_{t=1}^{m} t^3}{n}$ 值小，否則無法將 m^2 放在任何一組中，即：

$$\frac{\sum_{t=1}^{m} t^3}{n} > m^3 ,$$

亦可寫成：$\left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2 \times \frac{1}{n} > m^3$ ，

消去 m 得到：$\frac{(m+1)^2}{4n} > m$ （公式三）

陸、研究結果

一、我們從 k＝1 到 k＝3 的情形推論（不考慮小於生成循環數的特殊解）：

數字	平分成 2 組，m 的生成循環數	平分成 3 組，m 的生成循環數	平分成 n 組，m 的生成循環數
1、2、…、m	4	6	2n
1^2、2^2、…、m^2	8	18	$2n^2$
1^3、2^3、…、m^3	16	54	$2n^3$
1^k、2^k、…、m^k	……		$2n^k$

即：如果 1^k、2^k、…、m^k 要平分成 n 組，且每組數字和都相等，只要 m 是 $2n^k$ 的倍數，就一定可以做到。

二、對於「已知有 m 個數分別爲 1^k、$2^k \cdots m^k$（$m \in N$ 且 $k \in N$），今將這些數分成 n 組，其中 n 爲 m 之因數，使每組的數字皆有 $\frac{m}{n}$ 個，而且每組的數字和皆相等，試問應如何分法？」，分法應該從基本的最小生成循環數字的分法來考量。

1.譬如說，1、2、…、８要平分成兩組數字和相等，就分成（1、4、6、7）及（2、3、5、8），要分 9、10、…、16 時，只要按照 8 的生成循環形式規則去分，分成（9、12、14、15）及（10、11、13、16），就一定可以了。

2.若需考量 1^2、2^2、…、8^2 要分成兩組數字和相等，就必須同時考量 1、2、…、８分成兩組的分法，因爲（1、4、6、7）及（2、3、5、8）兩組和相等，將之平方後（1^2、4^2、6^2、7^2）及（2^2、3^2、5^2、8^2）兩組和亦相等，所以將 1^2、2^2、…、8^2 擴展到 1^2、2^2、…、$(8s)^2$ 時，都可以由這兩組數字分法（1、4、6、7）及（2、3、5、8）來延伸。

3.考量 1^2、2^2、…、18^2 要分成三組數字和相等的推廣法則亦相同。

4.若需考量 1^3、2^3、…、16^3 要分成兩組數字和相等，就必須同時考量 1、2、…、16 分成兩組的分法，因爲(1、4、6、7、10、11、13、16)及(2、3、5、8、9、12、14、15)兩組和相等，將之平方後(1^2、4^2、6^2、7^2、10^2、11^2、13^2、16^2)及(2^2、3^2、5^2、8^2、9^2、12^2、14^2、15^2)兩組和亦相等，所以將 1^3、2^3、…、16^3 擴展到 1^3、2^3、…、$(16s)^3$ 時，都可以由這兩組數字分法(1、4、6、7、10、11、13、16)及(2、3、5、8、9、12、14、15)來延伸。

5.考量 1^3、2^3、…、54^3 要分成三組數字和相等的推廣法則亦相同。

三、生成循環數參考分組法：

	數字	平分成 2 組
一	1、2、…、4	（1、4）及（2、3）
二	1、2、…、8	（1、4、6、7）及（2、3、5、8）
	1^2、2^2、…、8^2	（1^2、4^2、6^2、7^2）及（2^2、3^2、5^2、8^2）
三	1、2、…、16	(1、4、6、7、10、11、13、16) (2、3、5、8、9、12、14、15)
	1^2、2^2、…、16^2	(1^2、4^2、6^2、7^2、10^2、11^2、13^2、16^2) (2^2、3^2、5^2、8^2、9^2、12^2、14^2、15^2)
	1^3、2^3、…、16^3	(1^3、4^3、6^3、7^3、10^3、11^3、13^3、16^3) (2^3、3^3、5^3、8^3、9^3、12^3、14^3、15^3)

	數字	平分成 3 組
一	1、2、…、6	（1、6）及（2、5）及（3、4）
二	1、2、…、18	（1、6、9、10、14、17） （2、3、11、12、13、16） （4、5、7、8、15、18）
	1^2、2^2、…、18^2	（1^2、6^2、9^2、10^2、14^2、17^2） （2^2、3^2、11^2、12^2、13^2、16^2） （4^2、5^2、7^2、8^2、15^2、18^2）

【註】1^2、2^2、…、36^2 的平分成三組法：

（1^2、6^2、9^2、10^2、14^2、17^2、19^2、24^2、27^2、28^2、32^2、35^2）

（2^2、3^2、11^2、12^2、13^2、16^2、20^2、21^2、29^2、30^2、31^2、34^2）

（4^2、5^2、7^2、8^2、15^2、18^2、22^2、23^2、25^2、26^2、33^2、36^2）

四、m 個數字能否平分成 n 組的判斷式：

除了 n 為 m 的因數之外，n 至少還必須滿足下列各式。

數字	m 與 n 的關係式
1、2、⋯、m	$\frac{1+m}{2n}>1$
1^2、2^2、⋯、m^2	$\frac{(m+1)(2m+1)}{6n}>m$
1^3、2^3、⋯、m^3	$\frac{(m+1)^2}{4n}>m$

柒、討論

一、對於 m 個數字能否平分成 n 組的判斷式的部份，其實應該還可以找到更精確的判斷式，這個部份仍可深入探討。

二、1^k、2^k、⋯、m^k，$k\geq 3$ 的情形下，如何才有小於最小生成循環數的特殊解？像 1^3、2^3、⋯、12^3那樣能夠分組？（1^3、2^3、⋯、m^3可分成兩組的最小生成循環數為 18，卻可以找到 1^3、2^3、⋯、12^3平分兩組的方法）這個部份我們的討論尚無結論，應該還可以再多觀察這些數字的特性。

三、這次的研究，我們還來不及將研究的結果以電腦程式來加以驗證，如何寫出分組的程式，也是未來努力的方向之一。

捌、參考資料及其他

一、基礎數學第一冊，龍騰出版社

二、基礎數學第四冊，龍騰出版社

三、談數學解題（Problem Solving），左太政教授

評　語

040408 高中組數學科 佳作

談整數分組問題

研究的問題雖然容易敘述，但是圓滿的解答的困難度極高，超過中學生的數學能力。