中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040407

臺北縣私立光仁高級中學

指導老師姓名

翁立衛

林麗卿

作者姓名

吳亭佑

陳鼎升

周佳緯

蔡智強

蜂窩染色問題的探討

壹、摘要

本文探討的問題是相同的正六邊形(蜂窩)所構成平面之染色問題，在同色不相鄰與相同顏色中心點距離皆相同的條件下，探討可用幾種顏色將蜂窩圖塗滿，其中運用「骨架」的概念並引入斜角座標解決問題，並將其推廣至地磚圖形的染色問題上。

貳、研究動機

科技，在人類的無限慾望下被拓展得越來越廣，貝爾先生在 1876 年從聽筒另一端聽到的回響，喧起了世人一陣驚喜的讚嘆，而這一百二十七年來，這一聲嘆息從未歇止。手機已經成為現代人的基本配備，電訊公司一再地用基地台的普遍性作為宣傳，從參考資料 1、參考資料 2 與文獻探討(一)中得知：為了使發射基地台細胞(cell)的佈置有最大面積，須選擇正六邊形的蜂巢結構(簡稱「蜂窩」)，為求不相互干擾，因此相同頻率不能相鄰；在成本及資源有限的考量下，頻率須重複使用且相同頻率的細胞距離需相等。在閱讀這幾份資料之後，對於「同色不相鄰、相同顏色的距離相等」的蜂窩染色問題之應用及數學關係感到興趣，在討論之後，秉持「帶著邏輯的胡鬧就是創新」的信念與勇氣，決定以更數學的方式，對這個問題進行更深的探討；在部份猜測與小實驗有所突破之後，更堅定我們的路。

參、研究目的

一、研究條件

「蜂窩染色問題」須符合下列基本條件：

條件一、同色不相鄰：相鄰的任意兩個蜂窩須塗上不同的兩種顏色。

條件二、同色距離相同：任兩個最接近的同色蜂窩之中心點的距離相等。

二、研究問題

基本問題是：

(一)、 在滿足條件一與條件二的情況下，幾種顏色能塗滿無限延伸的蜂窩圖？

(二)、 若 n 種顏色能塗滿蜂窩圖，n 的一般式為何？

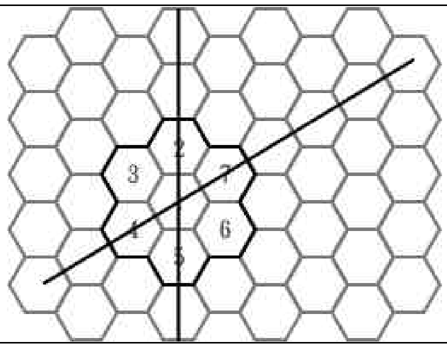
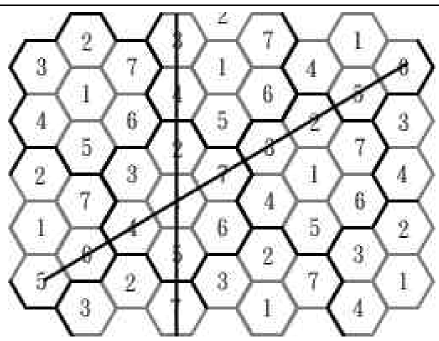
推廣問題是：

(一)、在滿足條件一與條件二的前提下，更改塗色區塊的形狀，如將正六邊形為底的蜂窩平面改成以正方形、正三角形，甚至是其他樣式的地磚圖形，請問需要幾種顏色？可塗顏色數列的一般項為何？

三、名詞定義

以下是本研究所要用到的名詞：

(一)、基本組態與顏色組態

基本組態	顏色組態
	

基本組態：可鋪滿整個平面且顏色相對位置固定的一個 n 元六邊形鍊。因為 n 元六邊形鍊的拼法有很多，數字一大就難以討論，原則上只找其中對稱的 n 元六邊形鍊為基本組態。由於 n 元六邊形鍊的 n 種不同顏色的相對位置可以互換(類似環狀排列)，為了方便討論與統一起見，規定在「顏色相對位置固定」的前提下來討論這一系列的著色問題。

顏色組態：在相同的基本組態下，鋪滿整個平面的一種方法，稱為一個顏色組態。

(二)、骨架

「骨架」是從「條件二：任兩個最接近的同色六邊形之中心距離須相等」推導出來的。以兩個正三角形黏合而成的菱形為最小單位。

四、預備知識

由參考資料 4《典雅的幾何》與實際考察，得知地磚圖形可分為以下四大類：

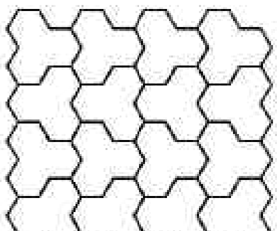
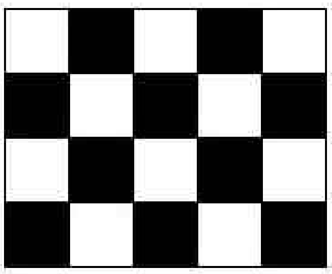
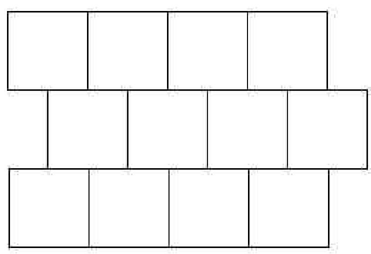
1．三種勻稱地磚面；

2．八種半勻稱地磚面（一）；

3．十四種半勻稱地磚面（二）；

4．至少三種生活中常見的地磚。(請參考附件一)

生活中地磚實例圖：

三合一蜂窩	棋盤式地磚	四方交錯型
		

肆、研究設備及器材

硬體部分：紙、筆、長尺、電腦

軟體部分：Microsoft Word、Ulead PhotoImpact 8.0、Adobe Acrobat
Macromedia Flash MX 2004、Fireworks MX 2004、PHP

伍、研究過程

一、我達達的馬蹄－多元蜂窩形鍊的想法

我們試著找出三種及四種顏色時的所有排列方法，將旋轉或翻轉後相同之圖形視為重複而省略，並嘗試拼湊成完整平面。研究進行到了五元蜂窩形鍊時，由於情況變得相當複雜，在查閱書籍後得知：五元、六元、七元、八元蜂窩形鍊分別有 22、 82、333、1448 **種；因此，決定放棄這個方向，多元蜂窩形鍊的想法到此告一段落。**

二、柳暗花明又一村－引入斜角座標的觀點

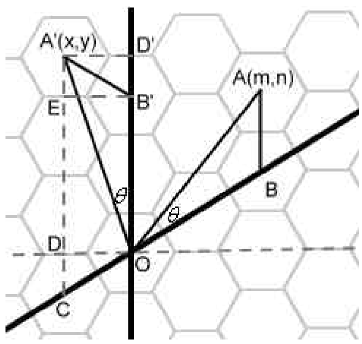
(一).**斜角座標上的兩點公式**

座標平面上兩點 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ => $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)(y_2-y_1)}$

將 A 當作原點 O、B 的座標為(m,n) => $\overline{OB}=\sqrt{m^2+n^2+mn}$

(二).**尋找骨架上的第三點座標**

將骨架的第一點定於原點 (0,0) **，第二點設於** A(m,n) **且限制** $m\in N, n\in N\cup\{0\}$**，以保持第二點位於『第一象限』或** X **軸上。因兩軸的交角為** 60°**，** $\overline{AO}$ **與** X **軸夾** q **角。故將** ΔAOB **向左旋轉** 60° **後必和圖中** $\Delta A'OB'$ **重合。**



$\therefore \overline{A'B'}=n \qquad \overline{A'D'}=\overline{OD}=n\cos 60^\circ=\dfrac{n}{2}$

又 $\overline{OC}=n$ (**四邊形** $OB'A'C$ **為等腰梯形**) $\Rightarrow x=-n$

$$y=\overline{A'E}+\overline{ED}+\overline{DC}=\overline{D'B'}+\overline{ED}+\overline{D'B'}$$
$$=2\overline{D'B'}+m=2\cdot n\cdot\cos 60^\circ+m=n+m$$

$\therefore A'$ **的坐標** $(-n,n+m)$

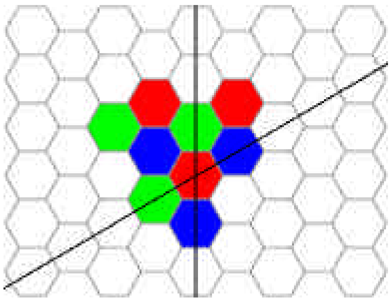
(三).**給定固定距離** d **之後，尋找骨架上的第二及第三點座標，開始嘗試幾個實例，由於條件一「同色不相鄰」，因此可得知** d>1**，故我們試著由** $d=\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4}\ldots$ **依序討論。**

$d=\sqrt{2}$ 時

$\sqrt{m^2+n^2+mn}=\sqrt{2}$　　∴$m^2+n^2+mn=2$

? $m^2+mn+(n^2-2)=0$（將 n 視為係數，m 視為未知數）D 為完全平方數時方程式有整數解。
發現 $D=(n)^2-4(n^2-2)=-3n^2+8$，D 皆不為完全平方數，故無解。

$d=\sqrt{3}$ 時



$\sqrt{m^2+n^2+mn}=\sqrt{3}$?　$m^2+mn+(n^2-3)=0$ 則 $D=-3n^2+12$

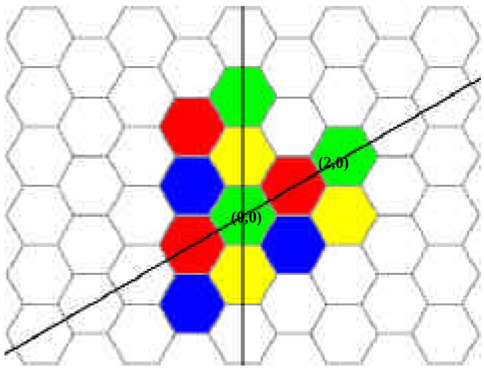
只有 n=1,2 時 D 為完全平方數，討論：

n=1 時? $m^2+m-2=0$? m=1or-2(負不合)

n=2 時? $m^2+2m+1=0$? m=-1(負不合)

故 $d=\sqrt{3}$ 時，(m,n) 有 1 組解：(1,1)。

$d=\sqrt{4}$ 時



$\sqrt{m^2+n^2+mn}=\sqrt{4}$

? $m^2+mn+(n^2-4)=0$
只有在 n=0,2 時 $D=-3n^2+16$ 為完全平方數
代入 $m^2+n^2+mn=4$ 討論後，得 (m,n) 有 1 組解：(2,0)。
發現要四種顏色來著色。

$d=\sqrt{5}$：

$\sqrt{m^2+n^2+mn}=\sqrt{5}$? $m^2+mn+(n^2-5)=0$，$D=-3n^2+20$ 皆不為完全平方數，故無解。

$d=\sqrt{6}$：

$\sqrt{m^2+n^2+mn}=\sqrt{6}$? $m^2+mn+(n^2-6)=0$，$D=-3n^2+24$ 皆不為完全平方數，故無解。

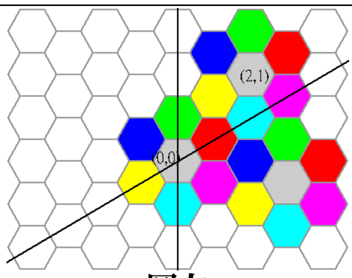
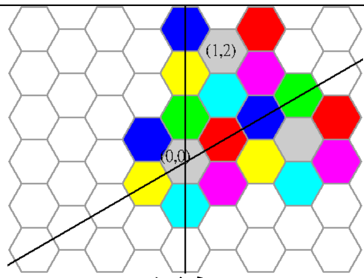
$d=\sqrt{7}$：

$\sqrt{m^2+n^2+mn}=\sqrt{7}$ 得知 $d=\sqrt{7}$ 時，(m,n) 有 2 組解：(2,1) (1,2)，需要七種顏色。

◎『組態』的發現！

將第二點設於 P(m,n) $m\in N, n\in N\cup\{0\}$，可確保第二點位於第一象限或 X 軸上的唯一可能。

但我們發現在數個基本組態相互連接時，彼此的相對位置不同，可能造成顏色組態的差異，下方的兩圖皆為$d=\sqrt{7}$時的著色，兩圖的基本組態一致且皆符合彼此緊密相接並可鋪滿平面的條件，但是在相互比較後發現，在兩個基本組態相接的地方，顏色間的相對位置不同，仔細觀察深藍、黃、綠三色間相對位置在左右兩圖中的差異；亦可利用觀察左右圖兩軸上顏色排序的不同，作為顏色組態的判斷依據。因為這些發現，可以知道在$d=\sqrt{7}$時具有兩種顏色組態。

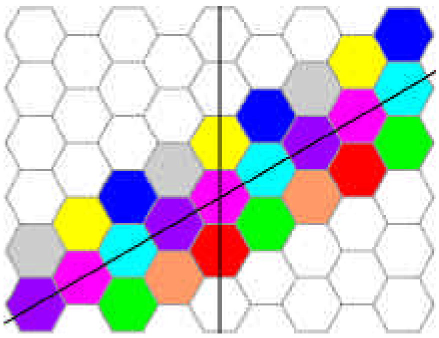
 圖左	 圖右

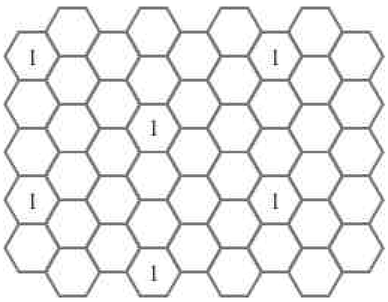
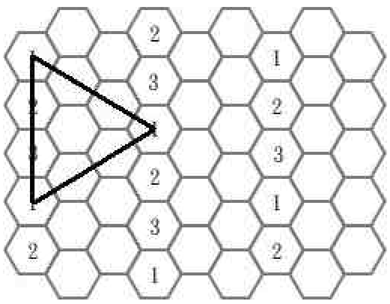
$d=\sqrt{9}$ 時 $\sqrt{m^2+n^2+mn}=\sqrt{9}$

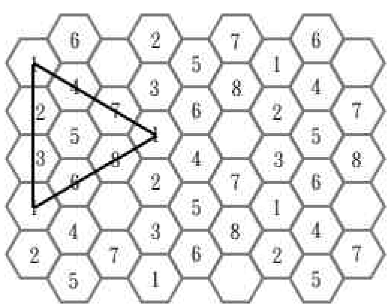
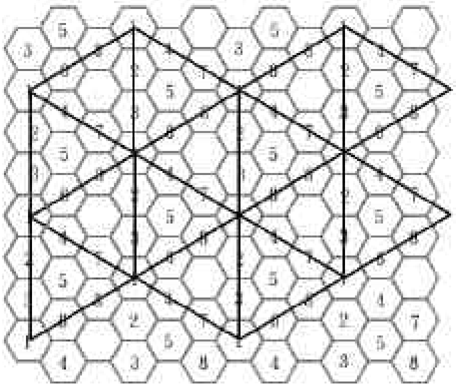
得(m,n)有 1 組解：(3,0)，

需要九種顏色來構成。

在此例子中，改變正三角形骨架的想法，改以菱形為著色問題的骨架。

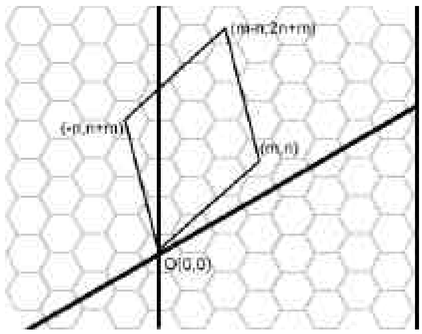


	按上述方法，利用正三角形骨架找出平面上塗第一種顏色的所有位置。
	依序塗上了第二、三種顏色。

	**繼續塗骨架內的所有位置，用完第八種顏色時恰填滿骨架內所有區域，但發現還有部分的蜂窩是空著的，無法涵蓋整個平面，意謂著正三角形骨架出現了漏洞。**
	**將所有與原點同色的點連接起來，發現只完成頂點朝右的正三角形區域，因次將一左一右的兩正三角形合併為一菱形作為骨架。**

三、千呼萬喚始出來－一般式的推導與推廣

(一).將染色問題化約成解方程式的問題



考慮骨架各頂點座標，將骨架第一點置於原點 O $(0,0)$**，第二點置於 A** (m,n)**，**$m\in N, n\in N\cup\{0\}$**，則可推得第三點** A' **坐標為** $(-n,n+m)$**，第四點 P 坐標為** $(m-n,2n+m)$**，顯然，** $OAPA'$ **為菱形。**

令 $\overline{OA}=\sqrt{m^2+n^2+mn}=d$ **則**

$$\overline{OA}^2=m^2+n^2+mn=d^2=T\Rightarrow m^2+mn+\left(n^2-T\right)=0\ \ldots(*)$$

欲完成蜂窩的著色問題，須先決定骨架的長度，因此給定 d 之後，以 O 為圓心，d 為半徑畫圓，圓弧一定要能通過蜂窩的中心，即不定方程式 $m^2+mn+\left(n^2-T\right)=0$ **有解** (m,n)**。**

因此蜂窩著色問題就成解方程式的問題，(*)為 m 的二次方程，有整數解的充要條件為判別式為完全平方數，則 $D=n^2-4\left(n^2-T\right)=k^2\ \ (k\in N\cup\{0\})$

$$m=\frac{-n+\sqrt{D}}{2}=\frac{-n+k}{2}\ (m\in N\cup\{0\})$$

d 固定時，T 也固定，若 $4T = k^2 + 3n^2$ 有解，則能找出一組骨架中位居第一象限或 x 軸上的第二點(m,n)。

估計 n 的範圍：

$$4T = k^2 + 3n^2 \Rightarrow 4T \geq 3n^2 \Rightarrow n \leq \sqrt{\frac{4T}{3}}$$

在 $n \leq \sqrt{\frac{4T}{3}}$ 且 $n \in N \cup \{0\}$ 的情況下求(n,k)與相對的(m,n)，有了關鍵第二點就能決定骨架，完成這類染色問題。

(二).骨架與顏色

我們發現菱形骨架可以將整個平面塗滿，且：

(a).骨架中內部(不被骨架的邊所畫過)每個顏色都不重複出現

(b).骨架邊上的蜂窩經過切補後，每個顏色出現面積都是一個單位蜂窩。

因此可透過骨架大小，算出菱形骨架面積，再從面積關係，算出顏色數。

∵菱形面積=兩正三角形面積=$2\times[\frac{1}{2}(\sqrt{m^2+n^2+mn})^2\times\sin 60°]$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}(m^2+n^2+mn)$$

一個蜂窩面積=$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{3}}\times 6=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴顏色數=菱形的面積÷一個蜂窩的面積=m^2+n^2+mn

數列前幾項為

d^2	3	4	7	9	12	13	16	19
(m,n)	(1,1)	(2,0)	(2,1)	(3,0)	(2,2)	(3,1)	(4,0)	(3,2)

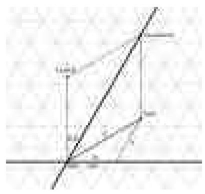
更多結果參見附件二

推廣一：(三角形地磚染色問題)

我們發現有兩類三角形，一類朝上(一個頂點在上)，一類朝下(兩個頂點在上)，三個正三角形中心要構成一個正三角形，必須選自同一類三角形中；而且同一類三角形中心共線，比較容易以座標表示，因此只先討論同一類三角形。先討論朝上的三角形：

(一).建立骨架

蜂窩的骨架概念可以直接應用在這個問題上，若把菱形骨架第一點放在某一個朝上三角形的中心，並設其為原點 O(0,0)，第二點 A 放在(m,n)，即為 O 往右數 m 單位，往上數 n 單位的位置，則第三點為(-n,n+m)，則第四點為(m-n,2n+m)，如右圖。



(二).骨架與顏色數關係

骨架和顏色關係同於蜂窩，由於只處理了朝上的三角形，因此顏色數要乘以二。故顏色數為 $2d^2=2(m^2+n^2+mn)$

(三).給定 T 之後

$$2(m^2+n^2+mn)=T \Rightarrow (m^2+n^2+mn)=\frac{T}{2}$$

要求非負整數解(m,n)，在判別式 $D=-3n^2+2T$ 為完全平方數的情況下，才能解出(m,n)，決定第一象限中的第一個點 A(m,n)，當 A 位置決定後，骨架各頂點位置都可求出，便可完成此染色問題，前幾個例子參看附件三。

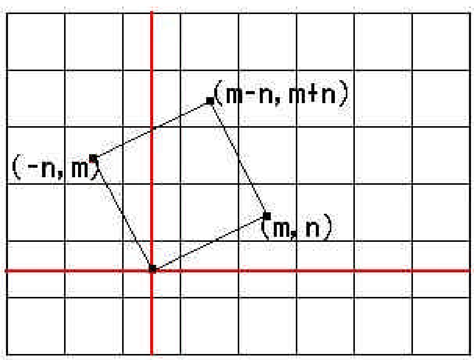
推廣二：(正方形地磚的染色問題)

(一).條件二「距離相等」的定義需要調整

正方形地磚染色問題中，選擇合適的座標以表示各正方形中心位置，選用直角座標系雖然解決正方形地磚的中心點位置，在定義骨架時卻遇到了困難，因為在直角座標系中不可能「任找三個格子點，使其成為正三角形的三個頂點」。決定改變定義，選了正方形做為新的骨架，主要原因有二：一、正方形和菱形較為接近，保持四邊相等的性質，只要"打斷"中間一條連線，將內角調整為直角後，會使得四角都一樣，菱形或三角形骨架中，也有對等的「等角」性質；二、方便與熟悉的考量。

(二).建立骨架

發現蜂窩的骨架概念可以直接應用在這個問題上，若把正方形骨架第一點放在某一個正方形的中心，並設其為原點 O(0,0)，第二點 A 放在(m,n)，即為 O 往右數 m 單位，往上數 n 單位的位置，則第三點 B 為(-n,m)，則第四點 P 為(m-n,n+m)，如右圖所示。



(三).骨架與顏色

正方形骨架和菱形骨架中得到的結果相同：

(a).正方形骨架中每個顏色都不重複(若重複即不符合骨架定義)；

(b).每種顏色都會在骨架中出現一次；

(c).經過切補之後發現每個顏色出現的區域面積都是一個單位正方形。

透過骨架大小，可算出骨架面積，再從面積關係，算出顏色數 $m^2+n^2=T$。

(四).給定 T 之後

要解$(m^2+n^2)=T$，得到非負整數解(m,n)，便可決定在第一象限中的第一個點 A(m,n)，當 A 位置決定後，骨架各頂點位置固定，參考六邊形的例子，便可以完成這類染色問題(部份結果參看附件四)。

四、野馬分鬃、如封似閉－乘法封閉性的證明

從觀察數列的規律性中得知，蜂窩染色數列與正方地磚染色數列具乘法封閉性：當 a,b 都是蜂窩染色或正方形地磚可塗色數列中的一項，其乘積 ab 也是該數列中的一項。

定理一：平方和乘積之後仍是平方和

[證明]　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(bc-ad)^2$

定理二：兩個可以寫成 A^2+kB^2 形式的數相乘之後，仍具有 A^2+kB^2 的形式

[證明]　$(a^2+kb^2)(c^2+kd^2)=(ac+kbd)^2+k(bc-ad)^2$

定理三：蜂窩可塗顏色數列中任兩項的乘積仍然是這個數列中的一項。

[證明]

若 a,b 是蜂窩可塗顏色數列中的兩項

則　$\mathbf{a}=x^2+y^2+xy=(x+\frac{y}{2})^2+(\frac{3}{4}y^2)$

$\mathbf{b}=m^2+n^2+mn=(m+\frac{n}{2})^2+(\frac{3}{4}n^2)$ (x,y,m,n,是不同時為零的非負整數)

則 $\mathbf{a}\,\mathbf{b}=(x^2+y^2+xy)(m^2+n^2+mn)=[(x+\frac{y}{2})^2+(\frac{3}{4}y^2)][(m+\frac{n}{2})^2+(\frac{3}{4}n^2)]$

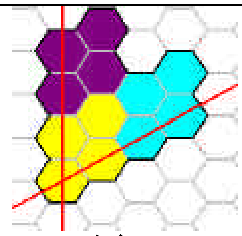
$=[(x+\frac{y}{2})(m+\frac{n}{2})+3(\frac{ny}{4})]^2+3[(m+\frac{n}{2})(\frac{y}{2})-(x+\frac{y}{2})(\frac{n}{2})]^2$ (參看定理二)

$=(mx+ny+\frac{my-nx}{2}+nx)^2+\frac{3}{4}(my-nx)^2$

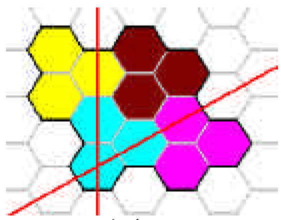
$=[(m+n)x+ny]^2+(my-nx)^2+[(m+n)x+ny](my-nx)$

[染色問題的解釋]：

1. a 色可塗的，先完成 a 色的組態，再參考 b 色塗法，將每一個蜂窩，換成之前的一個組態，即可完成 ab 色的塗色問題。例如：四色可塗，先完成四色組態，再參考三色的塗法，將每一個蜂窩擴大為一個四色的組態，即完成 12 色的塗法；同理，也可以先完成三色組態，再參考四色塗法，將每一個蜂窩擴大為一個四色組態，即完成 12 色的塗法。


(圖一)

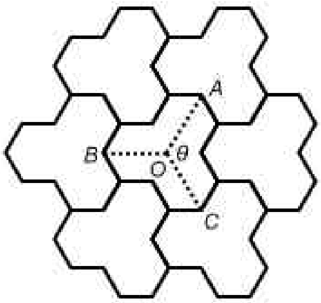
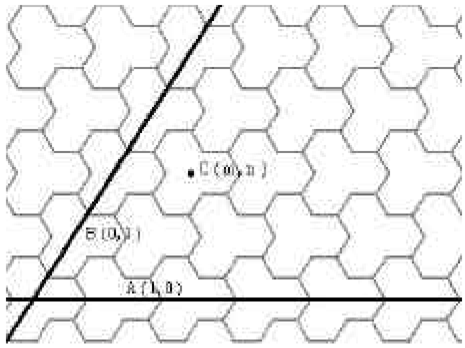
2. 反過來說，一個 ab 色的著色問題，可以將 b 色的組態視為同一個顏色聚集，即變成 a 色的塗色問題。例如：12 色的塗色問題中，如果把每四色的組態視為同一單位(若重新塗成一個新顏色)，即構成三色的塗法。

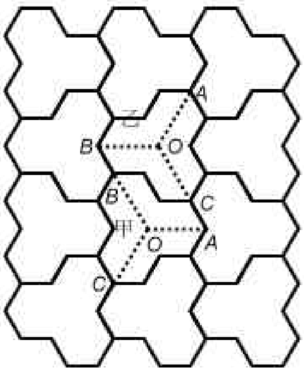
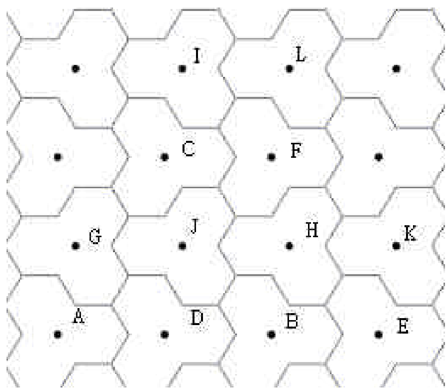

(圖二)

五、登泰山而小天下－地磚問題延伸

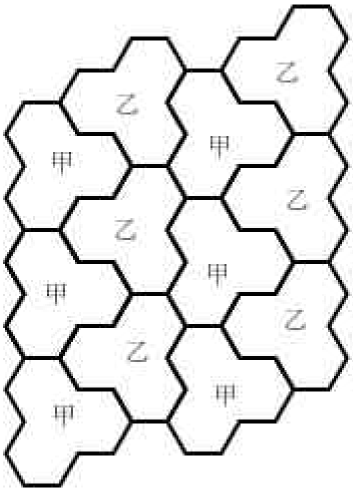
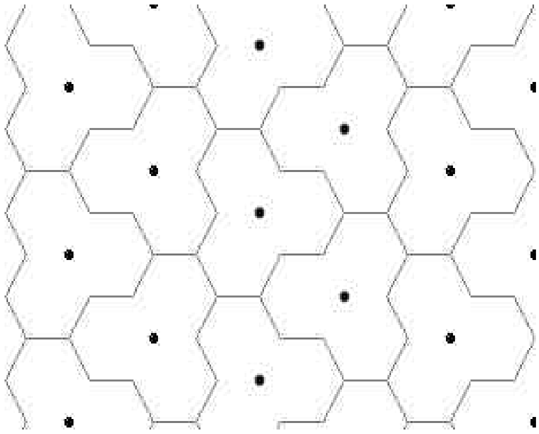
未曾遺忘研究的初衷，經歷過基本圖形磨練後，欲進一步實踐野心－深入各種地磚染色問題。繼續研究基本勻稱地磚的變形：三合一蜂窩圖、棋盤圖、四方交錯型，再從半勻稱地磚(一)中挑選出三款進行研究。

(一)、生活型地磚

<table>
<tr><th colspan="3">三合一蜂窩圖</th></tr>
<tr><th></th><th>圖例</th><th>染色方法</th></tr>
<tr><td>同向排列</td><td>
</td><td>

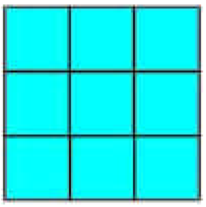
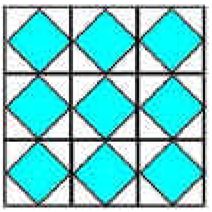
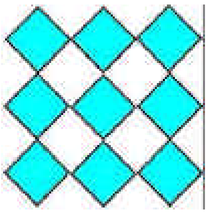
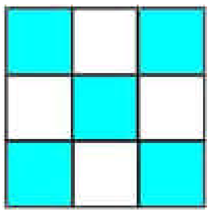
每個地磚中心點皆共線，相鄰地磚連心線長度皆相同，骨架長度$d=\sqrt{m^2+n^2+mn}$，可塗顏色是 d^2，和蜂窩染色問題是等價的</td></tr>
<tr><td>交錯排列</td><td>
</td><td>

將此圖拆成四個部分，以四個 60° 斜角座標來討論，(A,B,C) (D,E,F) (G,H,I) (J,K,L)為同一組座標系，發現骨架長度$d=\sqrt{m^2+n^2+mn}$，可塗顏色是 $4d^2$</td></tr>
</table>

交錯排列二	 	 座標化後，發現某些相鄰地磚中心點不能共線，很難以骨架觀點詮釋，因此不討論這類圖形的染色問題。

西洋棋盤圖

對於西洋棋盤的塗色法，我們想到另一種截然不同的觀點(用座標法也可以得到相同的結果)，覺得這種方式很神奇，值得提出來討論。請參看下圖與相關說明：

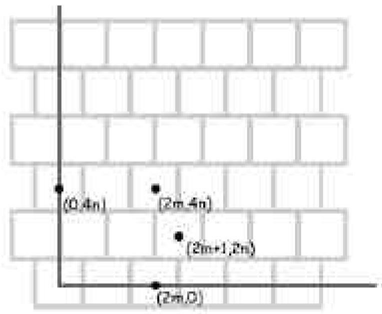
			
圖中著色區域為欲著色的區域。	只考慮中心點位置的據離，因此只要中心位置不變，就不影響「同色距離相等」的條件。因此可以只考慮各邊中點連線組成的四邊形區域。	忽略原來的框線	旋轉 45 即可得到西洋棋棋盤的圖形。

西洋棋盤塗色時並不會有同色相鄰的問題，允許 1 種顏色塗色，這兩種地磚的圖色數列僅在此有些微差別。

四方交錯型

若將正方形邊長設為 2, 以其中之一個正方形地磚中心點為原點，則其他正方形地磚的中心(第一點)，依其所在的位置可分為：

1. **奇數層**：(2m+1,2n), m,n 為整數
2. **偶數層**：(2m,4n)
3. X **軸**：(2m,0)
4. Y **軸**：(0,4n)

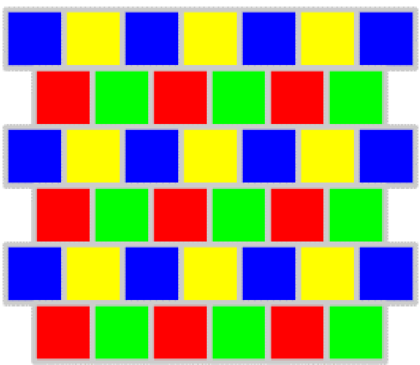
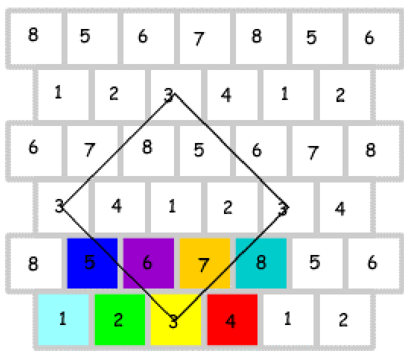


當骨架為正方形時，除第一點外，再找出和原點距離相等的第二點座標，且第一點、第二點與和原點間所構成的兩條直線必垂直，當第一點 A(x,y)，**則第二點座標為** B(-y,x)，**將** A、B **分成上述的四種情況，分別討論：**

1. **當** A **在奇數層**(2m+1,2n)**時，則** B **點座標** (-2n,2m+1) **不在正方形中心上。**
2. **當** A **在偶數層** (2m,4n)**時，則** B **點座標** (4n,2m)；**當** m **為奇數時** B **點位於奇數層的正方形邊上，當** m **為偶數時** B **點位於偶數層的正方形中心上。**
   故設 A(4k,4n)**則** B(-4n,4k)**一定在偶數層的正方形中心上。**

   此時的顏色數 = **骨架面積/單位正方形面積** $= \dfrac{16k^2+16n^2}{4} = 4(k^2+n^2)$

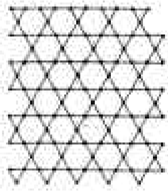
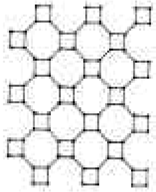
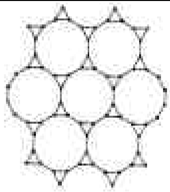
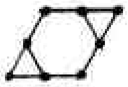
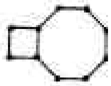
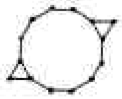
結論：四方交錯型的染色數是正方形的四倍。

<table>
<tr><th colspan="2">四方交錯型範例圖</th></tr>
<tr><th>四色圖</th><th>八色圖</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

(二)、半勻稱瓷磚面(一)之初探

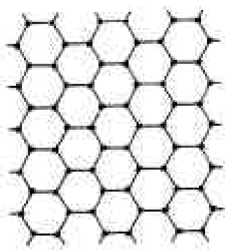
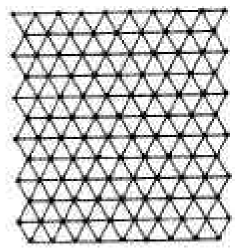
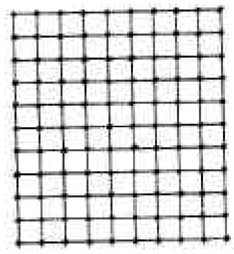
圖形變化與合併的觀點

半勻稱地磚是由兩種或兩種以上不同基本圖形所組合而成，在處理這些圖形時，想要以合適座標系來表示，是有困難的，我們試著將 N 個不同的地磚合併成一個較大且能一次拼完整個平面的圖案，將此大地磚的染色數算出，再乘上 N 就是這整個地磚面可塗的染色數。這種方法依然兼顧「同色不相鄰」和「同色距離相等」的限制，且不會造成同一基本組態中顏色重複的問題。

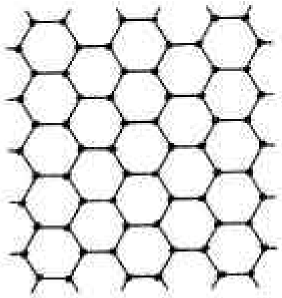
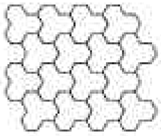
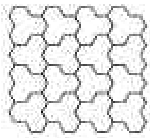
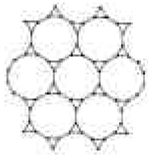
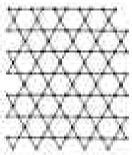
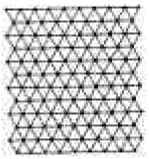
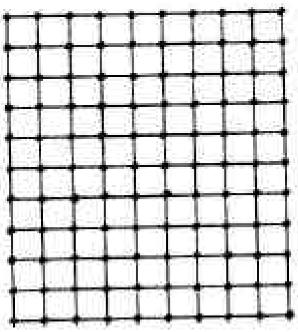
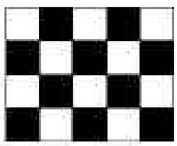
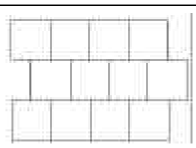
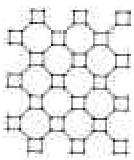
	正三角形與正六邊形	正方形與正八邊形	正三角形與正十二邊形
圖案			
大地磚			
大地磚骨架長度	$d=\sqrt{m^2+n^2+mn}$	$d=\sqrt{m^2+n^2}$	$d=\sqrt{m^2+n^2+mn}$
顏色數	$3d^2$	$2d^2$	$3d^2$

陸、研究成果與討論

本研究已順利將蜂窩的染色問題推廣至多種地磚染色問題，在滿足「同色不相鄰」與「同色距離相同」的條件下，發現染色問題的關鍵在於骨架，骨架的中心放在原點 O(0,0)，第二點 A(m,n)會影響方法數與顏色組態的數目。結果如下表：

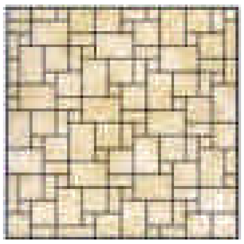
	蜂窩	正三角形	正方形
形狀			
骨架長度	$d=\sqrt{m^2+n^2+mn}$	$d=\sqrt{m^2+n^2+mn}$	$d=\sqrt{m^2+n^2}$
可塗顏色通式	$d^2=(m^2+n^2+mn)$	$2d^2=2(m^2+n^2+mn)$	$d^2=(m^2+n^2)$
可塗顏色數列	3, 4, 7, 9, 12, 13, 16, 19, 21, 25, 27, 28, 31, 36, 37, 39, 43, 48, 49, 52, 57, 61…	2, 6, 8, 14, 18, 24, 26, 32, 38, 42, 50, 54, 56…	2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 20, 25, 26, 29, 32…
顏色組態個數	即為 $m^2+n^2+mn=T$ 中解(m,n)的個數	即為 $2(m^2+n^2+mn)=T$ 中解(m,n)的個數	即為 $m^2+n^2+mn=T$ 中解(m,n)的個數
(m,n)有解的相關條件	存在非負整數 k 使得 $k^2+3n^2=4T$	存在非負整數 k 使得 $k^2+3n^2=2T$	存在非負整數 k 使得 $k^2+n^2=T$
乘法封閉性	有	無	有

發現這九種地磚圖和兩種基本地磚圖的染色數有很大關係：

母圖	子圖	子母可行解關係
蜂窩圖  ● **一般式** $D^2 = m^2 + n^2 + mn$ ● 60°,120° **的菱形骨架**		1 **倍** **僅看中心，兩者骨架完全相同。**
		4 **倍** **分為** 4 **個斜角座標，皆與原骨架相同。**
		3 **倍** **將兩正三角形及一正十二邊形合併為大地磚。**
		3 **倍** **將兩正三角形及一正六邊形合併為大地磚。**
		2 **倍** **分為頂點朝上、下兩組，且皆與原骨架相同。**
正方形  ● **一般式** $D^2 = m^2 + n^2$ ● **正方形骨架**		1 **倍** **僅討論白色部分，其與原骨架相同，但無同色不相鄰之限制，故存在顏色數**=1。
		4 **倍** **將四個正方形合併為大地磚。**
		2 **倍** **將一正方形及一正八邊形合併為大地磚。**

一路走來，花開朵朵！和區賽作品比起來，又往前走了很大一步，目前還有幾問題值得繼續討論：

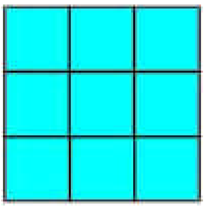
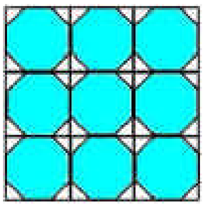
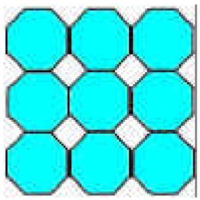
一、在網路上發現兩種很有趣的地磚(如下圖)，這兩種地磚是以往沒有碰過的圖案，是我們急待挑戰的問題。



二、還有五個更複雜的半勻稱地磚圖等著我們！

三、之前已證明「蜂窩地磚與正方形地磚的可圖數列有乘法封閉性」之外，並對封閉性進行幾何解釋。隨著更多地磚圖形之可塗數列被解出，想將部份焦點轉移到探討數列的代數性質。

四、「變形」的觀點似乎是一種前所未見的新觀點，優點在於呈現兩種地磚染色問題的微妙關係，缺點是無法以適切文字說明，容易遭到質疑。儘管如此，我們認為這是很大的突破，具有很大意義，能夠掙脫地磚外形的限制，理解更深層的結構，這是未來可以繼續討論的地方！

正方形與正四與正八邊形退化情況		
		
圖中著色區域為探討區域	將四邊形塗色時只塗正八邊形的區域。	忽略正方形框線，即得到退化的正八邊形染色方式。

柒、結論

本研究歷經多次觀點轉換，箇中甘甜滋味，只有參與其中的成員，最清楚！「多元蜂窩形鍊」是最早宣告失敗的觀點，它類似窮舉的過程，很辛苦，卻讓我們從中了解圖形間千變萬化的各種組合，奠定未來研究的基礎。

「尋找座標」是第二種觀點，以解析的方法來處理：替所有地磚圖形找尋合適的座標系→決定骨架→求出骨架面積與不同的顏色數→得到可染色數列。不過這種觀點在半匀稱地磚的染色問題上遇到一點瓶頸，因為半匀稱地磚是由兩種或兩種以上不同基本圖形的地磚所組合而成，處理這些圖形時要以合適座標系來表示，是有困難的，因此勢必要改變想法。

「變形與合併」是第三種觀點，在研究半匀稱圖形的退化狀況時，發現這些圖形的答案和蜂窩、正方形地磚有很大的關係，高明的夥伴想到可以用「連續變化的圖形」呈現這些圖形的關係，於是發現「正方形地磚」和「西洋棋盤」間的關係(參看 p.13)，「正方形地磚」與「正四及正八邊形地磚的退化問題」間的關係(參看 p.17)。不受限於圖形的外形，思緒會更加寬廣，適度改變地磚形狀，將某些區塊合併成一致的小單位，再研究這些小單位的染色問題。這個觀點類似先前的「組態」，算是首尾呼應吧！

第三種觀點是重大突破，具有很大意義，只要能夠將其適度切割成一致的小單位，輔以座標方法來處理染色問題，便可以解決！地磚染色問題，也就功德圓滿！

證明的嚴謹，是我們不足之處，願意再加強這部分，讓作品更完整。

捌、參考資料及其他

1.韓雅倫、厲家穎、李書霈、林瑋茹、陳柏安(民 92)，<u>蜂巢細胞結構的行動網路</u>。科學教育月刊第 257 期，pp.43~50。

2.楊慶隆(2003)，<u>有關 GSM(0932)行動電話疑遭蓋台之說明即因應措施- 鄰頻干擾現象</u>。<u>http://www.3na.csie.ndhu.edu.tw/~cnyang/mobile/sld001.htm.</u> (2003/12/5)

3.Martin Gardner(1989)，Mathematical Magic Show。The Marhematical Association of American，Washington, D.C.USA，pp.147~148。

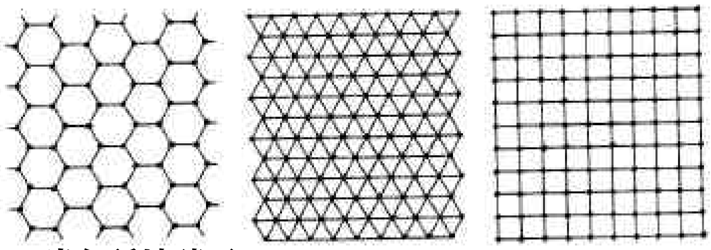
4.葉偉文(2002)譯，典雅的幾何。台北：天下遠見，pp.58~61。

5.張奠宙、戴載平主編(1997)，生活中的中學數學。台北：九章，pp.95~98。

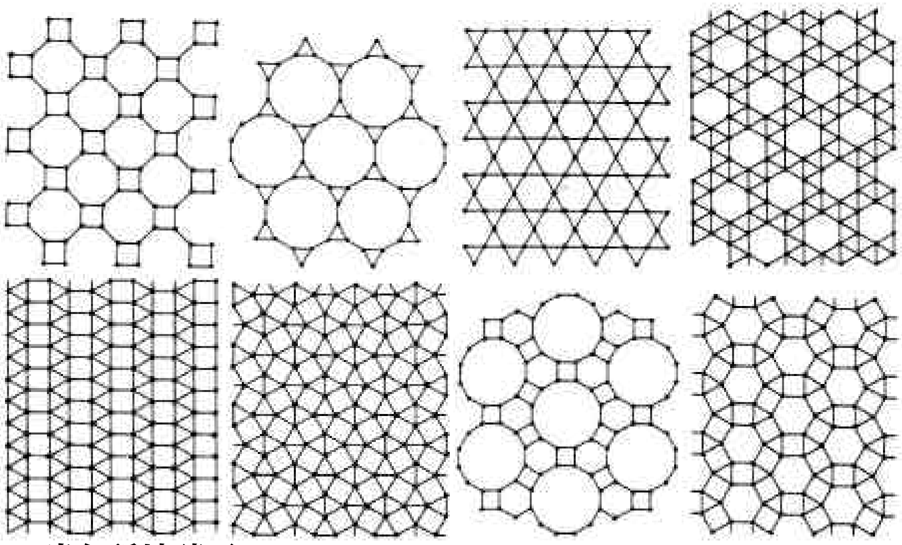
玖、附件

附件一、所有地磚圖

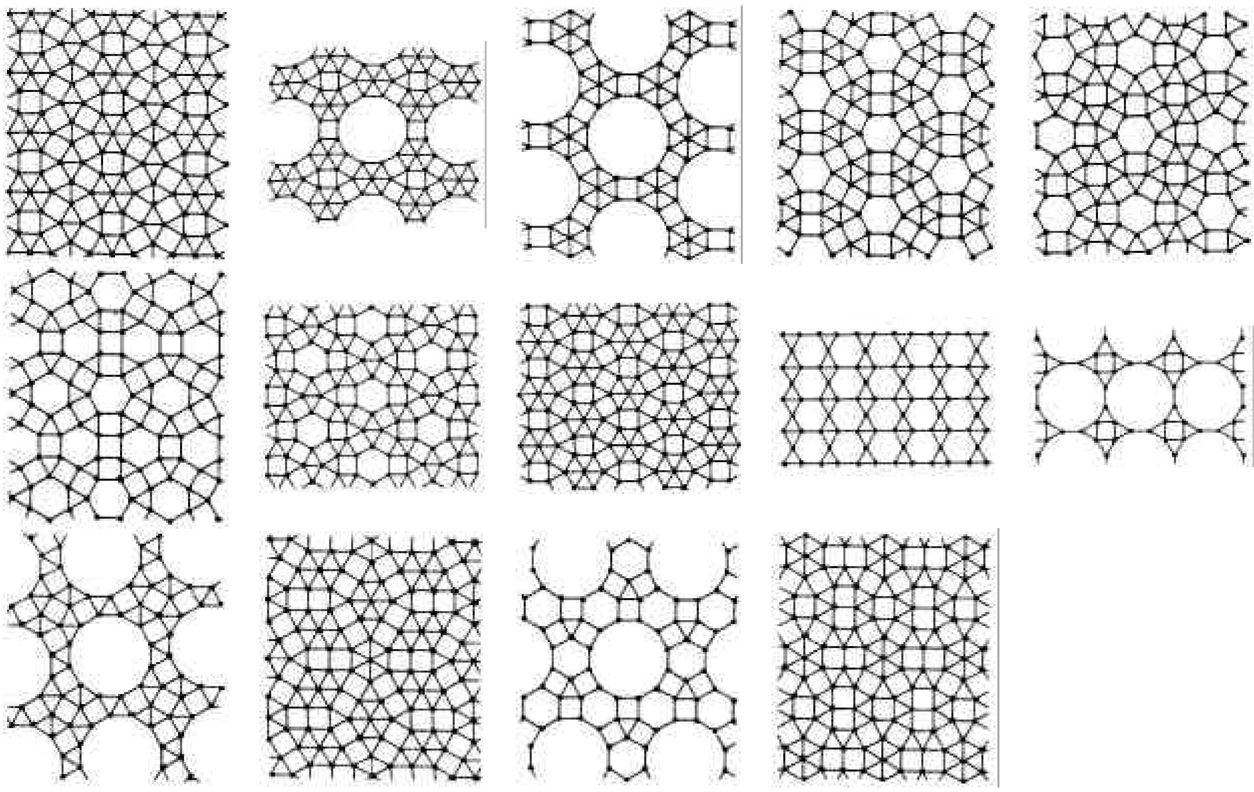
A. **匀稱地磚面**



B. **半匀稱地磚面**（一）



C. **半匀稱地磚面**（二）



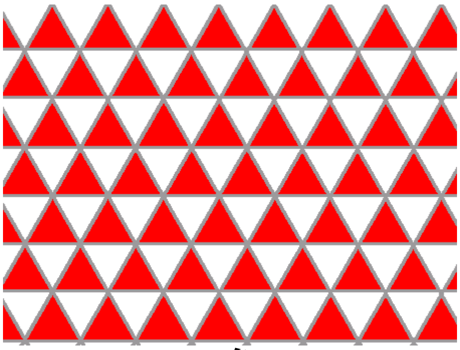
附件二、T 值表格

T	K	(m,n)	解組態數
3	3	(1,1)	1
4	4	(2,0)	1
7	5 4	(2,1) (1,2)	2
9	6	(3,0)	1
12	6	(2,2)	1
13	7 5	(3,1) (1,3)	2
16	8	(4,0)	1
19	8 7	(3,2) (2,3)	2
21	9 6	(4,1) (1,4)	2
25	10	(5,0)	1
27	9	(3,3)	1
28	10 8	(4,2) (2,4)	2
31	11 7	(5,1) (1,5)	2
36	12	(6,0)	1
37	11 10	(4,3) (3,4)	2
39	12 9	(5,2) (2,5)	2
43	13 8	(6,1) (1,6)	2
48	12	(4,4)	1
49	14 13 11	(7,0) (5,3) (3,5)	3
52	14 10	(6,2) (2,6)	2
57	15 9	(7,1) (1,7)	2
61	14 13	(5,4) (4,5)	2

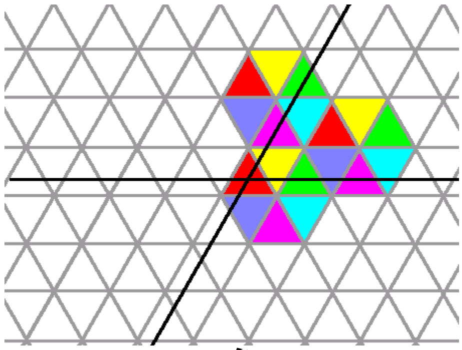
T	K	(m,n)	解組態數
63	15 12	(6,3) (3,6)	2
67	16 11	(7,2) (2,7)	2
73	17 10	(8,1) (1,8)	2
75	15	(5,5)	1
76	16 14	(6,4) (4,6)	2
79	17 13	(7,3) (3,7)	2
81	18	(9,0)	1
84	18 12	(8,2) (2,8)	2
91	19 17 16 11	(9,1) (6,5) (5,6) (1,9)	4
93	18 15	(7,4) (4,7)	2
97	19 14	(8,3) (3,8)	2
100	20	(10,0)	1
103	20 13	(9,2) (2,9)	2
108	18	(6,6)	1
109	19 17	(7,5) (5,7)	2
111	21 12	(10,1) (1,10)	2
112	20 16	(8,4) (4,8)	2
117	21 15	(9,3) (3,9)	2
121	22	(11,0)	1
124	22 14	(10,2) (2,10)	2
127	20 19	(7,6) (6,7)	2
129	21 18	(8,5) (5,8)	2

T	K	(m,n)	解組態數
133	23 22 17 13	(11,1) (9,4) (4,9) (1,11)	4
139	23 16	(10,3) (3,10)	2
144	24	(12,0)	1
147	24 21 15	(11,2) (7,7) (2,11)	3
148	22 20	(8,6) (6,8)	2
151	23 19	(9,5) (5,9)	2
156	24 18	(10,4) (4,10)	2
157	25 14	(12,1) (1,12)	2
163	25 17	(11,3) (3,11)	2
169	26 23 22	(13,0) (8,7) (7,8)	3
171	24 21	(9,6) (6,9)	2
172	26 16	(12,2) (2,12)	2
175	25 20	(10,5) (5,10)	2
181	26 19	(11,4) (4,11)	2
183	27 15	(13,1) (1,13)	2
189	27 18	(12,3) (3,12)	2
192	24	(8,8)	1
193	25 23	(9,7) (7,9)	2
196	28 26 22	(14,0) (10,6) (6,10)	3
199	28 17	(13,2) (2,13)	2

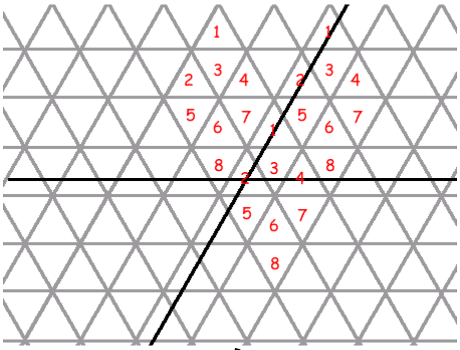
附件三、三角形染色



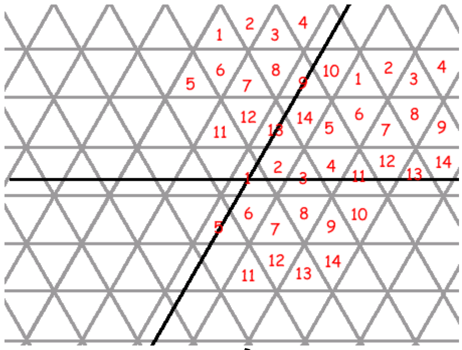
2 色



6 色

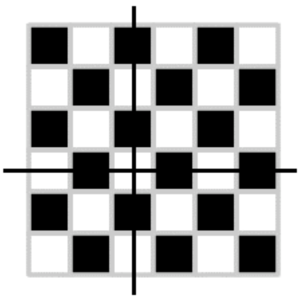


8 色

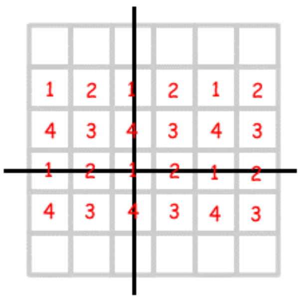


14 色

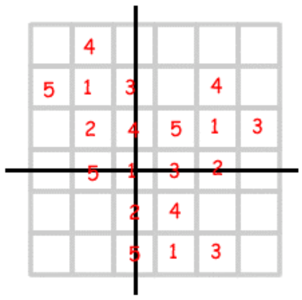
附件四、四邊形染色



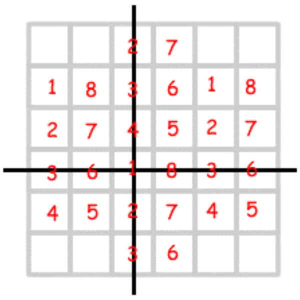
2 色



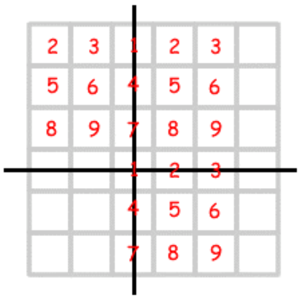
4 色



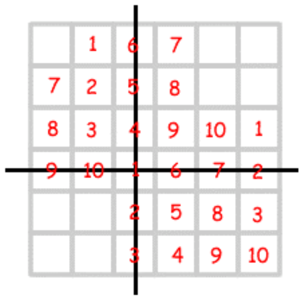
5 色



8 色



9 色



10 色

評 語

040407 高中組數學科 第一名

蜂窩染色問題的探討

1. 文筆之成熟度超過一般學生之水準。

2. 電腦動態呈現相當靈活有趣。

3. 題材頗具數學涵義。