中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040406

國立板橋高級中學

指導老師姓名

廖振良

趙健雄

作者姓名

林明賢

沈柏榕

陳彥甫

陳韋縉

中華民國第 44 屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：高中組

作品名稱：一波多折

關 鍵 詞：正弦定理、入射角等於反射角、和角公式

編　　號：

壹、摘要

當一顆球在撞球桌上晶無數次與桌邊碰撞，則入射角之間有啥變化呢？如果撞球桌不是長方形而且是正 n 邊形時？球的出發點是否跟角度之間有關係呢？讓我們一起來探討這個問題吧!且當正 n 邊形時,球由任一邊的中點出發且能碰擊其他各邊 θ 的取值範圍,若不是由中點出發而是由任一點出發,那又是什麼情形呢？如果是任意凸 n 邊形又有什麼情形？

貳、 研究動機：

我們從「大陸地區數學競賽題解(1978~1990)」這本書中看到一題題目感到非常的有趣，題目的敘述如下：一個撞球桌形狀是正六邊形 $ABCDEF$，一個球從 AB 中點 P 擊出，擊中 BC 邊上某點 Q，並且依次碰擊 CD、DE、EF、FA 各邊，最後擊中 AB 邊上的某點。設 $\angle BPQ=\theta$，求 θ 的取值範圍。我們對於如果是推廣到正 n 邊形時，情況又會是如何，那如果不是正 n 邊形，而是任意凸 n 邊形時，情況又會是如何。這讓我們感到濃厚的興趣，於是就進入了此次的研究之旅。

參、 研究目的：

利用入射角等於反射角的關係，首先，推導出正偶數邊形和正奇數邊形時，球由任一邊的中點出發且能碰擊其他各邊，θ 的取值範圍之通式。其次，推導出正偶數邊形和正奇數邊形球由任一邊的任一點出發且能碰擊其他各邊時，θ 的取值範圍之通式。最後，推導出任意凸 n 邊形球由任一邊的任一點出發且能碰擊其他各邊時，θ 的取值範圍之通式。

肆、 研究設備與器材：

紙、筆、尺、量角器、電腦、GSP 軟體。

伍、 研究過程與方式：

一、 研究方式：

(一) 做出正六邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍。

(二) 做出正七邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍。

(三) 做出正偶數 n 邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍。

(四) 做出正奇數 n 邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍。

(五) 做出正 n 邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能

碰擊回到原出發點時 θ 的值。

(六) 做出正六邊形(邊長為 $m+1$)，A_2P ：$A_1P=1$：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍。

(七) 做出正六邊形(邊長為 $m+1$)，A_2P ：$A_1P=1$：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回到原出發點時 θ 的值。

(八) 做出正七邊形(邊長為 $m+1$)，A_2P ：$A_1P=1$：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍。

(九) 做出正七邊形(邊長為 $m+1$)，A_2P ：$A_1P=1$：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回到原出發點時 θ 的值。

(十) 做出正偶數 n 邊形(邊長為 $m+1$)，A_2P ：$A_1P=1$：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍。

(十一) 做出正偶數 n 邊形(邊長為 $m+1$)，A_2P ：$A_1P=1$：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回到原出發點時 θ 的值。

(十二) 做出正奇數 n 邊形(邊長為 $m+1$)，A_2P ：$A_1P=1$：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍。

(十三) 做出正奇數 n 邊形(邊長為 $m+1$)，A_2P ：$A_1P=1$：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回到原出發點時 θ 的值。

(十四) 做出平行四邊形(邊長為 2，一內角為α)，球由 A_4A_1 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍。

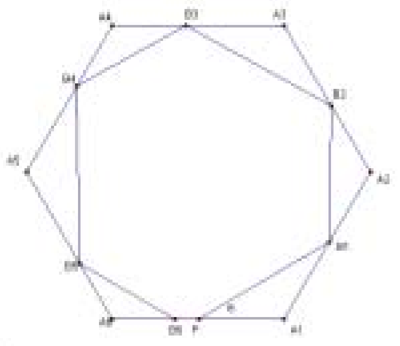
(十五) 做出四邊形(邊長為a_1,a_2,a_3,a_4)，A_1P ：$A_4P=x_1$：(a_1-x_1)，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍。

(十六) 做出五邊形(邊長為a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)，A_1P：$A_5P=x_1$：(a_1-x_1)，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍。

二、 研究過程：

(一) 做出正六邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

由已知條件入射角等於反射角的原理可知(請參考附圖)



$$\angle A_2B_1P=\frac{2\pi}{6}-\theta=\angle A_3B_1B_2,\ \angle A_3B_2B_1=\angle A_4B_2B_3=\theta$$

$$\angle A_4B_3B_2=\frac{2\pi}{6}-\theta=\angle A_5B_3B_4,\ \angle A_5B_4B_3=\angle A_6B_4B_5=\theta$$

$\angle A_6B_5B_4 = \frac{2\pi}{6} - \theta = \angle A_1B_5B_6$，$\angle A_1B_6B_5 = \theta$

在 ΔA_2B_1P 中利用正弦定理可得：$\dfrac{A_2B_1}{\sin\theta} = \dfrac{PA_2}{\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta)} = \dfrac{1}{\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta)}$

即 $A_2B_1\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta) = \sin\theta$ ----------------------(1)

在 $\Delta A_3B_1B_2$ 中利用正弦定理可得：$\dfrac{A_3B_1}{\sin\theta} = \dfrac{2-A_2B_1}{\sin\theta} = \dfrac{A_3B_2}{\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta)}$

即 $(2-A_2B_1)\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta) = A_3B_2\sin\theta$ ----------------------(2)

同理，$A_4B_3\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta) = (2-A_3B_2)\sin\theta$ ----------------------(3)

$(2-A_4B_3)\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta) = A_5B_4\sin\theta$ ------------------------------(4)

$A_6B_5\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta) = (2-A_5B_4)\sin\theta$ ------------------------------(5)

$(2-A_6B_5)\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta) = A_1B_6\sin\theta$ ------------------------------(6)

將上述 (1)~(6) 相加得：$6\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta) - 5\sin\theta = A_1B_6\sin\theta$

$6\sin\frac{2\pi}{6}\cos\theta - (6\cos\frac{2\pi}{6}+5)\sin\theta = A_1B_6\sin\theta$

$\because\ 0 < A_1B_6 < 2$

$\therefore\ 0 < 6\sin\frac{2\pi}{6}\cos\theta - (6\cos\frac{2\pi}{6}+5)\sin\theta < 2\sin\theta$

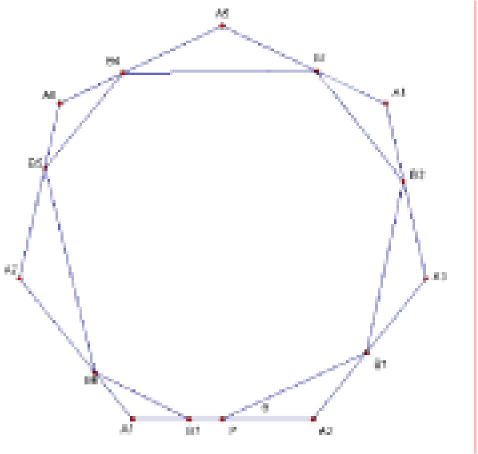
$0 < 6\sin\frac{2\pi}{6} - (6\cos\frac{2\pi}{6}+5)\tan\theta < 2\tan\theta$

$$\frac{6\sin\frac{2\pi}{6}}{7+6\cos\frac{2\pi}{6}} < \tan\theta < \frac{6\sin\frac{2\pi}{6}}{5+6\cos\frac{2\pi}{6}}$$

$$\tan^{-1}\frac{6\sin\frac{2\pi}{6}}{7+6\cos\frac{2\pi}{6}} < \theta < \tan^{-1}\frac{6\sin\frac{2\pi}{6}}{5+6\cos\frac{2\pi}{6}}$$

(二) 做出正七邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

由已知條件入射角等於反射角的原理可知(請參考附圖)



$\angle A_2B_1P = \frac{2\pi}{7} - \theta = \angle A_3B_1B_2$，$\angle A_3B_2B_1 = \angle A_4B_2B_3 = \theta$

$\angle A_4B_3B_2 = \frac{2\pi}{7} - \theta = \angle A_5B_3B_4$，$\angle A_5B_4B_3 = \angle A_6B_4B_5 = \theta$

$\angle A_6B_5B_4 = \frac{2\pi}{7} - \theta = \angle A_7B_5B_6$，$\angle A_7B_6B_5 = \angle A_1B_6B_7 = \theta$

$\angle A_1B_7B_6 = \frac{2\pi}{7} - \theta$

在 ΔBPQ 中利用正弦定理可得：$\frac{A_2B_1}{\sin\theta} = \frac{PA_2}{\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)} = \frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)}$

即 $A_2B_1\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta) = \sin\theta$ --------------------------------(1)

在 $\Delta A_3B_1B_2$ 中利用正弦定理可得：$\frac{B_1A_3}{\sin\theta} = \frac{2-A_2B_1}{\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)} = \frac{B_2A_3}{\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)}$

即 $(2-A_2B_1)\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta) = A_3B_2\sin\theta$ ------------------------------(2)

同理，$A_4B_3\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta) = (2-A_3B_2)\sin\theta$ ------------------------------(3)

$(2-A_4B_3)\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta) = A_5B_4\sin\theta$ ------------------------------(4)

$A_6B_5\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta) = (2-A_5B_4)\sin\theta$ ------------------------------(5)

$(2-A_6B_5)\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta) = A_7B_6\sin\theta$ ------------------------------(6)

$A_1B_7\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta) = (2-A_7B_6)\sin\theta$ ------------------------------(7)

將上述 (1)~(7) 相加得： $A_1B_7\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)+6\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)=7\sin\theta$

$A_1B_7\ \sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)=7\sin\theta-6\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)$

∵ $0<A_1B_7<2$

∴ $0<7\sin\theta-6\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)<2\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)$

1. 解不等式 $0<7\sin\theta-6\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)$：

$0<7\sin\theta-6\sin\frac{2\pi}{7}\cos\theta+6\cos\frac{2\pi}{7}\sin\theta$

$6\sin\frac{2\pi}{7}\cos\theta<(7+6\cos\frac{2\pi}{7})\sin\theta$

∴ $\tan\theta>\dfrac{6\sin\frac{2\pi}{7}}{7+6\cos\frac{2\pi}{7}}$

2. 解不等式 $7\sin\theta-6\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)<2\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)$：

$7\sin\theta<8\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)$

$7\sin\theta<8\sin\frac{2\pi}{7}\cos\theta-8\cos\frac{2\pi}{7}\sin\theta$

$(7+8\cos\frac{2\pi}{7})\sin\theta<8\sin\frac{2\pi}{7}\cos\theta$

∴ $\tan\theta<\dfrac{8\sin\frac{2\pi}{7}}{7+8\cos\frac{2\pi}{7}}$

3. 綜合 1. 與 2. 得結論：

$$\frac{6\sin\frac{2\pi}{7}}{7+6\cos\frac{2\pi}{7}}<\tan\theta<\frac{8\sin\frac{2\pi}{7}}{7+8\cos\frac{2\pi}{7}}$$

$$\tan^{-1}\frac{6\sin\frac{2\pi}{7}}{7+6\cos\frac{2\pi}{7}}<\theta<\tan^{-1}\frac{8\sin\frac{2\pi}{7}}{7+8\cos\frac{2\pi}{7}}$$

(三)　做出正偶數 n 邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊

且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

由已知的性質入射角等於反射角的原理可知,

$\angle A_2B_1P = \frac{2\pi}{n} - \theta = \angle A_3B_1B_2$， $\angle A_3B_2B_1 = \angle A_4B_2B_3 = \theta$， …,

$\angle A_nB_{n-1}B_{n-2} = \frac{2\pi}{n} - \theta = \angle A_1B_{n-1}B_n$， $\angle A_1B_nB_{n-1} = \theta$

在 ΔA_2B_1P 中利用正弦定理可得： $\frac{A_2B_1}{\sin\theta} = \frac{PA_2}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)} = \frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}$

即 $A_2B_1\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta) = \sin\theta$ --(1)

在 $\Delta A_3B_1B_2$ 中利用正弦定理可得： $\frac{A_3B_1}{\sin\theta} = \frac{2-A_2B_1}{\sin\theta} = \frac{A_3B_2}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}$

即 $(2-A_2B_1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta) = A_3B_2\sin\theta$ -------------------------------------(2)

同理, $A_4B_3\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta) = (2-A_3B_2)\sin\theta$ ---------------------------------(3)

，…,

$A_nB_{n-1}\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta) = (2-A_{n-1}B_{n-2})\sin\theta$ -----------------------------($n-1$)

$(2-A_nB_{n-1})\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta) = A_1B_n\sin\theta$ ---------------------------------(n)

將上述 (1)~(n) 式相加得： $n\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta) - (n-1)\sin\theta = A_1B_n\sin\theta$

$\because\ 0 < A_1B_n < 2$

$\therefore\ 0 < n\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta) - (n-1)\sin\theta < 2\sin\theta$

$0 < n\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta - n\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta - n\sin\theta + \sin\theta < 2\sin\theta$

$(n-1+n\cos\frac{2\pi}{n}) < n\sin\frac{2\pi}{n}\cot\theta < (n+1+n\cos\frac{2\pi}{n})$

$$\frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{n+1+n\cos\frac{2\pi}{n}} < \tan\theta < \frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{n-1+n\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$\tan^{-1}\frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{n+1+n\cos\frac{2\pi}{n}} < \theta < \tan^{-1}\frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{n-1+n\cos\frac{2\pi}{n}}$$

(四) 做出正奇數 n 邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

由已知條件入射角等於反射角的原理可知,

$\angle A_2B_1P=\frac{2\pi}{n}-\theta=\angle A_3B_1B_2$，$\angle A_3B_2B_1=\angle A_4B_2B_3=\theta$，…，

$\angle A_nB_{n-1}B_{n-2}=\angle A_1B_{n-1}B_n=\theta$，$\angle A_1B_nB_{n-1}=\frac{2\pi}{n}-\theta$

在 ΔBPQ 中利用正弦定理可得：$\frac{A_2B_1}{\sin\theta}=\frac{PA_2}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}=\frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}$

即 $A_2B_1\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=\sin\theta$ ------------------------------------(1)

在 $\Delta A_3B_1B_2$ 中利用正弦定理可得：$\frac{B_1A_3}{\sin\theta}=\frac{2-A_2B_1}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}=\frac{B_2A_3}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}$

即 $(2-A_2B_1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=A_3B_2\sin\theta$ --------------------------------(2)

同理，$A_4B_3\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=(2-A_3B_2)\sin\theta$ ------------------------------(3)

，…，

$(2-A_{n-1}B_{n-2})\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=A_nB_{n-1}\sin\theta$ -------------------------(n−1)

$A_1B_n\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=(2-A_nB_{n-1})\sin\theta$ ------------------------------(n)

將上述 (1)~(n) 式相加得：$A_1B_n\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=n\sin\theta-(n-1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)$

∵ $0<A_1B_n<2$

∴ $0<n\sin\theta-(n-1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)<2\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)$

1. 解不等式 $0<n\sin\theta-(n-1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)$：

$0<n\sin\theta-n\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta+n\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta+\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta$

$(n-1)\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta<(n+n\cos\frac{2\pi}{n}-\cos\frac{2\pi}{n})\sin\theta$

∴ $\frac{(n-1)\sin\frac{2\pi}{n}}{n+(n-1)\cos\frac{2\pi}{n}}<\tan\theta$

2. 解不等式 $n\sin\theta-(n-1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)<2\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)$：

$$n\sin\theta-n\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta+n\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta+\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta<2\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta-2\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta$$

$$(n+n\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n})\sin\theta<(n\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n})\cos\theta$$

$$\therefore\ \tan\theta<\frac{(n+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{n+(n+1)\cos\frac{2\pi}{n}}$$

3. 綜合 1. 與 2. 得結論：

$$\frac{(n-1)\sin\frac{2\pi}{n}}{n+(n-1)\cos\frac{2\pi}{n}}<\tan\theta<\frac{(n+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{n+(n+1)\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$\tan^{-1}\frac{(n-1)\sin\frac{2\pi}{n}}{n+(n-1)\cos\frac{2\pi}{n}}<\theta<\tan^{-1}\frac{(n+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{n+(n+1)\cos\frac{2\pi}{n}}$$

(五) 做出正 n 邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回到原出發點時 θ 的值：

由已知的性質入射角等於反射角的原理可知，

$$2\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=[2(\frac{n-2}{2})+1]\sin\theta+A_1B_n\sin\theta$$

∵回到原點

$\therefore A_1B_n=1$

$$n\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=[2(\frac{n-2}{2})+1]\sin\theta$$

$$\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=\sin\theta$$

$$\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta=\sin\theta$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{1+\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{1+\cos\frac{2\pi}{n}}=\frac{\pi}{n}$$

(六) 做出正六邊形(邊長為 $m+1$)，A_2P ：$A_1P=1$：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

由已知條件入射角等於反射角的原理可知,

$\angle A_2B_1P=\frac{2\pi}{6}-\theta=\angle A_3B_1B_2$，$\angle A_3B_2B_1=\angle A_4B_2B_3=\theta$

$\angle A_4B_3B_2=\frac{2\pi}{6}-\theta=\angle A_5B_3B_4$，$\angle A_5B_4B_3=\angle A_6B_4B_5=\theta$

$\angle A_6B_5B_4=\frac{2\pi}{6}-\theta=\angle A_1B_5B_6$，$\angle A_1B_6B_5=\theta$

在 ΔA_2B_1P 中利用正弦定理可得：$\frac{A_2B_1}{\sin\theta}=\frac{PA_2}{\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta)}=\frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta)}$

即 $A_2B_1\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta)=\sin\theta$ --------------------------(1)

在 $\Delta A_3B_1B_2$ 中利用正弦定理可得：$\frac{A_3B_1}{\sin\theta}=\frac{m+1-A_2B_1}{\sin\theta}=\frac{A_3B_2}{\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta)}$

即 $(m+1-A_2B_1)\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta)=A_3B_2\sin\theta$ -------------------------(2)

同理，$A_4B_3\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta)=(m+1-A_3B_2)\sin\theta$ ----------------------(3)

$(m+1-A_4B_3)\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta)=A_5B_4\sin\theta$ -----------------------(4)

$A_6B_5\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta)=(m+1-A_5B_4)\sin\theta$ -----------------------(5)

$(m+1-A_6B_5)\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta)=A_1B_6\sin\theta$ -----------------------(6)

將上述 (1)~(6) 式相加得：$(3m+3)\sin(\frac{2\pi}{6}-\theta)=A_1B_6\sin\theta+(2m+3)\sin\theta$

$A_1B_6\sin\theta=-[2m+3+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{6}]\sin\theta+(3m+3)\sin\frac{2\pi}{6}\cos\theta$

∵ $0<A_1B_6<m+1$

∴ $0<-[2m+3+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{6}]\sin\theta+(3m+3)\sin\frac{2\pi}{6}\cos\theta<(m+1)\sin\theta$

$$\frac{(3m+3)\sin\frac{2\pi}{6}}{3m+4+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{6}} < \tan\theta < \frac{(3m+3)\sin\frac{2\pi}{6}}{2m+3+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{6}}$$

$$\tan^{-1}\frac{(3m+3)\sin\frac{2\pi}{6}}{3m+4+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{6}} < \theta < \tan^{-1}\frac{(3m+3)\sin\frac{2\pi}{6}}{2m+3+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{6}}$$

(七) 做出正六邊形(邊長為 $m+1$), A_2P ： $A_1P=1$ ： m, 球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回到原出發點時 θ 的值：

$$(3m+3)\sin\left(\frac{2\pi}{6}-\theta\right)=\mathrm{A}_1\mathrm{B}_6\sin\theta+(2m+3)\sin\theta$$

∵回到原點

∴$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_6=A_1P=m$

$$(3m+3)\sin\left(\frac{2\pi}{6}-\theta\right)=m\sin\theta+(2m+3)\sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{6}-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\sin\frac{2\pi}{6}\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{6}\sin\theta=\sin\theta$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\frac{2\pi}{6}}{1+\cos\frac{2\pi}{6}}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{\sin\frac{2\pi}{6}}{1+\cos\frac{2\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

(八) 做出正七邊形(邊長為 $m+1$), A_2P ： $A_1P=1$ ： m, 球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

由已知條件入射角等於反射角的原理可知,

$$\angle A_2B_1P=\frac{2\pi}{7}-\theta=\angle A_3B_1B_2,\ \angle A_3B_2B_1=\angle A_4B_2B_3=\theta$$

$$\angle A_4B_3B_2=\frac{2\pi}{7}-\theta=\angle A_5B_3B_4,\ \angle A_5B_4B_3=\angle A_6B_4B_5=\theta$$

$$\angle A_6B_5B_4=\frac{2\pi}{7}-\theta=\angle A_7B_5B_6,\ \angle A_7B_6B_5=\angle A_1B_6B_7=\theta$$

$\angle A_1B_7B_6 = \frac{2\pi}{7} - \theta$

在 ΔBPQ 中利用正弦定理可得：$\frac{A_2B_1}{\sin\theta} = \frac{PA_2}{\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)} = \frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)}$

即 $A_2B_1\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta) = \sin\theta$ --------------------------------(1)

在 $\Delta A_3B_1B_2$ 中利用正弦定理可得：$\frac{B_1A_3}{\sin\theta} = \frac{m+1-A_2B_1}{\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)} = \frac{B_2A_3}{\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)}$

即 $(m+1-A_2B_1)\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta) = A_3B_2\sin\theta$ -------------------------(2)

同理，$A_4B_3\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)=(m+1-A_3B_2)\sin\theta$ -------------------------(3)

$(m+1-A_4B_3)\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta) = A_5B_4\sin\theta$ ------------------------(4)

$A_6B_5\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)=(m+1-A_5B_4)\sin\theta$ ------------------------(5)

$(m+1-A_6B_5)\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta) = A_7B_6\sin\theta$ ------------------------(6)

$A_1B_7\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)=(m+1-A_7B_6)\sin\theta$ -------------------------(7)

將上述 (1)~(7) 式相加得：$(3m+3)\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta) + A_1B_7\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)=(3m+4)\sin\theta$

$(3m+3)\sin\frac{2\pi}{7}\cos\theta-(3m+3)\cos\frac{2\pi}{7}\sin\theta + A_1B_7\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)=(3m+4)\sin\theta$

$\because\ 0 < A_1B_7 < m+1$

$\therefore\ 0 < -(3m+3)\sin\frac{2\pi}{7}\cos\theta+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{7}\sin\theta+(3m+4)\sin\theta < \sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)(m+1)$

1. 解不等式 $0 < -(3m+3)\sin\frac{2\pi}{7}\cos\theta+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{7}\sin\theta+(3m+4)\sin\theta$：

$(3m+3)\sin\frac{2\pi}{7}\cos\theta < [(3m+3)\cos\frac{2\pi}{7}+3m+4]\sin\theta$

$$\therefore\ \frac{(3m+3)\sin\frac{2\pi}{7}}{3m+4+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{7}} < \tan\theta$$

2. 解不等式 $-(3m+3)\sin\frac{2\pi}{7}\cos\theta+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{7}\sin\theta+(3m+4)\sin\theta < \sin\frac{2\pi}{7}\cos(m+$

$1)-\cos\frac{2\pi}{7}\sin\theta(m+1)$：

$[(3m+3)\cos\frac{2\pi}{7}+(3m+4)]\sin\theta+(m+1)\cos\frac{2\pi}{7}\sin\theta<(3m+3)\sin\frac{2\pi}{7}\cos\theta+$

$\sin\frac{2\pi}{7}\cos(m+1)$

$[(4m+4)\cos\frac{2\pi}{7}+(3m+4)]\sin\theta<(4m+4)\sin\frac{2\pi}{7}\cos\theta$

$$\therefore\ \tan\theta<\frac{(4m+4)\sin\frac{2\pi}{7}}{3m+4+(4m+4)\cos\frac{2\pi}{7}}$$

3. 綜合 1. 與 2. 得結論：

$$\frac{(3m+3)\sin\frac{2\pi}{7}}{3m+4+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{7}}<\tan\theta<\frac{(4m+4)\sin\frac{2\pi}{7}}{3m+4+(4m+4)\cos\frac{2\pi}{7}}$$

$$\tan^{-1}\frac{(3m+3)\sin\frac{2\pi}{7}}{3m+4+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{7}}<\theta<\tan^{-1}\frac{(4m+4)\sin\frac{2\pi}{7}}{3m+4+(4m+4)\cos\frac{2\pi}{7}}$$

(九) 做出正七邊形(邊長為 $m+1$)，A_2P ：$A_1P=1$ ：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回到原出發點時 θ 的值：

$(3m+3)\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)+A_1B_7\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)=(3m+4)\sin\theta$

∵回到原點

$\therefore A_1B_7=m+1-1$

$(3m+3)\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)+m\sin(\frac{2\pi}{7}-\theta)=(3m+4)\sin\theta$

$(4m+3)\sin\frac{2\pi}{7}\cos\theta-(4m+3)\cos\frac{2\pi}{7}\sin\theta=(3m+4)\sin\theta$

$$\tan\theta=\frac{(4m+3)\sin\frac{2\pi}{7}}{3m+4+(4m+3)\cos\frac{2\pi}{7}}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{(4m+3)\sin\frac{2\pi}{7}}{3m+4+(4m+3)\cos\frac{2\pi}{7}}$$

(十) 做出正偶數 n 邊形(邊長為 $m+1$), A_2P ：$A_1P=1$：m, 球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

由已知條件入射角等於反射角的原理可知,

$\angle A_2B_1P=\dfrac{2\pi}{n}-\theta=\angle A_3B_1B_2$, $\angle A_3B_2B_1=\angle A_4B_2B_3=\theta$, …,

$\angle A_nB_{n-1}B_{n-2}=\dfrac{2\pi}{n}-\theta=\angle A_1B_{n-1}B_n$, $\angle A_1B_nB_{n-1}=\theta$

在 ΔA_2PB_1 中利用正弦定理可得：$\dfrac{A_2B_1}{\sin\theta}=\dfrac{PA_2}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}=\dfrac{1}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}$

即 $A_2B_1\sin(\dfrac{2\pi}{n}-\theta)=\sin\theta$ -------------------------------(1)

在 $\Delta A_3B_1B_2$ 中利用正弦定理可得：$\dfrac{B_1A_3}{\sin\theta}=\dfrac{m+1-A_2B_1}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}=\dfrac{B_2A_3}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}$

即 $(m+1-A_2B_1)\sin(\dfrac{2\pi}{n}-\theta)=A_3B_2\sin\theta$ ---------------------------(2)

同理, $A_4B_3\sin(\dfrac{2\pi}{n}-\theta)=(m+1-A_3B_2)\sin\theta$ --------------------------(3)

$(m+1-A_4B_3)\sin(\dfrac{2\pi}{n}-\theta)=A_5B_4\sin\theta$ --------------------------(4)

, …,

$(m+1-A_nB_{n-1})\sin(\dfrac{2\pi}{n}-\theta)=A_1B_n\sin\theta$ -------------------------(n)

將上述(1)~(n)相加得：$\dfrac{n}{2}(m+1)\sin(\dfrac{2\pi}{n}-\theta)=[(\dfrac{n-2}{2})(m+1)+1]\sin\theta+A_1B_n\sin\theta$

$\dfrac{n}{2}(m+1)\sin\dfrac{2\pi}{n}\cos\theta-\dfrac{n}{2}(m+1)\cos\dfrac{2\pi}{n}\sin\theta=[(\dfrac{n-2}{2})(m+1)+1]\sin\theta+A_1B_n\sin\theta$

$\because\ 0<A_1B_n<m+1$

$\therefore\ 0<\dfrac{n}{2}(m+1)\sin\dfrac{2\pi}{n}\cos\theta-[\dfrac{n}{2}(m+1)\cos\dfrac{2\pi}{n}+(\dfrac{n-2}{2})(m+1)+1]\sin\theta<$

$(m+1)\sin\theta$

$[\dfrac{n}{2}(m+1)\cos\dfrac{2\pi}{n}+\dfrac{n-2}{2}(m+1)+1]\sin\theta<\dfrac{n}{2}(m+1)\sin\dfrac{2\pi}{n}\cos\theta<$

$[\dfrac{n}{2}(m+1)\cos\dfrac{2\pi}{n}+\dfrac{n}{2}(m+1)+1]\sin\theta$

$$\frac{\frac{n}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{n}{2}(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}+(\frac{n}{2})(m+1)+1}<\tan\theta<\frac{\frac{n}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{n}{2}(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}+(\frac{n-2}{2})(m+1)+1}$$

$$\therefore\ \tan^{-1}\frac{\frac{n}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{n}{2}(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}+(\frac{n}{2})(m+1)+1}<\theta<\tan^{-1}\frac{\frac{n}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{n}{2}(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}+(\frac{n-2}{2})(m+1)+1}$$

(十一) 做出正偶數 n 邊形(邊長為 $m+1$), $A_2P:A_1P=1:m$, 球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回到原出發點時 θ 的值：

$$\frac{n}{2}(m+1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=[(\frac{n-2}{2})(m+1)+1]\sin\theta+A_1B_n\sin\theta$$

∵回到原點

$\therefore A_1B_n=A_1P=m$

$$\frac{n}{2}(m+1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=[(\frac{n-2}{2})(m+1)+1]\sin\theta+m\sin\theta$$

$$\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=\sin\theta$$

$$\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta-\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta=\sin\theta$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{1+\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{1+\cos\frac{2\pi}{n}}=\frac{\pi}{n}$$

(十二) 做出正奇數 n 邊形(邊長為 $m+1$), $A_2P:A_1P=1:m$, 球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

由已知條件入射角等於反射角的原理可知,

$\angle A_2B_1P=\frac{2\pi}{n}-\theta=\angle A_3B_1B_2$, $\angle A_3B_2B_1=\angle A_4B_2B_3=\theta$, …,

$\angle A_1B_nB_{n-1}=\frac{2\pi}{n}-\theta$

在 ΔA_2PB_1 中利用正弦定理可得： $\frac{A_2B_1}{\sin\theta}=\frac{PA_2}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}=\frac{1}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}$

即 $A_2B_1\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=\sin\theta$ ----------------------------------(1)

在 $\Delta A_3B_1B_2$ 中利用正弦定理可得： $\frac{B_1A_3}{\sin\theta}=\frac{m+1-A_2B_1}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}=\frac{B_2A_3}{\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)}$

即 $(m+1-A_2B_1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=A_3B_2\sin\theta$ ---------------------------(2)

同理，$A_4B_3\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=(m+1-A_3B_2)\sin\theta$ ----------------------------(3)

，…，

$(m+1-A_{n-1}B_{n-2})\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=A_nB_{n-1}\sin\theta$ --------------------($n-1$)

$A_1B_n\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=(m+1-A_nB_{n-1})\sin\theta$ ------------------------(n)

將上述 (1)~(n) 式相加得：

$$(\frac{n-1}{2})(m+1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)+A_1B_n\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=[(\frac{n-1}{2})(m+1)+1]\sin\theta$$

$\because$ $0<A_1B_n<m+1$

$\therefore$ $0<-(\frac{n-1}{2})(m+1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)+〔(\frac{n-1}{2})(m+1)+1〕\sin\theta<(m+1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)$

1. 解不等式 $0<-(\frac{n-1}{2})(m+1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)+〔(\frac{n-1}{2})(m+1)+1〕\sin\theta$：

$$0<-(\frac{n-1}{2})(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta+(\frac{n-1}{2})(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta+〔(\frac{n-1}{2})(m+1)+1〕\sin\theta$$

$$(\frac{n-1}{2})(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta<(\frac{n-1}{2})(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta+〔(\frac{n-1}{2})(m+1)+1〕\sin\theta$$

$$\therefore\ \frac{\frac{(n-1)}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{(\frac{n-1}{2})(m+1)+1+(\frac{n-1}{2})(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}}<\tan\theta$$

2. 解不等式$-(\frac{n-1}{2})(\mathrm{m}+1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)+〔(\frac{n-1}{2})(m+1)+1〕\sin\theta<(\mathrm{m}+1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)$：

$$-(\frac{n-1}{2})(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta+(\frac{n-1}{2})(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta+〔(\frac{n-1}{2})(m+1)+1〕\sin\theta<$$

$$(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta-(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta$$

$$[(\frac{n+1}{2})(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}+(\frac{n-1}{2})(m+1)+1]\sin\theta<(\frac{n+1}{2})(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta$$

$$\therefore\ \tan\theta < \frac{\frac{(n+1)}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{(\frac{n-1}{2})(m+1)+1+(\frac{n+1}{2})(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}}$$

3. 綜合 1. 與 2. 得結論：

$$\frac{\frac{n-1}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{n-1}{2}(m+1)+1+\frac{n-1}{2}(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}} < \tan\theta < \frac{\frac{n+1}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{n-1}{2}(m+1)+1+\frac{n+1}{2}(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$\tan^{-1}\frac{\frac{n-1}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{n-1}{2}(m+1)+1+\frac{n-1}{2}(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}} < \theta < \tan^{-1}\frac{\frac{n+1}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{n-1}{2}(m+1)+1+\frac{n+1}{2}(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}}$$

(十三) 做出正奇數 n 邊形(邊長為 $m+1$)，A_2P：$A_1P=1$：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回到原出發點時 θ 的值：

$$\frac{n-1}{2}(m+1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)+A_1B_n\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=[\frac{n-1}{2}(m+1)+1]\sin\theta$$

∵ 回到原點

$\therefore\ A_1B_n=A_1P=m$

$$\frac{n-1}{2}(m+1)\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)+m\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=[\frac{n-1}{2}(m+1)+1]\sin\theta$$

$$\frac{n+1}{2}m\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)+\frac{n-1}{2}\sin(\frac{2\pi}{n}-\theta)=[\frac{n-1}{2}(m+1)+1]\sin\theta$$

$$\frac{n+1}{2}m\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta-\frac{n+1}{2}m\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta+\frac{n-1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\cos\theta-\frac{n-1}{2}\cos\frac{2\pi}{n}\sin\theta=[\frac{n-1}{2}(m+1)+1]\sin\theta$$

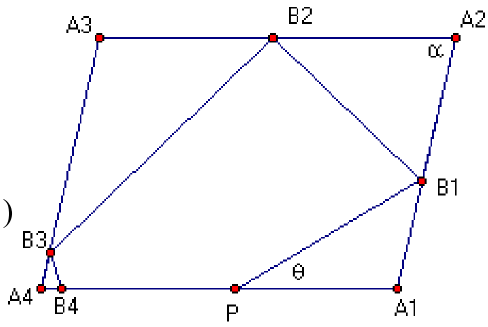
$$[\frac{n+1}{2}m+\frac{n-1}{2}]\cos\theta\sin\frac{2\pi}{n}=\{[\frac{n+1}{2}m+\frac{n-1}{2}]\cos\frac{2\pi}{n}+(\frac{n-1}{2})m+\frac{n+1}{2}\}\sin\theta$$

$$\tan\theta=\frac{(\frac{n+1}{2}m+\frac{n-1}{2})\sin\frac{2\pi}{n}}{(\frac{n+1}{2}m+\frac{n-1}{2})\cos\frac{2\pi}{n}+\frac{n-1}{2}m+\frac{n-1}{2}}$$

$$=\frac{[(n+1)m+n-1]\sin\frac{2\pi}{n}}{[(n+1)m+n-1]\cos\frac{2\pi}{n}+(n-1)m+n+1}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{[(n+1)m+n-1]\sin\frac{2\pi}{2}}{[(n+1)m+n-1]\cos\frac{2\pi}{n}+(n-1)m+n+1}$$

(十四) 做出平行四邊形(邊長為 2，一內角為 α)，球由 A_4A_1 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：



利用正弦定理與入射角等於反射角的原理可知,

在 ΔPA_1B_1 中: $\dfrac{A_1B_1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin(\alpha-\theta)}$,

$A_1B_1\sin(\alpha-\theta)=\sin\theta$ ....(1)

在 $\Delta B_1A_2B_2$ 中: $\dfrac{A_2B_2}{\sin(\alpha-\theta)}=\dfrac{A_2B_1}{\sin(\pi-2\alpha+\theta)}$,

$A_2B_1\sin(\alpha-\theta)=A_2B_2\sin(\pi-2\alpha+\theta)$

$(2-A_1B_1)\sin(\alpha-\theta)=A_2B_2\sin(2\alpha-\theta)$ ....(2)

在 $\Delta B_2A_3B_3$ 中: $\dfrac{A_3B_3}{\sin(\pi-2\alpha+\theta)}=\dfrac{A_3B_2}{\sin(3\alpha-\pi-\theta)}$,

$A_3B_3\sin(3\alpha-\pi-\theta)=A_3B_2\sin(\pi-2\alpha+\theta)$

$-A_3B_3\sin(3\alpha-\theta)=(2-A_2B_2)\sin(2\alpha-\theta)$ ....(3)

在 $\Delta B_3A_4B_4$ 中: $\dfrac{A_4B_4}{\sin(3\alpha-\pi-\theta)}=\dfrac{A_4B_3}{\sin(2\pi-4\alpha+\theta)}$,

$A_4B_3\sin(3\alpha-\pi-\theta)=A_4B_4\sin(2\pi-4\alpha+\theta)$

$-(2-A_3B_3)\sin(3\alpha-\theta)=A_4B_4\sin(-4\alpha+\theta)$ ...(4)

將上述 (1)(2)(3)(4) 式相加得到：

$2\sin(\alpha-\theta)+2\sin(3\alpha-\pi-\theta)=\sin\theta+2\sin(\pi-2\alpha+\theta)+A_4B_4\sin(2\pi-4\alpha+\theta)$

$2\sin(\alpha-\theta)+2\sin(\theta-3\alpha)=\sin\theta+2\sin(2\alpha-\theta)-A_4B_4\sin(4\alpha-\theta)$

$2\sin\alpha\cos\theta-2\cos\alpha\sin\theta+2\cos3\alpha\sin\theta-2\sin3\alpha\cos\theta$ ....(5)

$=\sin\theta+2\sin2\alpha\cos\theta-2\cos2\alpha\sin\theta+A_4B_4(\sin\theta\cos4\alpha-\cos\theta\sin4\alpha)$ ....(6)

在 (5) 式中:

$2\cos3\alpha\sin\theta-2\sin3\alpha\cos\theta$

$=2\sin\theta(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)-2\cos\theta(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)$

$=8\sin\theta\cos^3\alpha-6\sin\theta\cos\alpha-6\sin\alpha\cos\theta+8\cos\theta\sin^3\alpha$

在 (6) 式中:

$2\sin2\alpha\cos\theta-2\cos2\alpha\sin\theta$

$=4\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta-2(2\cos^2\alpha-1)\sin\theta$

$=4\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta-4\cos^2\alpha\sin\theta+2\sin\theta$

$\sin\theta\cos4\alpha-\cos\theta\sin4\alpha$

$= \sin\theta(2\cos^2 2\alpha - 1) - 2\cos\theta\cos 2\alpha\sin 2\alpha$

$= 2\sin\theta\cos^2 2\alpha - \sin\theta - 2\cos\theta\cos 2\alpha\sin 2\alpha$

$= 2\sin\theta(2\cos^2\alpha - 1)^2 - \sin\theta - 2(\cos\theta\cos 2\alpha)(2\cos\alpha\sin\alpha)$

$= 2\sin\theta(4\cos^4\alpha - 4\cos^2\alpha + 1) - \sin\theta - 4\cos\theta\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1)$

$= 8\sin\theta\cos^4\alpha - 8\sin\theta\cos^2\alpha + 2\sin\theta - \sin\theta - 8\cos\theta\sin\alpha\cos^3\alpha + 4\cos\theta\cos\alpha\sin\alpha$

$= 8\sin\theta\cos^4\alpha - 8\cos\theta\sin\alpha\cos^3\alpha - 8\sin\theta\cos^2\alpha + 4\cos\theta\cos\alpha\sin\alpha + \sin\theta$

由 (5)式＝(6)式

$8\sin\theta\cos^3\alpha + 8\cos\theta\sin^3\alpha - 6\sin\theta\cos\alpha - 6\sin\alpha\cos\theta + 2\sin\alpha\cos\theta - 2\cos\alpha\sin\theta$

$= \sin\theta + 4\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta - 4\cos^2\alpha\sin\theta + 2\sin\theta +$

$A_4B_4(8\sin\theta\cos^4\alpha - 8\cos\theta\sin\alpha\cos^3\alpha - 8\sin\theta\cos^2\alpha + 4\cos\theta\cos\alpha\sin\alpha + \sin\theta)$

$8\sin\theta\cos^3\alpha + 8\cos\theta\sin^3\alpha - 8\sin\theta\cos\alpha - 4\cos\theta\sin\alpha$

$= 4\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta - 4\cos^2\alpha\sin\theta + 3\sin\theta$

$+ A_4B_4(8\sin\theta\cos^4\alpha - 8\cos\theta\sin\alpha\cos^3\alpha - 8\sin\theta\cos^2\alpha + 4\cos\theta\cos\alpha\sin\alpha + \sin\theta)$

$$A_4B_4 = \frac{8\sin\theta\cos^3\alpha + 8\cos\theta\sin^3\alpha + 4\cos^2\alpha\sin\theta - 4\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta - 4\cos\theta\sin\alpha - 8\sin\theta\cos\alpha - 3\sin\theta}{8\sin\theta\cos^4\alpha - 8\cos\theta\sin\alpha\cos^3\alpha - 8\sin\theta\cos^2\alpha + 4\cos\theta\cos\alpha\sin\alpha + \sin\theta}$$

$\because 0 < A_4B_4 < 2$

$\therefore\ 0 < \sin\theta(8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 8\cos\alpha - 3) + \cos\theta(8\sin^3\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin\alpha)$

$< \sin\theta(16\cos^4\alpha - 16\cos^2\alpha + 2) + \cos\theta(-16\sin\alpha\cos^3\alpha + 8\cos\alpha\sin\alpha)$

1. 解不等式 $0 < \sin\theta(8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 8\cos\alpha - 3) + \cos\theta(8\sin^3\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin\alpha)$:

$\cos\theta(-8\sin^3\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin\alpha) < \sin\theta(8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 3 - 8\cos\alpha)$

$$\therefore\ \tan\theta > \frac{-8\sin^3\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin\alpha}{8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 8\cos\alpha - 3}$$

2. 解不等式 $\sin\theta(8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 8\cos\alpha - 3) + \cos\theta(8\sin^3\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin\alpha)$

$< \sin\theta(16\cos^4\alpha - 16\cos^2\alpha + 2) + \cos\theta(-16\sin\alpha\cos^3\alpha + 8\cos\alpha\sin\alpha)$ ：

$\sin\theta(-16\cos^4\alpha + 8\cos^3\alpha + 20\cos^2\alpha - 8\cos\alpha - 5) < \cos\theta(-16\sin\alpha\cos^3\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha - 8\sin^3\alpha + 4\sin\alpha)$

$$\therefore\ \tan\theta < \frac{-16\sin\alpha\cos^3\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha - 8\sin^3\alpha + 4\sin\alpha}{-16\cos^4\alpha + 8\cos^3\alpha + 20\cos^2\alpha - 8\cos\alpha - 5}$$

3. 綜合 1. 與 2. 得結論：

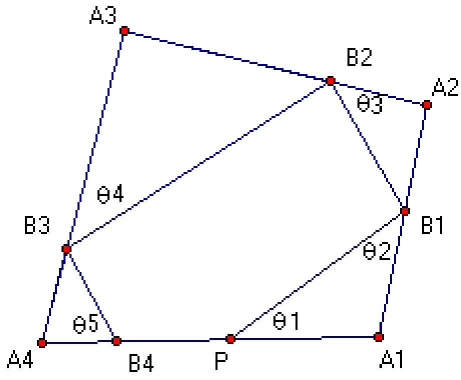
$$\frac{-8\sin^3\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\sin\alpha}{8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 8\cos\alpha - 3} < \tan\theta < \frac{-16\sin\alpha\cos^3\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha - 8\sin^3\alpha + 4\sin\alpha}{-16\cos^4\alpha + 8\cos^3\alpha + 20\cos^2\alpha - 8\cos\alpha - 5}$$

$$\tan^{-1}\frac{-8\sin^3\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha + 8\sin\alpha}{8\cos^3\alpha + 4\cos^2\alpha - 8\cos\alpha - 3} < \theta < \tan^{-1}\frac{-16\sin\alpha\cos^3\alpha + 12\sin\alpha\cos\alpha - 8\sin^3\alpha + 4\sin\alpha}{-16\cos^4\alpha + 8\cos^3\alpha + 20\cos^2\alpha - 8\cos\alpha - 5}$$

(十五) 做出任意凸四邊形(邊長為a_1, a_2, a_3, a_4)， A_1P ： $A_4P = x_1$ ：$(a_1 - x_1)$，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時θ_1的取值範圍。

利用正弦定理與入射角等於反射角的原理可知,

$$x_1 \sin\theta_1 = (a_1 - x_2)\sin\theta_2$$
$$(a_2 - x_3)\sin\theta_3 = x_2 \sin\theta_2$$
$$x_3 \sin\theta_3 = (a_3 - x_4)\sin\theta_4$$
$$x_5 \sin\theta_5 = x_4 \sin\theta_4$$



將上述四個式子相加可得到:

$$x_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\theta_3 + x_5 \sin\theta_5 = a_1 \sin\theta_2 + a_3 \sin\theta_4$$

$$\theta_2 = \pi - A_1 - \theta_1$$
$$\theta_3 = \pi - A_2 - \theta_2 = A_1 - A_2 + \theta_1$$
$$\theta_4 = \pi - A_3 - \theta_3 = \pi - A_1 + A_2 - A_3 - \theta_1$$
$$\theta_5 = \pi - A_4 - \theta_4 = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \theta_1$$

$$x_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(A_1 - A_2 + \theta_1) + x_5 \sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \theta_1) = a_1 \sin(\pi - A_1 - \theta_1) + a_3 \sin(\pi - A_1 + A_2 - A_3 - \theta_1)$$

$$\begin{aligned}&x_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(A_1 - A_2)\cos\theta_1 + a_2 \cos(A_1 - A_2)\sin\theta_1 \\ &+ x_5 \sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)\cos\theta_1 + x_5 \cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)\sin\theta_1 \\ &= a_1 \sin A_1 \cos\theta_1 + a_1 \cos A_1 \sin\theta_1 + a_3 \sin(A_1 - A_2 + A_3)\cos\theta_1 + a_3 \cos(A_1 - A_2 + A_3)\sin\theta_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&x_5[\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)\cos\theta_1 + \cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)\sin\theta_1] = \sin\theta_1[-x_1 + a_1\cos A_1 - a_2\cos(A_1 - A_2) \\ &+ a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3)] + \cos\theta_1[a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 - A_2) + a_3 \sin(A_1 - A_2 + A_3)]\end{aligned}$$

$$x_5 = \frac{\begin{array}{l}\sin\theta_1[-x_1 + a_1\cos A_1 - a_2\cos(A_1 - A_2) + a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3)] \\ + \cos\theta_1[a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 - A_2) + a_3 \sin(A_1 - A_2 + A_3)]\end{array}}{\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)\cos\theta_1 + \cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)\sin\theta_1}$$

$\because 0 < x_5 < a_4$

1. 解不等式 $0 < x_5$：

$$\begin{aligned}&\sin\theta_1[x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1 - A_2) - a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3)] \\ &< \cos\theta_1[a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 - A_2) + a_3 \sin(A_1 - A_2 + A_3)]\end{aligned}$$

$$\therefore \tan\theta_1 < \frac{a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 - A_2) + a_3 \sin(A_1 - A_2 + A_3)}{x - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1 - A_2) - a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3)}$$

2. 解不等式 $x_5 < a_4$：

$$\frac{\begin{array}{l}\sin\theta_1[-x_1 + a_1\cos A_1 - a_2\cos(A_1 - A_2) + a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3)] \\ + \cos\theta_1[a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 - A_2) + a_3 \sin(A_1 - A_2 + A_3)]\end{array}}{\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)\cos\theta_1 + \cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)\sin\theta_1} < a_4$$

$$\begin{aligned}&\sin\theta_1[-x_1 + a_1\cos A_1 - a_2\cos(A_1 - A_2) + a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3)] + \cos\theta_1[a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 - A_2) \\ &+ a_3 \sin(A_1 - A_2 + A_3)] < a_4 \sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)\cos\theta_1 + a_4 \cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)\sin\theta_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos\theta_1[a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 - A_2) + a_3 \sin(A_1 - A_2 + A_3) - a_4 \sin(+A_1 - A_2 + A_3 - A_4)] \\ &< \sin\theta_1[x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1 - A_2) - a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3) + a_4\cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)]\end{aligned}$$

$$\therefore\ \tan\theta_1 > \frac{+a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1-A_2)+a_3\sin(A_1-A_2+A_3)-a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4)}{x_1-a_1\cos A_1+a_2\cos(A_1-A_2)-a_3\cos(A_1-A_2+A_3)+a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4)}$$

3. 綜合 1. 與 2. 得結論：

$$\frac{a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1-A_2)+a_3\sin(A_1-A_2+A_3)-a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4)}{x_1-a_1\cos A_1+a_2\cos(A_1-A_2)-a_3\cos(A_1-A_2+A_3)+a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4)}$$
$$< \tan\theta_1 < \frac{a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1-A_2)+a_3\sin(A_1-A_2+A_3)}{x_1-a_1\cos A_1+a_2\cos(A_1-A_2)-a_3\cos(A_1-A_2+A_3)}$$

$$\tan^{-1}\frac{a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1-A_2)+a_3\sin(A_1-A_2+A_3)-a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4)}{x_1-a_1\cos A_1+a_2\cos(A_1-A_2)-a_3\cos(A_1-A_2+A_3)+a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4)}$$
$$< \theta_1 < \tan^{-1}\frac{a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1-A_2)+a_3\sin(A_1-A_2+A_3)}{x_1-a_1\cos A_1+a_2\cos(A_1-A_2)-a_3\cos(A_1-A_2+A_3)}$$

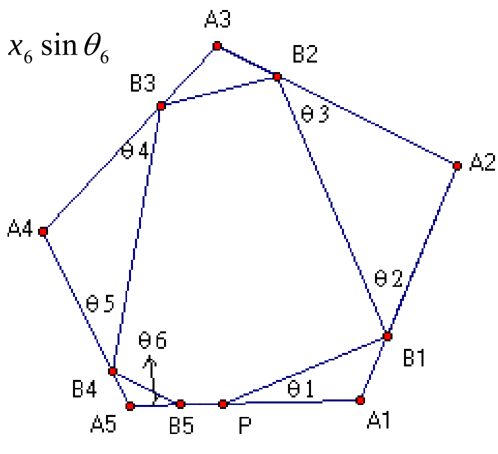
(十六) 做出任意凸五邊形(邊長為a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)， $\overline{A_1P}$ ： $\overline{A_5P}$= x_1 ：(a_1-x_1)，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊θ_1的取值範圍。

利用正弦定理與入射角等於反射角的原理可知,

$$x_1\sin\theta_1=(a_2-x_2)\sin\theta_2$$
$$(a_2-x_3)\sin\theta_3=x_2\sin\theta_2$$
$$x_3\sin\theta_3=(a_3-x_4)\sin\theta_4$$
$$(a_4-x_5)\sin\theta_5=x_4\sin\theta_4$$
$$x_5\sin\theta_5=x_6\sin\theta_6$$

將上述五個式子相加得到

$$x_1\sin\theta_1+a_2\sin\theta_3+a_4\sin\theta_5=a_1\sin\theta_2+a_3\sin\theta_4+x_6\sin\theta_6$$



$$\because\ \theta_2=\pi-A_2-\theta_1$$
$$\theta_3=\pi-A_2-\theta_2=A_1-A_2+\theta_1$$
$$\theta_4=\pi-A_3-\theta_3=\pi-A_1+A_2-A_3-\theta_1$$
$$\theta_5=\pi-A_4-\theta_4=A_1-A_2+\theta_1$$
$$\theta_6=\pi-A_5-\theta_5=\pi-A_1+A_2-A_3+A_4-A_5-\theta_1$$

$$x_1\sin\theta_1+a_2\sin(A_1-A_2)\cos\theta_1+a_2\cos(A_1-A_2)\sin\theta_1$$
$$+\ a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4)\cos\theta_1+\ a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4)\sin\theta_1$$
$$=a_1\sin\theta_1\cos A_1+\ a_1\cos\theta_1\sin A_1+\ a_3\sin\theta_1\cos(A_2-A_3+A_4)+\ a_3\cos\theta_1\sin(A_2-A_3+A_4)+$$
$$x_6\sin\theta_1\cos(A_2-A_3+A_4-A_5+A_1)+\ x_6\cos\theta_1\sin(A_2-A_3+A_4-A_5+A_1)$$

$$\sin\theta_1[x_1-a_1\cos A_1+a_2\cos(A_1-A_2)-a_3\cos(A_1-A_2+A_3)+a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4)]$$
$$+\cos\theta_1[-a_1\sin A_1+a_2\sin(A_1-A_2)-a_3\sin(A_1-A_2+A_3)+a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4)]$$
$$=x_6\,[\sin\theta_1\cos(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5)+\cos\theta_1\sin(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5)]$$

$$x_6 = \frac{\sin\theta_1[x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1 - A_2) - a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3) + a_4\cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)] + \cos\theta_1[-a_1\sin A_1 + a_2\sin(A_1 - A_2) - a_3\sin(A_1 - A_2 + A_3) + a_4\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)]}{\sin\theta_1\cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5) + \cos\theta_1\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5)}$$

$\because 0 < x_6 < a_5$

1. 解不等式 $0 < x_6$：

$$0 < \sin\theta_1[x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1 - A_2) - a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3) + a_4\cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)] + \cos\theta_1[-a_1\sin A_1 + a_2\sin(A_1 - A_2) - a_3\sin(A_1 - A_2 + A_3) + a_4\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)]$$

$$\therefore \tan\theta_1 > \frac{a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1 - A_2) + a_3\sin(A_1 - A_2 + A_3) - a_4\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)}{x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1 - A_2) - a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3) + a_4\cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)}$$

2. 解不等式 $x_6 < a_5$：

$$\frac{\sin\theta_1[x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1 - A_2) - a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3) + a_4\cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)] + \cos\theta_1[-a_1\sin A_1 + a_2\sin(A_1 - A_2) - a_3\sin(A_1 - A_2 + A_3) + a_4\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)]}{\sin\theta_1\cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5) + \cos\theta_1\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5)} < a_5$$

$$\sin\theta_1[x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1 - A_2) - a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3) + a_4\cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)] + \cos\theta_1[-a_1\sin A_1 + a_2\sin(A_1 - A_2) - a_3\sin(A_1 - A_2 + A_3) + a_4\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)] < a_5\sin\theta_1\cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5) + a_5\cos\theta_1\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5)$$

$$\sin\theta_1[x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1 - A_2) - a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3) + a_4\cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4) - a_5\cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5] < \cos\theta_1[a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1 - A_2) + a_3\sin(A_1 - A_2 + A_3) - a_4\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4) + a_5\cos\theta_1\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5)]$$

$$\therefore \tan\theta_1 < \frac{a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1 - A_2) + a_3\sin(A_1 - A_2 + A_3) - a_4\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4) + a_5\sin(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5)}{x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1 - A_2) - a_3\cos(A_1 - A_2 + A_3) + a_4\cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4) - a_5\cos(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5)}$$

3. 綜合 1. 與 2. 得結論：

$$\frac{a_2\sin A_2 - a_3\sin(A_2 - A_3) + a_4\sin(A_2 - A_3 + A_4) - a_5\sin(A_2 - A_3 + A_4 - A_5)}{x_1 - a_2\cos A_2 + a_3\cos(A_2 - A_3) - a_4\cos(A_2 - A_3 + A_4) + a_5\cos(A_2 - A_3 + A_4 - A_5)} < \tan\theta_1 < \frac{a_2\sin A_2 - a_3\sin(A_2 - A_3) + a_4\sin(A_2 - A_3 + A_4) - a_5\sin(A_2 - A_3 + A_4 - A_5) + a_1\sin(A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + A_1)}{x_1 - a_2\cos A_2 + a_3\cos(A_2 - A_3) - a_4\cos(A_2 - A_3 + A_4) + a_5\cos(A_2 - A_3 + A_4 - A_5) - a_1\cos(A_2 - A_3 + A_4 - A_5 + A_1)}$$

$$\tan^{-1}\frac{a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1-A_2) + a_3\sin(A_1-A_2+A_3) - a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4)}{x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1-A_2) - a_3\cos(A_1-A_2+A_3) + a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4)}$$

$$<\theta_1<\tan^{-1}\frac{\begin{array}{l}a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1-A_2) + a_3\sin(A_1-A_2+A_3)\\ -a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4) + a_5\sin(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5)\end{array}}{\begin{array}{l}x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1-A_2) - a_3\cos(A_1-A_2+A_3)\\ +a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4) - a_5\cos(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5)\end{array}}$$

陸、研究結果：

一、 做出正六邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

$$\tan^{-1}\frac{6\sin\frac{2\pi}{6}}{7+6\cos\frac{2\pi}{6}} < \theta < \tan^{-1}\frac{6\sin\frac{2\pi}{6}}{5+6\cos\frac{2\pi}{6}}$$

（註：大約 $27.69^\circ < \theta < 32.73^\circ$ ）

二、 做出正偶數 n 邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰原邊時 θ 的取值範圍：

$$\tan^{-1}\frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{n+1+n\cos\frac{2\pi}{n}} < \theta < \tan^{-1}\frac{n\sin\frac{2\pi}{n}}{n-1+n\cos\frac{2\pi}{n}}$$

三、 做出正七邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

$$\tan^{-1}\frac{6\sin\frac{2\pi}{7}}{7+6\cos\frac{2\pi}{7}} < \theta < \tan^{-1}\frac{8\sin\frac{2\pi}{7}}{7+8\cos\frac{2\pi}{7}}$$

（註：大約 $23.74^\circ < \theta < 27.43^\circ$ ）

四、 做出正奇數 n 邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

$$\tan^{-1}\frac{(n-1)\sin\frac{2\pi}{n}}{n+(n-1)\cos\frac{2\pi}{n}} < \theta < \tan^{-1}\frac{(n+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{n+(n+1)\cos\frac{2\pi}{n}}$$

五、 做出正 n 邊形，邊長為 2，球由 A_1A_2 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回

到原出發點時 θ 的值：

$$\theta=\tan^{-1}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{1+\cos\frac{2\pi}{n}}=\frac{\pi}{n}$$

六、 做出正六邊形(邊長為 m＋1)， A_2P ： A_1P＝1：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

$$\tan^{-1}\frac{(3m+3)\sin\frac{2\pi}{6}}{3m+4+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{6}}<\theta<\tan^{-1}\frac{(3m+3)\sin\frac{2\pi}{6}}{2m+3+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{6}}$$

七、 做出正六邊形(邊長為 m＋1)， A_2P ： A_1P＝1：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回到原出發點時 θ 的值：

$$\theta=\tan^{-1}\frac{\sin\frac{2\pi}{6}}{1+\cos\frac{2\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

八、 做出正偶數 n 邊形(邊長為 m＋1)， A_2P ： A_1P＝1：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

$$\tan^{-1}\frac{\frac{n}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{(\frac{n}{2})(m+1)+1+\frac{n}{2}(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}}<\theta<\tan^{-1}\frac{\frac{n}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{(\frac{n-2}{2})(m+1)+1+\frac{n}{2}(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}}$$

九、 做出正偶數 n 邊形(邊長為 m＋1)， A_2P ： A_1P＝1：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回到原出發點時 θ 的值：

$$\theta=\tan^{-1}\frac{(4m+3)\sin\frac{2\pi}{7}}{3m+4+(4m+3)\cos\frac{2\pi}{7}}$$

十、 做出正七邊形(邊長為 m＋1)， A_2P ： A_1P＝1：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

$$\tan^{-1}\frac{(3m+3)\sin\frac{2\pi}{7}}{3m+4+(3m+3)\cos\frac{2\pi}{7}}<\theta<\tan^{-1}\frac{(4m+4)\sin\frac{2\pi}{7}}{3m+4+(4m+4)\cos\frac{2\pi}{7}}$$

十一、 做出正偶數 n 邊形(邊長為 m＋1)， A_2P ： A_1P＝1：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回到原出發點時 θ 的值：

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{1+\cos\frac{2\pi}{n}} = \frac{\pi}{n}$$

十二、做出正奇數 n 邊形(邊長為 m＋1)，A_2P ：A_1P＝1：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

$$\tan^{-1}\frac{\frac{(n-1)}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{(\frac{n-1}{2})(m+1)+1+(\frac{n-1}{2})(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}} < \theta <$$

$$\tan^{-1}\frac{\frac{(n+1)}{2}(m+1)\sin\frac{2\pi}{n}}{(\frac{n-1}{2})(m+1)+1+(\frac{n+1}{2})(m+1)\cos\frac{2\pi}{n}}$$

十三、做出正奇數 n 邊形(邊長為 m＋1)，A_2P ：A_1P＝1：m，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊回到原出發點時 θ 的值：

$$\theta = \tan^{-1}\frac{[(n+1)m+n-1]\sin\frac{2\pi}{2}}{[(n+1)m+n-1]\cos\frac{2\pi}{n}+(n-1)m+n+1}$$

十四、 做出平行四邊形(邊長為 2，一內角為 α)，球由 A_4A_1 中點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ 的取值範圍：

$$\tan^{-1}\frac{-8\sin^3\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+8\sin\alpha}{8\cos^3\alpha+4\cos^2\alpha-8\cos\alpha-3} < \theta < \tan^{-1}\frac{-16\sin\alpha\cos^3\alpha+12\sin\alpha\cos\alpha-8\sin^3\alpha+4\sin\alpha}{-16\cos^4\alpha+8\cos^3\alpha+20\cos^2\alpha-8\cos\alpha-5}$$

十五、做出任意凸四邊形(邊長為 a_1,a_2,a_3,a_4)，A_1P ：A_4P＝ x_1 ：(a_1-x_1)，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ_1 的取值範圍：

$$\tan^{-1}\frac{a_1\sin A_1-a_2\sin(A_1-A_2)+a_3\sin(A_1-A_2+A_3)-a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4)}{x_1-a_1\cos A_1+a_2\cos(A_1-A_2)-a_3\cos(A_1-A_2+A_3)+a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4)}$$

$$<\theta_1<\tan^{-1}\frac{a_1\sin A_1-a_2\sin(A_1-A_2)+a_3\sin(A_1-A_2+A_3)}{x_1-a_1\cos A_1+a_2\cos(A_1-A_2)-a_3\cos(A_1-A_2+A_3)}$$

十六、做出任意凸五邊形(邊長為 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)，A_1P ：A_5P＝ x_1 ：(a_1-x_1)，球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ_1 的取值範圍：

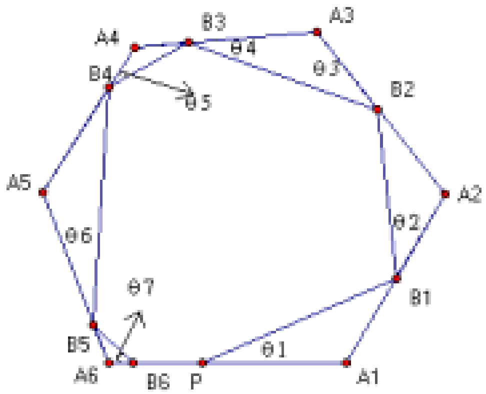
$$\tan^{-1}\frac{a_1\sin A_1-a_2\sin(A_1-A_2)+a_3\sin(A_1-A_2+A_3)-a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4)}{x_1-a_1\cos A_1+a_2\cos(A_1-A_2)-a_3\cos(A_1-A_2+A_3)+a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4)}$$

$$<\theta_1<\tan^{-1}\frac{\begin{array}{l}a_1\sin A_1-a_2\sin(A_1-A_2)+a_3\sin(A_1-A_2+A_3)\\-a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4)+a_5\sin(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5)\end{array}}{\begin{array}{l}x_1-a_1\cos A_1+a_2\cos(A_1-A_2)-a_3\cos(A_1-A_2+A_3)\\+a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4)-a_5\cos(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5)\end{array}}$$

柒、討論：

依任意凸四邊形與凸五邊形的原理,可以繼續推導出:

1. 給定任意凸六邊形(邊長為a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6), A_1P ：$A_6P = x_1$ ：(a_1-x_1), 球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ_1 的取值範圍：



$$\frac{a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1-A_2) + a_3\sin(A_1-A_2+A_3) - a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4) + a_5\sin(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5) - a_6\sin(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5-A_6)}{x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1-A_2) - a_3\cos(A_1-A_2+A_3) + a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4) - a_5\cos(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5) + a_6\cos(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5-A_6)}$$

$$< \tan\theta_1 <$$

$$\frac{a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1-A_2) + a_3\sin(A_1-A_2+A_3) - a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4) + a_5\sin(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5)}{x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1-A_2) - a_3\cos(A_1-A_2+A_3) + a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4) - a_5\cos(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5)}$$

2. 給定任意凸七邊形(邊長為$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$), A_1P ：$A_7P = x_1$ ：(a_1-x_1), 球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ_1 的取值範圍：

$$\frac{a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1-A_2) + a_3\sin(A_1-A_2+A_3) - a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4) + a_5\sin(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5) - a_6\sin(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5-A_6)}{x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1-A_2) - a_3\cos(A_1-A_2+A_3) + a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4) - a_5\sin(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5) + a_6\sin(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5-A_6)}$$

$$< \tan\theta_1 < \frac{a_1\sin A_1 - a_2\sin(A_1-A_2) + a_3\sin(A_1-A_2+A_3) - a_4\sin(A_1-A_2+A_3-A_4) + a_5\sin(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5)}{x_1 - a_1\cos A_1 + a_2\cos(A_1-A_2) - a_3\cos(A_1-A_2+A_3) + a_4\cos(A_1-A_2+A_3-A_4) - a_5\sin(A_1-A_2+A_3-A_4+A_5)}$$

當然依據上述兩個式子,我們可以很容易觀察到下列兩個結論:

給定任意凸 n 邊形(邊長為$a_1,a_2,......,a_n$), A_1P ：$A_nP = x_1$ ：(a_1-x_1), 球由點 P 出發能依次碰到每一邊且能碰擊原邊時 θ_1 的取值範圍：

1.當 n 為奇數時：$\dfrac{\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}a_i\sin[\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}A_j]}{x_1+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i}a_i\cos[\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}A_j]}<\tan\theta_1<\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_i\sin[\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}A_j]}{x_1+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}a_i\cos[\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}A_j]}$

2.當 n 為偶數時：$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_i\sin[\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}A_j]}{x_1+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}a_i\cos[\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}A_j]}<\tan\theta_1<\dfrac{\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i+1}a_i\sin[\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}A_j]}{x_1+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i}a_i\cos[\sum_{j=1}^{i}(-1)^{j+1}A_j]}$

捌、參考資料及其他：

大陸地區數學競賽題解(1978~1990)
教科書

評　語

040406 高中組數學科　最佳團隊合作獎

一波多折

1. 參考文獻中應該詳細說明本研究的動機及靈感來源。

2. 作品應該著重動態展示。