中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040405

國立新店高級中學

指導老師姓名

陳美靜

作者姓名

田中泰弘

數字的奧妙~次方數的循環~

壹、摘要：

本次研究的目的，是藉由數據，循序找出存在於「2 的指數值」(即：2^n 乘開後的值。本次研究中的數據，皆以變數 Kn 表之，其目的與定義，詳見伍之一)中，出現在同一位數的數字循環與和其他位數之間的關係。從一變數 Kn 中，確認其個位數有數字循環的現象開始出發，循序找出其十位數、百位數之間所存在的數字循環。

之後，作者試著根據數據，先行猜測其公式，並以數學歸納法證明其公式成立。

爾後，發現「3 的指數值」亦與「2 的指數值」有相似之處，亦是循上述手續證之。

貳、研究動機：

1、已知存在 Kn 為「2 的指數值」，則其值的個位數必滿足「每四次方循環一次，且數字的出現順序必為 2、4、8、6 之順序」的現象（表一），並已活用於數學界的指數領域中；然而，Kn 之十位數，甚至百位數，是否亦有相同之現象？經作者查詢後，發覺並無任何相關書籍中有提及十位數以上是否亦有相同之現象，即表示 Kn 的數字循環現象是否僅存在於個位數，並沒有明確的研究結果顯示出來，故作者藉由這次的科展，欲先以列表之方式尋找 Kn 是否只有個位數才有循環之現象？反之，則個位數、十位數與百位數之間的循環個數(即：每幾個數構成一循環。個位數之循環個數為 4)是否遵循一定的規則而有所變化？

2、待找出 Kn 的數字循環在十位數以上亦成立後，作者便思索道：是否只有 2 才有該循環現象？事後證實，「3 的指數值」亦有循環的現象存在，便嘗試用證明 2 的指數值之間的公式時所用的經驗如法炮製。

教材相關性：

第一冊 數列與級數
第二冊 指數與對數
第四冊 排列組合

表一

	Kn
n=1	=002
n=2	=004
n=3	=008
n=4	=016
n=5	=032
n=6	=064
n=7	=128
n=8	=256
n=9	=512
…	…

循環

參、研究目的：

本次研究目的有三，即：

一、找尋 Kn 十位數以上是否有循環存在？

二、若存在，期間是否有公式存在且是否能證明之？

三、是否只有 2 才有該現象？

肆、研究設備及器材：

本次研究所需之設備僅為計算用具和資料輸入程式：紙、筆和 Microsoft Word

伍、研究過程或方法：

一、因本次研究有需以列表之方式呈現的部分，故先設一變數「Kn」，其定義於本次作品中為：

{Kn 表 2 的 n 次方的值，n 屬於自然數集（$n \in N$)}

二、作者於本作品中，先假設 Kn 之十位數、百位數亦有循環之現象，且必遵循某種規則而改變其循環個數。因上述之手續，使得本次研究得以由該假設出發，進而達到研究目的。

三、將 Kn 一一列出，即可看到十位數的數字一開始為 0(表二)，之後出現的數字順序為：

0、0、1、3、6、2、5、1、2、4、9、9、8、6、3、7、4、8、7、5、
0、0、1、3、6、2、5、1、2、4、9、9、8、6、3、7、4、8、7、5、
0、0、1、3、…

由上述所列出的數列，可看出十位數的數字亦有循環，且可發現每 20 個便有一個循環，即十位數的循環個數為 20。

四、至此，已驗證了 Kn 的十位數亦有循環的存在。

五、接著，先探討循環個數的改變。已知個位數的循環個數為 4，又得知十位數的循環個數為 20；若百位數亦有循環，則可做以下兩種推論：

推論 1：Kn 個位數、十位數、百位數的循環個數數量成等差，則公差：20 - 4=16，
百位數的循環個數為 20+16=36 $\longrightarrow$ 至 伍之六之 1

推論 2：Kn 個位數、十位數、百位數的循環個數數量成等比，則公比：20 / 4=5，
百位數的循環個數為 $20\times5=100$ $\longrightarrow$ 至 伍之六之 2

六、由表三知，百位數的數字一開始便出現了 6 個 0，但如果不看最前面的 2 個 0，便可以發現百位數似乎亦有循環…：

1、根據伍之五之推論 1：若 Kn 個位數、十位數、百位數的循環個數數量成等差，則其循環應為 K3 至 K38(共 36 項)，而從 K39 起，百位數又從 0 開始形成另一循環；但從表三中知，K39 的百位數為 8 而非 0，可見此推論不成立，故 Kn 個位數、十位數、百位數的循環個數數量不成等差。

2、根據伍之五之推論 2：若 Kn 個位數、十位數、百位數的循環個數數量成等比，則其循環應為 K3 至 K102(共 100 項)，而從 K103 起，百位數又從 0 開始行成另一循環；而從表三中知，K103 的百位數為 0，且接下來的 100 項(K103 至 K202)

中，數字出現的順序與 K3 至 K102 之間出現的順序吻合，因此此推論成立，故針對此推論，可得以下之結論：『2 的指數值 Kn 個位數、十位數、百位數的循環個數數量成等比。』

	Kn
n=1	=000000002
n=2	=000000004
n=3	=000000008
n=4	=000000016
n=5	=000000032
n=6	=000000064
n=7	=000000128
n=8	=000000256
n=9	=000000512
n=10	=000001024
n=11	=000002048
n=12	=000004096
n=13	=000008192
n=14	=000016384
n=15	=000032768
n=16	=000065536
n=17	=000131072
n=18	=000262144
n=19	=000524288
n=20	=001048576
n=21	=002097152
n=22	=004194304
n=23	=008388608

表二

	Kn
n=24	=0000016777216
n=25	= 0000033554432
n=26	= 0000067108864
n=27	= 0000134217728
n=28	=00000 268435456
n=29	= 00000536870912
n=30	= 00001073741824
n=31	= 00002147483648
n=32	= 00004294967296
n=33	= 00008589934592
n=34	= 00017179869184
n=35	= 00034359738368
n=36	= 00068719476736
n=37	= 00137438953472
n=38	= 00274877906944
n=39	= 00549755813888
n=40	= 01099511627776
n=41	= 02199023255552
n=42	= 04398046511104
n=43	= 08796093022208
n=44	= 17592186044416
n=45	= 35184372088832
n=46	= 70368744177664
…	…

循環

	Kn		Kn		Kn
n=1	=~0002	n=34	=~9184	n=67	=~2928
n=2	=~0004	n=35	=~8368	n=68	=~5856
n=3	=~0008	n=36	=~6736	n=69	=~1712
n=4	=~0016	n=37	=~3472	n=70	=~3424
n=5	=~0032	n=38	=~6944	n=71	=~6848
n=6	=~0064	n=39	=~3888	n=72	=~3696
n=7	=~0128	n=40	=~7776	n=73	=~7392
n=8	=~0256	n=41	=~5552	n=74	=~4784
n=9	=~0512	n=42	=~1104	n=75	=~9568
n=10	=~1024	n=43	=~2208	n=76	=~9136
n=11	=~2048	n=44	=~4416	n=77	=~8272
n=12	=~4096	n=45	=~8832	n=78	=~6544
n=13	=~8192	n=46	=~7664	n=79	=~3088
n=14	=~6384	n=47	=~5328	n=80	=~6176
n=15	=~2768	n=48	=~0656	n=81	=~2352
n=16	=~5536	n=49	=~1312	n=82	=~4704
n=17	=~1072	n=50	=~2624	n=83	=~9408
n=18	=~2144	n=51	=~5248	n=84	=~8816
n=19	=~4288	n=52	=~0496	n=85	=~7632
n=20	=~8576	n=53	=~0992	n=86	=~5264
n=21	=~7152	n=54	=~1984	n=87	=~0528
n=22	=~4304	n=55	=~3968	n=88	=~1056
n=23	=~8608	n=56	=~7936	n=89	=~2112
n=24	=~7216	n=57	=~5872	n=90	=~4224
n=25	=~4432	n=58	=~1744	n=91	=~8448
n=26	=~8864	n=59	=~3488	n=92	=~6896
n=27	=~7728	n=60	=~6976	n=93	=~3792
n=28	=~5456	n=61	=~3952	n=94	=~7584
n=29	=~0912	n=62	=~7904	n=95	=~5168
n=30	=~1824	n=63	=~5808	n=96	=~0336
n=31	=~3648	n=64	=~1616	n=97	=~0672
n=32	=~7296	n=65	=~3232	n=98	=~1344
n=33	=~4592	n=66	=~6464	n=99	=~ 2688

※為利於查看其變化，並考慮到位數問題 （表三）的數值一率準確到千位，萬位以上未輸入。

	Kn
n=100	=~5376
n=101	=~0752
n=102	=~1504
n=103	=~3008
n=104	=~6016
n=105	=~2032
n=106	=~4064
n=107	=~8128
n=108	=~6256
n=109	=~2512
n=110	=~5024
n=111	=~0048
n=112	=~0096
n=113	=~0192
n=114	=~0384
n=115	=~0768
n=116	=~1536
n=117	=~3072
n=118	=~6144
n=119	=~2288
n=120	=~4576
n=121	=~9152
n=122	=~8304
n=123	=~6608
n=124	=~3216
n=125	=~6432
n=126	=~2864
n=127	=~5728
n=128	=~1456
n=129	=~2912
n=130	=~5824
n=131	=~1648
n=132	=~3296

	Kn
n=133	=~6592
n=134	=~3184
n=135	=~6368
n=136	=~2736
n=137	=~5472
n=138	=~0944
n=139	=~1888
n=140	=~3776
n=141	=~7552
n=142	=~5104
n=143	=~0208
n=144	=~0416
n=145	=~0832
n=146	=~1664
n=147	=~3328
n=148	=~6656
n=149	=~3312
n=150	=~6624
n=151	=~3248
n=152	=~6496
n=153	=~2992
n=154	=~5984
n=155	=~1968
n=156	=~3936
n=157	=~7872
n=158	=~5744
n=159	=~1488
n=160	=~2976
n=161	=~5952
n=162	=~1904
n=163	=~3808
n=164	=~7616
n=165	=~5232

循環

	Kn
n=166	=~0464
n=167	=~0928
n=168	=~1856
n=169	=~3712
n=170	=~7424
n=171	=~4848
n=172	=~9696
n=173	=~9392
n=174	=~8784
n=175	=~7568
n=176	=~5136
n=177	=~0272
n=178	=~0544
n=179	=~1088
n=180	=~2176
n=181	=~4352
n=182	=~8704
n=183	=~7408
n=184	=~4816
n=185	=~9632
n=186	=~9264
n=187	=~8528
n=188	=~7056
n=189	=~4112
n=190	=~8224
n=191	=~6448
n=192	=~2896
n=193	=~5792
n=194	=~1584
n=195	=~3168
n=196	=~6336
n=197	=~2672
n=198	=~5344

	Kn
n=199	=~0688
n=200	=~1376
n=201	=~2752
n=202	=~5504
n=203	=~1008
n=204	=~2016
n=205	=~4032
n=206	=~8064
n=207	=~6128
n=208	=~2256
n=209	=~4512
n=210	=~9024
n=211	=~8048
n=212	=~6096
n=213	=~2192
n=214	=~4384
n=215	=~8768
n=216	=~7536
n=217	=~5072
n=218	=~0144
n=219	=~0288
n=220	=~1576
n=221	=~3152
n=222	=~6304
n=223	=~2608
n=224	=~5216
n=225	=~0432
n=226	=~0864
n=227	=~1728
n=228	=~3456
n=229	=~6912
n=230	=~3824
…	…

表三

陸、研究結果：

根據以上的各項研究過程，得到『2 的指數值 Kn 中，個位數、十位數、百位數的循環個數數量成等比』，故本次研究中，由實際數字運算的研究結果為：『Kn 個位數、十位數、百位數的數字之間皆有循環存在，且其循環個數數量成等比』；而作者便根據該研究結果，將進一步推測且證明，『Kn 個位數、十位數、百位數、千位數、...的數字之間皆有循環存在，且其循環個數數量以＜$4\times5^{(A-1)}$＞成等比』

柒、討論：

根據以上的各項研究過程，得到數據研究結果為『Kn 個位數、十位數、百位數之間皆有循環存在，且其循環個數數量成等比』。然而，有別於個位數，十位數的循環始自 K2，而百位數的循環則始自 K3。為何不皆從 K1 開始而個別往後退一次才將之視為循環的開始？事實上，由實際的數據可發現，在 Kn 中，個位數的循環可從 K1、十位數可從 K2、百位數可從 K3 開始算起，亦可從之後的任一個 Kn 算起，皆會形成一個循環，且不影響循環個數的數量，這現象亦為循環的一個特色！因此，討論個位數的循環時，作者可任取一 Kn，只要此處的 n 滿足≥1、而十位數的循環則要 n≥2、百位數的循環則要 n≥3；而作者皆取最小值做為循環的開始，實則還有另一目的...

由數據可知，Kn 個位數的循環個數為 4，即表示 2^{n+4} 與 2^n 的乘開值中，個位數會一致，故可將之列成：$2^{n+4}-2^n$（此時的值應該會因為個位數相同所以減完應為 10 的倍數）

$$=2^n(2^4-1)=2^{n-1}(2^5-2)=2^{n-1}\times30=(2^{n-1}\times3)\times10$$

接著是十位數。十位數的循環個數為 20，即表示 2^{n+20} 與 2^n 的乘開值中，十位數會一致，故可將之列成：$2^{n+20}-2^n$（此時的值應該會因為十位數字相同,所以減完十位數字應為 0）

$$=2^n(2^{20}-1)=2^{n-2}(2^{22}-4)=2^{n-2}\times4194300=(2^{n-2}\times41943)\times100$$

由此知，2^n 的 n 每增加 20，其十位數便相同，且個位數也恰相同。

再看看百位數。百位數的循環個數為 100，即表示 2^{n+100} 與 2^n 的乘開值中，百位數會一致，故可將之列成：$2^{n+100}-2^n$（此時的值應該會因為百位數相同,所以減完百位數字應為 0）

$$=2^n(2^{100}-1)$$
$$=2^{n-3}(2^{103}-8)$$
$$=2^{n-3}\times10141204801825835211973625643000$$
$$=(2^{n-3}\times10141204801825835211973625643)\times1000$$

由此知，2^n 的 n 每增加 100，其百位數便相同，且個位數、十位數也恰相同。即後面三位數會相同。

從上述的過程，作者推測：令 $4\times5^{(A-1)}=r$，則 $2^{n+r}-2^n$ 應為 10^A 的倍數，亦可表示 2^{n+r} 與 2^n 的末 A 位數字皆相同，可進而表示成：令 $10^{(A-1)}$ 位數有循環（$A\geq0\wedge\in Z$，10^0 位數表個位數）。

欲以數學歸納法說明如下：

欲證：＜2^n＞乘開後，每 $4\times5^{(A-1)}$ 個便會使 $10^{(A-1)}$ 位數有循環，且＜2^n＞乘開後的末 A

位會每 $4\times5^{(A-1)}$ 位一循環。

證明：

1.當 A＝1，依題義：$2^{n+4}-2^{n}$　　　(n≥1)

$=2^{n}(2^{4}-1)$

$=2^{n-1}(2^{5}-2)$

$=2^{n-1}\times30$

$=(2^{n-1}\times3)\times10$

$=10\alpha$

得：＜2^{n}＞乘開後，每 4 個便會使個位數有循環，且＜2^{n}＞乘開後的末 1 位會每 4 位一循環。

2. 當 A＝2，依題義：$2^{n+20}-2^{n}$　　　(n≥2)

$=2^{n}(2^{20}-1)$

$=2^{n-2}(2^{22}-4)$

$=2^{n-2}\times4194300$

$=(2^{n-2}\times41943)\times100$

$=100\beta$

得：＜2^{n}＞乘開後，每 20 個便會使十位數有循環，且＜2^{n}＞乘開後的末 2 位會每 20 位一循環。

3.假設 A＝t，$4\times5^{(A-1)}=r$，　$2^{n+r}-2^{n}$ 為 10^{t} 的倍數,即 $2^{n+4\cdot5^{t-1}}$ 與 2^{n} 末 t 位數會一樣

$=2^{n}(2^{r}-1)$

$=2^{n-t}(2^{t}\times2^{r}-2^{t})$

$=2^{n-t}\times10^{t}a$　　　($10^{t}a$ 為 10^{t} 的倍數，$a\in Z$)

令 $2^{t}\times2^{r}-2^{t}=10^{t}a$，則 $2^{r}=(10^{t}\times a+2^{t})\div2^{t}=\dfrac{a\cdot10^{t}}{2^{t}}+1=a\times5^{t}+1$

4.則當 A＝t＋1，　$4\times5^{(A-1)}=5r$

$\therefore 2^{n+5r}-2^{n}=2^{n}(2^{5r}-1)$

$=2^{n-(t+1)}\times2^{(t+1)}\times[(2^{r})^{5}-1]$

$=2^{n-(t+1)}\times2^{(t+1)}\times[(a\times5^{t}+1)^{5}-1]$

$=2^{n-(t+1)}\times2^{(t+1)}\times[C^{5}_{0}(a\times5^{t})^{5}+C^{5}_{1}(a\times5^{t})^{4}+C^{5}_{2}(a\times5^{t})^{3}+C^{5}_{3}(a\times5^{t})^{2}+C^{5}_{4}(a\times5^{t})^{1}+C^{5}_{5}-1]$

$=2^{n-(t+1)}\times2^{(t+1)}\times[5^{5t}\times a^{5}+5\times5^{4t}\times a^{4}+10\times5^{3t}\times a^{3}+10\times5^{2t}\times a^{2}+5\times5^{t}\times a]$　　$\because t\geqq1$

$=2^{n-(t+1)}\times2^{(t+1)}\times5^{(t+1)}[5^{4t-1}\times a^{5}+5^{4t}\times a^{4}+2\times5^{2t}\times a^{3}+2\times5^{t}\times a^{2}+a]$

$=10^{t+1}\times k$

$\therefore 2^{n+4\cdot5^{t}}$ 與 2^{n} 末(t+1)位數會一樣

由數學歸納法知，原猜測對所有 $A\in N$ 皆成立。

至此，已由數學歸納法證實 2 的循環有公式存在。但是，是否只有 2 才有該現象呢？其實不然！其他如：3、5、7 等，皆有其特殊的循環現象，而作者發現，其中 3 的指數值之間，亦有與 2 相同的循環現象，即其循環個數亦與 2 的指數值一樣（個位數之循環個數為 4，十位數則是 20），因此，嘗試以已成立的條件（$4\times5^{(A-1)}$）和數學歸納法證之。

欲證：$<3^n>$乘開後，每 $4\times5^{(A-1)}$ 個便會使 $10^{(A-1)}$ 位數有循環，且$<3^n>$乘開後的末 A 位會每 $4\times5^{(A-1)}$ 位一循環。以下證明將 $4\times5^{(A-1)}$ 視為已知，並以 r 表之，r1 即表 $4\times5^{(A-1)}$ 中，A＝1。

證明：

1.當 A＝1，依題義：$3^{n+r1}-3^n$　　　（$n\geq1$）

$=3^n(3^4-1)$

$=3^n(80)$

$=2^n\times8\times10$

$=10a=10^1a$

得：$<3^n>$乘開後，每 4 個便會使個位數有循環，且$<3^n>$乘開後的末 1 位會每 4 位一循環。

2. 當 A＝2，依題義：$3^{n+r2}-3^n$　　　（$n\geq2$）

$=3^n(3^{20}-1)$

$=3^n(3486784400)$

$=3^n\times34867844\times100$

$=100b=10^2b$

得：$<3^n>$乘開後，每 20 個便會使十位數有循環，且$<3^n>$乘開後的末 2 位會每 20 位一循環。

3.假設 A＝t，依題義：$3^{n+rt}-3^n$

$=3^n(3^{rt}-1)$ 可表為 $10^t\times c$

即 $3^n(3^{rt}-1)=10^t\times c \longrightarrow 3^r=\dfrac{10^t\times c}{3^n}+1=10^t\times L+1$

由 $3^n(3^{rt}-1)=10^t\times c$ 中，

$\because (3,10)=1 \longrightarrow (3^n,10^t)=1$，又$\because 3^n(3^{rt}-1)=10^t\times c$

$\therefore$得知 $3^n \mid c \wedge 10^t \mid (3^{rt}-1) \wedge \dfrac{c}{3^n}=\dfrac{3^{rt}-1}{10^t}$，令比值為 L，且 $L\in Z$

則可得 $L=\dfrac{3^{rt}-1}{10^t}$

又已知（3 的偶數次方－1）必為 4 的倍數，

故可令 $(3^{rt}-1)=4\times d$，$d\in Z$

則 $L=\dfrac{4d}{10^t}$

4.則當 A＝t＋1，$3^{n+(rt+1)}-3^{n}$

$=3^{n}\times[(3^{r})^{5}-1]$

$=3^{n}\times[(10^{t}\times L+1)^{5}-1]$

$=3^{n}\times[C_{0}^{5}(10^{t}\times L)^{5}+C_{1}^{5}(10^{t}\times L)^{4}+C_{2}^{5}(10^{t}\times L)^{3}$

$+C_{3}^{5}(10^{t}\times L)^{2}+C_{4}^{5}(10^{t}\times L)^{1}+C_{5}^{5}(10^{t}\times L)^{0}-1]$

$=3^{n}\times[1\times10^{5t}\times L^{5}+5\times10^{4t}\times L^{4}+10\times10^{3t}\times L^{3}$
$+10\times10^{2t}\times L^{2}+5\times10^{t}\times L+1-1]$

$=3^{n}\times[10^{5t}\times L^{5}+10^{4t}\times5L^{4}+10^{3t}\times10L^{3}+10^{2t}\times10L^{2}+10^{t}\times5L]$

$L=\dfrac{4d}{10^{t}}$ 代入，其中：$10^{t}\times5L=10^{t}\times\dfrac{20d}{10^{t}}=10^{t+1}\times\dfrac{2d}{10^{t}}$

每一項都可以提出 10^{t+1}，可得 $3^{n}\times$[K（整理過後的值）] $\times10^{t+1}$。

由數學歸納法知，原猜測對所有 A∈N 皆成立。

∴3^{n}亦與 2^{n}一樣，乘開後，每 $4\times5^{(A-1)}$ 個便會使 $10^{(A-1)}$ 位數有循環，且乘開後的末 A 位會每 $4\times5^{(A-1)}$ 位一循環。

捌、結論：

本次研究，已成功地由數據得知「Kn 十位數、百位數之循環」的存在，並根據推論的證實，得知其間的循環個數數量成等比。又根據討論中所提出的問題，藉由數學歸納法的證明，作者得到以下的結論：

「欲知變數 Kn 之 $10^{(A-1)}$ 位數的循環，則自第 A 項算起，每 $4\times5^{(A-1)}$ 個便成為一循環，且 Kn 的末 A 位會每 $4\times5^{(A-1)}$ 位一循環。」，而上述結論之 Kn 無論表 2 或 3 的指數值都適用。

Ex：已知 2^{x}，其十位數恰開始出現第二個循環，求 x？(x∈N)

討論：十位數的循環從第二位開始算起，每 20 個一循環，而 x 是第二個循環的開始。

解：令 $10^{(A-1)}=10$，得 A＝2

已知 2^{n}從第 A 項起，每 $4\times5^{(A-1)}$ 位一循環，所以 A＝2 代入，得：

從第 2 項起，每 20 位一循環

所以，第一個循環止於 $2^{(20+2-1)}=2^{21}$

2^{x}的十位數恰開始出現第二個循環，所以 x＝22

檢驗：由表二可知，十位數的第二個循環的確從第 22 項開始。

評　語

040405 高中組數學科

數字的奧妙—次方數的循環

1. 作品當中引用符號「Kn」，有待探討其恰當性。

2. 未能有效的使用計算工具。