中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040404

國立臺中第一高級中學

指導老師姓名

黃金火

李吉彬

作者姓名

彭冠銓

陳衍方

馮冠霖

張恆豪

第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

科別：數學科

組別：高中組

作品名稱：透視自守數

關鍵詞：自守數、Automorphic(平方自守數)、Trimorphic(立方自守數)

編號：

作品名稱：透視自守數

一、　摘要

定義：若 k 爲一 n 位正整數，且 $k^t-k\equiv 0 \pmod{10^n}$，則稱 k 爲一個 n 位 t 方自守數。（k、n、t 皆爲正整數）

例如：625 爲一 3 位正整數，且 $625^3-625\equiv 0 \pmod{10^3}$，則稱 625 爲一個 3 位立方自守數。

本次研究的核心是在於揭開平方自守數以及立方自守數許多迷人的性質和它們二者之間錯綜複雜的關係，並嘗試進一步解開四方、五方自守數或更高次方自守數之性質。

二、　研究動機

在一次有關數論和同餘之數學專題的小考中，老師忽然心血來潮，臨時加考了一道題目，這個問題包含了兩個小題，其內容如下：①若兩位正整數 k 本身平方後末兩位數和原數相同（即 k 滿足 $k^2-k\equiv 0 \pmod{100}$），試求出所有的 k。②承①，若兩位正整數 k 本身立方後末兩位數和原數相同（即 k 滿足 $k^3-k\equiv 0 \pmod{100}$），試求出所有的 k。後來老師公佈了解法，其重點在於由最低位數起往上推。經過老師詳細的解法洗禮後，班上同學無不茅塞頓開，也因此開始對這種問題產生了興趣，但緊接著另一個問題馬上閃過我們腦海中，那就是：是否有辦法能讓我們很快地找出限制位數下所有滿足如此小題條件的數呢？爲了解決此問題，幾個志同道合的同學就組成了本研究小組，開始著手嘗試各種方法。經過上網查資料後，我們才發現這種數有一個特殊的名字叫自守數，雖然名稱並不怎麼吸引人，但其內容越看越覺得有趣，經過本組討論後，我們決定要對這個題目做更深一層的探討，揭開其隱藏在數字背後的神秘面紗。

三、　研究目的

以現有嘗試出的平方以及立方自守數來整理歸納出它的規律和性質，並加以一般化，讓我們可以輕易、迅速的寫出已知位數內的所有平方以及立方自守數。進而嘗試解開更高次方自守數之謎。

四、　研究設備及器材

紙、筆、電腦程式－平方自守數計算機（由中國的郭先強先生研發，其用 VC++6.0 開發，可直接運行於所有 Windows 平臺！搜索範圍：1-1,000,000,000 digits）以及工程用計算機。

五、　研究過程或方法

（一）、翻閱相關書籍或上網搜尋相關資料。

（二）、嘗試用個人電腦中的小算盤或工程用計算機找出幾個平方或立方自守數。

（三）、列出所找到的數據一一分析，找出規律並證明之。

（四）、向指導老師請教並修正錯誤之處。
（五）、統整所有資料並打成書面報告。

六、　研究結果

（一）、平方自守數的探討

1.基本特性：即 t=2，其個位數必為 1、5 或 6。

2.結尾為 1 的平方自守數只有 1。

pf：

設其十位數 n_1，n_1 屬於 0 到 9 之間的整數。

則 $(10n_1+1)^2-(10n_1+1)\equiv 0 \pmod{100}$，$100n_1^2+10n_1\equiv 0 \pmod{100}$，

$10n_1\equiv 0 \pmod{100}$，　$\therefore n_1=0$，

再設其百位數 n_2，則同理 $n_2=0$，如此繼續可得 n_i 皆＝0。

∴結尾為 1 的平方自守數只有 1。

3.若 n 位數 k 為一平方自守數，則 (10^n+1-k) 亦為一 n 位平方自守數。（$n\geqq 2$）

（取材自：http://home.school.net.hk/~mathss/fun/f006.htm）

例：2 位數 25 為一平方自守數，則 $(10^2+1-25)=76$ 亦為一 2 位平方自守數。

pf：

$\because$ k 滿足 $k^2-k\equiv 0 \pmod{10^n}$，

$(10^n+1-k)^2-(10^n+1-k)\equiv(1-k)^2-(1-k)\equiv k^2-k\equiv 0 \pmod{10^n}$，

$\therefore (10^n+1-k)$ 亦為一 n 位平方自守數。

4.任何平方自守數皆為 t 方自守數。

pf：

❶設 n 位數 k 為一平方自守數，即 $k^2-k\equiv 0 \pmod{10^n}$，$k^2\equiv k \pmod{10^n}$。

❷若 $k^m\equiv k \pmod{10^n}$，則 $k^{m+1}\equiv k\times k^m\equiv k^2\equiv k \pmod{10^n}$。

∴根據數學歸納法及❶、❷可知 $k^t\equiv k \pmod{10^n}$　（t 為任意正整數）。

5.結尾為 5 的平方自守數其每一位數所形成的數列（由個位數向前算）$\langle a_n \rangle$（即 $a_1=5$、$a_2=2$、$a_3=6\cdots$），則 $a_n=\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)^2$ 之第 n 位數。

（取材自：http://home.school.net.hk/~mathss/fun/f006.htm）

例：$a_4=\left[\left(\sum_{i=1}^{3}10^{i-1}a_i\right)^2=\left(6\times10^2+2\times10+5\right)^2=625^2=390625\right]$ 之第 4 位數，$\therefore a_4=0$。

pf：

若已知 n 位數 k 為一結尾為 5 的平方自守數（$n\geqq 2$），

即 k＝$\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)$＝$\left[10^{n-1}a_n+\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)\right]$，

由定義我們有$\left[10^{n-1}a_n+\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)\right]^2$－$\left[10^{n-1}a_n+\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)\right]\equiv 0$ （mod 10^n），

$10^{2n-2}a_n^2+2\times10^{n-1}a_n\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)^2-10^{n-1}a_n-\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)\equiv 0$ （mod 10^n），

∵n≧2 且$\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)$之個位數爲 5， $2\times10^{n-1}a_n\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)$其後至少有 n 個 0，

$\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)$其後至少有 n－1 個 0，

∴上式可化簡得$\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)^2-10^{n-1}a_n-\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)\equiv 0$ （mod 10^n），

再經由同餘式兩邊比較其 10^{n-1} 項係數可得$\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)^2\text{之第}n\text{位數}\right]-a_n\equiv 0$ （mod 10），$\therefore a_n=\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)^2\text{之第}n\text{位數}\right]$。

6.<u>結尾爲 5</u> 的 n 位平方自守數至多 1 個，<u>結尾爲 6</u> 的 n 位平方自守數也至多 1 個。
（取材自：http://home.school.net.hk/~mathss/fun/f006.htm）
例：三位數中，結尾爲 5 的平方自守數只有 625；
四位數中，結尾爲 6 的平方自守數只有 9376。
pf：
對於結尾爲 5 的 n 位平方自守數而言，

由性質 5.中證明可得$a_n=\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)^2\text{之第}n\text{位數}\right]$，故對給定的 n，$a_n$ 必有唯一解，

∴結尾爲 5 的平方自守數至多 1 個。
同理，設結尾爲 6 的平方自守數其每一位數所形成的數列＜b_n＞（即 b_1=6、b_2=7、b_3=3⋯），則由定義$\left[10^{n-1}b_n+\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}b_i\right)\right]^2-\left[10^{n-1}b_n+\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}b_i\right)\right]\equiv 0$ （mod 10^n），

$10^{2n-2}b_n^2+2\times10^{n-1}b_n\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}b_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}b_i\right)^2-10^{n-1}b_n-\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}b_i\right)\equiv0$ （mod 10^n），

∵n≧2 且 $\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}b_i\right)$ 之個位數為 6，$2\times10^{n-1}b_n\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}b_i\right)$ 之第 n 位數為 $2b_n$ 之個位數，

$\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}b_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}b_i\right)$ 其後至少有 n－1 個 0，

∴上式可化簡得 $2\times10^{n-1}b_n\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}b_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}b_i\right)^2-10^{n-1}b_n-\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}b_i\right)\equiv0$ （mod 10^n），

再經由同餘式兩邊比較其 10^{n-1} 項係數可得 $b_n\equiv10-\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}b_i\right)^2\text{之第n位數}\right]$ （mod 10），

故對給定的 n，b_n 必有唯一解，∴結尾為 6 的平方自守數也至多 1 個。

7. $a_n+b_n=9$，（n≧2）

pf：

∵$a_1=5$，∴由性質②知存在一結尾為 6 之平方自守數，且除了個位數外，其餘對應位數相加皆為 9，即 $a_n+b_n=9$，（n≧2）。

（二）、立方自守數的探討

1.基本特性：即 t=3，其個位數必為 1、4、5、6 或 9。

2.若 n 位數 k 為一立方自守數，則(10^n-k)亦為一 n 位立方自守數。

例：2 位數 51 為一立方自守數，則$(10^2-51)=49$ 亦為一 2 位立方自守數。

pf：

∵k 滿足 $k^3-k\equiv0$ （mod 10^n）

$(10^n-k)^3-(10^n-k)\equiv-k^3+k\equiv0$ （mod 10^n）

∴(10^n-k)亦為一 n 位立方自守數。

3.結尾為 4 的 n 位立方自守數至多 1 個，結尾為 6 的 n 位立方自守數也至多 1 個。

例：三位數中，結尾為 4 的立方自守數只有 624；

　　四位數中，結尾為 6 的立方自守數只有 9376。

pf：

當 n 位立方自守數 k 之結尾為 4 時，設 $k=p\times10^{n-1}+q$，（n≧2）

其中，p 為 1~9 之間的整數，q 亦為一立方自守數，根據定義知 k 滿足 $k^3-k\equiv0$ （mod 10^n），

將 k 帶入得$\left(p\times10^{n-1}+q\right)^3-\left(p\times10^{n-1}+q\right)\equiv0$ （mod 10^n），

$p^3\times10^{3n-3}+3p^2q\times10^{2n-2}+3pq^2\times10^{n-1}+q^3-p\times10^{n-1}-q\equiv0$ （mod 10^n），
∵n≧2、當 k 之結尾為 4 時，q 之結尾亦為 4 且$\left(q^3-q\right)$其後至少有 n－1 個 0，
∴經由比較10^{n-1}項係數可得 $p\equiv8p+\left(q^3之第n位數\right)$ （mod 10），
$7p\equiv-\left(q^3之第n位數\right)$ （mod 10），滿足此條件之 p 至多 1 個，
∴結尾為 4 的 n 位立方自守數至多 1 個。
同理，當 n 位立方自守數 k 之結尾為 6 時，設 k＝ $p\times10^{n-1}+q$ ，（n≧2）
其中，p 為 1~9 之間的整數，q 亦為一立方自守數，根據定義知 k 滿足 k^3－k≡0 （mod 10^n），

將 k 帶入得$\left(p\times10^{n-1}+q\right)^3-\left(p\times10^{n-1}+q\right)\equiv0$ （mod 10^n），

$p^3\times10^{3n-3}+3p^2q\times10^{2n-2}+3pq^2\times10^{n-1}+q^3-p\times10^{n-1}-q\equiv0$ （mod 10^n），
∵n≧2、當 k 之結尾為 6 時，q 之結尾亦為 6 且$\left(q^3-q\right)$其後至少有 n－1 個 0，
∴經由比較10^{n-1}項係數可得 $p\equiv8p+\left(q^3之第n位數\right)$ （mod 10），
亦可得到$7p\equiv-\left(q^3之第n位數\right)$ （mod 10），
∴結尾為 6 的 n 位立方自守數也至多 1 個。

4.<u>結尾為 9</u> 之 n 位立方自守數至多 4 個，<u>結尾為 1</u> 之 n 位立方自守數至多 3 個，<u>結尾為 5</u> 之 n 位立方自守數至多 4 個。
例：三位數中，結尾為 5 的立方自守數只有 125、375、625 以及 875；
四位數中，結尾為 9 的立方自守數只有 1249、4999、6249 以及 9999；
五位數中，結尾為 1 的立方自守數只有 18751、50001 以及 68751。
pf：
仿照性質 3.之證明方法，當 n 位立方自守數 k 之結尾為 1 或 9 時，
設 k＝ $p\times10^{n-1}+q$ ，（n≧2）
其中，p 為 1~9 之間的整數，q 亦為一立方自守數，根據定義知 k 滿足 k^3－k≡0 （mod 10^n），

將 k 帶入得$\left(p\times10^{n-1}+q\right)^3-\left(p\times10^{n-1}+q\right)\equiv0$ （mod 10^n），

$p^3\times10^{3n-3}+3p^2q\times10^{2n-2}+3pq^2\times10^{n-1}+q^3-p\times10^{n-1}-q\equiv0$ （mod 10^n），
∵n≧2、當 k 之結尾為 1 時，q 之結尾亦為 1、
當 k 之結尾為 9 時，q 之結尾亦為 9 且$\left(q^3-q\right)$其後至少有 n－1 個 0，
∴經由比較10^{n-1}項係數可得$2p\equiv-\left(q^3之第n位數\right)$ （mod 10）。
同理，當 n 位立方自守數 k 之結尾為 5 時，
設 k＝ $p\times10^{n-1}+q$ ，（n≧2）
其中，p 為 1~9 之間的整數，q 亦為一立方自守數，根據定義知 k 滿足 k^3－k≡0 （mod 10^n），

將 k 帶入得$\left(p\times10^{n-1}+q\right)^3-\left(p\times10^{n-1}+q\right)\equiv0$ （mod 10^n），

$p^3\times10^{3n-3}+3p^2q\times10^{2n-2}+3pq^2\times10^{n-1}+q^3-p\times10^{n-1}-q\equiv0$ （mod 10^n），

∵n≧2、當 k 之結尾為 5 時，q 之結尾亦為 5 且 (q^3-q)其後至少有 n－1 個 0，

∴經由比較10^{n-1}項係數可得 $4p\equiv-(q^3\text{之第}n\text{位數})$ （mod 10），

滿足上述兩種條件之 p 皆至多 2 個。

由此可知結尾為 1、5 或 9 之 n 位立方自守數不像結尾為 4 或 6 之 n 位立方自守數一樣皆為一脈相承，單一發展，而是類似樹狀圖的型式分支發展（請參考性質 8.中之簡圖），至於為何導致性質 4.之結論，須先參考性質 5.、性質 6.以及性質 8.之證明。

5.十位數為 0，結尾為 1 的立方自守數只有 1 和$5\times10^n+1$，（n≧2）。

pf：

由性質 4.中分支的性質可得到性質 8.中之簡圖，但為什麼型如$5\times10^n+1$之立方自守數不能繼續往下分支呢？其證明如下：

設存在 0~9 之間的整數 p 滿足 $p\times10^{n+1}+5\times10^n+1$為一立方自守數，

仿照性質 3.之證明方法，根據定義知 $p\times10^{n+1}+5\times10^n+1$滿足

$(p\times10^{n+1}+5\times10^n+1)^3-(p\times10^{n+1}+5\times10^n+1)\equiv0$ （mod 10^{n+1}），

$\left[p^3\times10^{3n+3}+3p^2\times10^{2n+2}(5\times10^n+1)+3p\times10^{n+1}(5\times10^n+1)^2+(5\times10^n+1)^3-p\times10^{n+1}-(5\times10^n+1)\right]$

$\equiv0$ （mod 10^{n+1}），

∵n≧2、$(5\times10^n+1)^3$之第 n＋2 位數為 1 且$\left[(5\times10^n+1)^3-(5\times10^n+1)\right]$其後至少有 n＋1 個 0，經由比較$10^{n+1}$項係數可得 $2p\equiv-1$ （mod 10），

∵此種 p 不存在，∴原設錯誤，故型如$5\times10^n+1$之立方自守數不能繼續往下分支。

∴十位數為 0，結尾為 1 的立方自守數只有 1 和$5\times10^n+1$，（n≧2）。

6.<u>結尾為 1、5 或 9</u>的 n 位立方自守數若其最高位數為 p，

（1.）當 p＞5 時，將原立方自守數的首位數換為(p－5)時亦為一新立方自守數。

（2.）當 p＜5 時，將原立方自守數的首位數換為(p＋5)時亦為一新立方自守數。

例：251 為三位立方自守數，p＝2＜5，∴將 251 的首位數 2 換為(2＋5)＝7 後亦為一新立方自守數，即 751 亦為一新立方自守數；

9375 為四位立方自守數，p＝9＞5，∴將 9375 的首位數 9 換為(9－5)＝4 後亦為一新立方自守數，即 4375 亦為一新立方自守數。

pf：

當結尾為 1 或 9 時，由性質 4.中之證明可得 $2p\equiv-(q^3\text{之第}n\text{位數})$ （mod 10），

無論將(p－5)或(p＋5)代入上式 p 的位置皆不影響同餘關係，

所以可知滿足此條件的兩解 p 即為(p－5)、p 或(p＋5)、p。

同理，當結尾為 5 時，$4p\equiv-(q^3\text{之第}n\text{位數})$ （mod 10），依上述方法也可證得性質 6.。

7.若 k 為一立方自守數，則 k 亦為一奇次方自守數。

pf：

（1.）設 n 位數 k 爲一立方自守數，即 $k^3-k\equiv 0 \pmod{10^n}$，$k^3\equiv k \pmod{10^n}$。
（2.）若 $k^t\equiv k \pmod{10^n}$，則 $k^{t+2}\equiv k^2\times k^t\equiv k^3\equiv k \pmod{10^n}$。
∴根據數學歸納法及（1.）、（2.）可知 $k^{2t-1}\equiv k \pmod{10^n}$　（t 爲任意正整數）。

8.平方自守數與立方自守數的關係：（本次研究重點）

平方自守數中，

（1.）當 $\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)>\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)$時，則$\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)$爲末位爲 1 之 n 位立方自守數中可延伸的那一支。

（2.）當 $\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)>\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)$時，則$\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)+10^n-\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)$爲末位爲 1 之 n 位立方自守數中可延伸的那一支。

例：（請參考附錄二的結尾爲 1 之位數較小的所有立方自守數關係略圖）
請注意附錄二中框起來的數字，皆爲末位爲 1 之 n 位立方自守數中可延伸的那一支，拿其中的 751 及 8751 作爲例子。

∵當 n=4 時，$\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)>\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)$，即 9376＞0625，

∴$\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)$，即 9376－0625＝8751 爲末位爲 1 之四位立方自守數中可延伸的那一支。

∵當 n=3 時，$\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)>\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)$，即 625＞376，

∴$\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)+10^n-\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)$，即 $376+10^3-625=751$ 爲末位爲 1 之三位立方自守數中可延伸的那一支。

其餘附錄二中框起來的數字皆可仿照上述二例加以類推，故在此不再贅述。

pf：
本性質可經由下列兩步驟得到證明，
（1.）先證其爲立方自守數。由平方自守數性質 3.可知

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)+\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)\right]=10^n+1\text{，且}\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)^2\equiv\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)\pmod{10^n}\text{，}$$

Case Ⅰ

若$\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)>\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)$，（以下皆爲對$10^n$同模）

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)\right]^3-\left[\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)\right]$$

$$\equiv\left[2\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)-\left(10^n+1\right)\right]^3-\left[2\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)-\left(10^n+1\right)\right]$$

$$\equiv 8\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)^3-12\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)^2+4\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)\equiv 8\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)^3-8\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)\equiv 0$$

Case Ⅱ

若$\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)>\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)$，（以下皆爲對$10^n$同模）

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)+10^n-\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)\right]^3-\left[\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)+10^n-\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}a_i\right)\right]$$

$$\equiv\left[2\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)-1\right]^3-\left[2\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)-1\right]\equiv 8\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)^3-12\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)^2+4\left(\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}b_i\right)\equiv 0$$

以上二者皆滿足立方自守數之條件，∴得證其爲立方自守數。

至於爲什麼結尾爲 1、5 或 9 的 n 位立方自守數僅有一半能繼續分支呢？請見以下的問題：

（2.）設 k 爲一結尾爲 1、5 或 9 的 n 位立方自守數，又 k＝ $p\times10^{n-1}+q$（q 爲一結尾爲 1、5 或 9 的立方自守數，p 爲 1~9 之間的整數），

⊙若 p≧5，試證$\left(p\times10^{n-1}+q\right)^3$與$\left[(p-5)\times10^{n-1}+q\right]^3$之第 n＋1 位數爲一奇一偶。即證$\left(3p\times10^{n-1}\times q^2+q^3\right)$與$\left[3(p-5)\times10^{n-1}\times q^2+q^3\right]$之第 n＋1 位數爲一奇一偶。

⊙若 p＜5，試證$\left(p\times10^{n-1}+q\right)^3$與$\left[(p+5)\times10^{n-1}+q\right]^3$之第 n＋1 位數爲一奇一偶。即證$\left(3p\times10^{n-1}\times q^2+q^3\right)$與$\left[3(p+5)\times10^{n-1}\times q^2+q^3\right]$之第 n＋1 位數爲一奇一偶。

pf：後兩位爲 01 的 n 位立方自守數於性質 5.已證明其僅有一半能繼續分支，所以本題僅對後兩位爲 51、25、75、49 和 99 的 n 位立方自守數證明。

（以下以$q^3_{(n)}$表示q^3之第 n 位數）

◎若後兩位爲 51，由性質 4.知$2p\equiv-\left(q^3之第n位數\right)$ （mod 10）

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q^3_{(n)}$	8	6	4	2	0	8	6	4	2

取 p＝1，$q^3_{(n)}$＝8 爲例說明。設q^3之第 n＋1 位數爲 a，則$\left(3p\times10^{n-1}\times q^2+q^3\right)$之第 n＋1 位數爲 a＋1，$\left[3(p+5)\times10^{n-1}\times q^2+q^3\right]$之第 n＋1 位數爲 a＋2，a＋1 與 a＋2 爲一奇一偶，符合題幹。把其餘各組分別仿照此例檢驗，可發現每組皆爲一奇一偶。

◎若後兩位爲 25 或 75，由性質 4.知$4p \equiv -\left(q^3之第n位數\right)$ （mod 10）

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q^3_{(n)}$	6	2	8	4	0	6	2	8	4

取 p＝6， $q^3_{(n)}$ ＝6 爲例說明。設q^3之第 n＋1 位數爲 a，則$\left(3p\times10^{n-1}\times q^2+q^3\right)$之第 n＋1 位數爲 a＋5，$\left[3(p-5)\times10^{n-1}\times q^2+q^3\right]$之第 n＋1 位數爲 a＋8，a＋5 與 a＋8 爲一奇一偶，符合題幹。把其餘各組分別仿照此例檢驗，可發現每組皆爲一奇一偶。

◎若後兩位爲 49 或 99，由性質 4.知$2p \equiv -\left(q^3之第n位數\right)$ （mod 10）

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$q^3_{(n)}$	8	6	4	2	0	8	6	4	2

取 p＝8， $q^3_{(n)}$ ＝4 爲例說明。設q^3之第 n＋1 位數爲 a，則$\left(3p\times10^{n-1}\times q^2+q^3\right)$之第 n＋1 位數爲 a＋2，$\left[3(p-5)\times10^{n-1}\times q^2+q^3\right]$之第 n＋1 位數爲 a＋1，a＋2 與 a＋1 爲一奇一偶，符合題幹。把其餘各組分別仿照此例檢驗，可發現每組皆爲一奇一偶。

由以上三點即可得證本題，但爲何要證明一奇一偶呢？因爲結尾爲 1、5 或 9 的 n 位立方自守數由性質 4.中之證明皆可得到型如$2p \equiv -\left(q^3之第n位數\right)$ （mod 10）或 $4p \equiv -\left(q^3之第n位數\right)$ （mod 10），以上二式皆必須滿足同餘式右邊爲偶數的條件，p 才可能有解，證明了一奇一偶即證明分支的兩解中只有一解會繼續分支，所以這就是爲什麼樹狀圖中僅有一半能繼續分支以及有性質 4.結論的原因了。

∴由以上推論以及有無限多個平方自守數即可證得性質 8.。

（三）、四方自守數的探討

1.基本特性：即 t=4，其個位數必爲 1、5 或 6。

2.<u>結尾爲 1</u> 的四方自守數只有 1。

pf：

設其十位數 n_1，n_1 屬於 0 到 9 之間的整數。

則$(10n_1+1)^4-(10n_1+1)\equiv0$（mod 100），$40n_1-10n_1\equiv0$（mod 100），∴$n_1=0$，

再設其百位數 n_2，則同理 $n_2=0$，如此繼續可得 n_i 皆＝0。

∴結尾爲 1 的四方自守數只有 1。

3.<u>結尾爲 5</u> 的四方自守數和<u>結尾爲 5</u> 的平方自守數相同。

pf：

∵當 n 位四方自守數 k 之結尾爲 5 時，設 k＝ $p\times10^{n-1}+q$ ，（n≧2）

其中，p 爲 1~9 之間的整數，q 亦爲一四方自守數，根據定義知 k 滿足 $k^4-k\equiv0$ （mod

10ⁿ），將 k 帶入得$\left(p\times10^{n-1}+q\right)^4-\left(p\times10^{n-1}+q\right)\equiv0$ （mod 10^n），

展開化簡可得$\left(p\times10^{n-1}+q\right)^4\equiv4p\times10^{n-1}\times q^3+q^4\equiv p\times10^{n-1}+q$ （mod 10^n），

∴經由比較10^{n-1}項係數可得 $p\equiv\left(q^4\text{之第}n\text{位數}\right)$（mod 10），滿足此條件之 p 至多 1 個，又已知結尾爲 5 的 n 位平方自守數爲任意次方之自守數，

∴<u>結尾爲 5</u> 的四方自守數和<u>結尾爲 5</u> 的平方自守數相同。

4.<u>結尾爲 6</u> 的四方自守數和<u>結尾爲 6</u> 的平方自守數相同。

pf：

∵當 n 位四方自守數 k 之結尾爲 6 時，設 k＝ $p\times10^{n-1}+q$ ，（n≧2）

其中，p 爲 1~9 之間的整數，q 亦爲一四方自守數，根據定義知 k 滿足 $k^4-k\equiv0$ （mod 10^n），將 k 帶入得$\left(p\times10^{n-1}+q\right)^4-\left(p\times10^{n-1}+q\right)\equiv0$ （mod 10^n），

展開化簡可得$\left(p\times10^{n-1}+q\right)^4\equiv4p\times10^{n-1}\times q^3+q^4\equiv p\times10^{n-1}+q$ （mod 10^n），

∴經由比較10^{n-1}項係數可得$3p\equiv-\left(q^4\text{之第}n\text{位數}\right)$（mod 10），滿足此條件之 p 至多 1 個，又已知結尾爲 6 的 n 位平方自守數爲任意次方之自守數，

∴<u>結尾爲 6</u> 的四方自守數和<u>結尾爲 6</u> 的平方自守數相同。

（四）、五方自守數的探討（請參考附錄八~附錄十三）

1.基本特性：即 t=5，其個位數可能爲 1~9 中任一數。

2.若 n 位數 k 爲一五方自守數，則(10^n-k)亦爲一 n 位五方自守數。

例：4 位數 3125 爲一五方自守數，則$(10^4-3125)=6875$ 亦爲一 4 位五方自守數。

pf：

∵k 滿足 $k^5-k\equiv0$ （mod 10^n），

$(10^n-k)^5-(10^n-k)\equiv-k^5+k\equiv0$（mod 10^n），∴(10^n-k)亦爲一 n 位五方自守數。

由於五方自守數有對稱性質，所以以下只須探討其中一半，即末位爲 1~5 之五方自守數。

3.各種結尾之五方自守數的分支與否情形討論：

①<u>末位爲 1</u> 之五方自守數：設末位爲 1 之 n 位五方自守數 k＝ $p\times10^{n-1}+q$ ，（n≧2）

根據定義，其滿足 $k^5-k\equiv0$ （mod 10^n），

將 k 帶入化簡比較10^{n-1}項係數可得可得$4p\equiv-\left(q^5\text{之第}n\text{位數}\right)$（mod 10），

滿足此條件之 p 至多 2 個，所以末位爲 1 之五方自守數<u>有分支的特性</u>。

②<u>末位爲 2</u> 之五方自守數：設末位爲 2 之 n 位五方自守數 k＝ $p\times10^{n-1}+q$ ，（n≧2）

根據定義，其滿足 $k^5-k\equiv0$ （mod 10^n），

將 k 帶入化簡比較10^{n-1}項係數可得可得 $p\equiv\left(q^5\text{之第}n\text{位數}\right)$（mod 10），

滿足此條件之 p 至多 1 個，所以末位爲 2 之五方自守數<u>無分支的特性</u>。

③末位為 3 之五方自守數：設末位為 3 之 n 位五方自守數 k＝ $p\times10^{n-1}+q$ ，（n≧2）

根據定義，其滿足 k^5－k≡0 （mod 10^n），

將 k 帶入化簡比較10^{n-1}項係數可得可得$4p\equiv-\left(q^5之第n位數\right)$（mod 10），

滿足此條件之 p 至多 2 個，所以末位為 3 之五方自守數有分支的特性。

④末位為 4 之五方自守數：設末位為 4 之 n 位五方自守數 k＝ $p\times10^{n-1}+q$ ，（n≧2）

根據定義，其滿足 k^5－k≡0 （mod 10^n），

將 k 帶入化簡比較10^{n-1}項係數可得可得 $p\equiv\left(q^5之第n位數\right)$（mod 10），

滿足此條件之 p 至多 1 個，又已知立方自守數為任意奇數次方之自守數，

所以末位為 4 之五方自守數＝末位為 4 之立方自守數。

⑤末位為 5 之五方自守數：設末位為 5 之 n 位五方自守數 k＝ $p\times10^{n-1}+q$ ，（n≧2）

根據定義，其滿足 k^5－k≡0 （mod 10^n），

將 k 帶入化簡比較10^{n-1}項係數可得可得$4p\equiv-\left(q^5之第n位數\right)$（mod 10），

滿足此條件之 p 至多 2 個，所以末位為 5 之五方自守數有分支的特性。

4.可分支之五方自守數（即末位為奇數之五方自守數）相加性質：

若 n 位數 k＝ $p\times10^{n-1}+q$ 、k'＝$(p-5)\times10^{n-1}+q$ 皆為末位相同之五方自守數，（p≧5，n≧3）則$\dfrac{k+k'}{2}$亦為一相同結尾之五方自守數。(∵五方自守數有對稱性質，∴以下只對結尾為 1、3 及 5 之五方自守數證明)

pf：

$$\because \frac{k+k'}{2}=\frac{(2p-5)\times10^{n-1}+2q}{2}=(10p-25)\times10^{n-2}+q\ ,$$

∴本性質相當於證明$\left[(10p-25)\times10^{n-2}+q\right]^5-\left[(10p-25)\times10^{n-2}+q\right]\equiv0$（mod 10^n），（＊）

又當 k 末位為 1、3 及 5 時，（＊）式可化簡為$4p\times10^{n-1}+q^5-q\equiv0$（mod 10^n），

且無論 k 之末位為 1、3 還是 5，皆滿足$4p\equiv-\left(q^5之第n位數\right)$（mod 10），

（以下用$q^5_{(n)}$代表$q^5之第n位數$）

P	5	6	7	8	9
$q^5_{(n)}$	0	6	2	8	4

將上述五組代入（＊）式皆滿足$4p\times10^{n-1}+q^5-q\equiv0$（mod 10^n），∴本性質得證。

（以下性質純屬目前初步的歸納，本研究小組尚在嘗試證明研究中）

5.末兩位為 43 且不可連續分支兩次的五方自守數之相減性質：

設k_{2n}表末位為 2 之 n 位五方自守數；k_{3n}表末兩位為 43 且不可連續分支兩次之 n 位五方自守數；k_{5n}表末兩位為 75 且不可連續分支兩次之 n 位五方自守數，

①若$k_{5n}>k_{2n}$ ，則$k_{3n}=k_{5n}-k_{2n}$ 。（n≧3）

②若$k_{5n}<k_{2n}$ ，則$k_{3n}=10^n+k_{5n}-k_{2n}$ 。（n≧3）

例：❶當 n＝3 時， $k_{5n}=875>k_{2n}=432$，∴ $k_{3n}=k_{5n}-k_{2n}=443$。

❷當 n＝4 時， $k_{5n}=4375<k_{2n}=6432$，∴ $k_{3n}=10^4+k_{5n}-k_{2n}=7943$。

（五）、t 方自守數的通性

1.奇數次方之自守數具有對稱性，即若 k 爲一個 n 位 t 方自守數（t 爲正奇數），則(10^n-k)亦爲一 n 位 t 方自守數。

pf：

$\because$ k 滿足 $k^t-k\equiv 0 \pmod{10^n}$

$(10^n-k)^t-(10^n-k)\equiv -k^t+k\equiv 0 \pmod{10^n}$

$\therefore (10^n-k)$亦爲一 n 位 t 方自守數。

2.若 k 爲一個 n 位 t 方自守數，則 k 必爲一個 n 位 $t+p(t-1)$方自守數。（$\forall p\in N$）

pf：

（1.）設 n 位數 k 爲一 t 方自守數，即 $k^t-k\equiv 0 \pmod{10^n}$，$k^t\equiv k \pmod{10^n}$。

（2.）若 $k^m\equiv k \pmod{10^n}$，則 $k^{m+(t-1)}\equiv k^m\times k^{(t-1)}\equiv k^t\equiv k \pmod{10^n}$。

$\therefore$根據數學歸納法及（1.）、（2.）可知 $k^{t+p(t-1)}\equiv k \pmod{10^n}$ （$\forall p\in N$）。

七、 討論

本次研究中，立方自守數之性質 8.佔了舉足輕重的地位，因爲它是連結平方自守數以及立方自守數的重要關係，再加上以上各性質，我們只需用電腦算出平方自守數中的 a_n 數列（其公式請參考平方自守數之小結）就可以把所有的平方、立方自守數找出。（實際應用可參考附錄六）這就是本組於本次研究之重要成果，因爲立方自守數可藉由平方自守數衍生出來，平方自守數中結尾爲 5 和 6 的又能相互衍生，所以在此僅附上由中國的郭先強先生研發出的平方自守數計算機中算出的前 200 位結尾爲 5 之平方自守數（即平方自守數中的 a_n 數列）（請見附錄七）。另外，破解了平方以及立方自守數之謎後，等著我們的問題是如何利用平方以及立方自守數推廣到更高次方（目前著手研究的五次方自守數已有初步的進展），這也是本組日後研究的主要方向。

八、 結論

（一）、平方自守數小結（位數較小的所有平方自守數關係略圖請參考附錄一）

1.平方自守數具單一發展性，即特定結尾的 n 位平方自守數至多 1 個。

2.平方自守數主要計算公式：$a_n=\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}10^{i-1}a_i\right)^2\text{之第}n\text{位數}\right]$。

3.平方自守數具對稱性，即 $a_n+b_n=9$，（$n\geqq 2$）。

（二）、立方自守數小結（請參考附錄二、三、四及五）

1.結尾爲 4 或 6 之立方自守數具單一發展性，即特定結尾的 n 位立方自守數至多 1 個。

2.結尾爲 1、5 或 9 之立方自守數具分支發展性，但只有一半會繼續分支發展，即特定結尾的 n 位立方自守數至多 4 個。此外，由同一立方自守數分支出來的兩個新立方自守數其最高位數必型如 p、p+5。

3.立方自守數具對稱性，即立方自守數之性質 2.。

（三）、四方自守數小結：四方自守數＝平方自守數

（四）、立方自守數演算法：

1.結尾為 6 之立方自守數與結尾為 6 之平方自守數完全相同。

2.結尾為 4 之立方自守數利用與末位為 6 之立方自守數之對稱性求出。

3.結尾為 5 之立方自守數求法：

①先寫出末位為 5 之平方自守數。

②利用首位差 5 特性寫出旁支。

③利用對稱性將另一半全寫出。

4.結尾為 1 之立方自守數求法：

①先寫出只有型如 0…01 及 50…01 的那一半支。

②利用平方自守數中末位為 6 及末位為 5 之相減結果將之寫出。

③利用首位差 5 特性寫出旁支。

5.結尾為 9 之立方自守數求法：利用與末位為 1 之立方自守數之對稱性。

九、　參考資料及其他

（一）、http://www.khjh.kh.edu.tw/science40/高中/高中數學 2/page_1.htm（為自守數(Automorphic number)解碼，利用改變進位法來分析自守數，但對高次方的關係較無詳細的說明）。

（二）、http://maths.myrice.com/software.htm（僅提供由中國的郭先強先生研發出的平方自守數計算機，其用 VC++6.0 開發，可直接運行於所有 Windows 平臺！搜索範圍：1-1,000,000,000 digits）。

（三）、http://home.school.net.hk/~mathss/fun/f006.htm（提供一些平方自守數之性質，但對高次方之自守數皆無介紹）。

（四）、http://mathworld.wolfram.com/AutomorphicNumber.html（與（三）之內容相似）。

（五）、林義雄編著　高中數學❷--有理數系、整數系　九章出版社

（六）、孫文先編譯　神秘有趣的數學　九章出版社

（七）、華羅庚著　數論專引　凡異出版社

（八）、嚴鎮軍主編　高中數學競賽教程　九章出版社

（九）、歐陽絳著　數學的藝術　九章出版社

（十）、李虎雄、陳昭地等編　高中數學教科書第一冊　康熙圖書網路股份有限公司

（十一）、余文卿主編　數學（一）　龍騰文化事業股份有限公司

（十二）、柳賢、左太政等編著　高級中學數學第一冊　翰林出版事業股份有限公司

（十三）、黃文璋主編　高級中學數學教科書第一冊　牛頓開發教科書股份有限公司

（十四）、楊維哲、蔡聰明、吳隆盛編著　數學（一）　三民書局股份有限公司

（十五）、附錄

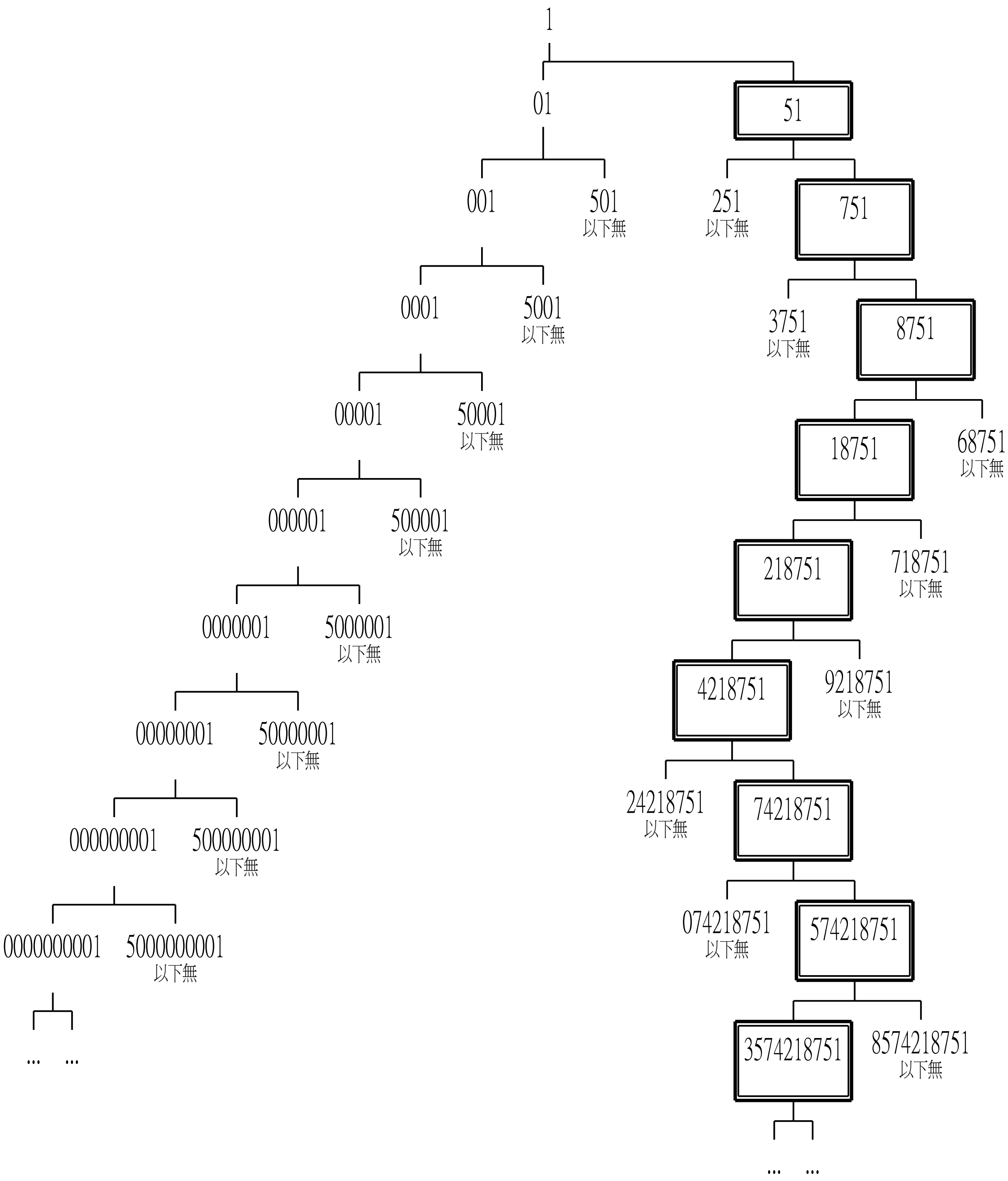
1.附錄一：（位數較小的所有平方自守數關係略圖）

位數較小的所有平方自守數關係略圖

1	5	6
以下無		
	25	76
	625	376
	0625	9376
	90625	09376
	890625	109376
	2890625	7109376
	12890625	87109376
	212890625	787109376
	8212890625	1787109376
	…	…

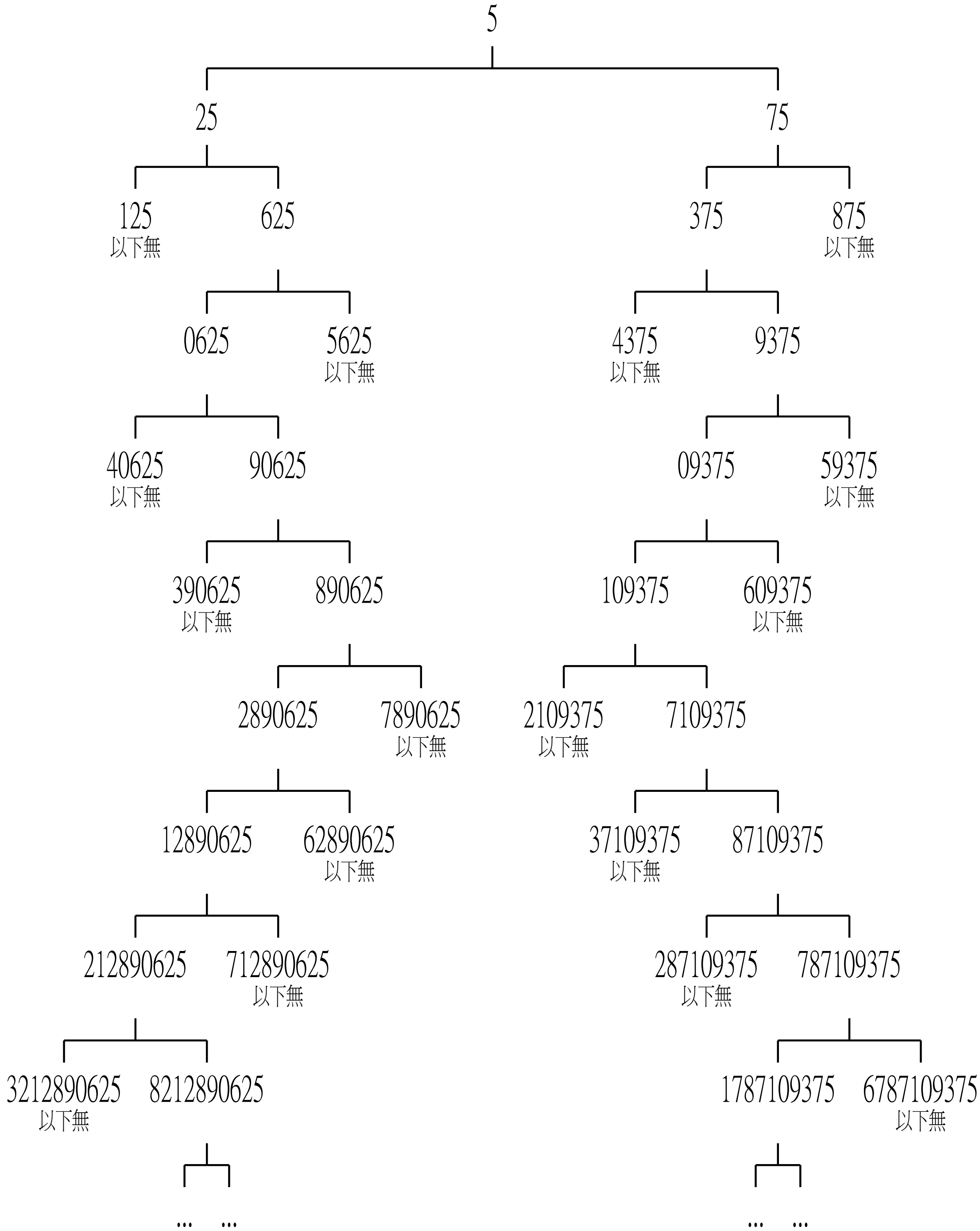
2..附錄二：（結尾爲 1 之位數較小的所有立方自守數關係略圖）

結尾為1之位數較小的所有立方自守數關係略圖



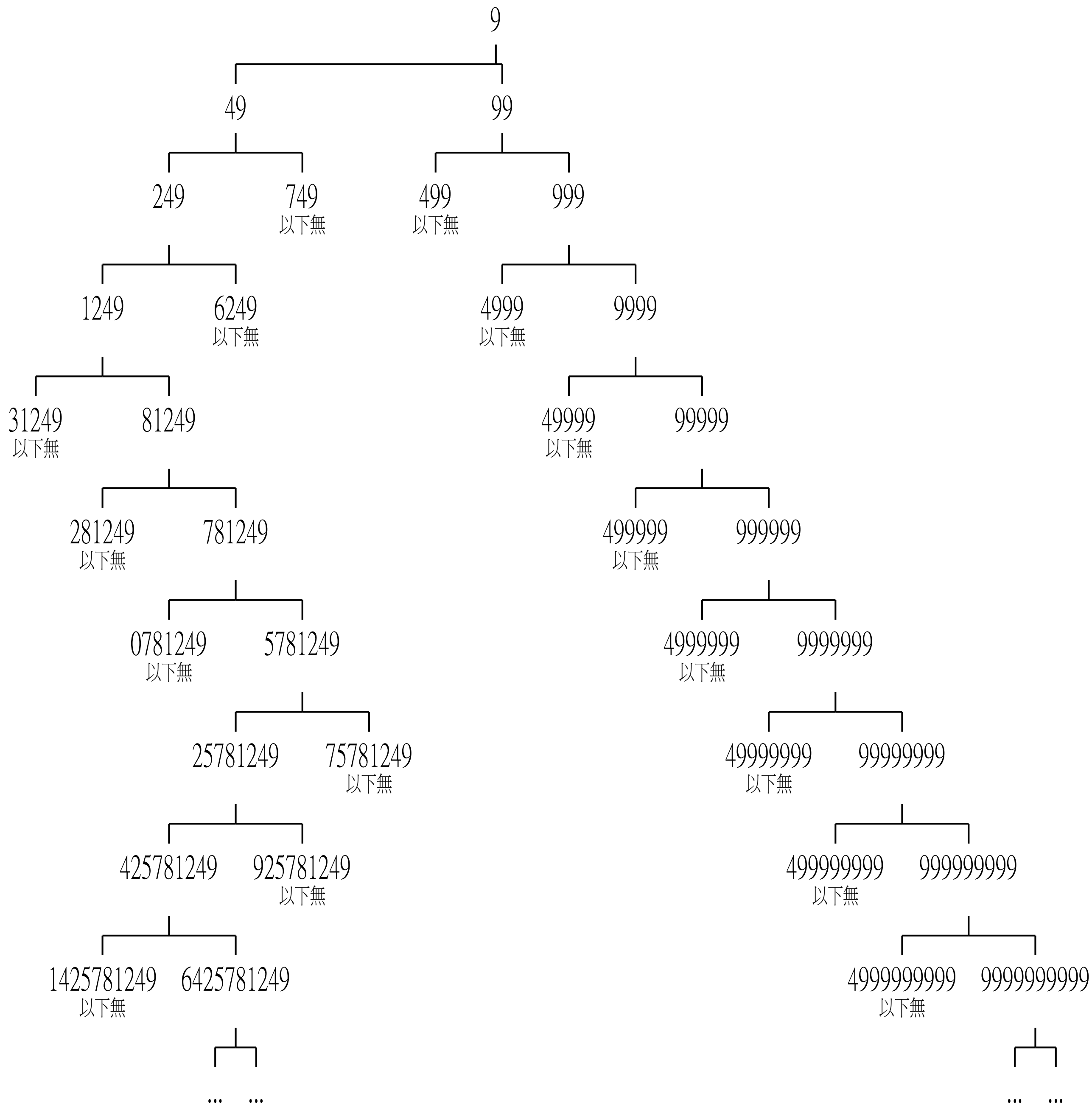
3.附錄三：（結尾爲 5 之位數較小的所有立方自守數關係略圖）

結尾為5之位數較小的所有立方自守數關係略圖



4.附錄四：（結尾爲 9 之位數較小的所有立方自守數關係略圖）

結尾為9之位數較小的所有立方自守數關係略圖



5.附錄五：（結尾為 4 和 6 之位數較小的所有立方自守數關係略圖）

結尾為4和6之位數較小的所有立方自守數關係略圖

4	6
24	76
624	376
0624	9376
90624	09376
890624	109376
2890624	7109376
12890624	87109376
212890624	787109376
8212890624	1787109376
…	…

6.附錄六：（將研究動機中所提及之題目以研究結論快速解之）

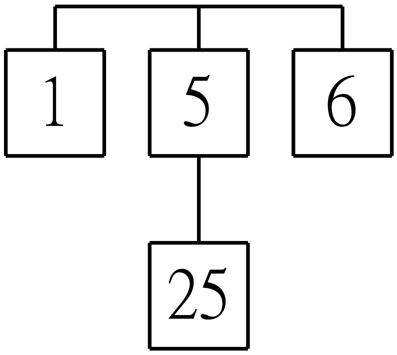
已知：平方自守數結尾（1 除外）必爲 5 或 6。$a_1=5$，$a_2=2$。

立方自守數結尾必爲 1、4、5、6 或 9。

所以第一小題可如下面步驟解之：

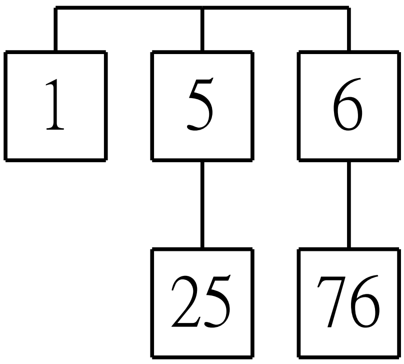
（1.）首先，將已知條件的 1、5、6 以及 25 填入下表。

兩位以內之平方自守數



（2.）由對稱性質（即 $a_n+b_n=9$，（$n\geqq 2$））可得 76 填入表中如下。

兩位以內之平方自守數

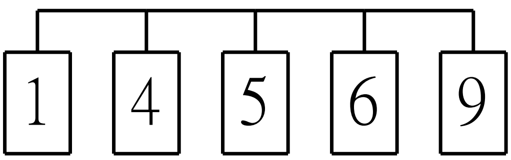


（3.）所以根據上表可知所求爲 25 以及 76。

第二小題可如下面步驟解之：

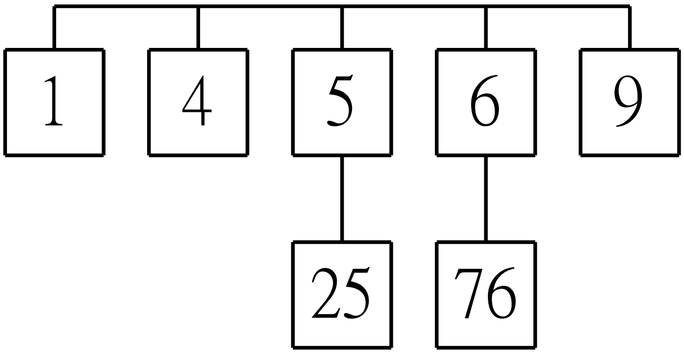
（1.）首先，將已知條件的 1、4、5、6 以及 9 填入下表。

兩位以內之立方自守數



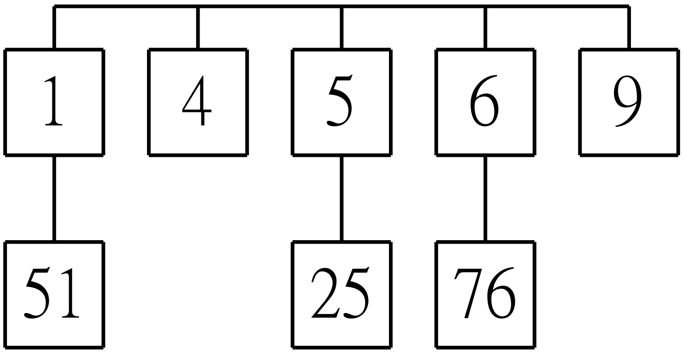
（2.）由平方自守數性質③可將 25、76 填入下表。

兩位以內之立方自守數



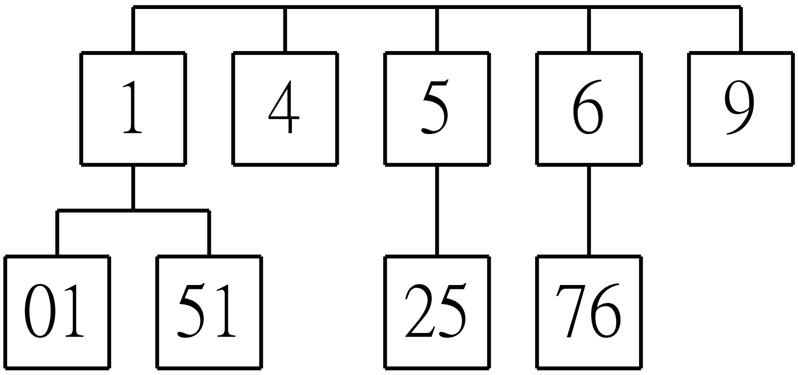
（3.）由立方自守數性質 8.（∵76＞25，∴76－25＝51。）可得 51 並將其填入。

兩位以內之立方自守數



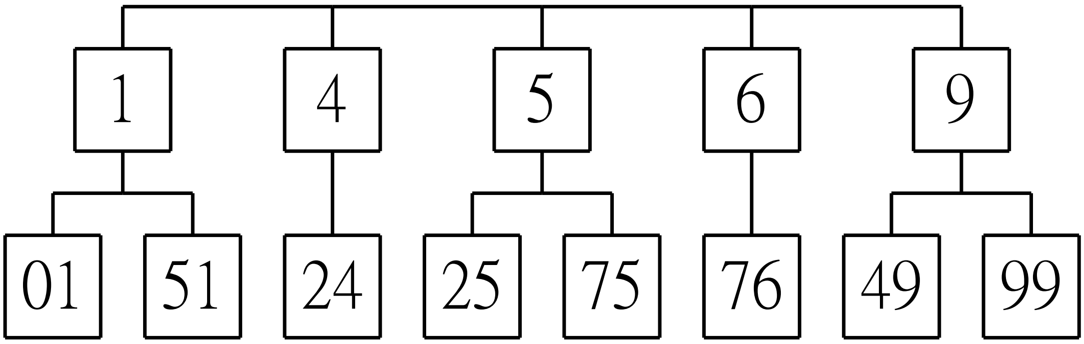
（4.）由立方自守數性質 5.可將 01 填入。

兩位以內之立方自守數



（5.）再由對稱性（立方自守數性質 2.）可完成如下表。

兩位以內之立方自守數



（6.）所以根據上表可知所求爲 24、25、49、51、75、76 以及 99。

7.附錄七：（平方自守數中的 a_n 數列前 200 項，由 a_{200} 排到 a_1，即 $a_{200}=0$，$a_1=5$）
0324 8173 4288 8657 2737 6631 4651 9104 9880 2944 7960 8146 7376 0503 9571 9689 3714 6718 0137 5619 0554 6299 6814 7642 6390 3953 0073 1910 8169 8029 3850 9890 0621 6650 9580 8638 1100 0557 4234 2323 0896 1090 0410 6619 9773 9225 6259 9182 1289 0625

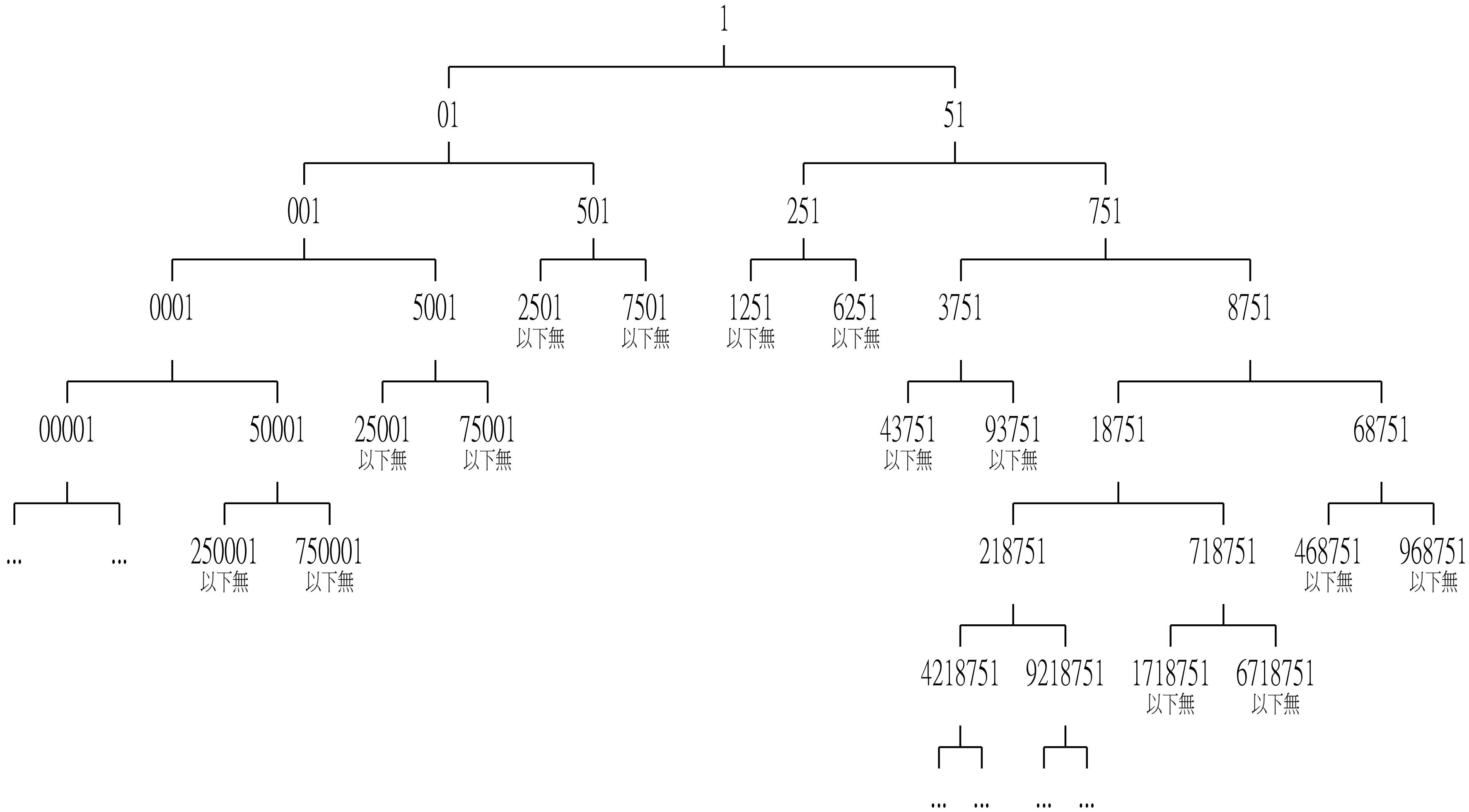
8.附錄八：（結尾爲偶數之位數較小的所有立方自守數關係略圖）

結尾為偶數之位數較小的所有五方自守數關係略圖

2	4	6	8
32	24	76	68
432	624	376	568
6432	0624	9376	3568
86432	90624	09376	13568
186432	890624	109376	813568
9186432	2890624	7109376	0813568
79186432	12890624	87109376	20813568
…	…	…	…

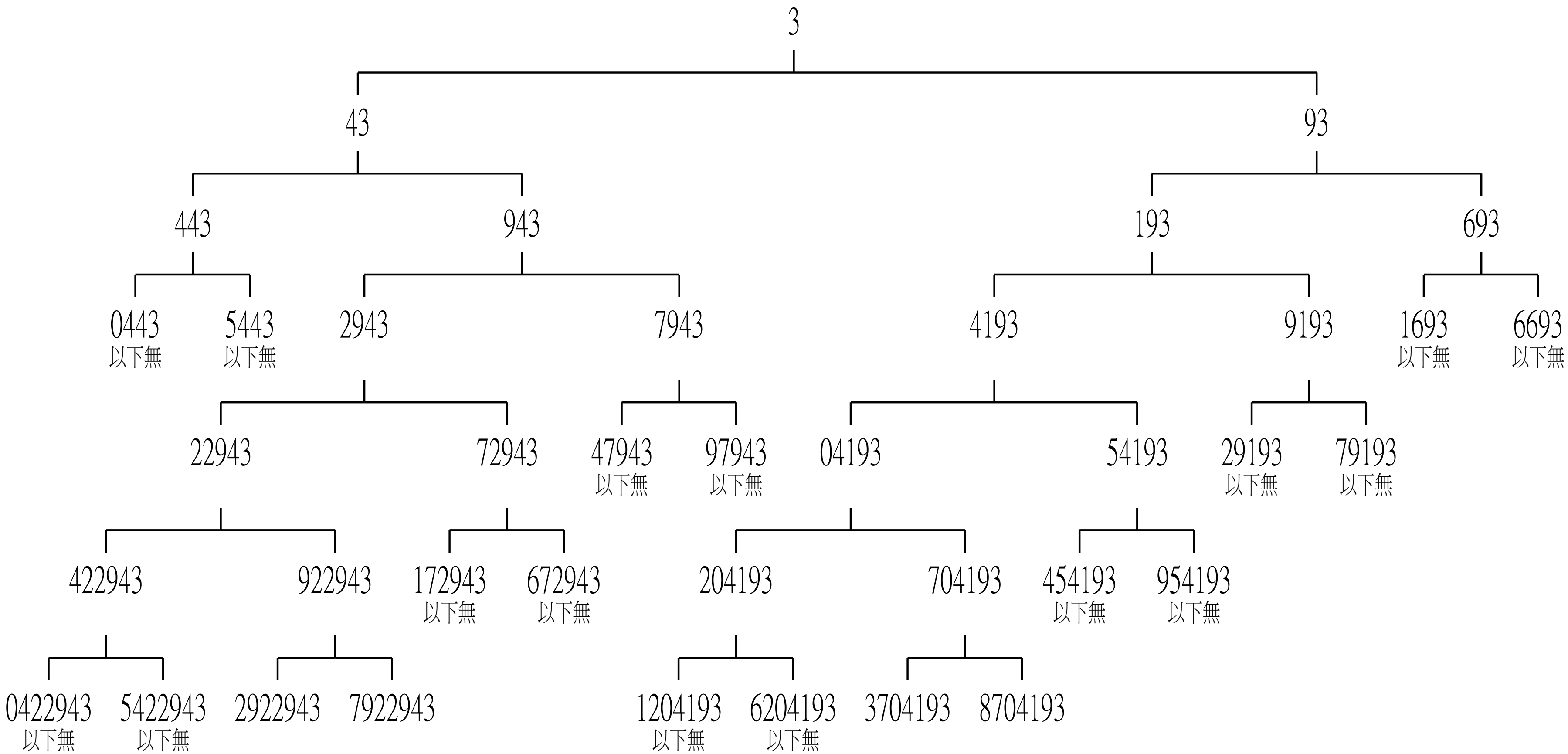
9.附錄九：（結尾爲 1 之位數較小的五方自守數關係略圖）

結尾為1之位數較小的五方自守數關係略圖



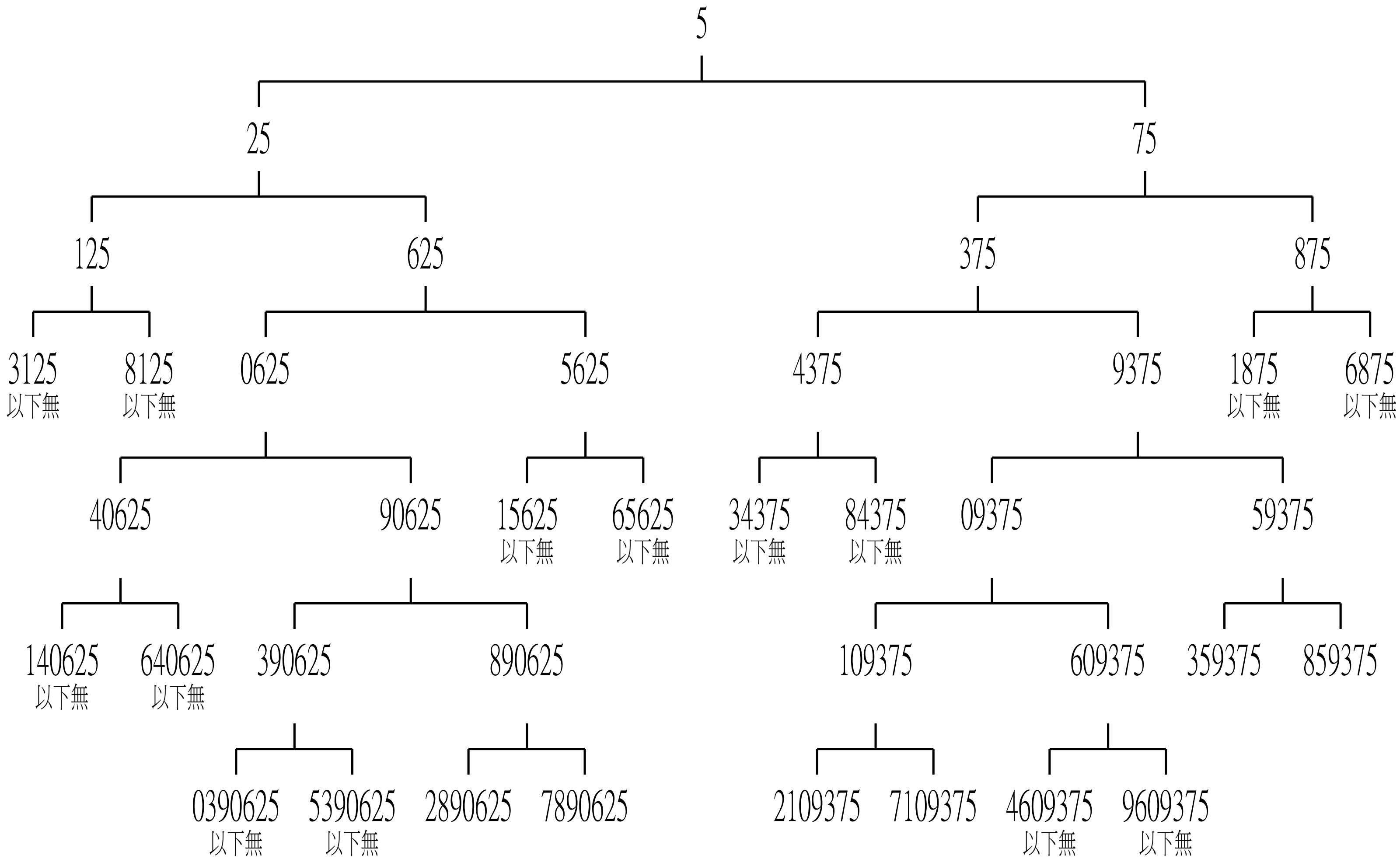
10.附錄十：（結尾爲 3 之位數較小的五方自守數關係略圖）

結尾為3之位數較小的五方自守數關係略圖



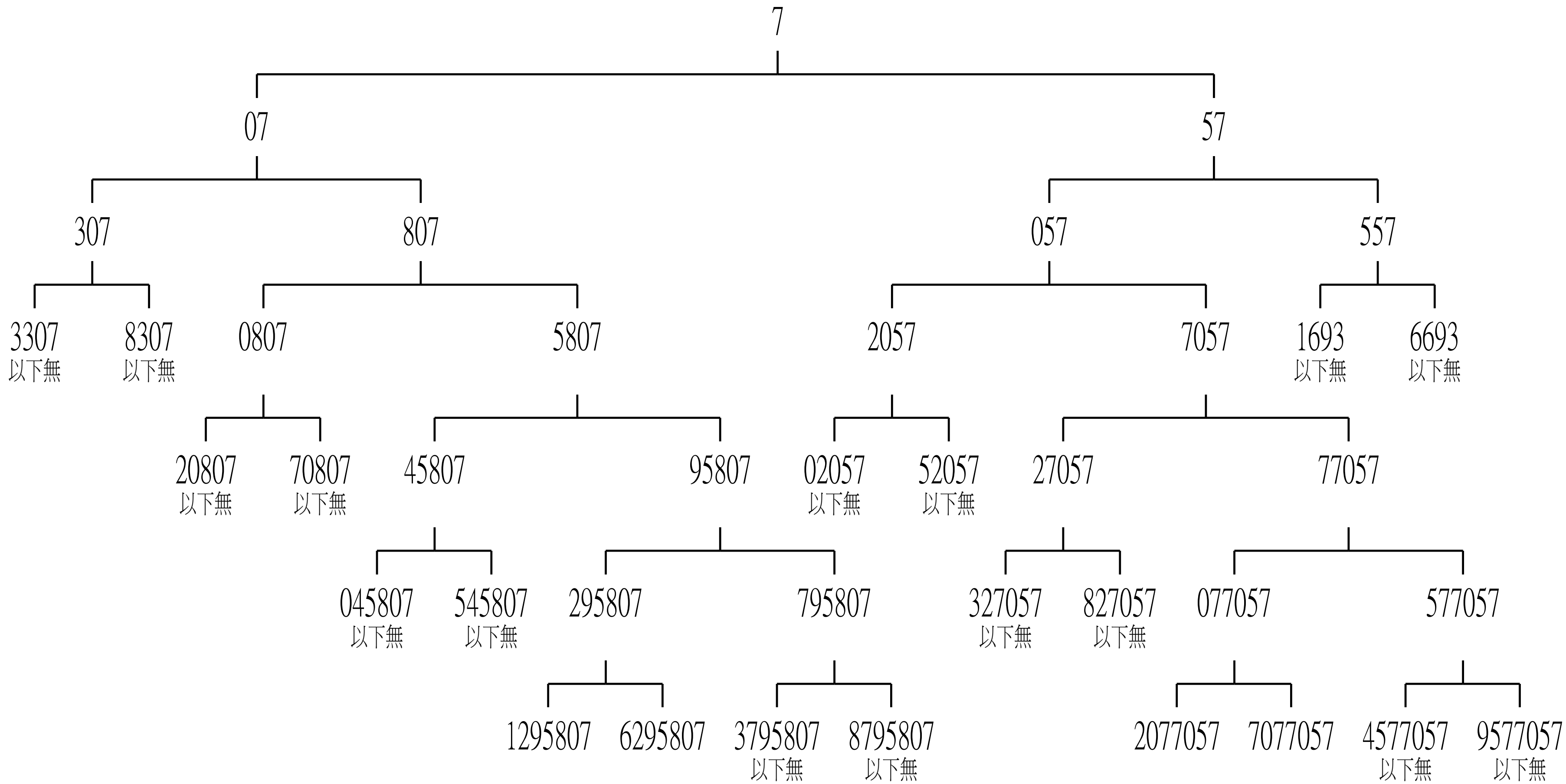
11.附錄十一：（結尾爲 5 之位數較小的五方自守數關係略圖）

結尾為5之位數較小的五方自守數關係略圖



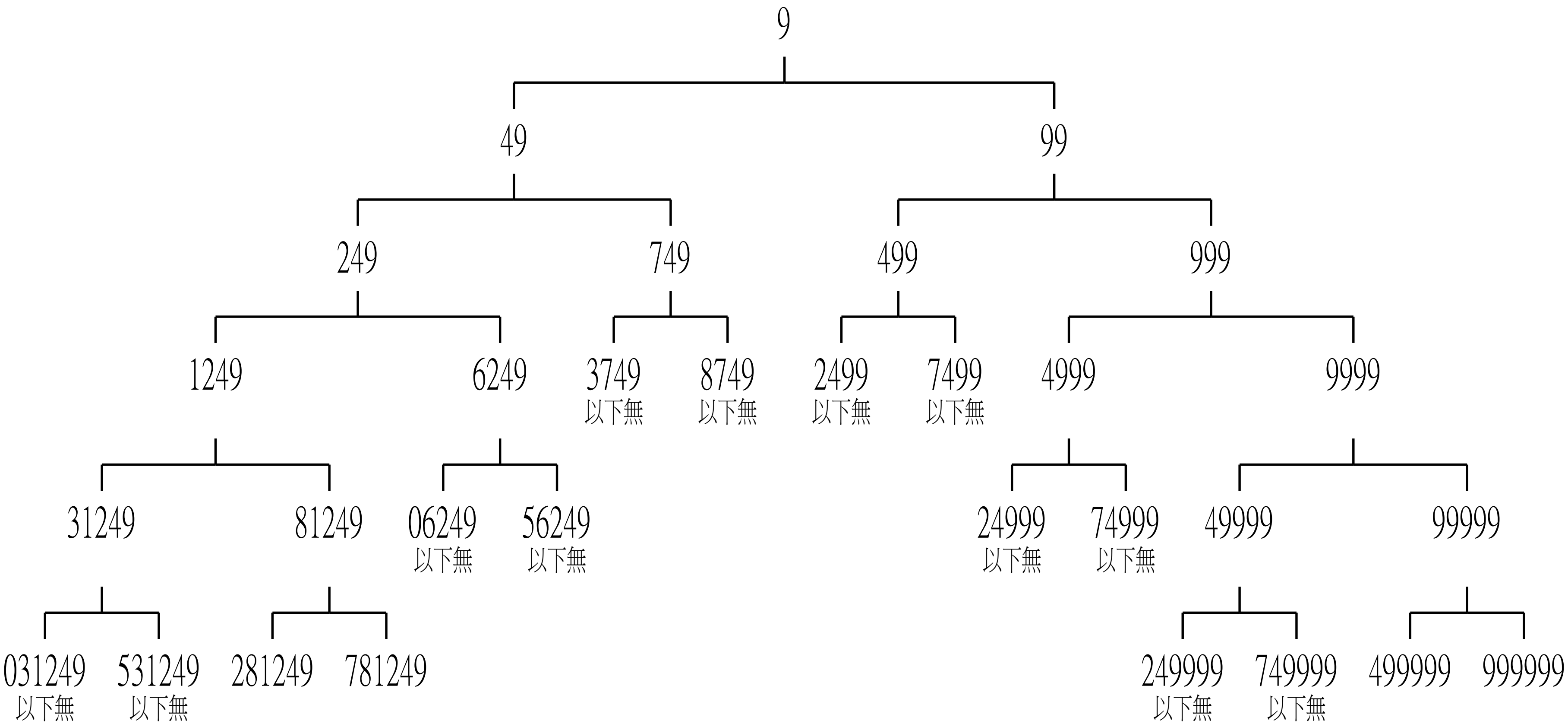
12.附錄十二：（結尾爲 7 之位數較小的五方自守數關係略圖）

結尾為7之位數較小的五方自守數關係略圖



13.附錄十三：（結尾爲 9 之位數較小的五方自守數關係略圖）

結尾為9之位數較小的五方自守數關係略圖



評　語

040404 高中組數學科 第三名

透視自守數

1. 十分遺憾，第一天解說作品時沒有採用電腦來輔助說明。
2. 參考資料頗為豐富。