中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040402

國立台東女子高級中學

指導老師姓名

莊銘峯

作者姓名

林千雅

陳珉儒

邱晨熙

梁育蓁

# ＊公主的抉擇－數的規律＊

## 壹、摘要：

一、在高一數學第一冊中，第三章的內容是等差與等比數列，由此我們可了解有許多數列都具有其一定規律，可用遞迴關係式來表示，甚至可進一步求出其一般式。我們經由簡單的小遊戲而產生的數據來討論，看其是否有特定的規律，並藉此規律去尋找出特定的公式，或者是根本沒有規律可循。

二、我們經由簡單的例子出發去尋找規則，再作一連串的試驗、思考、推論，求出其遞迴關係式，並以各種方法嘗試找出一般式，使我們可更簡單容易地求出我們所要的目標。

## 貳、研究動機：

一、在『啊哈－有趣的推理』這本書中，看到一個益智遊戲，內容如下：一個國王要嫁女兒，公主必須在十七歲前都得結婚。按照古老的儀式，讓十位男士站成一個圓圈，隨便任由那一位男士開始，然後依順時鐘方向數，一直數到十七，數到第十七的這位男士必須退出圓圈，然後依此規則重數，但這次是從退出圓圈的那位男士的下一位開始數起，等你數到十七，和先前一樣，被數到的的那位男士就要退出圈圈。一直重覆同樣的步驟數下去，直到最後只剩下一位男士，他就是公主要嫁的人。

二、利用遊戲規則，我們找出由數到 2、3、4、5……、17 等規則，求出最後剩餘的是哪個數(如下列表格結果)。**我們在此定義**：在 1、2、3、……n－1、n 中共有 n 個數，以 u 來刪⇒從 1 數到 u 時，便將為 u 的那一個數字刪除，而後面的數字再由 1 開始數起，數到 u 時便再刪去那個數，然後又從 1 開始數起，舉例如下：設 u=2、n=3 時，即 1~3 三個數，用 2 去刪，1、$\boxed{2}$、3，此時 2 被刪除，由 2 的下一個數開始重新數，於是 1 被刪掉，而剩下 3，……依此規則重覆下去直到刪到只剩一個數 $a_n$ 。

(注)：$\boxed{c}$代表從 1 數至 u 時，被刪除的數字　　　$[n]$：高斯函數

| u | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{10}$ | 5 | 4 | 5 | 3 | 3 | 9 | 1 | 7 |

| u | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{10}$ | 8 | 7 | 10 | 5 | 7 | 6 | 7 | 3 |

三、若 n 的數字較小，按照規律去刪，便可求出 $a_n$ ，但我們思考一個問題，若 n 的數目很大時，是不是有更好的方法，能更快的求出 $a_n$ 。

# 參、研究目的：

一、觀察我們所列出的數據，找出前項與後項間的關聯，既而推出遞迴關係式。

二、利用遞迴關係式，希望以我們現有能力，求出一般式，快速求出最後的剩餘數 $a_n$ 。

# 肆、研究設備及器材：電腦、印表機、紙、筆

# 伍、研究過程及方法：

一、列出前幾項，試著找到其前後項的關係，先由較小的數來推出基本規律：

(一)由 u=2 的規則開始刪：

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| n=1 | | | | 可得 $a_1=1$ |
| n=2 | $1\ \boxed{2}$ | | | 可得 $a_2=1$ |
| n=3 | $1\ \boxed{2}\ 3$ | $\boxed{1}\ 3$ | | 可得 $a_3=3$ |
| n=4 | $1\ \boxed{2}\ 3\ \boxed{4}$ | $1\ \boxed{3}$ | | 可得 $a_4=1$ |
| n=5 | $1\ \boxed{2}\ 3\ \boxed{4}\ 5$ | $\boxed{1}\ 3\ \boxed{5}$ | | 可得 $a_5=3$ |
| n=6 | $1\ \boxed{2}\ 3\ \boxed{4}\ 5\ \boxed{6}$ | $1\ \boxed{3}\ 5$ | $\boxed{1}\ 5$ | 可得 $a_6=5$ |
| n=7 | $1\ \boxed{2}\ 3\ \boxed{4}\ 5\ \boxed{6}\ 7$ | $\boxed{1}\ 3\ \boxed{5}\ 7$ | $\boxed{3}\ 7$ | 可得 $a_7=7$ |
| n=8 | $1\ \boxed{2}\ 3\ \boxed{4}\ 5\ \boxed{6}\ 7\ \boxed{8}$ | $1\ \boxed{3}\ 5\ \boxed{7}$ | $1\ \boxed{5}$ | 可得 $a_8=1$ |
| n=9 | $1\ \boxed{2}\ 3\ \boxed{4}\ 5\ \boxed{6}\ 7\ \boxed{8}\ 9$ | $\boxed{1}\ 3\ \boxed{5}\ 7\ \boxed{9}$ | $3\ \boxed{7}$ | 可得 $a_9=3$ |
| n=10 | $1\ \boxed{2}\ 3\ \boxed{4}\ 5\ \boxed{6}\ 7\ \boxed{8}\ 9\ \boxed{10}$ | $1\ \boxed{3}\ 5\ \boxed{7}\ 9$ | $\boxed{1}\ 5\ \boxed{9}$ | 可得 $a_{10}=5$ |

我們可發現

1.偶數項即在第一次被刪掉→所剩的數皆爲奇數：1、3、5、7…

2. $a_n$ 的值和 $a_{n-\left[\frac{n}{2}\right]}$ 的值有關聯性，如 $a_8$ 在第一輪刪除後剩 4 個數，可推出 $a_8$ 應和 $a_4$ 所處的相關位置一樣。

二、是否可求出遞迴關係式？

(一)當 n 爲偶數時：第一輪刪掉皆爲偶數，各數列的起始值皆爲 1

因爲偶數皆被刪除，所以剩下的數列 1、3、5....成等差數列。

如： n=10 時　1 $\boxed{2}$ 3 $\boxed{4}$ 5 $\boxed{6}$ 7 $\boxed{8}$ 9 $\boxed{10}$

剩下 1　3　5　7　9

可知 $a_{10}$ 的值應與 $a_5$ 有關聯，(∵第二輪剩下 5 個數)

又 $a_5 = 3$，所以可推出 $a_{10}$ 的值爲數列中的第三個數，即爲 5，

利用等差數列的公式，

可得 $a_{10} = 1 + 2 \times (a_5 - 1) = 1 + 2 \times (3 - 1) = 5$

所以推出遞迴關係式：當 n 爲偶數時，$a_n = 1 + 2 \times (a_{\frac{n}{2}} - 1)$

證明：利用數學歸納法，已知 $a_1 = 1$

1.觀察得 $a_2 = 1$　　代遞迴式得 $a_2 = 1 + 2 \times (a_1 - 1) = 1$

2.設 n=2k 時，遞迴式成立，得 $a_{2k} = 1 + 2 \times (a_k - 1)$

則 n=2k+2 時，∵ $a_{2k+2} = a_{2k} + 4$　($a_{2k+2}$ 和 $a_{2k}$ 差四個相關位置)

$= 1 + 2 \times (a_k - 1) + 4$

$= 1 + 2 \times (a_k - 1 + 2)$ ($a_{k+1}$ 和 $a_k$ 差兩個相關位置)

$= 1 + 2 \times (a_{k+1} - 1)$

∴對所有的正偶數 n，遞迴式成立

(二)當 n 爲奇數時：

例：n=11 時　1 $\boxed{2}$ 3 $\boxed{4}$ 5 $\boxed{6}$ 7 $\boxed{8}$ 9 $\boxed{10}$ 11

剩下 11　1　3　5　7　9

，起始值爲 11，可知 $a_{11}$ 應該與 $a_6$ 有關聯 $\Rightarrow a_6 = 5$　$\therefore a_{11} = 7$

配合等差公式，首項爲 1，得 $a_{11} = 1 + 2 \times a_{\frac{11-1}{2}} = 1 + 2 \times 3 = 7$

例：n=21 時　1 $\boxed{2}$ 3 $\boxed{4}$ 5 $\boxed{6}$ 7 $\boxed{8}$ 9 $\boxed{10}$ 11 $\boxed{12}$ 13 $\boxed{14}$ 15 $\boxed{16}$ 17 $\boxed{18}$ 19 $\boxed{20}$ 21

21　1　3　5　7　9　11　13　15　17　19

可知$a_{21}$和$a_{11}$有關聯，可得$a_{21}=11$

配合等差公式，推出$a_{21}=11=1+a_{\frac{21-1}{2}}\times 2=1+5\times 2=11$

所以推出其遞迴關係式：當 n 爲奇數時：$a_n=1+a_{\frac{n-1}{2}}\times 2$

證明：利用數學歸納法，已知$a_1=1$

1.觀察得$a_3=3$　　　代遞迴式得$a_3=1+2\times a_1=3$

2.設 n=2k+1 時，遞迴式成立，得$a_{2k+1}=1+2\times a_k$

則 n=2k+3 時，$\because a_{2k+3}=a_{2k+1}+4$　($a_{2k+3}$和$a_{2k+1}$差四個相關位置)

$=1+2\times a_k+4$

$=1+2\times(a_k+2)$

$=1+2\times a_{k+1}$

$\therefore$對所有的正奇數 n，遞迴式成立

□(三)遞迴關係式建立後，只要有前項的資料，就可推出後項的值，但是若 n 是個很大的數時，剩餘數$a_n$便無法很快求出，所以我們嘗試著想找出一般項公式。

□(四)我們將剩餘數$a_n$，整理成下表：

| $a_n$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | 1 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 2 | 3 | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 4 | 5 | 6 | 7 | | | | | | | | | | | | | |
| | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | | | | | | | | | |
| | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | |
| | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |

發現此表所列的規則滿足我們找出的各項剩餘數，另外由上述表格可知：

1.當 n 爲$2^b$次方時，$a_n$皆爲 1，因此剩餘數便又從『1』開始排列。

(證明)：(1)$a_2=1$，$a_4=1$　(2)設 n=$2^k$時，$a_n=a_{2^k}=1$

則當 n=$2^{k+1}$時，可知$n=2\times 2^k$，代偶數的遞迴式

得$a_n=1+2\times(a_{2^k}-1)=1+2\times(1-1)=1$

$\therefore$對所有的 n 爲 $2^b$ 次方時，$a_n$ 皆爲 1

2.我們只需計算 n 是落再哪一組，再利用等差公式推出 $a_n$，即可推出

一般項公式：$a_n = 1 + (n - 2^b) \times 2$，$2^b \le n < 2^{b+1}$

(注)由於公式中需要用到 2 的冪次方的值，表列如下

| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^b$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 |
| b | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| $2^b$ | 2048 | 4096 | 8192 | 16384 | 32768 | 65536 | 131072 | 262144 | 524288 | 1048576 |

現在我們舉二個例子來檢驗一般式和遞迴式所得的結果一致：

例如：(a)由遞迴式得 $a_{48} = 1 + 2 \times (a_{24} - 1) = 33$　　由公式可得 $a_{48}$=1+(48-$2^5$)×2=33

(b)由遞迴式得

$$\begin{aligned} a_{500} &= 1 + 2 \times (a_{250} - 1) \\ a_{250} &= 1 + 2 \times (a_{125} - 1) \\ a_{125} &= 1 + 2 \times a_{62} \\ a_{62} &= 1 + 2 \times (a_{31} - 1) \\ a_{31} &= 31 \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} a_{31} &= 31 \\ a_{62} &= 1 + 2 \times (31 - 1) = 61 \\ a_{125} &= 1 + 2 \times 61 = 123 \\ a_{250} &= 1 + 2 \times (123 - 1) = 245 \\ a_{500} &= 1 + 2 \times (245 - 1) = 489 \end{aligned}$$

由一般式得 $a_{500} = 1 + (500 - 2^8) \times 2$=489　　即可得證

三、接著討論 u=3 的規則

(一)由 u=3 的規則開始刪除，規律如下：

n=1　　可得 $a_1 = 1$

n=2　　$\boxed{1}$ 2　　可得 $a_2 = 2$

n=3　　1 2 $\boxed{3}$　　$\boxed{1}$ 2　　可得 $a_3 = 2$

n=4　　1 2 $\boxed{3}$ 4　　此時剩 3 個數，由 $a_3 = 2$　　可得 $a_4 = 1$

n=5　　1 2 $\boxed{3}$ 4 5　　此時剩 4 個數，由 $a_4 = 1$　　可得 $a_5 = 4$

n=6　　1 2 $\boxed{3}$ 4 5 $\boxed{6}$　　此時剩 4 個數，由 $a_4 = 1$　　可得 $a_6 = 1$

n=7　　1 2 $\boxed{3}$ 4 5 $\boxed{6}$ 7　　此時剩 5 個數，由 $a_5 = 4$　　可得 $a_7 = 4$

n=8　　1 2 $\boxed{3}$ 4 5 $\boxed{6}$ 7 8　　此時剩 6 個數，由 $a_6=1$　　可得 $a_8=7$

(二)我們可發現

1.3 的倍數在第一次皆被刪掉。

2. $a_n$ 的值和 $a_{n-\left[\frac{n}{3}\right]}$ 的值有關聯性，如 $a_8$ 在第一輪刪除後剩 6 個數，可推出 $a_8$ 應和 $a_6$ 所處的相關位置一樣。

3. $a_n$ 必爲 1,4,7...或 2,5,8...數列的其中一項。

4. $a_n$ 和 $a_{n+1}$ 的相關位置差 3

5.若 n 爲 3 的倍數時，$a_n$ 的值和 $a_{n-\left[\frac{n}{3}\right]}$ 的值有關聯，且起始值爲 1，此時，我們重新定訂一個數列：

| $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ | $b_7$ | $b_8$ | $b_9$ | $b_{10}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | ... |
| 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | ... |

經歸納得出 $a_n$ 的遞迴式如下：

(1) 若 $a_{n-\left[\frac{n}{3}\right]}$ 被 2 整除，則 $a_n$ 落於數列 2,5,8...中的其中一項$\Rightarrow$ $a_n=2+3\times\left(\dfrac{a_{n-\left[\frac{n}{3}\right]}}{2}-1\right)$

例如：$a_{30}$ 和 $a_{20}$ 有關聯，又 $a_{20}=20$，表示 $a_{30}$ 必落於數列 2、5、8……中

$\because \dfrac{20}{2}=10$，表示位於數列 $\langle b_n\rangle$ 中的第十項，首項爲 2，

則 $a_{30}=2+3\times(\dfrac{20}{2}-1)=29$

(2) 若 $a_{n-\left[\frac{n}{3}\right]}$ 被 2 除餘 1，則 $a_n$ 落於數列 1,4,7...中的其中一項$\Rightarrow$ $a_n=1+3\times\left(\dfrac{a_{n-\left[\frac{n}{3}\right]}-1}{2}\right)$

例如：$a_{36}$ 和 $a_{24}$ 有關聯，又 $a_{24}=11$，表示 $a_{36}$ 必落於數列 1、4、7……中

$\because \dfrac{11}{2}=5.....$餘1，表示位於數列 $\langle b_n\rangle$ 中的第 6 項，首項爲 1，

則 $a_{36}=1+3\times(\frac{11-1}{2})=16$

6.有了遞迴關係式後，例如要找 $a_{100}$ =？

我們的策略如下，先求出 $a_{99}$ ，再利用 $a_{100}$ 和 $a_{99}$ 差 3 個數，即可求出 $a_{100}$ 。

$\because a_{66}=59 \therefore a_{99}=1+3\times(\frac{59-1}{2})=1+87=88 \Rightarrow$ 再往後推 3 個數，可得 $a_{100}$ =91

另外，我們經過討論後，覺得遞迴關係式的有效應用，必須在前項數據的建立。

但我們仍想找出在規則 u=2 的規則下，所求出的一般式，才能有效的處理問題。

7.這時我們試著找出 u=3 的一般式，將前幾項的情形整理成下表

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 2 | 2 | 1 | 4 | 1 | 4 | 7 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 2 | 5 |

| n | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 |

| n | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 40 | 43 |

| n | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 46 | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 | 35 | 38 | 41 |

由上表的記號，我們發現以下關係：

(1)若 n 和 $a_n$ 的數差 1 的話，可推出 $a_{n+1}$ 的值會從 1 開始

(2)若 n 和 $a_n$ 的數相等的話，可推出 $a_{n+1}$ 的值會從 2 開始

(3)我們經過討論後，先列出所有轉折的 $a_n$ ，觀察其變化的規律：

$a_1=1$、$a_2=2$、$a_3=2$、$a_4=1$、$a_6=1$、$a_9=1$、$a_{14}=2$、$a_{21}=2$、$a_{31}=1$、

$a_{47}=2$、$a_{70}=1$、$a_{105}=1$、$a_{158}=2$、$a_{237}=2$、$a_{355}=1$、$a_{533}=2$、$a_{799}=1$……

上述的數列無法找出其變化的規律，但我們利用等差的概念及配合上列關係

(1)(2)兩小點，可求出轉折點的公式。

8.轉折點的求法：轉折點一定出現在$a_n$和 n 相等或差 1 的情形

(1)若$a_n=1$，則利用等差公式，得 n+k=1+3k　2k=n-1⇒k=$\frac{n-1}{2}$

推出下一轉折點爲第 n+$[k]$+1 項，且得到

若$\frac{n-1}{2}$整除，代表$a_{n+[k]}=n+[k]$，得$a_{n+[k]+1}$=2

若$\frac{n-1}{2}$不能整除，代表$a_{n+[k]}=n+[k]-1$，得$a_{n+[k]+1}$=1

如：$a_{31}$=1，則 k=$\frac{31-1}{2}$=15　　可得$a_{46}=46$　　∴下一轉折點爲$a_{47}$

利用前、後項間相關位置差 3 的規則⇒47　1　2　⇒ $a_{47}$=2

(2)若$a_n$=2，則利用等差公式，得 n+k=2+3k　2k=n-2⇒k=$\frac{n-2}{2}$

推出下一轉折點爲第 n+$[k]$+1 項，且得到

若$\frac{n-2}{2}$整除，代表$a_{n+[k]}=n+[k]$，得$a_{n+[k]+1}$=2

若$\frac{n-2}{2}$不能整除，代表$a_{n+[k]}=n+[k]-1$，得$a_{n+[k]+1}$=1

如：$a_{47}=2$，則$k=\frac{47-2}{2}=\frac{45}{2}=22....1$

推出$a_{69}=68$，再利用前後項相關位置差 3，可得$a_{70}=1$

9.這時我們解題的策略如下：

(1)先求出 n 落於那一轉折點之間

(2)再代等差數列的公式，求出$a_n$

例如：求$a_{700}$的值爲何？

先求出 700 落於那一組中，因爲 533<700<799，而$a_{533}=2$，

∴ $a_{700}$=2+3(700-533)=503

四、接著討論 u=4 的規則

(一)由 u=4 的規則開始刪除，規律如下：

| | | |
|---|---|---|
| n=1 | 1 | 可得$a_1$=1 |
| n=2 | 1 $\boxed{2}$ | 可得$a_2=1$ |

n=3　$\boxed{1}$ 2 3　2 $\boxed{3}$　可得 $a_3=2$

n=4　1 2 3 $\boxed{4}$　$\boxed{1}$ 2 3　2 $\boxed{3}$　可得 $a_4=2$

n=5　1 2 3 $\boxed{4}$ 5　此時剩 4 個數，由 $a_4=2$　可得 $a_5=1$

n=6　1 2 3 $\boxed{4}$ 5 6　此時剩 5 個數，由 $a_5=1$　可得 $a_6$=5

n=7　1 2 3 $\boxed{4}$ 5 6 7　此時剩 6 個數，由 $a_6$=5　可得 $a_7$=2

n=8　1 2 3 $\boxed{4}$ 5 6 7 $\boxed{8}$　此時剩 6 個數，由 $a_6$=5　可得 $a_8$=6

n=9　1 2 3 $\boxed{4}$ 5 6 7 $\boxed{8}$ 9　此時剩 7 個數，由 $a_7$=2　可得 $a_9$=1

n=10　1 2 3 $\boxed{4}$ 5 6 7 $\boxed{8}$ 9 10　此時剩 8 個數，由 $a_8$=6　可得 $a_{10}$=5

(二)我們可以發現：

1.4 的倍數皆被刪除，所以剩下的數列共有 $n-\left[\frac{n}{4}\right]$ 項，其中 $\left[\frac{n}{4}\right]$ 代表高斯函數，因此得知 $a_n$ 和 $a_{n-\left[\frac{n}{4}\right]}$ 的相關位置相關，例如：求 $a_{10}$ 的值，即可由 $a_8$ 所剩的數推出。

2. $a_n$和$a_{n+1}$的相關位置差 4

3. $a_n$ 必爲 1,5,9...或 2,6,10...或 3,7,11...三數列中的其中一項

4.若 n 爲 4 的倍數時，第二輪數列的首項爲 1 或 2 或 3

此時，我們重新定訂一個數列 $\langle b_n\rangle$：

| $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ | $b_7$ | $b_8$ | $b_9$ | $b_{10}$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 | ... |
| 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | ... |
| 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | ... |

推論得出 $a_n$ 的遞迴式如下：

(1)若 $a_{n-\left[\frac{n}{4}\right]}$ 被 3 除餘 1，則 $a_n$ 落於 1,5,9...其中一項，得 $a_n=1+4\times(\frac{a_{n-\left[\frac{n}{4}\right]}-1}{3})$

如：$a_{20}和a_{15}$ 有關聯，且 $a_{15}=13$，$\because \frac{13}{3}=4.....餘1$，表示 $a_{20}$ 位於數列 $\langle b_n\rangle$ 中的 $b_5$ 那一行，首項爲 1，則 $a_{20}=1+4\times(\frac{13-1}{3})=17$

(2)若 $a_{n-\left[\frac{n}{4}\right]}$ 被 3 除餘 2，則 $a_n$ 落於 2,6,10...其中一項，得 $a_n=2+4\times(\frac{a_{n-\left[\frac{n}{4}\right]}-2}{3})$

如：$a_{32}$和$a_{24}$有關聯，且 $a_{24}=11$，$\because \frac{11}{3}=3.....$餘2，表示 $a_{32}$ 位於數列 $\langle b_n\rangle$ 中的

$b_4$ 那一行，首項爲 2，則 $a_{32}=2+4\times(\frac{11-2}{3})=14$

(3)若 $a_{n-\left[\frac{n}{4}\right]}$ 被 3 整除時，則 $a_n$ 落於 3,7,11...其中一項，得 $a_n=3+4\times(\frac{a_{n-\left[\frac{n}{4}\right]}}{3}-1)$

如：$a_{24}$和$a_{18}$有關聯，且 $a_{18}=9$，$\because \frac{9}{3}=3$整除，表示 $a_{24}$ 必位於數列 $\langle b_n\rangle$ 中的

$b_3$ 那一行，首項爲 3，則 $a_{24}=3+4\times(\frac{9}{3}-1)=11$

(4)我們利用遞迴關係式來求 $a_{100}=?$

$\because a_{100}$和$a_{75}$相關　　$\therefore$ 可代遞迴關係式

$\because a_{75}$和$a_{72}$差三項　　$\therefore$ 相關位置差12個數

$\because a_{72}$和$a_{54}$相關　　$\therefore$ 可代遞迴關係式

$\because a_{54}=11$　　$\frac{11}{3}=3...2$　　$\therefore a_{72}=2+4\times\frac{11-2}{3}=14$　　即可推出 $a_{75}=26$

$\because a_{75}=26$　　$\frac{26}{3}=8...2$　　$\therefore a_{100}=2+4\times\frac{a_{75}-2}{3}=2+4\times\frac{26-2}{3}=34$

(5)我們求出遞迴關係式，發現若是 $a_n$ 的值做的夠多的話，可以利用遞迴關係式去求各項的值，但我們仍想找出像規律 2 的一般式

5.此時我們將資料整理如下：

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 5 | 2 | 6 | 1 | 5 | 9 | 1 | 5 | 9 | 13 |

| n | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | 2 | 6 |

| n | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 |

| n | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 31 | 35 | 39 | 43 | 47 | 51 | 3 | 7 | 11 | 15 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 |

由上表中，我們發現以下關係：

(1)若 n 和$a_n$的數差 2 的話，可推出$a_{n+1}$的值會從 1 開始

(2)若 n 和$a_n$的數差 1 的話，可推出$a_{n+1}$的值會從 2 開始

(3)若 n 和$a_n$的數相等的話，可推出$a_{n+1}$的值會從 3 開始

(4)我們經過討論後，先列出所有轉折的$a_n$：

$a_5=1$、$a_7=2$、$a_9=1$、$a_{12}=1$、$a_{16}=1$、$a_{22}=3$、$a_{29}=2$、$a_{39}=3$、$a_{52}=3$、$a_{69}=2$、$a_{92}=2$、$a_{123}=3$、$a_{164}=3$、$a_{218}=1$、$a_{291}=2$……

上述的數列無法找出其變化的規律，但我們利用等差的概念及上面所列的關係(1)(2)(3)三小點，可求出下一轉折點的公式。

6.轉折點的求法：轉折點一定出現在$a_n$和 n 相等、差 1 或差 2 的情形

(1)若$a_n=1$，利用等差公式，得 n+k=1+4k　3k=n-1$\Rightarrow$k=$\frac{n-1}{3}$，下一轉折爲第 n+$[k]$+1 項，規則如下：

若$\frac{n-1}{3}$整除，代表$a_{n+[k]}=n+[k]$，得到$a_{n+[k]+1}$=3

若$\frac{n-1}{3}$餘 1，代表$a_{n+[k]}=n+[k]-1$，得到$a_{n+[k]+1}$=2

若$\frac{n-1}{3}$餘 2，代表$a_{n+[k]}=n+[k]-2$，得到$a_{n+[k]+1}$=1

(2)若$a_n=2$，利用等差公式，得 n+k=2+4k　3k=n-2$\Rightarrow$k=$\frac{n-2}{3}$,下一轉折爲第 n+$[k]$+1 項，規則如下：

若$\frac{n-2}{3}$整除，代表$a_{n+[k]}=n+[k]$，得到$a_{n+[k]+1}$=3

若$\frac{n-2}{3}$餘 1，代表$a_{n+[k]}=n+[k]-1$，得到$a_{n+[k]+1}$=2

若$\frac{n-2}{3}$餘 2，代表$a_{n+[k]}=n+[k]-2$，得到$a_{n+[k]+1}$=1

(3)若$a_n = 3$，利用等差公式，得 n+k=3+4k　3k=n-3$\Rightarrow$k=$\dfrac{n-3}{3}$,下一轉折爲第

n+$\left[k\right]$+1 項，規則如下：

若$\dfrac{n-3}{3}$整除，代表$a_{n+[k]} = n + \left[k\right]$，得到$a_{n+[k]+1}$=3

若$\dfrac{n-3}{3}$餘 1，代表$a_{n+[k]} = n + \left[k\right] - 1$，得到$a_{n+[k]+1}$=2

若$\dfrac{n-3}{3}$餘 2，代表$a_{n+[k]} = n + \left[k\right] - 2$，得到$a_{n+[k]+1}$=1

7.這時我們解決問題的策略如下：

(1)先求出 n 落於那一轉折點之間

(2)再代等差數列的公式，求出$a_n$

例如：求$a_{250}$＝？ 我們可計算出$a_{250}$落於那一組轉折點

$\because a_{218}$和$a_{291}$皆爲轉折點，又 218<250<291，而$a_{218} = 1$

$\therefore a_{250} = 1 + 4(250 - 218) = 129$

五、接著討論 u=5 的規則

(一)由 u=5 的規則開始刪除，規律如下：

| | | | |
|---|---|---|---|
| n=1 | 1 | | 可得$a_1 = 1$ |
| n=2 | $\boxed{1}$ 2 | | 可得$a_2$=2 |
| n=3 | 1 $\boxed{2}$ 3 | 此時剩下 2 個數，由$a_2$=2 | 可得$a_3$=1 |
| n=4 | $\boxed{1}$ 2 3 4 | 此時剩下 3 個數，由$a_3$=1 | 可得$a_4$=2 |
| n=5 | 1 2 3 4 $\boxed{5}$ | 此時剩下 4 個數，由$a_4$=2 | 可得$a_5$=2 |
| n=6 | 1 2 3 4 $\boxed{5}$ 6 | 此時剩下 5 個數，由$a_5$=2 | 可得$a_6 = 1$ |
| n=7 | 1 2 3 4 $\boxed{5}$ 6 7 | 此時剩下 6 個數，由$a_6 = 1$ | 可得$a_7 = 6$ |

(二)我們可以發現：

1.5 的倍數皆被刪除，剩下的數列共有$n - \left[\dfrac{n}{5}\right]$項，其中$\left[\dfrac{n}{5}\right]$代表高斯函數，得知

$a_n$和$a_{n-\left[\frac{n}{5}\right]}$的相關位置相關，例如：求$a_{10}$的值，即可由$a_8$所剩的數推出。

2. $a_n$和$a_{n+1}$的相關位置差 5

3. $a_n$必為 1,6,11...或 2,7,12...或 3,8,13..或 4,9,14...四數列中的其中一項

4.若 n 為 5 的倍數時，第二輪數列的首項為 1 或 2 或 3 或 4

此時，我們重新定訂一個數列$\langle b_n \rangle$：

| $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ | $b_7$ | $b_8$ | $b_9$ | $b_{10}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 | ... |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 | 27 | 32 | 37 | 42 | 47 | ... |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 | 33 | 38 | 43 | 48 | ... |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 | 49 | ... |

此時，歸納得出$a_n$的遞迴式如下：

(1)若$a_{n-\left[\frac{n}{5}\right]}$被 4 除餘 1，則$a_n$落於 1,6,11...其中一項，得$a_n=1+5\times(\dfrac{a_{n-\left[\frac{n}{5}\right]}-1}{4})$

如：$a_{40}$和$a_{32}$有關聯，且$a_{32}=13$，$\because \dfrac{13}{4}=3.....餘1$，表示$a_{40}$位於數列$\langle b_n \rangle$中的

$b_4$那一行，首項為 1，則$a_{40}=1+5\times(\dfrac{13-1}{4})=16$

(2)若$a_{n-\left[\frac{n}{5}\right]}$被 4 除餘 2，則$a_n$落於 2,7,12...其中一項，得$a_n=2+5\times(\dfrac{a_{n-\left[\frac{n}{5}\right]}-2}{4})$

如：$a_{20}$和$a_{16}$有關聯，且$a_{16}=6$，$\because \dfrac{6}{4}=1.....餘2$，表示$a_{20}$位於數列$\langle b_n \rangle$中的

$b_2$那一行，首項為 2，則$a_{20}=2+5\times(\dfrac{6-2}{4})=7$

(3)若$a_{n-\left[\frac{n}{5}\right]}$被 4 除餘 3 時，則$a_n$落於 3,8,13...其中一項，得$a_n=3+5\times(\dfrac{a_{n-\left[\frac{n}{5}\right]}-3}{4})$

如：$a_{25}$和$a_{20}$有關聯，且$a_{20}=7$，$\because \dfrac{7}{4}=1.....餘3$，表示$a_{25}$位於數列$\langle b_n \rangle$中的

$b_2$那一行，首項為 3，則$a_{25}=3+5\times(\dfrac{7-3}{4})=8$

(4)若$a_{n-\left[\frac{n}{5}\right]}$被 4 除整除時，則$a_n$落於 4,9,14...其中一項，得$a_n=4+5\times(\dfrac{a_{n-\left[\frac{n}{5}\right]}}{4}-1)$

如：$a_{50}$和$a_{40}$有關聯，且$a_{40}=16$，$\because \frac{16}{4}=4$整除，表示$a_{50}$位於數列$\langle b_n \rangle$中的$b_4$那一行，首項爲 4，則$a_{50}=4+5\times(\frac{16}{4}-1)=19$

(5)我們發現遞迴關係式的有效應用，必需建立在前項$a_n$的值大量建立，但我們仍想找出像規律 2 的一般式。

5.我們將$a_n$的值整理成下表：

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 6 | 3 | 8 | 3 |

| n | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 8 | 1 | 7 | 11 | 1 | 6 | 11 | 16 | 2 | 7 |

| n | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 12 | 17 | 22 | 3 | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 | 3 |

| n | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 | 33 | 1 | 6 | 11 | 16 |

| n | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 | 4 | 9 | 14 | 19 |

由上表中的記號，我們發現以下關係：

(1)若 n 和$a_n$的數差 3 的話，可推出$a_{n+1}$的值會從 1 開始

(2)若 n 和$a_n$的數差 2 的話，可推出$a_{n+1}$的值會從 2 開始

(3)若 n 和$a_n$的數差 1 的話，可推出$a_{n+1}$的值會從 3 開始

(4)若 n 和$a_n$的數相等的話，可推出$a_{n+1}$的值會從 4 開始

(5)我們先列出所有轉折的$a_n$：

$a_6=1$、$a_8=3$、$a_{10}=3$、$a_{12}=1$、$a_{15}=1$、$a_{19}=2$、$a_{24}=3$、$a_{30}=3$、$a_{37}=1$、$a_{47}=4$、$a_{58}=1$、$a_{73}=3$、$a_{91}=2$、$a_{114}=3$、$a_{142}=1$、$a_{178}=3$、$a_{222}=1$，經過討論後，無法找出轉折的規律，但利用等差公式及上列的關係(1)(2)(3)(4)四小點，可求出轉折點的公式

6.轉折點的求法：轉折點一定出現在$a_n$和 n 相等、差 1、差 2 或差 3 的情形

(1)若 $a_n=1$，利用等差公式，得 n+k=1+5k　4k=n-1 $\Rightarrow$ k= $\frac{n-1}{4}$，下一轉折為第

n+$[k]$+1 項，規則如下：

若 $\frac{n-1}{4}$ 整除，代表 $a_{n+[k]}=n+[k]$，得到 $a_{n+[k]+1}$ =4

若 $\frac{n-1}{4}$ 餘 1，代表 $a_{n+[k]}=n+[k]-1$，得到 $a_{n+[k]+1}$ =3

若 $\frac{n-1}{4}$ 餘 2，代表 $a_{n+[k]}=n+[k]-2$，得到 $a_{n+[k]+1}$ =2

若 $\frac{n-1}{4}$ 餘 3，代表 $a_{n+[k]}=n+[k]-3$，得到 $a_{n+[k]+1}$ =1

(2)若 $a_n=2$，利用等差公式，得 n+k=2+5k　4k=n-2 $\Rightarrow$ k= $\frac{n-2}{4}$,下一轉折為第

n+$[k]$+1 項，規則如下：

若 $\frac{n-2}{4}$ 整除，代表 $a_{n+[k]}=n+[k]$，得到 $a_{n+[k]+1}$ =4

若 $\frac{n-2}{4}$ 餘 1，代表 $a_{n+[k]}=n+[k]-1$，得到 $a_{n+[k]+1}$ =3

若 $\frac{n-2}{4}$ 餘 2，代表 $a_{n+[k]}=n+[k]-2$，得到 $a_{n+[k]+1}$ =2

若 $\frac{n-2}{4}$ 餘 3，代表 $a_{n+[k]}=n+[k]-3$，得到 $a_{n+[k]+1}$ =1

(3)若 $a_n=3$，利用等差公式，得 n+k=3+5k　4k=n-3 $\Rightarrow$ k= $\frac{n-3}{4}$,下一轉折為第

n+$[k]$+1 項，規則如下：

若 $\frac{n-3}{4}$ 整除，代表 $a_{n+[k]}=n+[k]$，得到 $a_{n+[k]+1}$ =4

若 $\frac{n-3}{4}$ 餘 1，代表 $a_{n+[k]}=n+[k]-1$，得到 $a_{n+[k]+1}$ =3

若 $\frac{n-3}{4}$ 餘 2，代表 $a_{n+[k]}=n+[k]-2$，得到 $a_{n+[k]+1}$ =2

若 $\frac{n-3}{4}$ 餘 3，代表 $a_{n+[k]}=n+[k]-3$，得到 $a_{n+[k]+1}$ =1

(4)若 $a_n=4$，利用等差公式，得 n+k=4+5k　4k=n-4 $\Rightarrow$ k= $\frac{n-4}{4}$,下一轉折為第

n+$[k]$+1 項，規則如下：

若 $\frac{n-4}{4}$ 整除，代表 $a_{n+[k]}=n+[k]$，得到 $a_{n+[k]+1}$ =4

若$\frac{n-4}{4}$餘 1，代表$a_{n+[k]}=n+[k]-1$，得到$a_{n+[k]+1}$=3

若$\frac{n-4}{4}$餘 2，代表$a_{n+[k]}=n+[k]-2$，得到$a_{n+[k]+1}$=2

若$\frac{n-4}{4}$餘 3，我代表$a_{n+[k]}=n+[k]-3$，得到$a_{n+[k]+1}$=1

7.這時我們解決問題的策略如下：

(1) 先求出 n 落於那於一轉折點

(2) 再代等差數列的公式，求出$a_n$

例如：求$a_{200}$＝？　我們可計算出$a_{200}$落於那一組轉折點之間

$\because$ 178<200<222，又$a_{178}=3$

$\therefore a_{200}=3+5(200-178)=113$

# 陸、研究結果

一、以數到 u 的規則來刪，第一輪 u 的倍數皆被刪除。所以剩下的數列共有$n-\left[\frac{n}{u}\right]$項，

其中$\left[\frac{n}{u}\right]$代表高斯函數，因此得知$a_n$和$a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}$的值相關。

二、$a_n$和$a_{n+1}$的值相關位置差 u。

三、$a_n$必爲數列 1,u+1,2u+1..或 2,u+2,2u+2..或…或 u-1,2u-1,3u-1…等數列中的其中一項

四、當 u=2 時，遞迴關係式如下：

(一)當 n 爲偶數時，$a_n=1+2\times(a_{\frac{n}{2}}-1)$

(二)當 n 爲奇數時：$a_n=1+a_{\frac{n-1}{2}}\times 2$

五、當 u=2 時，一般項公式$a_n=1+(n-2^b)\times 2$，$2^b\le n<2^{b+1}$，b 爲非負整數

六、以 u 的規則來刪時，有以下的關係：

(一)若 n 和$a_n$差 1 時，則$a_{n+1}$＝(u-1)-1

(二)若 n 和$a_n$差 2 時，則$a_{n+1}$＝(u-1)-2

(三)若 n 和$a_n$差 3 時，則$a_{n+1}$＝(u-1)-3

………

(四)若 n 和$a_n$相等時，則$a_{n+1}$＝u-1

七、當 n 為 u 的倍數且 u＞2 時，得出$a_n$的遞迴關係式如下：

(一)若$a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}$被 u-1 除餘 1，則$a_n$=1+u×($\frac{a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}-1}{u-1}$)

(二)若$a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}$被 u-1 除餘 2，則$a_n$=2+u×($\frac{a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}-2}{u-1}$)

(三)若$a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}$被 u-1 除餘 3 時，則$a_n$=3+u×($\frac{a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}-3}{u-1}$)

………

(四)若$a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}$被 u-1 除整除時，則$a_n$=u-1+u×($\frac{a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}}{u-1}-1$)

(證明)：當 n 為 u 的倍數時，第一輪所剩的數列有 u-1 個，排列如下：

1 u+1 2u+1……

2 u+2 2u+2……

3 u+3 2u+3……

……

u-1 2u-1 3u-1……

考慮$a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}$被 u-1 除，觀察商數和餘數可推出$a_n$落於那一數列中的第幾項

1.若$a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}\div(u-1)=k....1$，表示落於第一列的第 k+1 項，需 k 個公差

$$\therefore a_n=1+u\times\frac{a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}-1}{u-1}$$

2.若$a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}\div(u-1)=k....2$，表示落於第二列的第 k+1 項，需 k 個公差

$$\therefore a_n=1+u\times\frac{a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}-2}{u-1}$$

3. 若$a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}\div(u-1)=k$，表示落於第 u-1 列的第 k 項，需 k-1 個公差，

$$\therefore a_n = 1 + u \times \left(\frac{a_{n-\left[\frac{n}{u}\right]}}{u-1} - 1\right)$$

八、轉折點求法：若 u＞2 時，設 $a_n$ 為轉折點，且 $a_n$ ＝r，其中 r$\in \{1,2,....,u-1\}$

利用等差公式，$\because n+k=r+uk \quad \therefore k=\frac{n-r}{u-1}$ (其中 $[k]$: 取高斯函數值)

此時，可得下一轉折點為第 n+$[k]$+1 項，配合研究結果六，規則如下：

(一)若 $\frac{n-r}{u-1}$ 整除，得 $a_{n+[k]} = n+[k]$，則下一轉折點 $a_{n+[k]+1}$ =u-1

(二)若 $\frac{n-r}{u-1}$ 餘 1，得 $a_{n+[k]} = n+[k]$-1，則下一轉折點 $a_{n+[k]+1}$ =u-2

(三)若 $\frac{n-r}{u-1}$ 餘 2，得 $a_{n+[k]} = n+[k]$-2，則下一轉折點 $a_{n+[k]+1}$ =u-3

……

(四)若 $\frac{n-r}{u-1}$ 餘 u-2，得 $a_{n+[k]} = n+[k]$-(u-2)，則下一轉折點 $a_{n+[k]+1}$ =1

# 柒、討論

一、解決這遊戲的策略，我們得到下列幾種方法

(一)建立前項剩餘數之值，即可利用研究結果六：遞迴關係式、研究結果四：

$a_n$和$a_{n+1}$的值相關位置差 u 的結果求出 $a_n$ 。

(二)利用 n 落於那兩個轉折點之間，再利用等差公式求出 $a_n$ 。

(三)解決這樣的問題，其實遞迴和轉折點是可以互相作結合的。

例如：題目為 n=100 人，u=10，求 $a_{100}$ ＝？

分析如下：$\because a_{100}$和$a_{90}$相關 $\quad \therefore$ 可代遞迴關係式

$\because a_{90}$和$a_{81}$相關 $\quad \therefore$ 可代遞迴關係式

$\because a_{81}$和$a_{80}$為前後項 $\quad \therefore a_{81}$和$a_{80}$相關位置差10

利用轉折點的求法，我們求出 $a_{74} = 74 \Rightarrow a_{75} = 9$ (利用研究結果四)

可代等差公式 $a_{80} = 9 + 5 \times 10 = 59 \Rightarrow a_{81} = 69$

代兩次遞迴式：$\because \frac{69}{9} = 7...6 \quad \therefore a_{90} = 6 + 10 \times \frac{69-6}{9} = 76$

$\because \frac{76}{9} = 8...4 \quad \therefore a_{100} = 4 + 10 \times \frac{76-4}{9} = 84$

二、回到我們一開始的問題，若 u=17，n=100 人，求 $a_{100}=$？

(一)我們以土法鍊鋼的方法，從 1 寫至 100，按照規則去一一刪除，經過 99 次的刪除之後，求出 $a_{100}=53$。(大約需 16 分鐘)

(二)利用研究結果二和研究結果六，求出 $a_{100}$=53 (約需 12 分鐘)，過程如下：

1.求出 $a_{17}=12$， $\because 17和12差5$ $\therefore a_{18}=11$(研究結果六)

2.依上面的方法，可依序推出各項的值： $a_{19}=9, a_{20}=6, a_{21}=2\ldots$直到 $a_{97}=2$

3.$\because a_{97}=2 \Rightarrow a_{98}=2+17=19 \Rightarrow$

$a_{99}=19+17=36 \Rightarrow a_{100}=36+17=53$ (研究結果二)

三、從 u=3 的規則開始，我們無法找出如規則 u=2 的一般式，這是未來的研究方向。

# 捌、結論

高一上學期，學了遞迴定義及利用遞迴關係式解決數學上的相關問題，如河內塔問題，藉由這次的科展，我們更進一步了解遞迴關係的建立及運用。另一方面，研究一個數學題目，無形中可訓練我們的思考，從作科展的過程中，可更深切的體會到思考的多元性及小組的合作性，在討論的過程中，和同學互相分享想法，判斷其論點的合理性，這樣的過程是非常難忘的，尤其是看到報告內容從無到有的過程，真的是十分難得的經歷。

# 玖、參考資料及其他

一、葛登能/啊哈－有趣的推理/薛美珍譯/第一版/天下文化出版社/頁 199 至頁 202/1995 年

二、林福來、李恭晴、徐正梅、陳冒海、陳順宇/高中數學第一冊/第三章/等差公式/南一書局/頁 116 至頁 117/民國九十一年八月

三、林福來、李恭晴、徐正梅、陳冒海、陳順宇/高中數學第一冊/第三章/遞迴關係/南一書局/頁 148 至頁 151/民國九十一年八月

## 評 語

**040402 高中組數學科**

**公主的抉擇**

**本問題基本上是 Josephus 問題，可以由 D. Knuth 之「具體數學」一書尋找到豐富的相關資料。**