中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組數學科

040401

雲林縣私立正心高級中學

指導老師姓名

林佳慧

曾惠春

作者姓名

邱敬恒

陳延誌

劉璁翰

黃中珉

自然數中移位、加倍、循環對之探討

一、 摘要

在尋找滿足條件：『將自然數的個位數字移動至最前面，其他位數向後推移一位，所得的新數爲原數的 2 倍的自然數』的過程中，發現求出的解的形式與循環小數的循環部分有對應的關係，(例如：105263157894736842 將個位數字移至最前位，其他位數字向後推一位，得新數 210526315789473684 恰爲 105263157894736842 的 2 倍，而 $\frac{2}{19}$ $=0.\overline{105263157894736842}$，發現它與 $\frac{2}{19}$ 的循環小數部分相同)。

本篇文章討論的主題除了『移一位後，新數爲原數 k 倍』外，延伸至『移 a 位後，新數爲原數 k 倍』的部分，並發現它的結果與循環小數的循環部分有相同的排列方式。

$$105263157894736842 \rightarrow 210526315789473684 \ \blacktriangleright\ \frac{2}{19}$$

移一位變 2 倍

$$105263157894736\underline{842} \rightarrow 842105263157894736$$

移三位變 8 倍

二、 研究動機

高中數學第一冊第二章『數』中討論了自然數系、有理數系、實數系及複數系的運算規則與關聯性。在無理數尚未被廣泛討論之前，畢氏學派宣稱所有的數都可以用自然數表示(當時並未有 0 的概念)，自然數的加、減、乘法的運算皆保有封閉性，而除法結果的商爲整數者形成了因數與倍數、引起質數概念的廣泛討論 ；商爲非整數者形成了有限小數與循環小數，在當時的數學世界裡，自然數引導了數的建構，雖然因爲無理數無法以分數表示的事實被揭發，但是不可否認的，自然數在數系裡有不可取代的地位。

在〝數學思考〞(九章出版社)一書中，看到一個有趣的題目：

『有一個自然數，將其個位數字移至最前面，若所形成之新數爲原數的 2 倍，求滿足此條件的最小之自然數。』

這個題目在網路上曾有人討論，但只對移動 1 位變 2 倍到移動 1 位變 9 倍作初步探討。這樣的性質引起我們的興趣，如果改變條件，將位數移 2 位…移 3 位…，變 3 倍…變 4 倍…後，是否有什麼特殊的表示法？以下的內容將針對這個題目做延伸探討。

三、 研究步驟

〈一〉原題：

『有一自然數，將其個位數字移至最前面，所形成之新數爲原數的 2 倍，求滿足此條件之最小自然數。』

我們假設此自然數爲 n 位正整數，並假設其爲

$10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\cdots+10x_1+x_0$（其中 $n\in N$，x_{n-1}，x_{n-2}，…，$x_0\in N$）

依條件移動數字後得到新數：$10^{n-1}x_0+10^{n-2}x_{n-1}+\cdots+10x_2+x_1$

滿足

$2(10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\cdots+10x_1+x_0)=10^{n-1}x_0+10^{n-2}x_{n-1}+\cdots+10x_2+x_1$

$\Rightarrow 19(10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1)=(10^{n-1}-2)x_0$

因爲 $\because 19\nmid x_0\Rightarrow 19\mid(10^{n-1}-2)$

$\therefore 10^{n-1}-2=999\cdots998$ 爲 19 之倍數

滿足此條件的最小 n 值爲 18 ……………………… ※[證明見附表一]

移位後原數之十位數變爲新數之個位數 且 新數＝原數 × 2

∴新數之個位數爲偶數 ⇒ 原數之十位數爲偶數

假先設原數十位數爲 2，則原數個位數可能爲 1 或 6，

(1) 考慮個位數字爲 1：

原	0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1
新	1 0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2

結果原數之第 18 位爲 0，不合

(2) 考慮個位數字爲 6：

原	3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2 6
新	6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1 0 5 2

由以上結果發現：
當個位數字爲 6 與個位數字爲 1 的原數中 526 的部分開始寫一樣，推測答案可能有循環性的關係。

0 5 2 6 3 1 5 7 8 9 4 7 3 6 8 4 2 1

只要十位數可表爲【(個位數字 × 2) 的各位數字】，且第 1 8 位數字不爲 0，則重新排列後就是答案。

根據之前的結論，可得以下 8 組：

105263157894736842
157894736842105263
210526315789473684
263157894736842105
315789473684210526
368421052631578947
421052631578947368
473684210526315789

以上八組的末兩位數字爲 42、63、84、05、26、47、68、89

且將其重複寫很多次增加其位數，也滿足所要求的條件。

例如：105263157894736842105263157894736842
368421052631578947368421052631578947

〈二〉進一步探討：

從〈一〉之結論與式(1)得知：

19（$10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1$）＝$99999999999999998x_0$

上式中，左右同除以 19

$\Rightarrow 10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1=5263157894736842x_0$

若 x_0＝2，得 105263157894736842

＝$5263157894736842\cdot x_0\cdot 10+x_0$

＝$5263157894736842\cdot 2\cdot 10+2$

＝$52631578947368420\cdot 2+2$

＝$52631578947368421\cdot 2$

⋮

若 x_0＝9 時，得 473684210526315789

＝$5263157894736842\cdot x_0\cdot 10+x_0$

＝$5263157894736842\cdot 9\cdot 10+9$

＝$52631578947368420\cdot 9+9$

＝$52631578947368421\cdot 9$

此 8 數可表爲 $5263157894736842\cdot x_0\cdot 10+x_0$

＝$52631578947368420\cdot x_0+x_0$

＝$52631578947368421\cdot x_0$

$=52631578947368421\cdot$（其末位數字）

$\Rightarrow$ 故（末位數字爲 k 的）爲（末位數字爲 l 的）之 $\frac{k}{l}$ 倍

〈三〉　增加倍數：

若移動一位後，新數變爲原數的 3 倍時，

$$3\left(10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\ \cdots\ +10x_1+x_0\right)=10^{n-1}x_0+10^{n-2}x_{n-1}+\ \cdots\ +10x_2+x_1$$

$$\Rightarrow 29\left(10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\ \cdots+10x_2+x_1\right)=\left(10^{n-1}-3\right)x_0$$

方法同〈二〉，答案也有循環性質，共有 7 組答案，各組間也有 $\frac{k}{l}$ 倍的關係，每組皆爲 28 位數（所得結果如附表二）。

由以上結果得知移動後變爲原數 2 倍的最小爲 18 位，3 倍爲 28 位，我們好奇的是原數移動一位後變爲 4 倍、5 倍、6 倍、…、9 倍時，滿足此條件的最小位數是不是恰好爲 38、48、……、78、88 位？

【驗證 1】

4 倍：

$$39\left(10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\ \cdots\ +10x_2+x_1\right)=\left(10^{n-1}-4\right)x_0$$

此倍數有 6 組解，爲 6 位數，與原本推測爲 38 位不同。

【可能原因】

$$39\left(10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\ \cdots\ +10x_2+x_1\right)=\left(10^{n-1}-4\right)x_0$$

$$\Rightarrow 3\times 13\left(10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\ \cdots\ +10x_2+x_1\right)=999\cdots\cdots996x_0$$

$$13\left(10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\ \cdots\ +10x_2+x_1\right)=333\cdots\cdots332\,x_0$$

（$10^{n-1}-4$）必爲 3 之倍數，所以只需再爲 13 的倍數即可，故 n 值較小

共得 6 組：

102564

128205

153846

179487

205128（和 128205 循環）

230769

互相具有 $\frac{k}{l}$ 倍之關係。

【驗證 2】

5 倍：

49（$10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1$）＝（$10^{n-1}-5$）$x_0$

有 2 種情形：

① x_0 無限制，（$10^{n-1}-5$）為 49 的倍數，此時最小的 n 為 42，即為 42 位數，有 4 組解，並有循環性質，也有$\frac{k}{l}$倍的關係，個位數字分別為 5、6、8、9

② x_0＝7，此時（$10^{n-1}-5$）為 7 的倍數即可，最小的 n 為 6，求得 142857 一組解為 6 位數。

①、② 皆非之前推測的 48 位。

【驗證 3】

6 倍：

59（$10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1$）＝（$10^{n-1}-6$）$x_0$

有 4 組解，個位數分別為 6、7、8、9，且有循環關係，也有$\frac{k}{l}$倍之關係，每組 58 位，與原本推測符合。

【驗證 4】

7 倍：

69（$10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1$）＝（$10^{n-1}-7$）$x_0$

23（$10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1$）＝ $333\cdots331x_0$

與 4 倍的方法相同，答案也有$\frac{k}{l}$倍的關係，但無循環的性質，各組為 22 位，與原本推論的 68 位不同。

【驗證 5】

8 倍：

79（$10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1$）＝（$10^{n-1}-8$）$x_0$

有 2 組答案，個位數為 8、9，具有$\frac{k}{l}$倍的關係，各為 13 位數，與原本推論 78 位不同。

【驗證 6】

9 倍：

89（$10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1$）＝（$10^{n-1}-9$）$x_0$

有一組解，個位數為 9，共 44 位，與原本推論 88 位不同

〈四〉 **發現：**

由以上結果，發現當條件為『移一位後，新數變為原來 5 倍』時所求出的第 3 組答案中的 142857，我們聯想到循環小數 $\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$ 循環節恰與它相同，我們有興趣的是這些答案和循環小數是否有關係呢？

取移位後變為 2 倍的 105263157894736842 作試驗：

$1 \div 0.105263157894736842 \fallingdotseq 9.5000052$

取近似值 $9.5 \rightarrow \frac{1}{9.5}=\frac{2}{19}$

驗算 $\frac{2}{19}=0.\overline{105263157894736842}$

其他各組也有 $\frac{k}{l}$ 倍的關係，驗算的結果恰與循環小數 $\frac{3}{19}$、$\frac{4}{19}$、$\frac{5}{19}$、…、$\frac{9}{19}$ 的循環方式相同

3 倍的：為 $\frac{3}{29}$ 、$\frac{4}{29}$……$\frac{9}{29}$ 的循環小數

4 倍的：為 $\frac{4}{39}$ 、$\frac{5}{39}$……$\frac{9}{39}$ 的循環小數

.

.

.

9 倍的：為 $\frac{9}{89}$ 的循環小數

推論：

變為原來 k 倍的與循環小數 $\frac{x_0}{10k-1}$ 的循環方式相同

證明 1：移 1 位 變 2 倍的

由條件推出：

$A=10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\ldots+x_0=(10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1)\times 10+x_0$

又 $2(10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\ldots+x_0)=10^{n-1}x_0+10^{n-2}x_{n-1}+\ldots+10x_2+x_1$

$19(10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1)=(10^{n-1}-2)x_0$

$10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1=\frac{10^{n-1}-2}{19}x_0$

將所推出結果代入證明：$\frac{x_0}{19}=\frac{A}{10^n-1}$

$$\frac{x_0}{19}=\frac{\frac{10^n-1}{19}x_0}{10^n-1}=\frac{\frac{10^n-20+19}{19}x_0}{10^n-1}=\frac{\frac{10^n-20}{19}x_0+x_0}{10^n-1}=\frac{\frac{10^{n-1}-2}{19}x_0\cdot 10+x_0}{10^n-1}$$
$$=\frac{10\cdot\left(10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\ldots 10x_2+x_1\right)+x_0}{10^n-1}$$
$$=\frac{\left(10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\ldots+x_1\right)+x_0}{10^n-1}$$
$$=\frac{A}{10^n-1}$$

證明 2：移 1 位 變 k 倍的

由條件推出：

$A=10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\ldots+x_0=（10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1）\times 10+x_0$

又 $k（10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\ldots+x_0）=10^{n-1}x_0+10^{n-2}x_{n-1}+\ldots+10x_2+x_1$

$（10k-1）（10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1）=（10^{n-1}-k）x_0$

$10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1=\frac{10^{n-1}-k}{10k-1}x_0$

將所推出結果代入證明：$\frac{x_0}{10k-1}=\frac{A}{10^n-1}$

$$\frac{x_0}{10k-1}=\frac{\frac{10^n-1}{10k-1}x_0}{10^n-1}=\frac{\frac{10^n-10k+(10k-1)}{10k-1}x_0}{10^n-1}=\frac{\frac{10^n-10k}{10k-1}x_0+x_0}{10^n-1}$$
$$=\frac{\frac{10^{n-1}-k}{10k-1}x_0\cdot 10+x_0}{10^n-1}=\frac{10\cdot\left(10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\ldots 10x_2+x_1\right)+x_0}{10^n-1}$$
$$=\frac{\left(10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\ldots+x_1\right)+x_0}{10^n-1}$$
$$=\frac{A}{10^n-1}$$

我們已經知道$\frac{2}{19}$、$\frac{3}{19}$、$\frac{4}{19}$……$\frac{9}{19}$的循環部分與移位、加倍之間的關係，嘗試：

$\frac{1}{19}=0.\overline{052631578947368421}$，$\frac{2}{19}=0.\overline{631578947368421052}$，

$\frac{3}{19}=0.\overline{526315789473684210}$，…，$\frac{18}{19}=0.\overline{947368421052631578}$

原答案有 18 位，而$\frac{1}{19}$到$\frac{18}{19}$剛好各從其中一位開始循環。

3 倍的：3 倍答案 28 位各爲$\frac{1}{29}$到$\frac{28}{29}$的循環。

4 倍的：因$\frac{13}{39}$和$\frac{26}{39}$分別爲$0.\overline{3}$和$0.\overline{6}$，所以還有$\frac{1}{39}$到$\frac{12}{39}$，$\frac{14}{39}$到$\frac{25}{39}$，$\frac{27}{39}$到$\frac{38}{39}$ 等

36 位，36 位分給不循環的 6 組各為 6 位，但 6 組中有 2 組有循環只能算 1 組（128205 和 205128）((6 組有 2 組循環只能算 5 組，但 $\frac{14}{39}$、$\frac{17}{39}$、$\frac{23}{39}$、$\frac{29}{39}$、$\frac{35}{39}$、$\frac{38}{39}$，6 組為 358974，此循環無法做為答案))

5 倍的：$\frac{1}{49}$ 到 $\frac{48}{49}$ 應有 48 位，而扣掉（142857）6 位，應還有 42 位，而此 42 位可循環，故其它 4 組循環答案皆為 42 位

6 倍的：4 組答案有循環，各為 58 位，分別為 $\frac{1}{59}$ 到 $\frac{58}{59}$ 的循環小數

7 倍的：與 4 倍同，$\frac{23}{69}$ 和 $\frac{46}{69}$ 分別為 $0.\overline{3}$ 和 $0.\overline{6}$，所以 $\frac{1}{69}$ 到 $\frac{22}{69}$，$\frac{24}{69}$ 到 $\frac{45}{69}$，$\frac{47}{69}$ 到 $\frac{68}{69}$ 等 66 位分給不循環的 3 組，分別為不同的 22 位

8 倍的：$\frac{1}{79}$ 到 $\frac{78}{79}$ 有 78 位

（$\frac{2}{79}$、…、$\frac{13}{79}$ 等 13 組構成 6202531645569（其中若以 62 當十位和個位，則第 13 位為 0）

$\frac{3}{79}$、…、$\frac{59}{79}$ 等 13 組構成 4303797468354（其中若以 43 當十位和個位，則第 13 位為 0）

$\frac{6}{79}$、…、$\frac{29}{79}$ 等 13 組構成 8607594936708（其中若以 86 或 67 當十位和個位，則第 13 位為 0）

$\frac{12}{79}$、…、$\frac{33}{79}$ 等 13 組構成 1518987341772（根本找不到十位和個位，無法當答案）

∴（1012658227848）和（1139240506329）2 組分別為 $\frac{8}{79}$ 和 $\frac{9}{79}$ 之循環小數。）

9 倍的：$\frac{1}{89}$ 到 $\frac{88}{89}$ 有 88 位

∵ $\frac{1}{89}$、$\frac{17}{89}$…、$\frac{88}{89}$ 等 44 位構成答案

但 $\frac{33}{89}$、$\frac{51}{89}$…、$\frac{86}{89}$ 等 44 位構成
73033707865168539325842696629213483146067415（若以 73、46、37 等當十位和個位則第 44 位為 0，不合）

由以上經驗得知循環小數的循環部分，可幫助探討答案的位數的特性。

〈五〉 推廣：

1. 往前推移 a 位 — 將末 a 位移至前 a 位，維持移 a 位變 k 倍

前面探討的只是移 1 位的情形，現在我們做進一步推廣，因看見 105263157894736842（移 1 位變 2 倍）移了 2 位變 4 倍，移 3 位變 8 倍，又 1033482758620689655172413793（移 1 位變 3 倍）移了 2 位變 9 倍，假設移 a 位變 k 倍的答案為 $\dfrac{\text{移的數}}{10\left(\sqrt[a]{k}\right)-1}$ 的循環小數，但驗證後發現是錯的。

[例] 移 3 位，使新數變為原數的 6 倍

以 142857 為例，移一位後變為 857142，代入得 $\dfrac{857}{10\cdot\sqrt[3]{6}-1}$ ，其結果為無理數無循環小數，顯然與假設不合。

修正：

設原數為 $10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\ \cdots\ +10x_1+x_0$

$2\left(10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\ \cdots\ +10x_1+x_0\right)=10^{n-1}x_1+10^{n-2}x_0+10^{n-3}x_{n-1}+\ \cdots\ +x_2$

$\Rightarrow\left(2\times10^2-1\right)\left(10^{n-3}x_{n-1}+\cdots+10x_3+x_2\right)=\left(10^{n-2}-2\right)\left(10x_1+x_0\right)$

$199\left(10^{n-3}x_{n-1}+\ \cdots\ +10x_3+x_2\right)=\left(10^{n-2}-2\right)\left(10x_1+x_0\right)$

但 $10^{n-2}-2$ 除以 199 太難除，不如把 105263157894736842 代入便可得

$199\times1052631578947368=\left(10^{n-2}-2\right)\times 42$

便可算出 n，再將 $\dfrac{10^{n-2}-2}{199}$ 得到一數，將此數乘上一個適當的 2 位數（此 2 位數在 20-99 之間）末尾再加上此 2 位數即為所要的答案。

再猜測此答案也與循環小數有關，就算 $\dfrac{20}{199}=0.\overline{100502512}.....$

就是末 2 位 20，移 2 位後變 2 倍的答案。

推論：

若移 a 位變 k 倍，則此數為 $\dfrac{\text{移的數}}{10^a\cdot k-1}$ 循環小數的循環部分。

證明 3：移 a 位 變 k 倍的（由後移至前的）

由條件推出：

$A = 10^{n-1}x_{n-1} + 10^{n-2}x_{n-2} + \ldots + x_0$

$= 10^{a}(10^{n-a-1}x_{n-1} + 10^{n-a-2}x_{n-2} + \ldots + x_a) + 10^{a-1}x_{a-1} + \ldots + x_0$

又 $k(10^{n-1}x_{n-1} + 10^{n-2}x_{n-2} + \ldots + x_0) = 10^{n-1}x_{a-1} + 10^{n-2}x_{a-2} + \ldots + 10^{n-a}x_0 + 10^{n-a-1}x_{n-1} + \ldots + x_a$

$(10^{a}\cdot k - 1)(10^{n-a-1}x_{n-1} + 10^{n-a-2}x_{n-2} + \ldots + x_a) = (10^{n-a} - k)(10^{a-1}x_{a-1} + 10^{a-2}x_{a-2} + \ldots + x_0)$

$(10^{n-a-1}x_{n-1} + 10^{n-a-2}x_{n-2} + \ldots + x_a) = \dfrac{10^{n-a} - k}{10^{a}\cdot k - 1}(10^{a-1}x_{a-1} + 10^{a-2}x_{a-2} + \ldots + x_0)$

將所推出結果代入證明： $\dfrac{10^{a-1}x_{a-1} + \ldots + x_0}{10^{a}\cdot k - 1} = \dfrac{A}{10^{n} - 1}$

$$\frac{10^{a-1}x_{a-1} + \ldots + x_0}{10^{a}\cdot k - 1} = \frac{\dfrac{10^{n} - 1}{10^{a}\cdot k - 1}(10^{a-1}x_{a-1} + \ldots + x_0)}{10^{n} - 1}$$

$$= \frac{\dfrac{10^{n} - 1 - (10^{a}\cdot k - 1) + (10^{a}\cdot k - 1)}{10^{a}\cdot k - 1}(10^{a-1}x_{a-1} + \ldots + x_0)}{10^{n} - 1}$$

$$= \frac{\dfrac{10^{n} - 10^{a}\cdot k}{10^{a}\cdot k - 1}(10^{a-1}x_{a-1} + \ldots + x_0) + (10^{a-1}x_{a-1} + \ldots + x_0)}{10^{n} - 1}$$

$$= \frac{\dfrac{10^{n-a} - k}{10^{a}\cdot k - 1}(10^{a-1}x_{a-1} + \ldots + x_0)\cdot 10^{a} + (10^{a-1}x_{a-1} + \ldots + x_0)}{10^{n} - 1}$$

$$= \frac{(10^{n-a-1}x_{n-1} + 10^{n-a-2}x_{n-2} + \ldots + x_a)\cdot 10^{a} + (10^{a-1}x_{a-1} + \ldots + x_0)}{10^{n} - 1}$$

$$= \frac{(10^{n-1}x_{n-1} + 10^{n-2}x_{n-2} + \ldots + 10x_1 + x_0)}{10^{n} - 1}$$

$$= \frac{A}{10^{n} - 1}$$

2. 往後推移 a 位 — 將前 a 位移至末 a 位，維持移 a 位後變為 k 倍

探討將前面移到後面的問題，先討論移一位，變 2 倍的，發現

$2(10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\cdots+10x_1+x_0)=10^{n-1}x_{n-2}+\cdots+10x_0+x_{n-1}$

$\Rightarrow(2\cdot 10^{n-1}-1)x_{n-1}=(10-2)(10^{n-2}x_{n-2}+\cdots+10x_1+x_0)$

$(2\cdot 10^{n-1}-1)x_{n-1}=8(10^{n-2}x_{n-2}+\cdots+10x_1+x_0)$

卻發現 $8\nmid(2\cdot 10^{n-1}-1)$

若 $x_{n-1}=8 \quad\Rightarrow\quad 2\cdot 10^{n-1}-1=(10^{n-2}x_{n-2}+\cdots+10x_1+x_0)$

但 $(2\cdot 10^{n-1}-1)$ 比 $(10^{n-2}x_{n-2}+\cdots+10x_1+x_0)$ 多一位，所以無解。

討論移 1 位,變為 2 到 9 倍的,只得到 2 組解,分別是 142857 和 285714,142857 是移 1 位變 3 倍（移的數是 1），285714 是移 1 位變 3 倍（移的數是 2）

又 $0.\overline{142857}=\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{10^1-3}$

$0.\overline{285714}=\dfrac{2}{7}=\dfrac{2}{10^1-3}$

有了前面的經驗，我們推測若移 a 位變 k 倍，則答案為 $\dfrac{\text{移的數}}{10^a-k}$ 的循環小數，再找一些例子發現無誤。

例如：移 2 位，變 3 倍，移的數是 20

$\rightarrow\dfrac{20}{10^2-3}=\dfrac{20}{97}=0.\overline{2061855.....}$

20618556…..× 3 ＝618556…….

證明 4：移 a 位 變 k 倍的（由前移至後的）

由條件推出：

$A=10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\ldots+x_0$

$k(10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\ldots+x_0)=10^{n-1}x_{n-a-1}+10^{n-2}x_{n-a-2}+\ldots+10^{a}x_0+10^{a-1}x_{n-1}+\ldots+x_{n-a}$

$(10^{n-a}\cdot k-1)(10^{a-1}x_{n-1}+10^{a-2}x_{n-2}+\ldots+x_{n-a})=(10^a-k)(10^{n-a-1}x_{n-a-1}+10^{n-a-2}x_{n-a-2}+\ldots+x_0)$

$\dfrac{(k\cdot 10^{n-a}-1)}{10^a-k}(10^{a-1}x_{n-1}+10^{a-2}x_{n-2}+\ldots+x_{n-a})=(10^{n-a-1}x_{n-a-1}+10^{n-a-2}x_{n-a-2}+\ldots+x_0)$

將所推出結果代入證明：$\dfrac{10^{a-1}x_{n-1}+\ldots+x_{n-a}}{10^a-k}=\dfrac{A}{10^n-1}$

$$\frac{10^{a-1}x_{n-1}+\ldots+x_{n-a}}{10^a-k}=\frac{\frac{10^n-1}{10^a-k}(10^{a-1}x_{n-1}+\ldots+x_{n-a})}{10^n-1}$$

$$=\frac{\frac{10^n-1-\left(10^n-k\bullet 10^{n-a}\right)+\left(10^n-k\bullet 10^{n-a}\right)}{10^a-k}(10^{a-1}x_{n-1}+\ldots+x_{n-a})}{10^n-1}$$

$$=\frac{\frac{k\bullet 10^{n-a}-1}{10^a-k}(10^{a-1}x_{n-1}+\ldots+x_{n-2})+10^{n-a}\left(10^{a-1}x_{n-1}+\ldots+x_{n-a}\right)}{10^n-1}$$

$$=\frac{\left(10^{n-a-1}x_{n-a-1}+\ldots\ldots+10x_1+x_0\right)+10^{n-1}x_{n-1}+\ldots\ldots 10^{n-a}x_{n-a}}{10^n-1}$$

$$=\frac{10^{n-1}x_{n-1}+\ldots.+10^{n-a}x_{n-a}+10^{n-a-1}x_{n-a-1}+\ldots\ldots+10x_1+x_0}{10^n-1}$$

$$=\frac{A}{10^n-1}$$

三、結論：

1. 往前推移 a 位變爲原數 k 倍之解爲 $\dfrac{\text{移的數}}{10^a \cdot k-1}$ …（1）的循環小數中小數部分。
2. 往後推移 a 位變爲原數 k 倍之解爲 $\dfrac{\text{移的數}}{10^a - k}$ …（2）的循環小數中小數部分。

   令 $k' = \dfrac{1}{k}$ 代入（1）得 $\dfrac{\text{移的數}}{10^a \cdot \dfrac{1}{k}-1} = \dfrac{\text{移的數}\cdot k}{10^a - k}$ =（2）× k

   這樣的結果得到的訊息是不論是將原數從後往前移或從前往後移且滿足此條件的兩者之間有倍數的關係。（其實就是把一數移位後變 k 倍，移回來會變 $\dfrac{1}{k}$ 倍的兩種不矛盾說法）
3. 因前面的證明得知，k 倍的 k 值不一定爲整數，合理的分數也能當 k 代入公式。（$0.1 < k < 10$）

從這個經驗中，我們認識了循環小數之小數部分的排列方式中有某種規律的性質，許在以後的研究裡會有機會多了解它神奇的地方。

四、參考資料：

1. 高中數學第一冊教師手冊，三民出版社。
2. 「數學思考」，p.186. 九章出版社。

參考網站：

網址： http://forums.windrivers.com/showthread.php?p=451050
http://www.michael-kreil.de/html/mathematik.html
http://www.math.wayne.edu/~petem/probweek/fall97/sol9.html

附表 1

求滿足『有一自然數，將其個位數字移至最前面，所形成之新數爲原數的 2 倍，求滿足此條件之最小自然數。』

我們假設此自然數爲 n 位正整數，並假設其爲

$10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\cdots+10x_1+x_0$（其中 n，x_{n-1}，$x_{n-2}\cdots\in N$）

依條件移動數字後得到的新數爲 $10^{n-1}x_0+10^{n-2}x_{n-1}+\cdots+10x_2+x_1$

滿足：

$2(10^{n-1}x_{n-1}+10^{n-2}x_{n-2}+\cdots+10x_1+x_0)=10^{n-1}x_0+10^{n-2}x_{n-1}+\cdots+10x_2+x_1$

$\Rightarrow 19(10^{n-2}x_{n-1}+10^{n-3}x_{n-2}+\cdots+10x_2+x_1)=(10^{n-1}-2)x_0$ ……………………(1)

因爲$\because 19\nmid x_0\Rightarrow 19\mid(10^{n-1}-2)$

$\therefore 10^{n-1}-2=999\cdots998$ 爲 19 之倍數

利用除法：

```
      5263157..............42
 19 )99999999..........9998
     95
     49
     38
           .
           .
                   79
                   76
                    38
                    38
                     0
```

一直補 9，直到餘 3 時補 8 變 38 整除，此時得出 16 個 9 又 1 個 8，

因此推出最小之 n 值爲 18。

附表 2：

滿足移一位後，新數變為原來 k 倍的解($k = 2$，3，…，9)

2 倍：

105263157894736842
157894736842105263
210526315789473684
263157894736842105
315789473684210526
368421052631578947
421052631578947368
473684210526315789

3 倍：

1034482758620689655172413793
1379310344827586206896551724
1724137931034482758620689655
2068965517241379310344827586
2413793103448275862068965517
2758620689655172413793103448
3103448275862068965517241379

4 倍：

102564
128205
153846
179487
205128
230769

5 倍：

102040816326530612244897959183673469387755
122448979591836734693877551020408163265306
142857
163265306122448979591836734693877551020408
183673469387755102040816326530612244897959

6 倍：

1016949152542372881355932203389830508474576271186440677966
1186440677966101694915254237288135593220338983050847457627
1355932203389830508474576271186440677966101694915254237288
1525423728813559322033898305084745762711864406779661016949

7 倍：

1014492753623188405797
1159420289855072463768
1304347826086956521739

8 倍：

1012658227848
1139240506329

9 倍：

10112359550561797752808988764044943820224719

評　語

040401 高中組數學科

自然數中移位、加倍、循環對之探討

活用網頁搜尋的功能來研究數字圖案，值得推廣。