

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作者說明書

高中組物理科

040106

國立臺中第一高級中學

指導老師姓名

王昭富

張鴻傑

作者姓名

盧振華

陳衍方

林勝彥

# 第四十四屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

科 別： 物 理 科

組 別： 高 中 組

作品名稱： 線性半徑非典型圓周運動

～ 一種特別旋轉方式的探討 ～

關 鍵 詞： 螺旋、光電計時、單擺運動

編 號：

# 目 錄

壹、 摘要 .....	1
貳、 研究動機 .....	1
參、 研究目的 .....	1
肆、 研究設備及器材 .....	2
一、 光電計時器之改裝.....	2
(一) 改裝的必要性.....	2
(二) 光感應器之改裝.....	2
(三) 接頭與計時器之改裝.....	3
二、 研究器材詳細列表.....	6
伍、 研究過程與方法 .....	7
一、 原理推導.....	7
二、 實驗.....	12
(一) 實驗一：近無摩擦向心螺線運動測量.....	12
(二) 實驗二：變形圓周單擺運動測量.....	16
陸、 討論 .....	18
柒、 結論 .....	23
捌、 參考資料 .....	23
玖、 附錄 .....	24

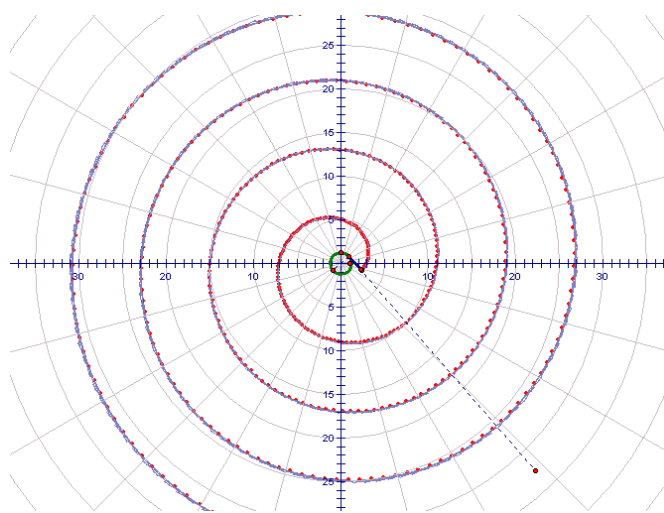
## 壹、摘要

本研究主要是針對依”圓軸向心收線”定義之運動模式所做的探討，包含運動模型的理論推演、實驗方法的設計與實驗套件的整合。

實驗套件整合與原理推導是共同進行的，再以測試整合套件與驗證原理為目的，整理了兩個實驗。實驗內容依序為：驗證近無摩擦狀況下之水平面運動理論、驗證鉛直面（受重力影響）的運動理論。

## 貳、研究動機

一物體被一條線綁住而旋轉，其中間的圓形轉軸在物體邊旋轉時還會邊把繩子收短，那會發生什麼事呢？我們有一次無意間看到一位同學心不在焉的拿起串上繩子的鑰匙繞著手指轉時，心裡就浮現了這個問題。這種收繩方式就如同右圖：在一條細繩的一端繫上一物體，另一端綁在圓柱（中央綠色圓圈）上。當用動這個物體時，它會繞著中央圓柱打轉，此時中央圓柱便把繩子逐步向內收進，而使物體向內旋入。這顯然和一般在高中所學的等速率圓周運動有所不同，但又有某些相似之處，這種運動究竟有什麼特性呢？



↑ 軸半徑 1.25cm，GSP 繪圖

## 參、研究目的

- 一. 設計一組實驗裝置，以期測量如上述運動之旋轉時間。  
（註：本來實驗室中的光電計時器雖然在做自由落體實驗時還算好用，但卻不適合這種需擴展至二度空間的測量）
- 二. 找出如上述之運動在水平無摩擦的情況下之初速、路徑長、旋轉時間之間的關係並以實驗證明之。
- 三. 使物體在鉛直面運動，並找出初速和旋轉時間之關係。  
（並以實驗證明如單擺運動時之週期）

## 肆、 研究設備及器材

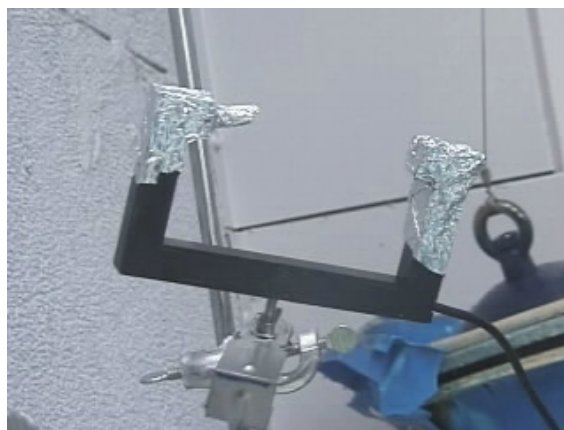
### 一、 光電計時器之改裝

#### (一) 改裝的必要性

此為測量運動的實驗，故我們必須測量的物理量，是長度和時間。我們可以先利用所測得的原繩長、軸半徑、初速等，先求出繞行每圈所需的時間，再藉由時間的測量，比較理論和實驗結果的異同。

比起長度，精確時間相當難測。為了達成精密測量時間的目標，我們將注意力轉到學校實驗室中用以測量「重力加速度」實驗的「光電計時裝置」。

原先學校的光電計時器套件是專為測量  $g$  值而設計的，其基本原理便是藉接收紅外光的阻斷訊號來驅動計時裝置。所以其有效遮斷範圍便為感應器兩閘之間。我們必須將原本的套件進行改裝，才能合用。



↑ 光感應器之架設

我們希望能製作一個利用雷射光遮斷來計時的裝置，所以我們不需更改計時器（即顯示時間之方盒，以下皆以計時器稱之）內部，只需對光感應器（即  $\square$  字形套件，以下皆以光感應器稱之）與輸出入端（接頭）進行非破壞性改裝即可。

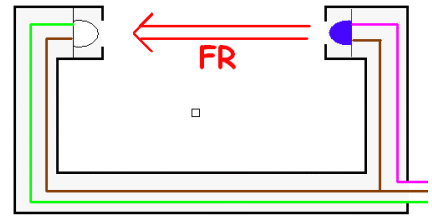
#### (二) 光感應器之改裝

就特性上，光感應器輸出入的實體接頭，恰為 3.5mm 立體聲耳機接頭。經過外部測量與實際觀察，我們得知其中含兩組電路，各接一型似 LED 之元件：

1. 外觀藍紫色者，為紅外光 LED。
2. 外觀透明者，為紅外光接收二極體，處無光處為斷路，接收足量紅外光時，則為通路。

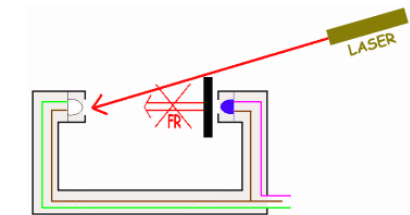
實用上，此光感應器與計時器的原理為：

1. 兩組二極體電路，其中地線（指接回電源）共用，故可採用立體聲耳機的三個電極。
2. 兩二極體至於光感應器之口字型兩端，各六面接封閉五面，兩個開放面相互對應。
3. 當光感應器連接到啓動之計時器上時，紅外光 LED 便獲得電壓，持續發出紅外光，此即發射端；另一端接收端接收到紅外光，便會形成通路，計時器上有一對應紅色 LED 會亮起。
4. 此時若有物體居口字型中間阻斷光源，接收端便接收不到紅外光，形成斷路，計時器上之對應紅色 LED 不亮（以下稱光阻斷）。
5. 計時器再根據電路設定（手動計時、感應啓動、電磁啓動），決定如何採用光阻斷。



↑ 光感應器電路簡圖。粉紅色為紅外光 LED 正極，綠色為接收器正極，深棕色為共用地線。

而我們做一測試：如果將發射端遮斷，而使用雷射筆當作發射端，能不能替代？結果是可以的。我們不知道是接收端能接收紅光，抑或是雷射筆也發出紅外光（雷射筆是使用雷射 LED，與高成本的雷射不同），但替換是可行的。所以我們便將發射端遮斷（用鋁箔包裹最為方便），設法將雷射光打入接收端，如此便完成光感應器的改裝。



↑ 光感應器改裝示意

### （三） 接頭與計時器之改裝

完成光感應器的改裝之後，我們擴大了其使用範圍；然我們希望光電計時器能夠「連續」紀錄「每一圈」時間。所以我們必須先了解計時器的模式。

感應啓動模式是比較適合的。光感應器分為啓動組和停止組；在此模式下，當啓動組發生光阻斷，計時器便開始累計，直到啓動組發生光阻斷為止。



↑ 計時器裝置。任一臺的啓動組會對應到另一臺之停止組（外接光感應器，下頁說明）。此圖中，上面那臺的停止組（黑色接頭）與下面那臺的啓動組（紅色接頭）便是「光阻斷」（可由紅色 LED 判斷）。

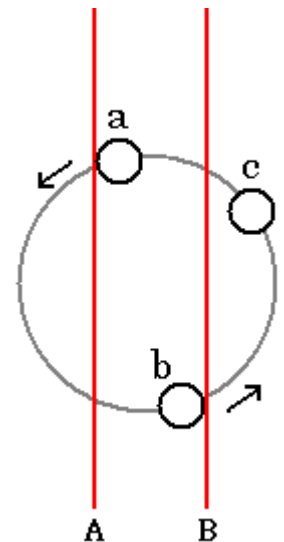
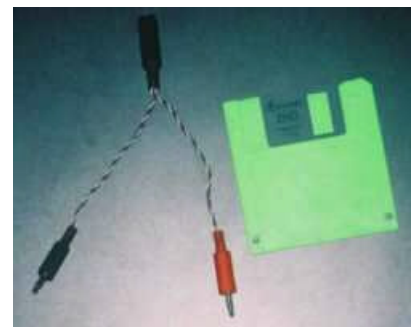
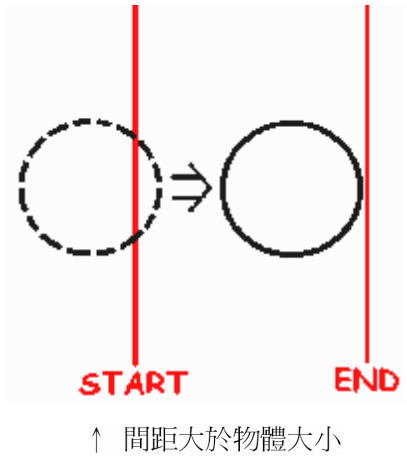
計時器有一使用上的限制，當停止組發生光阻斷時，啟動組必須不被阻斷，如此停止組光阻斷才會被採計。也就是說，置於連續路徑上之兩平行光感應器，「其間距必須大於物體大小」，計時器才能停止。

既然我們先前就已知道：光感應器是利用本身電路的斷路來傳達光阻斷，那我們便能直接讓一個光阻斷，同時傳達到兩個以上的接收端，只要簡單利用並聯的原理便成。光感應器是採用 3.5mm 的立體聲接頭，我們只要銲一個一分二的分接頭，便能讓兩個接收端共用一個光感應器。

如此使用兩個分接頭，讓「計時器甲的啟動組」與「計時器乙的停止組」相接，讓「計時器甲的停止組」與「計時器乙的啟動組」相接，分接頭再各自接到光感應器，接著佈置雷射光，兩組分別照射兩個光感應器。

其工作原理可藉由一圓周運動來說明。考慮右圖之情形，A、B 表兩雷射光射線，a、b、c 表三個位置，箭頭表運動方向，大圓是路徑。令兩臺光電計時器皆為靜止且歸零：

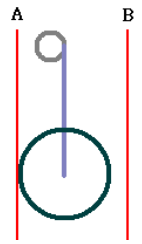
1. 當物體由位置 a 出發，會先阻斷射線 A，此時有一臺計時器會先被啟動（令甲），另一臺則停止（令乙）；當物體由 a 行經「近半圈」後，會再一次阻斷 A，此時甲仍啟動，乙仍停止。
2. 當物體進入位置 b 時，射線 B 會被阻斷，則計時器甲（正在跑的）會被停止，乙則啟動；接著 B 也會被二次阻斷（經過 c 後），但不影響計時。接著物體會回到位置 a，將在不歸零之情況下，重複「1.」的內容。
3. 由於光感應器採分接設計，計時器一臺停止便一臺啟動，如此兩計時器甲、乙將不斷的「交替」計時；只要將兩對應「半圈」時間相加，便可得完整一圈的時間。若是由位置 c 開始，則計時器乙（同上命名）會先被 B 啟動，然到了位置 a，又回到上述「1.」的狀態，此時乙會顯示一短小時間，是為行經 B 射線到 A 射線之小圓弧所需時間；下次乙計時器由此累計，並不影響時間間隔。



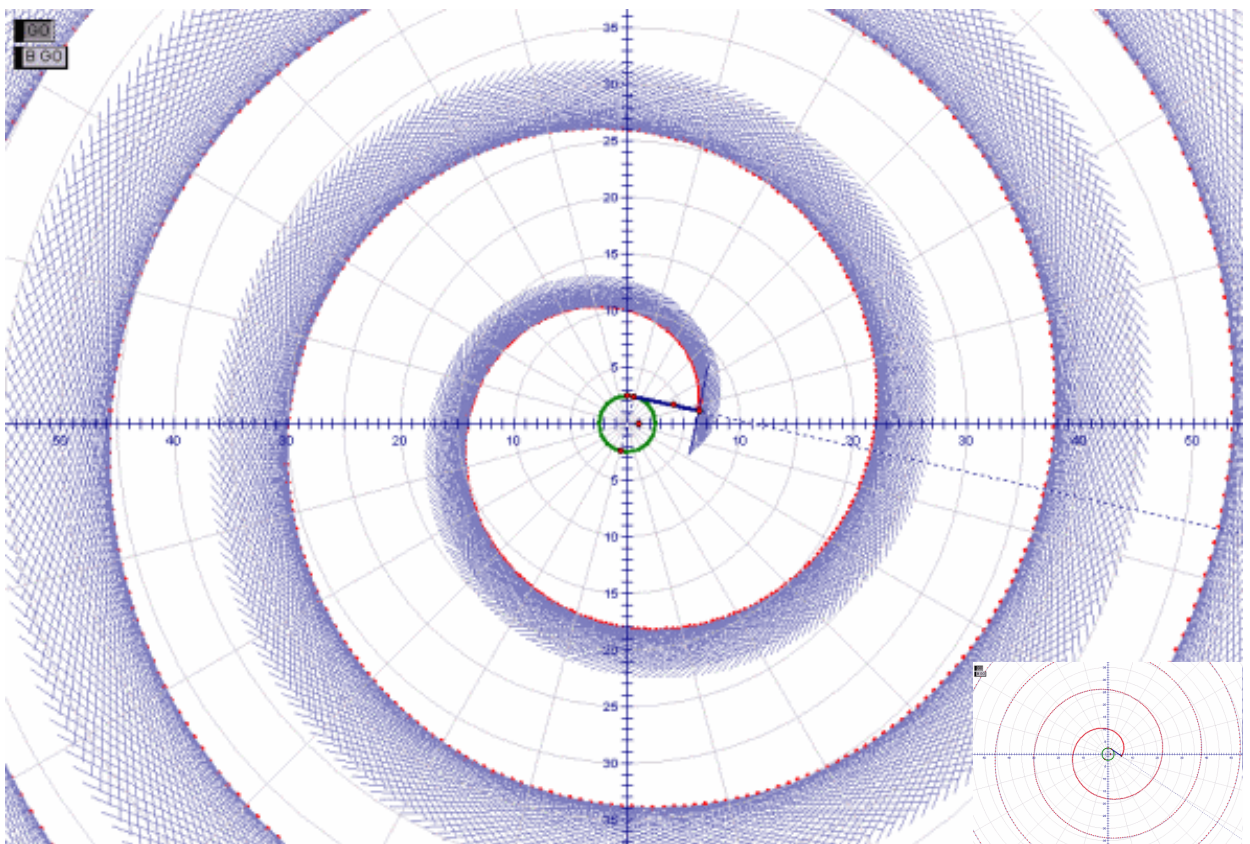


為測試此裝置的可行性，我們先設計了實驗零，即使用單擺測量重力加速度。

以上以圓周運動為考量，其實螺線也差不多。就螺線部分，我們也是以整數圈為一單位，所以最理想的打法為右圖。當拉線與光束平行時，A 最好以右圖方式切過物體，顯然物體半徑需大於軸的直徑；相形之下，B 只要不讓  $d(A,B)$  比物體大即可；如此以 A 為計時起點，加上對應之另外半圈時間，便可測得每一圈的時間。



此外，我們使用動態幾何繪圖軟體 GSP，利用尺規作圖就能繪出不同條件下的路徑（可參考附錄三）。



↑ 中心軸（綠色圓圈）半徑 2.5cm，座標格式為極座標。右下圖為相同條件下短切線的繪圖。圖中紅點的 Trace 即路徑，藍線的 Trace 即各點所對應之切線。



## 二、 研究器材詳細列表

### 計時用設備：

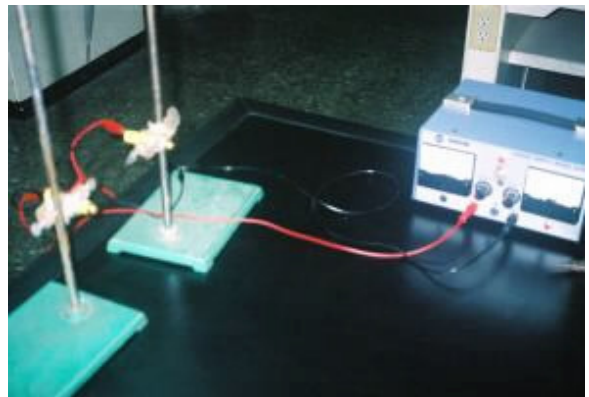
光電計時器、自製分接頭（規格：3.5mm 立體聲）、雷射筆、直流電源供應器

### 記錄裝置：

數位攝影機、筆記型電腦

### 電腦軟體：

Excel、C Language（程式語言）、GSP  
（動態幾何軟體）



### 其他：

衝擊擺、釣魚線、固定支架、游標尺、旗竿座、鱷魚夾、鋁箔紙、電工膠布

## 伍、 研究過程與方法

### 一、 原理推導

(以下(一)到(五)的討論，是在水平無摩擦的狀態下)

#### (一) 速度方向

在任一時刻，其速度  $V$  必可分為兩個分速度：第一個是垂直於繩子方向的  $V_{\perp}$ ，另一個是平行繩子的  $V_{\parallel}$ 。因繩子之張力方向和繩子平行，故張力對  $V_{\perp}$  不影響其量值，會改變量值的只有  $V_{\parallel}$  (在無其他外力的情況下)。又因軌跡的切線方向即為是物體在該點的速度方向，故只要找出切線和繩之夾角即可。我們將其套入一直角座標中，設起始時繩垂直於  $X$  軸，且繩長  $L_0$ ，若它的切點與圓心連線和  $X$  軸正向夾  $\theta$  角，則其座標  $(x,y)$  可表為：

$$\begin{aligned} x &= R(\cos \theta + \theta \sin \theta) - L_0 \sin \theta \\ y &= R(\sin \theta - \theta \cos \theta) + L_0 \cos \theta \end{aligned}$$

對時間微分得：

$$\begin{aligned} V_x &= [R(-\sin \theta + \theta \cos \theta + \sin \theta) - L_0 \cos \theta] \omega = (R \theta \cos \theta - L_0 \cos \theta) \omega \\ V_y &= [R(\cos \theta + \theta \sin \theta - \cos \theta) - L_0 \sin \theta] \omega = (R \theta \sin \theta - L_0 \sin \theta) \omega \end{aligned}$$

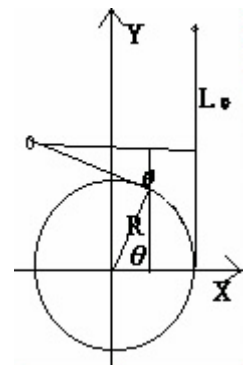
$$\text{其中 } \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

整理後得速度向量 =  $((R \theta - L_0) \omega \cos \theta, (R \theta - L_0) \omega \sin \theta)$

此時繩子的方向向量為： $(\sin \theta, -\cos \theta)$

$$\text{兩向量內積} = (R \theta - L_0) \omega (\cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta) = 0$$

故繩方向與物體速度方向恆垂直，亦即物體之速率不變。



## (二) 圓心角—路徑長關係

設某時刻繩長  $L$ ，至下一瞬間物體移動  $ds$  的距離，而圓心角改變  $d\theta$ ，如圖所示：  
繩的夾角約等於圓心角，

故  $Ld\theta = ds$

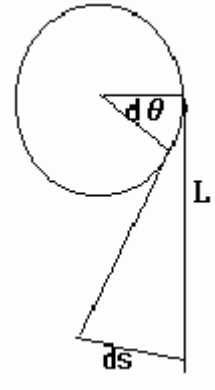
又令運動啓始時之繩長為  $L_0$ 、圓心角  $= 0$ ，

纏在圓柱上的繩長即為圓周  $R\theta$

故得  $L = L_0 - R\theta$  ( $\theta$  定為繩長  $L$  時之圓心角)

代入上式： $ds = (L_0 - R\theta) d\theta$

兩邊積分，得  $s = \theta(L_0 - \frac{1}{2} R\theta) \dots\dots \textcircled{1}$



## (三) 圓心角—時間之關係

設物體的速度大小  $V$ ，則時間  $t$ ：

$$t = \frac{s}{V} = \frac{\theta(L_0 - \frac{1}{2} R\theta)}{V} \dots\dots \textcircled{2}$$

轉第一圈所需之時間，即將  $\theta = 2\pi$  代入  $\rightarrow T_1 = \frac{2\pi(L_0 - \pi R)}{V}$

轉第  $N$  圈所需時間  $T_N = \frac{2\pi[L_0 - (2N-1)\pi R]}{V}$  ( $L_0$  改用  $L_0 - (N-1) \times 2\pi R$ )

總時間 =  $\frac{L_0^2}{2RV}$  (即繩子全部收完， $\theta = \frac{L_0}{R}$ )

#### (四) 張力關係

設當繩長  $L$  時，繩張力  $F$ ，經過時間  $dt$  後圓心角改變  $d\theta$ ，且物體質量  $m$

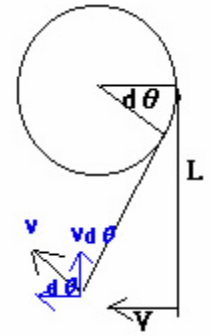
$$F = m \frac{dV}{dt} = mV \frac{d\theta}{dt} \dots\dots ③$$

由 ② 得  $\theta = \frac{L_0 \pm \sqrt{L_0^2 - 2RtV}}{R}$ ，又  $\theta \leq \frac{L_0}{R}$

$$\therefore \theta = \frac{L_0 - \sqrt{L_0^2 - 2RtV}}{R} \dots\dots ④$$

$$\rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{\sqrt{L_0^2 - 2RtV}} \rightarrow L = L_0 - R\theta = \sqrt{L_0^2 - 2RtV} \text{ 代回 ③}$$

$$F = \frac{mV^2}{\sqrt{L_0^2 - 2RtV}} = \frac{mV^2}{L}$$



#### (五) 角動量的討論

求出角動量，我們選擇的參考點是一直固定的圓心。

如右圖所示，設在  $t$  時刻繩長  $L$ ，且物體—圓心—切點夾角  $\alpha$ ，則此時之角動量量值  $= mV\sqrt{R^2 + L^2} \sin \alpha$

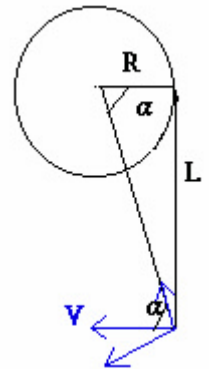
$$\text{但 } \sin \alpha = \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}}$$

$$\therefore \text{角動量量值} = mVL = mV\sqrt{L_0^2 - 2RtV}$$

和時間有關，即物體的角動量不守恆，這是因為張力不通過圓心，而有力矩作用的緣故。

將上式對時間微分，得力矩  $\tau$  的量值：

$$\tau = \frac{-mRV^2}{\sqrt{L_0^2 - 2RtV}} = -R \times F$$



## (六) 有摩擦力的情況

在有一定摩擦力時，❶ 式需改為

$$s = V_0 t - \frac{1}{2} g \mu_k t^2 = L_0 \theta - \frac{1}{2} R \theta^2 \quad (\text{其中 } g \text{ 爲重力加速度、} \mu_k \text{ 爲動摩擦係數)}$$

$$t = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - g \mu_k \theta (2L_0 - R \theta)}}{g \mu_k}$$

轉第  $N$  圈所需時間

$$T_N = \frac{\sqrt{V_0^2 - 4 \pi (N-1) g \mu_k [L_0 - (N-1) \pi R]} - \sqrt{V_0^2 - 4 \pi N g \mu_k (L_0 - N \pi R)}}{g \mu_k}$$

因張力  $F'$  和摩擦力恆垂直，故仍爲  $\frac{mV^2}{L}$ ，將  $L$ 、 $V$  代入得

$$F' = m \cdot \frac{V_0^2 - g \mu_k t (2V_0 - g \mu_k t)}{\sqrt{L_0^2 - R t (2V_0 - g \mu_k t)}}$$

## (七) 鉛直面運動情況：

設在最低點之初速  $V_0$ ，繩長  $L_0$ 。且經過  $t$  後，物體高度  $h$ ，圓心角  $\theta$ 。如下圖所示：

已經知道繩張力對物體不做功，於是：

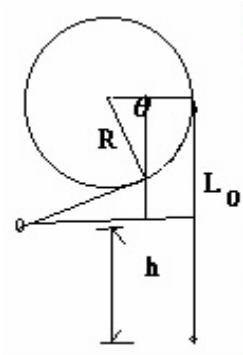
$$\frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2} m V^2 + mgh$$

$$\text{得此時之速度 } V = \sqrt{V_0^2 - 2gh} = \frac{ds}{dt} \dots\dots \text{❷}$$

由圖可發現  $h = L_0 - R \sin \theta - (L_0 - R \theta) \cos \theta$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = (L_0 - R \theta) \frac{d\theta}{dt} \text{ 代入 } \text{❷}$$

$$\sqrt{V_0^2 - 2g[L_0(1 - \cos \theta) + R(\theta \cos \theta - \sin \theta)]} = (L_0 - R \theta) \frac{d\theta}{dt}$$



$$\rightarrow \int_0^t dt = \int_0^\theta \frac{L_0 - R\theta}{\sqrt{V_0^2 - 2g[L_0(1 - \cos \theta) + R(\theta \cos \theta - \sin \theta)]}} d\theta$$

此為時間與圓心角之關係，此為一橢圓積分，可以利用電腦算出近似值。

由上式可得第 N 圈所需時間

$$T_N'' = \int_0^{2\pi} \frac{L_0 - R[\theta + 2\pi(N-1)]}{\sqrt{V_0^2 - 2g\{L_0(1 - \cos \theta) + R[\theta \cos \theta - \sin \theta + 2(N-1)\pi \cos \theta]\}}} d\theta$$

在實驗二中，我們的實驗並非繞一整圈測量時間的，而是讓擺錘在下半部來回擺盪，此時的週期依同理可得：

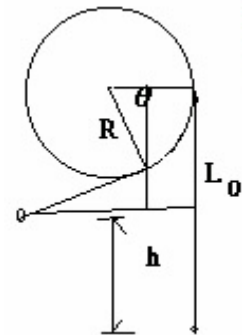
$$T = 2 \times \int_\alpha^\beta \frac{L_0 - R\theta}{\sqrt{2g\{h - [L_0(1 - \cos \theta) + R(\theta \cos \theta - \sin \theta)]\}}} d\theta$$

其中  $h$  是最高點和最低點的高度差， $L_0$  定為垂直懸掛時的繩長。而積分上下限  $\beta$ 、 $\alpha$  是  $L_0(1 - \cos x) + R(x \cos x - \sin x) = h$  在  $-\pi/2$  和  $\pi/2$  間的解，且取  $\alpha < 0 < \beta$ ，也就是物體在兩側最高點所對應的圓心角，令收繩端的角為正值，放繩端的角度為負值。附錄二即此情況之積分程式，將用於實驗二。

## (八) 鉛直面張力關係

如右圖，當圓心角  $\theta$  時，重力在繩子方向的分力  $-mg \cos \theta$  和繩張力的合力即為  $\frac{mV^2}{L}$

$$\begin{aligned} \rightarrow F'' &= \frac{m(V_0^2 - 2gh)}{L_0 - R\theta} + mg \cos \theta \\ &= m \cdot \frac{V_0^2 - g[L_0(2 - 3\cos \theta) + R(3\theta \cos \theta - 2\sin \theta)]}{L_0 - R\theta} \end{aligned}$$

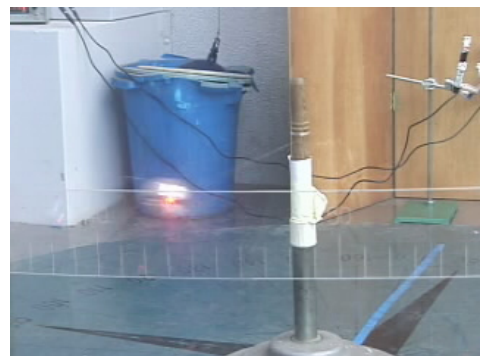
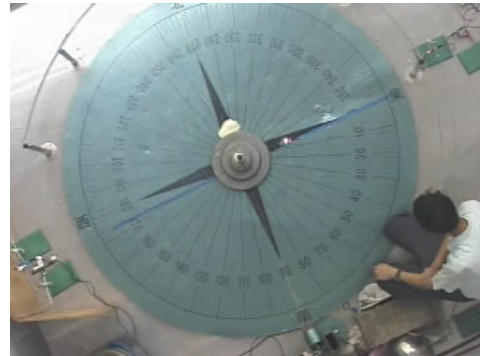


## 二、實驗

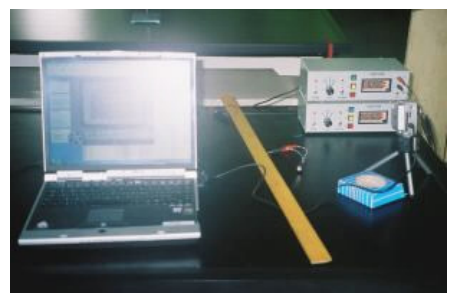
原實驗零為單擺重力加速度測量，用以測試計時裝置的性能。礙於篇幅限制，將以口頭呈現。

### (一) 實驗一：近無摩擦向心螺線運動測量

1. 目的：以接近無摩擦狀態之環境，模擬水平面向心螺線運動之環境，並將測量值與理論比較。
2. 設計：無摩擦是最困難的部分。最後是使用類似單擺的架構，使待測物體懸掛空中，不與地面接觸。還包含以下重點：
  - (1) 使用極長的擺線（相對於平面繩長  $L_0$ ），使擺角減小，減少重力影響。
  - (2) 原則上平面繩給予向心力，垂直繩抵抗重力。
  - (3) 地上黏貼有色膠帶，提供雷射光之架設依據；雷射光電計時組請參考「肆、一、光電計時器之改裝」部分。
  - (4) 內圈（後幾圈）角速度極大，時間過短，難以用人手抄錄，故使用數位攝影機拍攝計時器，並以筆記型電腦提供影片資料記憶空間。



↑ 計時器裝置



↑ 計時器與筆記型電腦



### 3. 實驗數據:

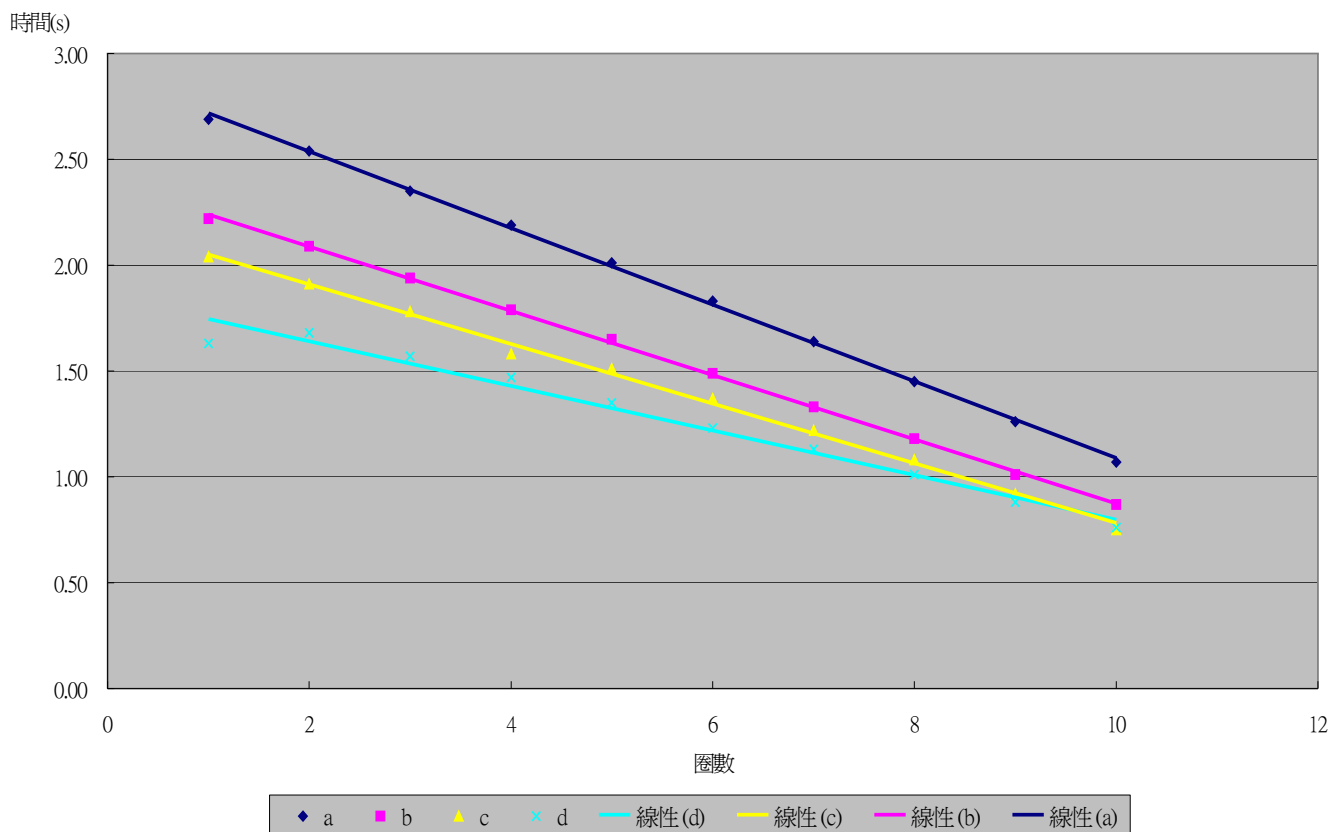
將以上事項付諸執行後,我們進行了 8 次實驗,數據如下:

繩長 0.450m ; 軸半徑 0.00480m

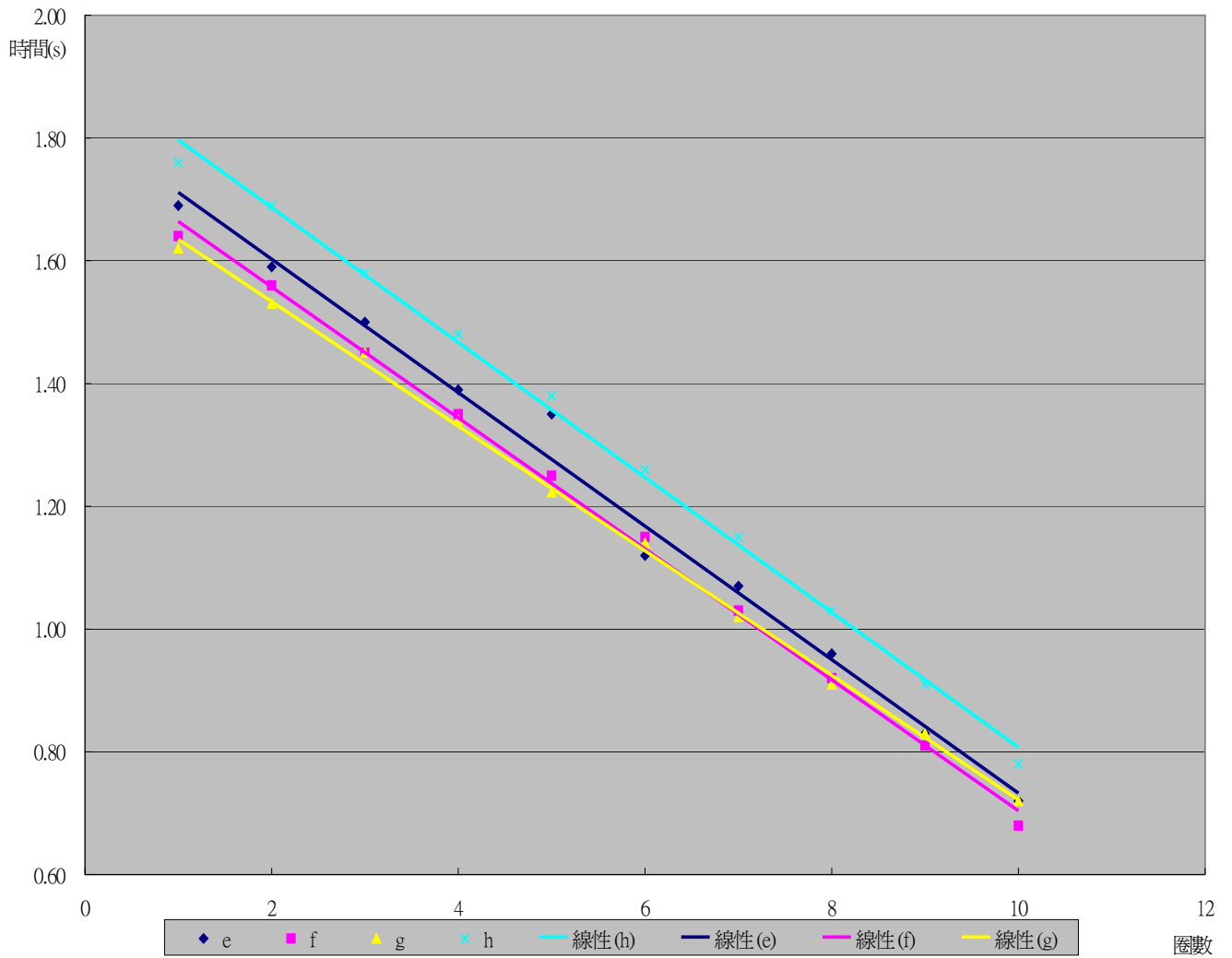
資料筆 圈數	a	b	c	d	e	f	g	h
第 1 圈	2.69	2.22	1.62	1.76	1.69	1.64	2.04	1.63
第 2 圈	2.54	2.09	1.53	1.69	1.59	1.56	1.91	1.68
第 3 圈	2.35	1.94	1.45	1.58	1.5	1.45	1.78	1.57
第 4 圈	2.19	1.79	1.34	1.48	1.39	1.35	1.58	1.47
第 5 圈	2.01	1.65	1.23	1.38	1.35	1.25	1.51	1.35
第 6 圈	1.83	1.49	1.14	1.26	1.12	1.15	1.37	1.23
第 7 圈	1.64	1.33	1.02	1.15	1.07	1.03	1.22	1.13
第 8 圈	1.45	1.18	0.91	1.03	0.96	0.92	1.08	1.01
第 9 圈	1.26	1.01	0.83	0.91	0.83	0.81	0.92	0.88
第 10 圈	1.07	0.87	0.72	0.78	0.72	0.68	0.75	0.76

### 4. 討論:

其中 a、b、c、d 作圖如下:



e、f、g、h的圖形：



(1). 各筆數據幾乎成一直線。這個結果和以速率不變為前提下的公式： $T_N = \frac{2\pi [L_0 - (2N-1)\pi R]}{V}$  是符合的。

(2). 當  $T_N=0$  時， $N = \frac{L_0 + \pi R}{2\pi R}$ ，與初速  $V$  無關。 $T_N=0$  就是上圖各趨勢線的  $x$  截距，故應為一定值。

各趨勢線的  $x$  截距如下表：

	a	b	c	d	e	f	g	h	平均
$x$ 截距	16.0	15.7	17.1	17.3	16.6	16.6	15.5	17.3	16.5

利用式子所導出的值應為： $\frac{0.450 + \pi \times 0.00480}{2\pi \times 0.00480} = 15.4$

結果實測值偏大了些，我們推測這是由於繩子在旋轉過程中受張力而拉長的緣故。回到實驗數據也可發現，第一圈時間較長的 a、b、g，它們的 x 截距也比較接近理論值，第一圈時間較長表示初速較小，繩張力也較小。

(3).圖一在最後一圈交叉，我們推測其在最後一圈時繩張力過大，產生了兩個因素使時間增長：一是繩子伸長了，二是轉軸被繩子拉扯而搖晃（為避免轉軸搖晃的問題，我們已經刪去了最後兩圈被影響較大的數據）。且實驗 d 恰好初速較大，繩張力比其他組大些。

(4). 因垂吊的繩子並非無限長，重錘仍有可能由高度差得到速度。但另有兩個因素可能使速度減少：空氣阻力的作用、繩拉長時所儲存的彈性位能。我們無法估計這些量總計的結果為何，但影響似乎並沒有那麼大。若速度有明顯的改變，則不可能有幾近直線的圖形。

(5). 圖二的線段幾乎在同一個範圍內，使圖形看來稍嫌凌亂。這是因我們原先曾想要控制初速之故。（詳見附錄一）

這個實驗牽涉到的變因比較複雜，而無法獲得如接下來實驗二的精確度，但由實驗結果，我們認為公式  $T_N = \frac{2\pi [L_0 - (2N-1)\pi R]}{V}$  正確。於是便可以說：在無摩擦的情況下，物體的速率確實不變。若單以肉眼觀察，常會誤認為物體的速率越來越快。但這其實只是角速度越來越大所產生的錯覺罷了。



## (二) 實驗二：變形圓周單擺運動測量

1. 目的：測量「變形圓周運動」在鉛直面上的週期。
2. 設計：我們原本希望能夠測量此運動繞一整圈所需的時間，但後來發現要讓擺錘穩定地保持在鉛直面運動並不容易，而且要將實驗一的測量裝置擺放成垂直位置也很困難。所以將實驗稍加修改，只讓擺錘在下半部做來回擺盪（類似單擺的運動）。



↑ 鉛直圓周單擺固定架

### 3. 實驗數據：

資料 (筆)	一			二			三		
	計時器 A	計時器 B	週期	計時器 A	計時器 B	週期	計時器 A	計時器 B	週期
計 時 器 時 間 差 值 (sec)	0.61	0.67	1.28	0.61	0.68	1.29	0.61	0.68	1.29
	0.62	0.68	1.30	0.61	0.68	1.29	0.60	0.68	1.28
	0.62	0.68	1.30	0.60	0.68	1.28	0.61	0.68	1.29
	0.62	0.68	1.30	0.61	0.68	1.29	0.60	0.68	1.28
	0.69	0.68	1.37	0.60	0.67	1.28	0.60	0.68	1.28
	0.60	0.68	1.28	0.60	0.68	1.28	0.60	0.67	1.27
	0.60	0.67	1.27	0.60	0.68	1.28	0.60	0.68	1.28
	0.60	0.67	1.27	0.60	0.68	1.28	0.60	0.68	1.28
	0.60	0.67	1.27	0.60	0.68	1.28	0.60	0.68	1.28
	0.60	0.67	1.27	0.60	0.68	1.28	0.60	0.68	1.28
	0.60	0.67	1.27	0.60	0.67	1.27	0.60	0.68	1.28
	平均週期 = $\frac{42.37}{11 \times 3} = 1.28 \pm 0.02 \text{ (sec)}$								

#### 4. 討論：

在三、(6) 中，已推出週期

$$2 \times \int_{\alpha}^{\beta} \frac{L_0 - R \theta}{\sqrt{2g\{h - [L_0(1 - \cos \theta) + R(\theta \cos \theta - \sin \theta)]\}}} d\theta$$

$$L_0 = 0.365\text{m}, R = 0.0451\text{m}, g = 9.765\text{m/s}^2$$

$$h = 0.148, h(\theta) = L_0(1 - \cos \theta) + R(\theta \cos \theta - \sin \theta)$$

$$\text{令 } \alpha \leq \theta \leq \beta \text{ (以收繩爲正向), } h = h(\alpha) = h(\beta)$$

又必須使  $\sqrt{2g(h-h(\theta))}$  有意義

→ 對於所有的  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ ,  $h-h(\theta) \geq 0$

→ 使用逼近法求得  $\alpha = -0.899341$ ,  $\beta = 0.976804$

$$(h(\alpha) = 0.1479999484, h(\beta) = 0.1479998496)$$

由於此積分並不容易，故使用程式（請參考附錄三）進行數值積分：

$$2 \times \int_{-0.899341}^{0.976804} \frac{0.365 - 0.0451 \theta}{\sqrt{2g [0.148 - (0.365(1 - \cos \theta) + 0.0451(\theta \cos \theta - \sin \theta))]} d\theta$$

$= 1.28279\ 95825$       數值積分，分割度（取樣數） $\approx 2^{30} \approx 10^9$ （十億）

$\approx 1.28$

測量所得的週期爲 1.28 秒，與理論值可說是完全符合。

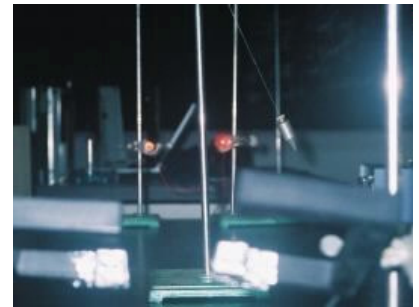
若我們嘗試比較出相對誤差，在此對有效位數採取非正規，多取一位的做法：

測量值 = 1.28394 秒 → 取到 1.284 秒

運算值 = 1.28279 秒 → 取到 1.283 秒

$$\text{相對誤差} = |1.283 - 1.284| / 1.283 = 0.078\%$$

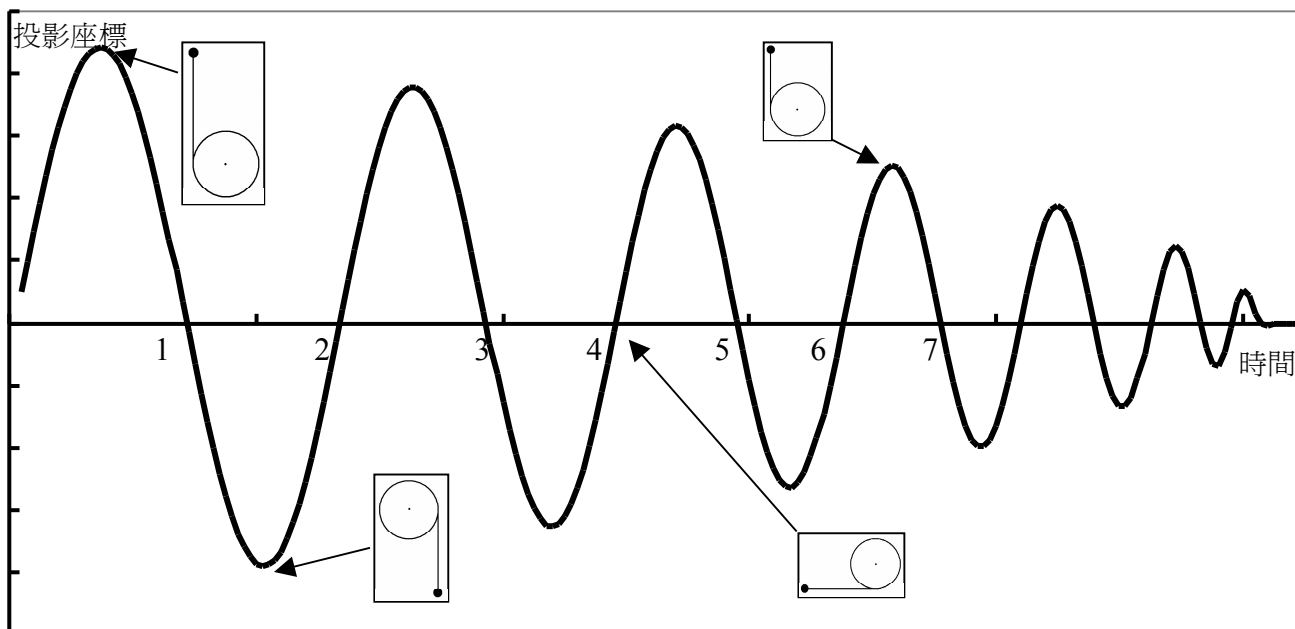
相對誤差僅 0.078%（不到千分之一），以光電計時器最小計至百分之一秒來看，可說是完全沒有誤差，所以將水平面推至垂直面的嘗試應該算是非常成功的。



↑ 鉛直圓周單擺實做

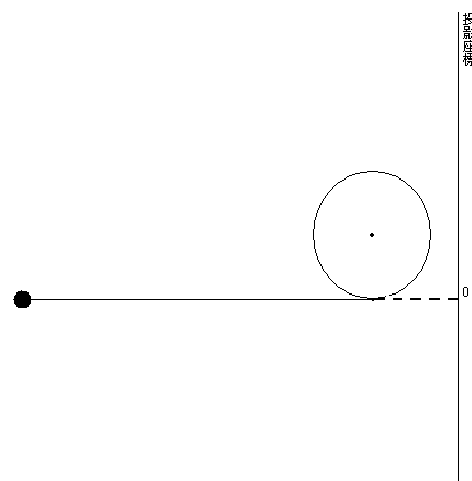
## 陸、 討論

在經實驗證實後，我們繪製了線性半徑非典型圓周運動中一些物理量的關係圖，以更加了解這種運動的特性。

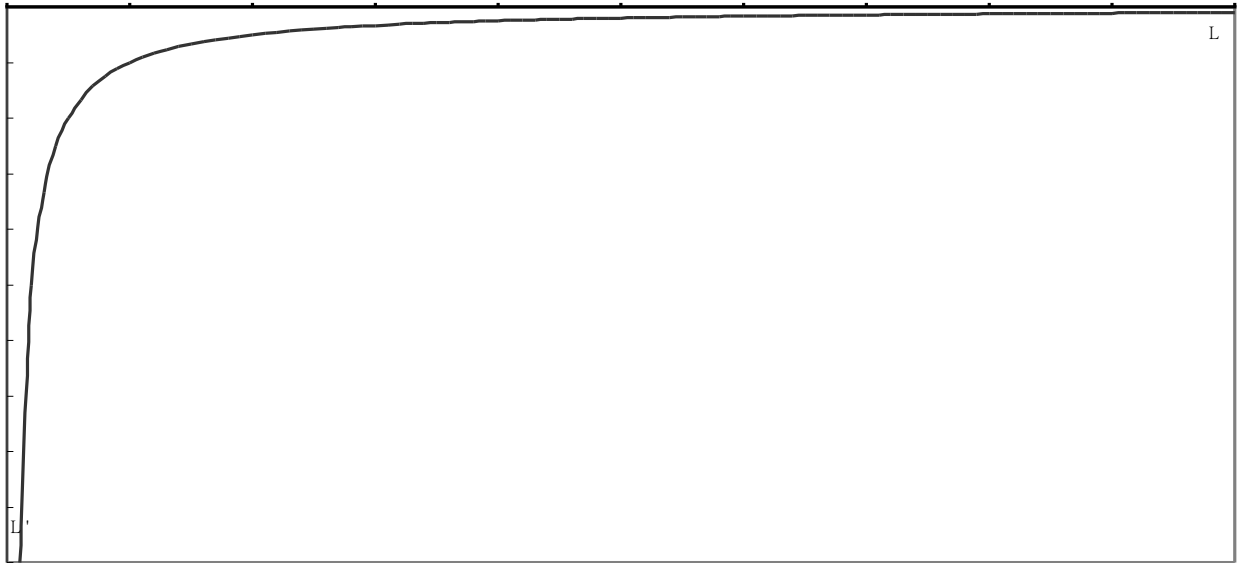


上圖是在水平無摩擦狀況下物體在某一方向的投影和時間關係圖。我們設定的座標軸與時間=0時的繩方向垂直，且指向收繩端。並規定時間=0，投影座標=0。如右圖所示。

如此設定的好處有兩項：一是每偶數次回到座標=0的時距為「轉第  $N$  圈所需時間」，即  $T_N$  (上圖時間軸旁所示之數字即回到座標=0的次數，如第2次與第4次的時間差即為第二圈所需時間)。二是每次座標達極值時，其大小應成等差。



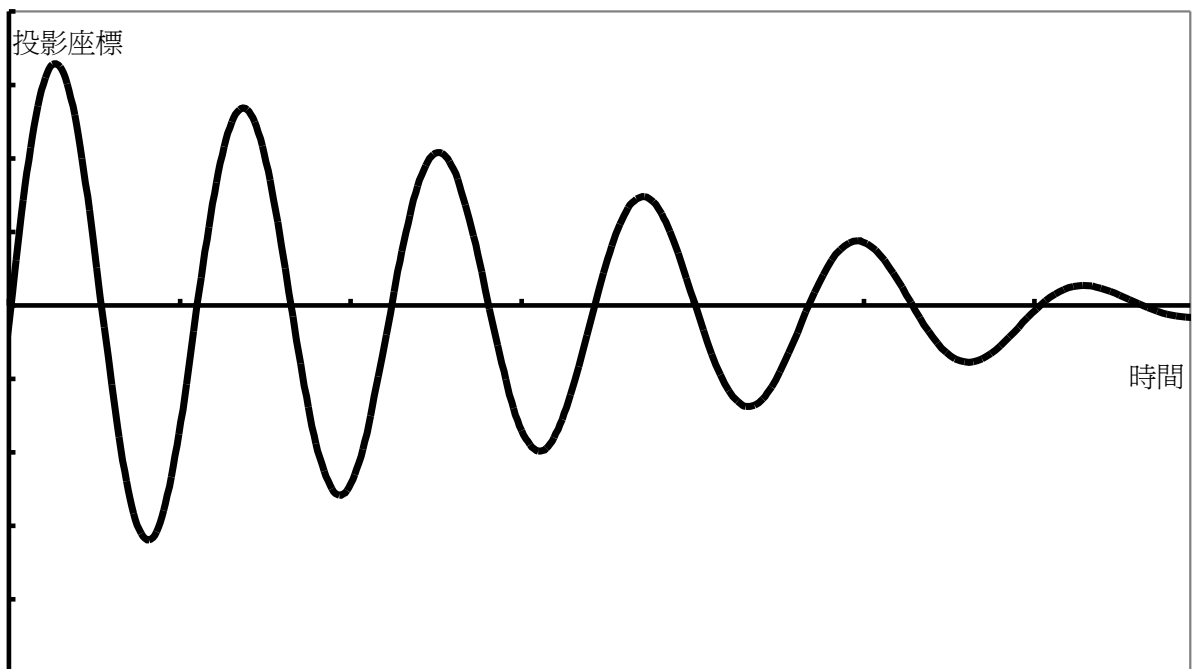
得到的結果就是如上一個類似震盪的圖形。最後物體應停留在  $R$  與  $-R$  之間，不一定在座標=0處。



水平無摩擦時的繩長  $L$  和  $\frac{dL}{dt}$  關係圖。

這是一個反比曲線，關係式為  $L \times \frac{dL}{dt} = -RV$

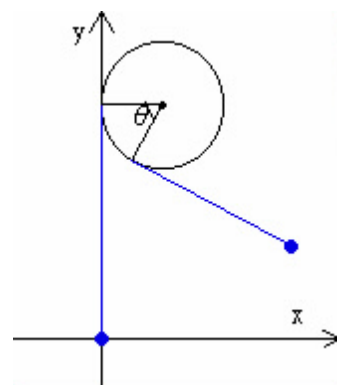
由  $dL = -Rd\theta$ ，且  $d\theta = \frac{Vdt}{L}$ ，代入後就是  $L \times \frac{dL}{dt} = -RV$ 。當物體逐漸旋進時，收繩的速率也越來越快。



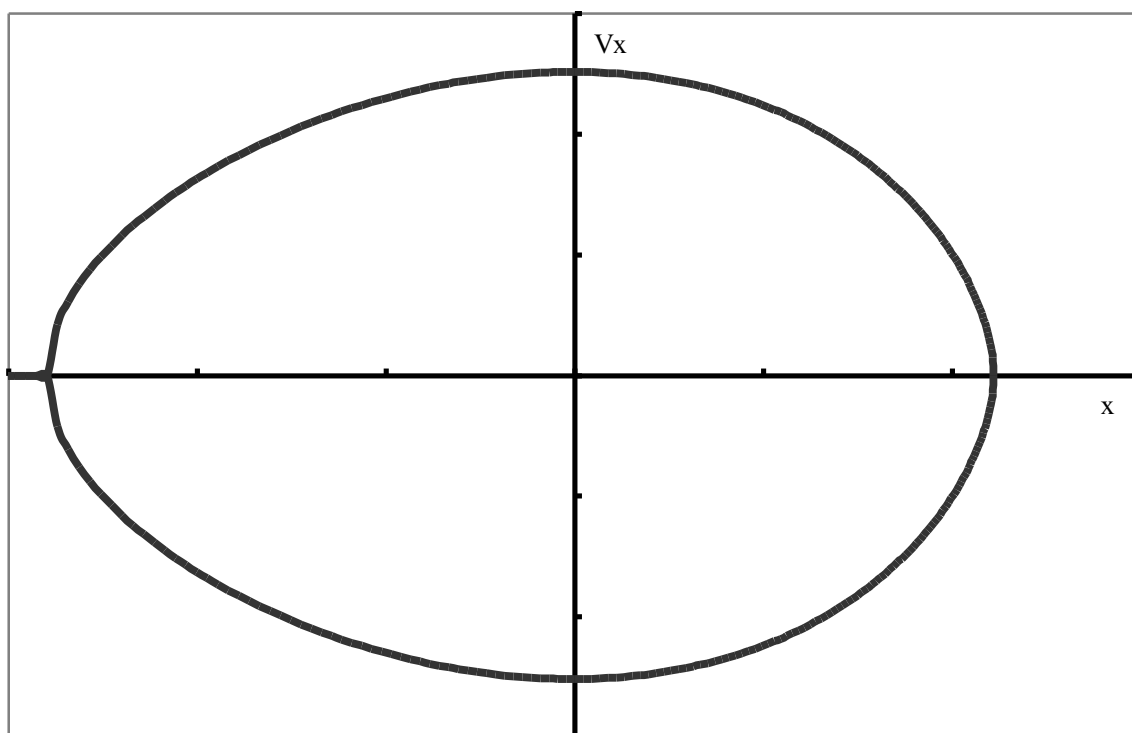


有摩擦力的情況下，物體作線性半徑非典型圓周運動在某一方向的投影與時間關係圖。投影座標的設定都與無摩擦的圖相同。

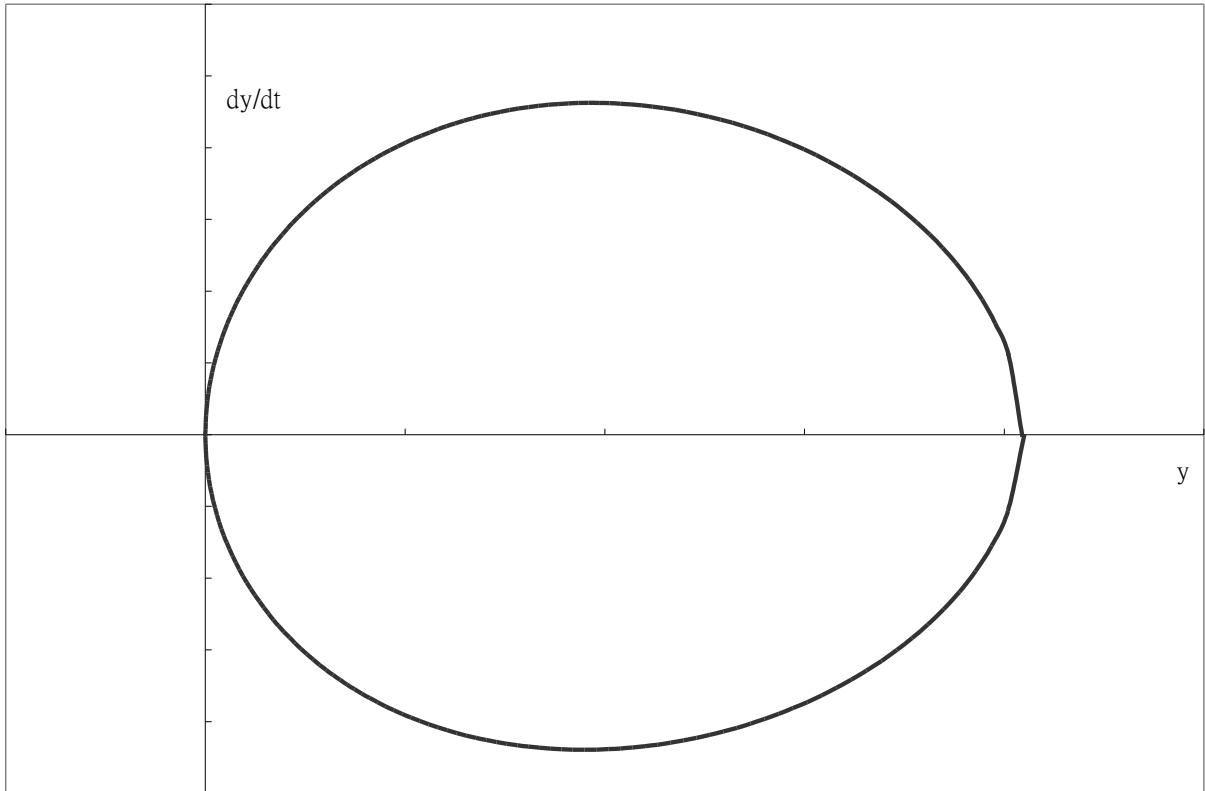
投影座標的極值仍呈等差數列，轉第  $N$  圈所需時間依初速與摩擦力大小不同，可能呈現先遞減後遞增、一直遞增、或一直遞減。(上圖所示為遞增關係)



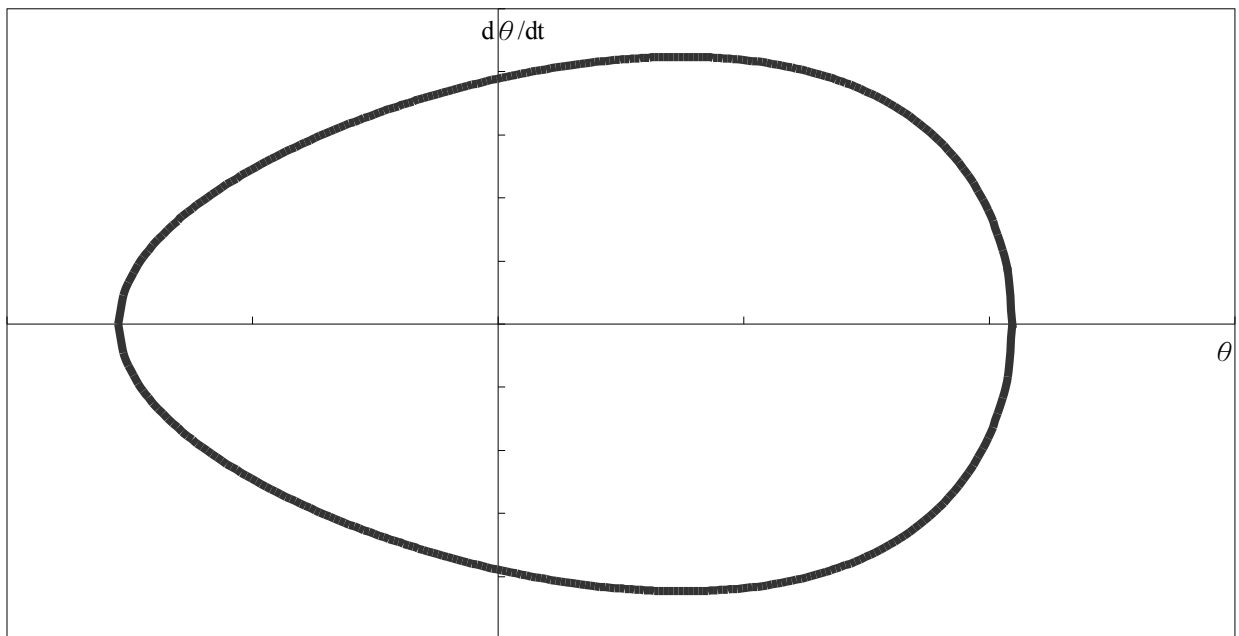
以下四張圖是「變形單擺運動」的一些量的關係圖，爲了表示方便我們規定了一套座標，其各項設定都如右圖所示(圖中藍色圓點即爲擺錘)。由於變形單擺運動有收繩和放繩端，繪出的圖形左右不對稱。



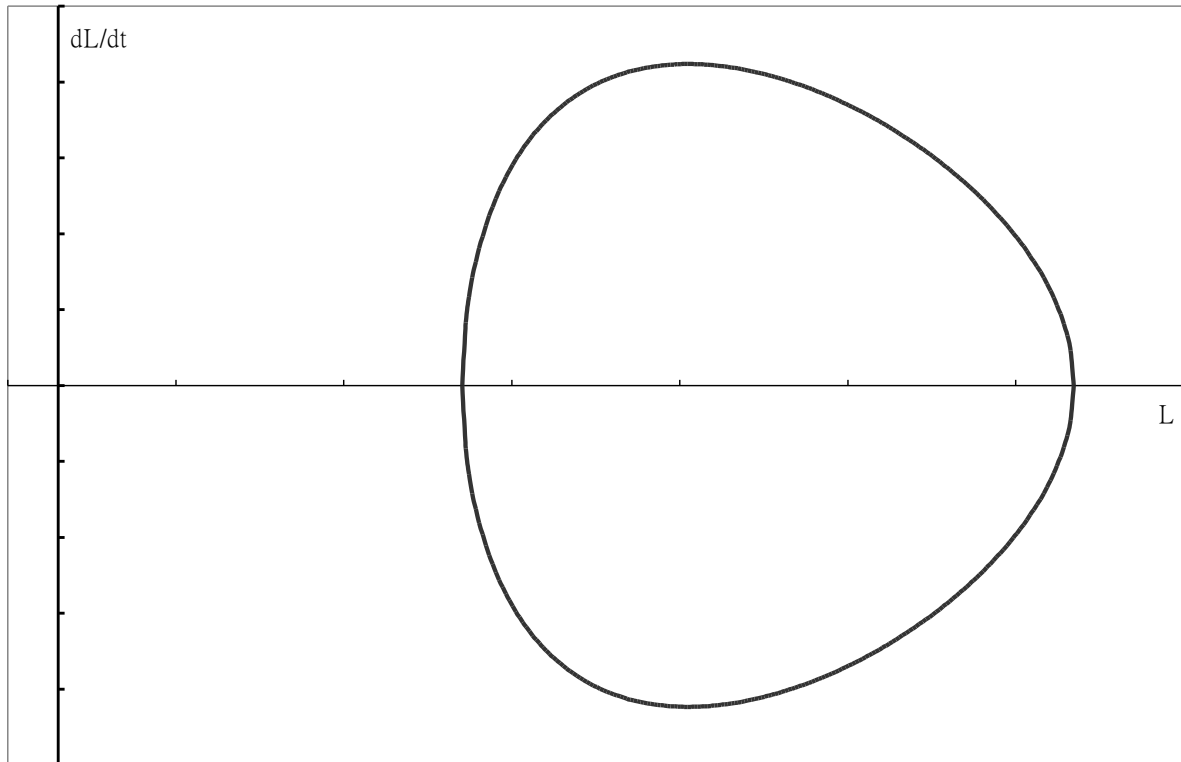
↑圖 1. 「變形單擺運動」的水平速度與水平位置的關係



↑ 圖 2. 「變形單擺運動」的垂直速度與垂直位置的關係圖



↑ 圖 3. 「變形單擺運動」的圓心角  $\theta$  與  $\frac{d\theta}{dt}$  的關係圖。



↑ 圖 4. 「變形單擺運動」的繩長  $L$  與  $\frac{dL}{dt}$  的關係圖。

圖 1.和圖 2.是速度－位置圖，封閉的曲線表示物體在做此運動時力學能守恆。圖 1.的左右是不對稱的，在左半部、 $x$  為負值時，物體可以到達較遠的距離。變形單擺運動時，在放繩端可離平衡位置較遠。

圖 3.的極值並非發生在  $\theta = 0$  的時候。當物體運動是往收繩端時，其速度減小，但相對的繩長也變小了，這兩項因素合起來的影響使  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{L}$  先變大後變小，於是極值便在收繩端上的某一處。

圖 4.也是一樣的道理，因為  $\frac{dL}{dt} = -R \frac{d\theta}{dt}$ ，故  $\frac{dL}{dt}$  的極值並非發生在  $L=L_0$  時，而是比  $L_0$  稍小些。

當繩長遠大於軸半徑，或擺角很小時，「變形單擺運動」可視為一般單擺，以上四圖也會是對稱的圖形。

## 柒、 結論

### 一. 光電計時器和雷射筆組合起的計時裝置是可行的：

能夠克服光電計時器的發射端子和接收端子距離過短，無法測量大型物體或不易預測的軌跡所產生的問題。且除了光電計時器外的器材都很容易以低廉的價格取得。

### 二. 得到「變形圓周運動」在水平無摩擦狀態下的速度、旋轉時間等之間的關係：

雖然實驗一有些潛在的誤差，但繪出的圖形很明顯的表示出圈數—時間的關係是呈現等差的。討論誤差後，我們認為原理推導中所得的關係是正確的。

### 三. 得到「變形圓周單擺運動」的擺角、週期間的關係：

實驗二的準確度即可說明這一點。但有些遺憾的是無法得到一個能直接寫出的關係式。雖然我們並未測量完整繞完一圈的週期，但它的特殊情況（也就是這個實驗）應可證實我們所導出式子的可信度頗高。

## 捌、 參考資料

李怡巖            大學物理學（一）            東華書局出版

國立編譯館      高中物質科學物理篇（上冊）            國立編譯館

國立台灣科學教育館      中小學科展優勝作品專輯（第二十一屆至三十屆）  
高中組 物理科 合訂本            國立台灣科學教育館

## 玖、 附錄

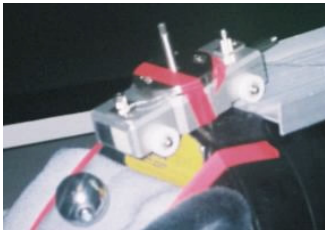
### 一、 初速控制

我們原本規劃了一個控制初速的方法，後因效果不佳而作罷。以下是我們當初的想法：

利用學校實驗室的力學滑車由斜面滑下撞擊擺錘。並測出擺錘的初速，而後應用於實驗中控制初速。

測定此初速的方法是先在桌面撞擊，利用水平拋體公式。隨後改變滑車質量（添加砝碼）以得不同的初速。

實驗後雖然直接碰撞的數字看起來還算準確，但一把這套方法用在實驗二中時，產生數字的差別頗大。我們推測這可能和垂直懸吊的繩子影響、非彈性碰撞能量轉移不均有關。經過一番嘗試後，我們無法克服這個問題。因想不出其他有效的辦法，我們只好直接將每筆數據作圖、討論。



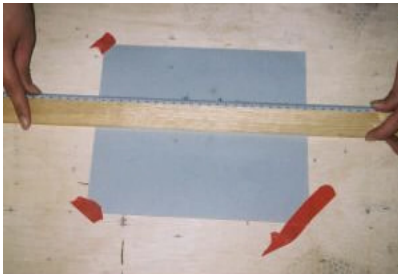
↑ 衝撞途中



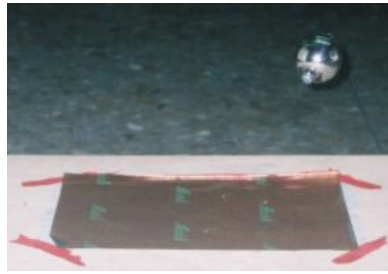
↑ 衝撞途中



↑ 等待撞擊



↑ 測量落點



↑ 掉落途中（非常幸運的拍到）

## 二、 實驗二（鉛直面變形圓周單擺）之積分程式

```
/*
使用 ANSI C 語法

已知條件之鉛直面螺線單擺週期
數值積分
採中點法則
*/

#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define H      0.148
#define L      0.365
#define R      0.0451
#define g      9.765
#define h(x)   L*(1-cos(x))+R*(x*cos(x)-sin(x))

#define a      -0.899341 /* h(a)= 0.1479999484 */
#define b      0.976804 /* h(b)= 0.1479998496 */

double func( double x ){

    return (L-R*x) / sqrt(2*g*( H-(h(x)) )) ;
}

int main(void){

    double x, dx ;
    long double sum ;
    int piece ;

    /* 輸入數值 */
    printf("輸入分割度 2^n 條:\n") ;
    scanf("%d", &piece) ;

    /* 設定 dx */
    for( dx=b-a; piece>0; piece-- )
        dx /= 2 ;

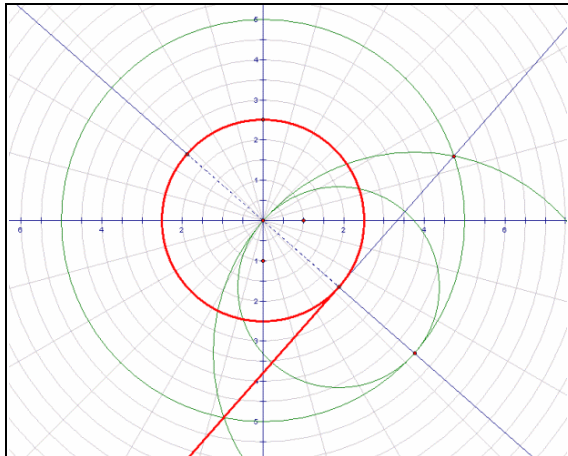
    /* 累積 f(x) a --> b */
    for( sum=0, x=(a+dx/2) ; x<b; x += dx )
        sum += func(x) ;

    /* 乘 dx */
    sum *= dx ;
    sum *= 2 ;

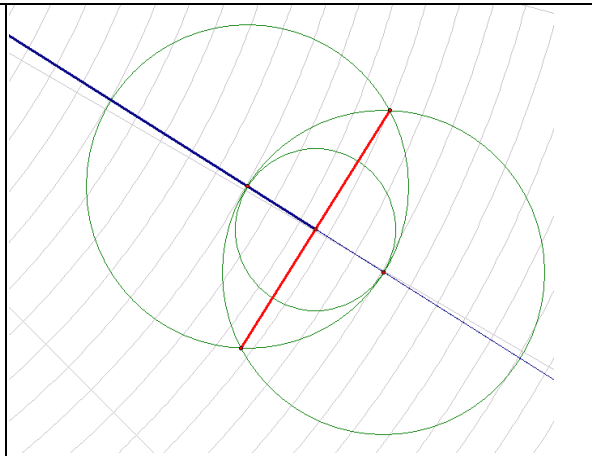
    /* 輸出 */
    printf("理論週期: %.10f", sum) ;

    return 0 ;
}
```

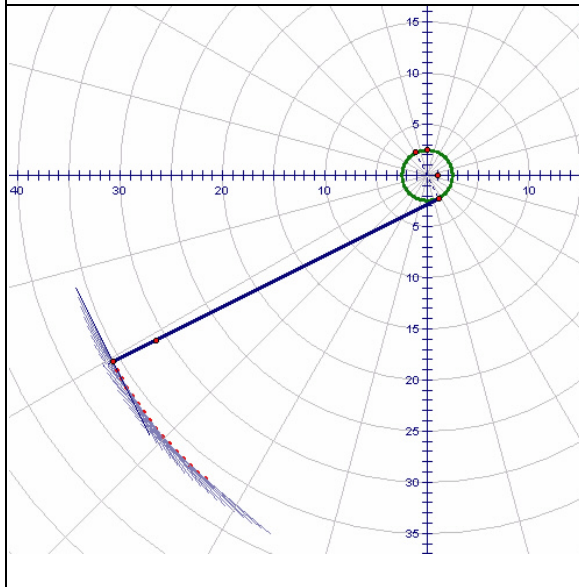
### 三、 GSP 所繪之軌跡



↑ 在中心畫出軸（紅色圓圈，往後為綠色），並以尺規作出一條切線（紅色線，即繩子，往後為藍色）。

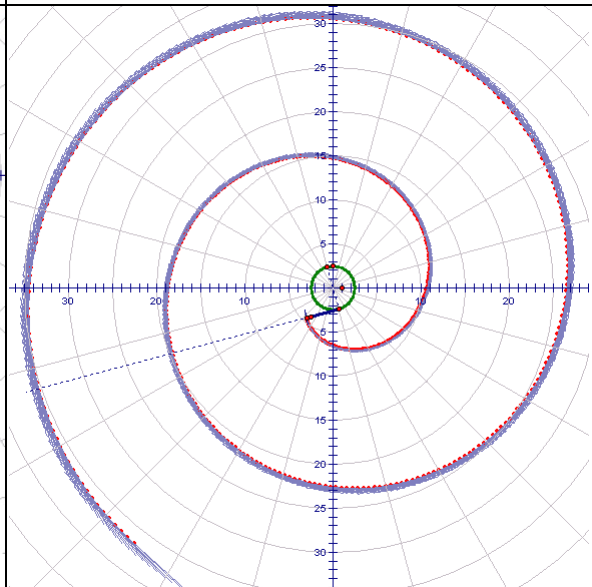


↑ 在繩子（藍色者）的另一端，以尺規作出垂直線（紅色者，即日後之切線，往後為藍色），



↑ 隱藏不必要的參考點和輔助線。將端點及垂直線設為” Trace Point”（紅色痕跡）與” Trace Segment”（藍色痕跡），並設定動作：

1. 端點朝切點移動。
2. 切點沿圓周以收線方向移動。
3. 兩者移動速率相同。



↑ 利用前述 1. 2. 3.點，便可模擬收線的情況。切線設定的越短，Trace 出的路徑便越細緻。



## 評語

040106 高中組物理科

線性半徑非典型圓周運動

本作品討論變形圓周運動，以在支點增設曲率的方式，改變圓運動的形變。作品內容完整，但所採用的實驗裝置較缺乏創意，且探討主題亦缺乏新意，應可應用於較非傳統的主題。