中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030424

臺中縣立大甲國民中學

指導老師姓名

楊禮謙

作者姓名

吳欣怡

劉育廷

黃盈諳

康博瑜

中華民國第　44　屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

作品名稱：幾何之美----美術磚的樣式與規律

關 鍵 詞：<u>正多邊形</u>、<u>美術磚</u>、<u>密鋪</u>

編號：

目　　　　　　錄

幾何之美----美術磚的樣式與規律

壹、研究動機

猶記得老師上到第三章數與形的樣式與規律時，曾拿她親自做的拼布作品給我們看，震撼之餘又深深爲此幾何拼湊之美而著迷，知道說在我們生活週遭也感受到很多建築物的設計樣式都採用幾何圖形來拼湊，尤其在地板、牆壁的樣式，而且大多選擇採用許多正多邊形來拼湊，例如：正方形、正六邊形…等，我們就很好奇要完成這樣的幾何圖形拼湊是不是任何一種正多邊形都可以完成這樣的鋪貼？老師就鼓勵我們利用此學期教的幾何圖形性質及幾何圖形的變動來推導其可能情形及爲什麼？於是我們就找了幾個志同道合同學組成一個研究小組試著來做。

貳、研究目的

希望能從幾何的推導中，尋找出可以用多少不同種形狀的正多邊形來密舖一平面規律樣式的美術磚圖形，且只接合於一點及爲什麼只會有有限個情形？

參、研究過程及方法

一、先備知識

（一）多邊形的外角和與內角和

1.任意多邊形的一組外角和都是 360°

2.任意多邊形的內角和爲（n-2）×180°=n×180°-2×180°【利用乘法對減法的分配律】

=n×180°-360°

（二）正 n 邊形長度與角度的變動

1、 每邊長度相等，而且每個內角的度數也相等的多邊形就叫做正多邊形。

2、 正 n 邊形內角和=n×180°-360°

3、 正 n 邊形每一內角

$$=\frac{(n-2)\times180^\circ}{n}=\frac{n\times180^\circ-360^\circ}{n}=\frac{n\times180^\circ}{n}-\frac{360^\circ}{n}=180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$$

4、 正 n 邊形每一外角= $\frac{360^\circ}{n}$

說明：因爲正多邊形每一內角角度都相同，且一外角+一內角=平角 180°，每一外角角度=180°-內角，故正多邊形每一外角角度也都相同。

二、研究過程

（一） 規則

爲了要以同樣的圖形來密舖一平面，這些美術磚的樣式須具備以下的特性：

1. 必須接合於一點，表示此圖形樣式共用一公用頂點，即所有內角角度的和爲 360°。
2. 參與使用的所有正多邊形邊長一定都要等長，但因圖形樣式規律與邊長大小無關，故邊長可任意規定長短。

（二） 說明

考慮組合樣式的多變性，故決定採取漸進方式來進行探討，從一種正多邊形組合探究到 K 組不同正多邊形組合樣式（$K\geq 1$，$K\in N$），推論如下所述：

1. K=1,一組樣式圖形僅包含一種正多邊形

設 a 個正 n 邊形在平面一點接合（$a\in N$），已知正 n 邊形的每一內角是 $[(n-2)\times 180°]\div n$ ，因此，$a\times[(n-2)\times 180°]\div n=360°$ ，

an-2a-2n=0，

an-2a-2n＋4=4（利用等量公理原則，左右兩邊同時加上 4，來進行因式分解），

a(n-2)-2(n-2)=4（利用分組分解進行因式分解），

（n-2）（a-2）=4，其中 n＞2，由此可推得出下【表一】的三組解，故可知一組樣式圖形僅包含一種正多邊形能鋪貼出一個公用點的可能情形有三組。

組別	（n-2） ×（a-2）		正 n 邊形（n）	a（個）
A	1	4	3	6
B	2	2	4	4
C	4	1	6	3

【表一：一組樣式圖形僅包含一種正多邊形】

邊數(n)	每一內角	邊數(n)	每一內角
3	60°	24	165°
4	90°	30	168°
5	108°	36	170°
6	120°	40	171°
8	135°	45	172°
9	140°	60	174°
10	144°	72	175°
12	150°	90	176°
15	156°	120	177°
18	160°	180	178°
20	162°	360	179°

【表二：正多邊形內角爲整數的角度總表】

2.K=2,一組樣式圖形僅包含兩種正多邊形

設 a 個正 n 邊形及 b 個正 m 邊形在平面一點接合，已知正 n 邊形的每一內角是 $[(n-2)\times 180°]\div n$ ；正 m 邊形的每一內角是 $[(m-2)\times 180°]\div m$ ，因此，

$$a\times\left[\frac{(n-2)\times 180°}{n}\right]+b\times\left[\frac{(m-2)\times 180°}{m}\right]=360° \quad （同除 180°）$$

$$a\times\left[\frac{(n-2)}{n}\right]+b\times\left[\frac{(m-2)\times}{m}\right]=2$$

$$a\times\left(1-\frac{2}{n}\right)+b\times\left(1-\frac{2}{m}\right)=2$$ （2＜n＜m≤12 ，a、b、n、m∈N ）

爲什麼一組樣式圖形包含兩種正多邊形的邊數最多使用到正 12 邊形？

∴　一外角+一內角=平角（180°）

∵　一內角角度＜180°，從【表二：正多邊形內角爲整數的角度總表】可知邊數愈多則每一內角角度愈接近 180°，假設選取邊數最少的正三角形作爲第一種圖形，一個正Δ ⇒ 60°+$\boxed{300°}$=360°，300°＞180°故代表另一正多邊形必定是有 2 個重複以上，如果只有 2 個一樣的圖形，則表示每一正多邊形角度必爲 150°，從【表一：正多邊形內角爲整數的角度總表】得知該邊數爲 12，可知一組樣式圖形包含兩種正多邊形的邊數最多使用到正 12 邊形，其餘則確定無法拼湊出。

（1） 若 n=3，m=4 時

$$\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b=2 \quad （\times 6）$$

$$2a+3b=12$$

3b=12-2a

b=$\dfrac{(12-2a)}{3}=\dfrac{2(6-a)}{3}$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	3	$\frac{10}{3}$	4	
2	3	$\frac{8}{3}$	4	
3	3	2	4	√
4	3	$\frac{4}{3}$	4	
5	3	$\frac{2}{3}$	4	
6	3	0	4	

（2） 當 n=3，m=5 時

$$\frac{1}{3}a+\frac{3}{5}b=2$$

$$5a+9b=30 \quad （\times 15）$$

$$9b=30-5a$$

$$b=\frac{(30-5a)}{9}=\frac{5(6-a)}{9}$$

∵$6-a$ 不爲 9 的倍數　∴b 無正整數解

（3） 當 n=3，m=6 時

$\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b=2$ （×3）

$a+2b=6$

2b=6-a

b=$\frac{(6-a)}{2}$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	3	$\frac{5}{2}$	6	
2	3	2	6	√
3	3	$\frac{3}{2}$	6	
4	3	1	6	√
5	3	$\frac{1}{2}$	6	
6	3	0	6	

（4）當 n=3，m=7 時

$\frac{1}{3}a+\frac{5}{7}b=2$ （×21）

$7a+15b=42$

15b=42-7a

b=$\frac{7(6-a)}{15}$ $\because 6-a$ 不為 15 的倍數 $\therefore$ b 無正整數

（5）當 n=3，m=8 時

$\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}b=2$ （×12）

$4a+9b=24$

9b=24-4a

b=$\frac{4(6-a)}{9}$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	3	$\frac{20}{9}$	8	
2	3	$\frac{16}{9}$	8	
3	3	$\frac{12}{9}$	8	
4	3	$\frac{8}{9}$	8	
5	3	$\frac{4}{9}$	8	

（6）當 n=3，m=9 時

$\frac{1}{3}a+\frac{7}{9}b=2$ （×9）

$3a+7b=18$

7b=18-3a

b=$\frac{3(6-a)}{7}$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	3	$\frac{15}{7}$	9	
2	3	$\frac{12}{7}$	9	
3	3	$\frac{9}{7}$	9	
4	3	$\frac{6}{7}$	9	
5	3	$\frac{3}{7}$	9	
6	3	0	9	

（7）當 n=3，m=10 時

$$\frac{1}{3}a+\frac{4}{5}b=2 \qquad (\times 15)$$

$$5a+12b=30$$

12b=30-5a

b=$\dfrac{5(6-a)}{12}$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	3	$\frac{25}{12}$	10	
2	3	$\frac{20}{12}$	10	
3	3	$\frac{15}{12}$	10	
4	3	$\frac{10}{12}$	10	
5	3	$\frac{5}{12}$	10	
6	3	0	10	

（8）當 n=3，m=11 時

$$\frac{1}{3}a+\frac{9}{11}b=2 \qquad (\times 33)$$

$$11a+27b=66$$

27b=66-11a

b=$\dfrac{11(6-a)}{27}$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	3	$\frac{55}{27}$	11	
2	3	$\frac{44}{27}$	11	
3	3	$\frac{33}{27}$	11	
4	3	$\frac{22}{27}$	11	
5	3	$\frac{11}{27}$	11	
6	3	0	11	

（9）當 n=3，m=12 時

$$\frac{1}{3}a+\frac{5}{6}b=2$$

$$2a+5b=12 \qquad (\times 6)$$

$$5b=12-2a$$

$$b=\frac{(12-2a)}{5}=\frac{2(6-a)}{5}$$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	3	2	12	√
2	3	$\frac{8}{5}$	12	
3	3	$\frac{6}{5}$	12	
4	3	$\frac{4}{5}$	12	
5	3	$\frac{2}{5}$	12	

（10）當 n=4，m=5 時

$$\frac{1}{2}a+\frac{3}{5}b=2$$

$$5a+6b=20 \qquad (\times 10)$$

$$6b=20-5a$$

$$b=\frac{(20-5a)}{6}=\frac{5(6-a)}{6}$$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	4	$\frac{5}{2}$	5	
2	4	$\frac{5}{3}$	5	
3	4	$\frac{5}{6}$	5	

（11）當 n=4，m=6 時

$$\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b=2$$

$$3a+4b=12 \qquad (\times 6)$$

$$4b=12-3a$$

$$b=\frac{(12-3a)}{4}=\frac{3(4-a)}{4}$$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	4	$\frac{9}{4}$	6	
2	4	$\frac{3}{2}$	6	
3	4	$\frac{3}{4}$	6	

（12）當 n=4，m=7 時

$$\frac{1}{2}a+\frac{5}{7}b=2$$

$$7a+10b=28 \qquad (\times 14)$$

$$10b=28-7a$$

$$b=\frac{(28-7a)}{10}=\frac{7(4-a)}{10}$$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	4	$\frac{21}{10}$	7	
2	4	$\frac{7}{5}$	7	
3	4	$\frac{7}{10}$	7	

（13）當 n=4，m=8 時

$$\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b=2$$

$$4a+6b=16 \qquad (\times 8)$$

$$6b=16-4a$$

$$b=\frac{(16-4a)}{6}=\frac{4(4-a)}{6}$$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	4	2	8	√
2	4	$\frac{4}{3}$	8	
3	4	$\frac{2}{3}$	8	

（14）當 n=4，m=9 時

$$\frac{1}{2}a+\frac{7}{9}b=2$$

$$9a+14b=36 \qquad (\times 18)$$

$$14b=36-9a$$

$$b=\frac{(36-9a)}{14}=\frac{9(4-a)}{14}$$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	4	$\frac{27}{14}$	9	
2	4	$\frac{9}{7}$	9	
3	4	$\frac{9}{14}$	9	

（15）當 n=4，m=10 時

$$\frac{1}{2}a+\frac{4}{5}b=2$$

$$5a+8b=20 \qquad (\times 10)$$

$$8b=20-5a$$

$$b=\frac{(20-5a)}{8}=\frac{5(4-a)}{8}$$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	4	$\frac{15}{8}$	10	
2	4	$\frac{5}{4}$	10	
3	4	$\frac{5}{8}$	10	

（16）當 n=4，m=11 時

$$\frac{1}{2}a+\frac{9}{11}b=2$$

$$11a+18b=44 \qquad (\times 22)$$

$$18b=44-11a$$

$$b=\frac{(44-11a)}{18}=\frac{11(4-a)}{18}$$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	4	$\frac{11}{6}$	11	
2	4	$\frac{11}{9}$	11	
3	4	$\frac{11}{18}$	11	

（17）當 n=4，m=12 時

$$\frac{1}{2}a+\frac{5}{6}b=2$$

$$3a+5b=12 \qquad (\times 6)$$

$$5b=12-3a$$

$$b=\frac{(12-a)}{5}=\frac{3(4-a)}{5}$$

a	n	b	m	備註【成立打√】
1	4	$\frac{9}{5}$	12	
2	4	$\frac{6}{5}$	12	
3	4	$\frac{3}{5}$	12	

(18) 當 n=5, m=6 時

$$\frac{3}{5}a+\frac{2}{3}b=2 \qquad (\times 15)$$

9a+10b=30

a	n	b	m	備註　【成立打∨】
1	5	$\frac{21}{10}$	6	
2	5	$\frac{6}{5}$	6	
3	5	$\frac{3}{10}$	6	

（19）當 n=5, m=7 時

$$\frac{3}{5}a+\frac{5}{7}b=2 \qquad (\times 35)$$

21a+25b=70

a	n	b	m	備註　【成立打∨】
1	5	$\frac{49}{25}$	7	
2	5	$\frac{28}{25}$	7	
3	5	$\frac{7}{25}$	7	

(20) 當 n=5, m=8 時

$$\frac{3}{5}a+\frac{3}{4}b=2 \qquad (\times 20)$$

12a+15b=40

a	n	b	m	備註　【成立打∨】
1	5	$\frac{28}{15}$	8	
2	5	$\frac{16}{15}$	8	
3	5	$\frac{4}{15}$	8	

(21) 當 n=5,m=9 時

$$\frac{3}{5}a+\frac{7}{9}b=2 \qquad (\times 45)$$

27a+35b=90

a	n	b	m	備註 【成立打∨】
1	5	$\frac{9}{5}$	9	
2	5	$\frac{36}{35}$	9	
3	5	$\frac{9}{35}$	9	

(22) 當 n=5, m=10 時

$$\frac{3}{5}a+\frac{4}{5}b=2$$

3a+4b=10 (×5)

2a=10-4b

a	n	b	m	備註 【成立打∨】
1	5	$\frac{7}{4}$	10	
2	5	1	10	∨
3	5	$\frac{1}{4}$	10	

.

.

.

.

(44) 當 n=10, m=12 時

$$\frac{4}{5}a+\frac{5}{6}b=2 \qquad (\times 30)$$

24a+25b=60

a	n	b	m	備註【成立打∨】
1	10	$\frac{36}{25}$	12	
2	10	$\frac{12}{25}$	12	

(45) 當 n=11, m=12

$$\frac{9}{11}a+\frac{5}{6}b=2 \qquad (\times 66)$$

54a+55b=132

a	n	b	m	備註【成立打∨】
1	11	$\frac{78}{55}$	12	
2	11	$\frac{24}{55}$	12	

故兩種圖形可鋪貼出一共用點的情形有以下六種組合。

組別	個數（a）	邊數（n）	個數（b）	邊數（m）
D	3	3	2	4
E	2	3	2	6
F	4	3	1	6
G	1	3	2	12
H	1	4	2	8
I	2	5	1	10

【表三：一組樣式圖形包含兩種正多邊形】

3.K=3,一組樣式圖形包含三種正多邊形

設 a 個正 n 邊形、b 個正 m 邊形及 c 個正 l 邊形在平面一點接合，已知正 n 邊形的每一內角是$[(n-2)\times180°]\div n$；正 m 邊形的每一內角是$[(m-2)\times180°]\div m$；正 l 邊形的每一內角是$[(l-2)\times180°]\div l$，因此，

$$a\times\left[\frac{(n-2)\times180°}{n}\right]+b\times\left[\frac{(m-2)\times180°}{m}\right]+c\times\left[\frac{(l-2)\times180°}{l}\right]=360° \quad \text{（同除 180°）}$$

$$a\times\left[\frac{(n-2)}{n}\right]+b\times\left[\frac{(m-2)}{m}\right]+c\times\left[\frac{(l-2)}{l}\right]=2$$

$$a\times\left(1-\frac{2}{n}\right)+b\times\left(1-\frac{2}{m}\right)+c\times\left(1-\frac{2}{l}\right)=2$$ （$2<n<m<l\le 24$，a、b、n、m、c、l$\in N$）

為什麼一組樣式圖形包含兩種正多邊形的邊數最多使用到正 24 邊形？

∵假設選取邊數最少的正三角形、正方形作為第一種圖形，

①一個正Δ＋一個正方形 ⇨

60°＋90°+$\boxed{210°}$=360°，210°＞180°故代表另一正多邊形必定是有 2 個重複以上。

②一個正Δ＋一個正五邊形 ⇨

60°＋108°+$\boxed{192°}$=360°，192°＞180°故代表另一正多邊形必定是有 2 個重複以上。

③一個正Δ＋一個正六邊形 ⇨

60°＋120°+$\boxed{180°}$=360°，180°=180°故代表另一正多邊形必定是有 2 個重複以上。

④一個正Δ＋一個正八邊形 ⇨

60°＋135°+$\boxed{165°}$=360°，165°＜180°故代表第三個正多邊形必定可以有 1 個重複以上。

∴165°為正二十四邊形的一個內角角度，代表第三個正多邊形的圖形邊數最多到第二十四邊。

（1）若 n=3，m=4，l=5

$\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+\frac{3}{5}c=2$ （×30）

10a+15b+18c=60

當 a=1 時

15b+18c=50

18c=50-15b

c=$\frac{5(10-3b)}{18}$ ∵$10-3b$不為 18 的倍數 ∴c 無正整數解

當 a=2 時

15b+18c=40

18c=40-15b

c=$\dfrac{5(8-3b)}{18}$　　$\because 8-3b$ 不為 18 的倍數　$\therefore$c 亦無正整數解

……………….由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不為 18 的倍數，因此推論邊數為 3、4、5 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形。

（2）若 n=3，m=4，l=6

$\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+\frac{2}{3}c=2$　（×6）

2a+3b+4c=12

當 a=1 時

3b+4c=10

4c=10-3b

c=$\dfrac{(10-3b)}{4}$

b	1	2	3
C	$\frac{7}{4}$	1	$\frac{1}{4}$

當 a=2 時

3b+4c=8

4c=8-3b

c=$\dfrac{(8-3b)}{4}$

b	1	2
C	$\frac{5}{4}$	$\frac{2}{4}$

當 a=3 時

3b+4c=6

4c=6-3b

c=$\dfrac{(6-3b)}{4}$

b	1
C	$\frac{3}{4}$

由上述所列，可知 a=4 以上則 c 皆無正整數的解

推論：邊數為 3、4、6 的正多邊形只有出現以下此種情形可能鋪貼出公用點。

A	n	B	m	C	l
1	3	2	4	1	6

（3）若 n=3，m=4，l=8

$\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+\frac{3}{4}c=2$　（×12）

4a+6b+9c=24

當 a=1 時

6b+9c=20

9c=20-6b

c=$\dfrac{2(10-3b)}{9}$

b	1	2	3
C	$\frac{14}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{9}$

當 a=2 時

6b+9c=16

9c=16-6b

c=$\frac{2(8-3b)}{9}$　　　　$\because 8-3b$ 不爲 9 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

………………..由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不爲 9 的倍數，因此推論邊數爲 3、4、8 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形。

（4）若 n=3，m=4，l=9

$\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+\frac{7}{9}c=2$　（×18）

6a+9b+14c=36

當 a=1 時

9b+14c=30

14c=30-9b

c=$\frac{3(10-3b)}{14}$　　　　$\because 10-3b$ 不爲 14 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

當 a=2 時

9b+14c=24

14c=24-9b

c=$\frac{3(10-3b)}{14}$　　　　$\because 10-3b$ 不爲 14 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

………………..由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不爲 14 的倍數，因此推論邊數爲 3、4、8 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形。

（5）若 n=3，m=4，l=10

$\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+\frac{4}{9}c=2$　（×30）

10a+15b+24c=60

當 a=1 時

15b+24c=50

24c=50-15b

c=$\frac{5(10-3b)}{24}$　　　　$\because 10-3b$ 不爲 24 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

當 a=2 時

15b+24c=40

24c=40-15b

c=$\frac{5(8-3b)}{24}$　　　　$\because 8-3b$ 不爲 24 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

………………..由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不爲 24 的倍數，因此推論邊數爲 3、4、8 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形。

（6）若 n=3，m=4，l=12

$\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b+\frac{5}{6}c=2$　（×6）

2a+3b+5c=12

當 a=1 時

3b+5c=10

5c=10-3b

c=$\frac{(10-3b)}{5}$

b	1	2	3
C	$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

當 a=2 時

3b+5c=8

5c=8-3b

c=$\frac{(8-3b)}{5}$

b	1	2
C	1	$\frac{2}{5}$

當 a=3 時

3b+5c=6

5c=6-3b

c=$\frac{3(2-b)}{5}$　　　$\because 2-b$ 不爲 5 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

由上述所列，可知 a=3 以上則 b、c 皆無正整數的解

結論：邊數爲 3、4、12 的正多邊形只有出現以下此種情形可能鋪貼出公用點。

a	n	b	m	C	l
2	3	1	4	1	12

.

.

.

.

（28）若 n=3，m=8，l=12

$\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}b+\frac{5}{6}c=2$　（×12）

4a+9b+10c=24

當 a=1 時

9b+10c=20

10c=20-9b

c=$\frac{(20-9b)}{10}$

b	1	2
C	$\frac{11}{10}$	$\frac{1}{5}$

當 a=2 時

9b+10c=16

10c=16-9b

c=$\frac{(16-9b)}{10}$

b	1
C	$\frac{7}{10}$

……………….由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不爲 10 的倍數，因此推論邊數爲 3、8、12 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形。

（29）若 n=3，m=8，l=15

$\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}b+\frac{13}{15}c=2$　（×60）

20a+45b+52c=120

當 a=1 時

45b+52c=100

52c=100-45b

c=$\frac{5(20-9b)}{52}$

b	1	2
C	$\frac{55}{52}$	$\frac{5}{26}$

當 a=2 時

45b+52c=80

52c=80-45b

c=$\frac{5(16-9b)}{52}$　　$\because 16-9b$ 不爲 52 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

…………………由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不爲 52 的倍數，因此推論邊數爲 3、8、15 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形

（30）n=3，m=8，l=18

$\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}b+\frac{8}{9}c=2$　（×36）

12a+27b+32c=72

當 a=1 時

27b+32c=60

32c=60-27b

c=$\frac{3(20-9b)}{32}$　　$\because 20-9b$ 不爲 32 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

當 a=2 時

27b+32c=48

32c=48-27b

c=$\frac{3(16-9b)}{32}$　　$\because 16-9b$ 不爲 32 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

…………………由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不爲 32 的倍數，因此推論邊數爲 3、8、18 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形

（31）若 n=3，m=8，l=20

$\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}b+\frac{9}{10}c=2$　（×60）

20a+45b+54c=120

當 a=1 時

45b+54c=100

54c=100-45b

c=$\frac{5(20-9b)}{54}$　　　$\because 20-9b$ 不爲 54 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

當 a=2 時

45b+54c=80

54c=80-45b

c=$\frac{5(16-9b)}{54}$　　　$\because 16-9b$ 不爲 54 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

………………….由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不爲 54 的倍數，因此推論邊數爲 3、8、20 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形

（32）若 n=3，m=8，l=24

$\frac{1}{3}a+\frac{3}{4}b+\frac{11}{12}c=2$　（×12）

4a+9b+11c=24

當 a=1 時

9b+11c=20

11c=20-9b

c=$\frac{(20-9b)}{11}$

b	1	2
C	1	$\frac{2}{11}$

當 a=2 時

9b+11c=16

11c=16-9b

c=$\frac{(16-9b)}{11}$

b	1
C	$\frac{7}{11}$

由上述所列，可知 a=3 以上則 b、c 皆無正整數的解

結論：邊數爲 3、8、24 的正多邊形只有出現以下此種情形可能鋪貼出公用點。

a	n	b	m	C	l
1	3	1	8	1	24

（33）n=3，m=9，l=10

$\frac{1}{3}a+\frac{7}{9}b+\frac{4}{5}c=2$　（×45）

15a+35b+36c=90

當 a=1 時

35b+36c=75

36c=75-35b

c=$\frac{5(15-7b)}{36}$　　　$\because 15-7b$ 不爲 36 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

當 a=2 時

35b+36c=60

36c=60-35b

c=$\frac{5(12-7b)}{36}$　　　$\because 12-7b$ 不為 36 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

……………….由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且
都不為 36 的倍數，因此推論邊數為 3、9、10 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形

(34)若 n=3，m=9，l=12

$\frac{1}{3}a+\frac{7}{9}b+\frac{5}{6}c=2$　（×18）

6a+14b+15c=36

當 a=1 時

14b+15c=30

15c=30-14b

c=$\frac{2(15-7b)}{15}$　　　$\because 15-7b$ 不為 15 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

當 a=2 時

14b+15c=24

15c=24-14b

c=$\frac{2(12-7b)}{15}$　　　$\because 12-7b$ 不為 15 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

……………….由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不為 15 的倍數，因此推論邊數為 3、9、12 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形

（35）若 n=3，m=9，l=15

$\frac{1}{3}a+\frac{7}{9}b+\frac{13}{15}c=2$　（×45）

15a+35b+39c=90

當 a=1 時

35b+39c=75

39c=75-35b

c=$\frac{5(15-7b)}{39}$　　　$\because 15-7b$ 不為 39 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

當 a=2 時

35b+39c=60

39c=60-35b

c=$\frac{5(12-7b)}{39}$　　　$\because 12-7b$ 不為 39 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

……………….由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不為 39 的倍數，因此推論邊數為 3、9、15 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形。

（36）若 n=3，m=9，l=18

$\frac{1}{3}a+\frac{7}{9}b+\frac{8}{9}c=2$　（×9）

3a+7b+8c=18

當 a=1 時

7b+8c=15

8c=15-7b

c=$\frac{(15-7b)}{8}$

b	1	2
C	1	$\frac{1}{8}$

當 a=2 時

7b+8c=12

8c=12-7b

c=$\frac{(12-7b)}{8}$ $\because 12-7b$ 不爲 8 的倍數 $\therefore$ b、c 無正整數解

由上述所列，可知 a=3 以上則 b、c 皆無正整數的解

結論：邊數爲 3、9、18 的正多邊形只有出現以下此種情形可能鋪貼出公用點。

a	n	b	m	C	l
1	3	2	9	1	18

（37）若 n=3，m=9，l=20

$\frac{1}{3}a+\frac{7}{9}b+\frac{9}{10}c=2$ （×90）

30a+70b+81c=180

當 a=1 時

70b+81c=150

81c=150-70b

c=$\frac{10(15-7b)}{81}$

當 a=2 時

70b+81c=120

81c=120-70b

c=$\frac{10(12-7b)}{81}$ $\because 12-7b$ 不爲 81 的倍數 $\therefore$ b、c 無正整數解

…………………由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不爲 81 的倍數，因此推論邊數爲 3、9、20 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形。

（38）若 n=3，m=9，l=24

$\frac{1}{3}a+\frac{7}{9}b+\frac{11}{12}c=2$ （×36）

12a+28b+33c=72

當 a=1 時

28b+33c=60

33c=60-28b

c=$\frac{4(15-7b)}{33}$ $\because 15-7b$ 不爲 33 的倍數 $\therefore$ b、c 無正整數解

當 a=2 時

28b+33c=48

33c=48-28b

c=$\dfrac{4(12-7b)}{33}$　　　$\because 12-7b$ 不爲 33 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

…………………由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不爲 33 的倍數，因此推論邊數爲 3、9、24 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形

（39）若 n=3，m=10，l=12

$\frac{1}{3}a+\frac{4}{5}b+\frac{5}{6}c=2$　（×30）

10a+24b+25c=60

當 a=1 時

24b+25c=50

25c=50-24b

c=$\dfrac{2(25-12b)}{25}$　　　$\because 25-12b$ 不爲 25 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

當 a=2 時

24b+25c=40

25c=40-24b

c=$\dfrac{8(5-3b)}{25}$　　　$\because 5-3b$ 不爲 25 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

…………………由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不爲 25 的倍數，因此推論邊數爲 3、10、12 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形。

（40）n=3，m=10，l=15

$\frac{1}{3}a+\frac{4}{5}b+\frac{13}{15}c=2$　（×15）

5a+12b+13c=30

當 a=1 時

12b+13c=25

13c=25-12b

c=$\dfrac{(25-12b)}{13}$

b	1	2
C	1	$\frac{1}{13}$

當 a=2 時

12b+13c=20

13c=20-12b

c=$\dfrac{4(5-3b)}{13}$　　　$\because 5-3b$ 不爲 13 的倍數　$\therefore$ b、c 無正整數解

由上述所列，可知 a=2 以上則 b、c 皆無正整數的解

結論：邊數爲 3、10、15 的正多邊形只有出現以下此種情形可能鋪貼出公用點。

a	n	b	m	C	l
1	3	1	10	1	15

（41）若 n=4,m=5,l=6

$\frac{1}{2}a+\frac{3}{5}b+\frac{2}{3}c=2$　（×30）

15a+18b+20c=60

當 a=1 時

18b+20c=45

20c=45-18b

c=$\frac{9(5-2b)}{20}$　$\because 5-2b$ 不爲 20 的倍數　$\therefore$c 無正整數解

當 a=2 時

18b+20c=30

20c=30-18b

c=$\frac{6(5-3b)}{20}$　$\because 5-3b$ 不爲 10 的倍數　$\therefore$c 亦無正整數解

…………….由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不爲 20 的倍數，因此推論邊數爲 4、5、6 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形。

.

.

.

（46）若 n=4,m=5,l=18

$\frac{1}{2}a+\frac{3}{5}b+\frac{8}{9}c=2$　（×90）

45a+54b+80c=180

當 a=1 時

54b+80c=135

80c=135-54b

c=$\frac{135-54b}{80}$　$135-54b$ 不爲 80 的倍數　$\therefore$b、c 無正整數解

……………….由上述 c 值發現，其分子之值呈現遞減情況，且都不爲 80 的倍數，因此推論邊數爲 4、5、18 的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形。

（47）若 n=4,m=5,l=20

$\frac{1}{2}a+\frac{3}{5}b+\frac{9}{10}c=2$　（×10）

5a+6b+9c=20

當 a=1 時

6b+9c=15

3c=5-2b

c=$\frac{5-2b}{3}$

由上述所列，可知 a=2 以上則 b、c 皆無正整數的解

結論：邊數爲 4、5、20 的正多邊形只有出現以下此種情形可能鋪貼出公用點。

a	n	b	m	C	l
1	4	1	5	1	20

:

:

:

（52）若 n=4,m=6,l=12

$\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b+\frac{4}{5}c=2$ （×30）

15a+20b+24c=60

當 a=1 時

20b+24c=45

24c=45-20b

c=$\frac{45-20b}{24}$ 由上述所列，可知 a=2 以上則 b、c 皆無正整數的解

結論：邊數爲 4、6、12 的正多邊形只有出現以下此種情形可能鋪貼出公用點。

a	n	b	m	C	l
1	4	1	6	1	12

（53）若 n=4,m=6,l=15

$\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b+\frac{13}{15}c=2$ （×30）

15a+20b+26c=60

當 a=1 時

20b+26c＞45

（54）若 n=4,m=8,l=9

$\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b+\frac{7}{9}c=2$ （×72）

36a+54b+56c=144

當 a=1 時

54b+56c＞108

…………………由上發現，可知 m＞8,l＞9 數列無法成立，因此推論邊數爲 4、8、9 以上的正多邊形無法鋪貼有共用點的磁磚圖形。

故三種正多邊形圖形可鋪貼出一共用點的情形有以下七種組合。

組別	個數（a）	邊數（n）	個數（b）	邊數（m）	個數（c）	邊數（l）
J	1	3	2	4	1	6
K	2	3	1	4	1	12
L	1	3	1	8	1	24
M	1	3	1	9	1	18
N	1	3	1	10	1	15
O	1	4	1	5	1	20
P	1	4	1	6	1	12

【表四：一組樣式圖形包含三種正多邊形】

4.K=4,一組樣式圖形包含四種正多邊形

取邊數最少的四種正多邊形正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形，各取一內角之和爲 60°＋90°＋108°＋120°=378°＞360°，最小的四種正多邊的和超過 360°，四種正多邊形擺放不下去，所以說，不可能有四種正多邊形可以密和拼起來。同理可證，五種以上的正多邊形也都不可能密鋪出一公用頂點的美術磚圖形。

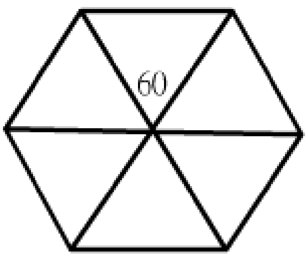
三、驗證

爲了印證這 16 種可以鋪貼出一公用頂點的美術磚圖形且是否可以密鋪一平面？故我們就發揮我們美術班的才能，匯集了圓規、量角器、直尺…等用具進行繪製，分成兩大方向進行實驗：

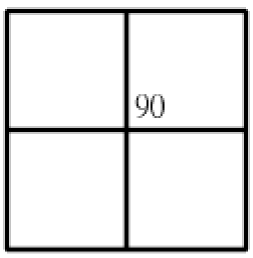
（一）能鋪貼出一公用點的美術磚圖形

1.一組正多邊形

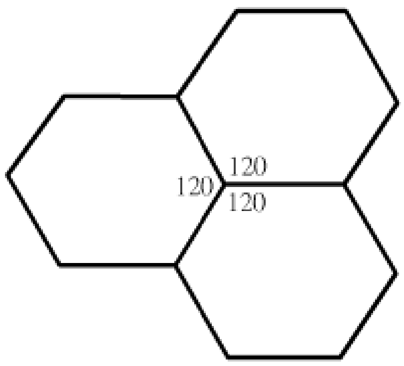
圖形如下表所示：



A 組



B 組

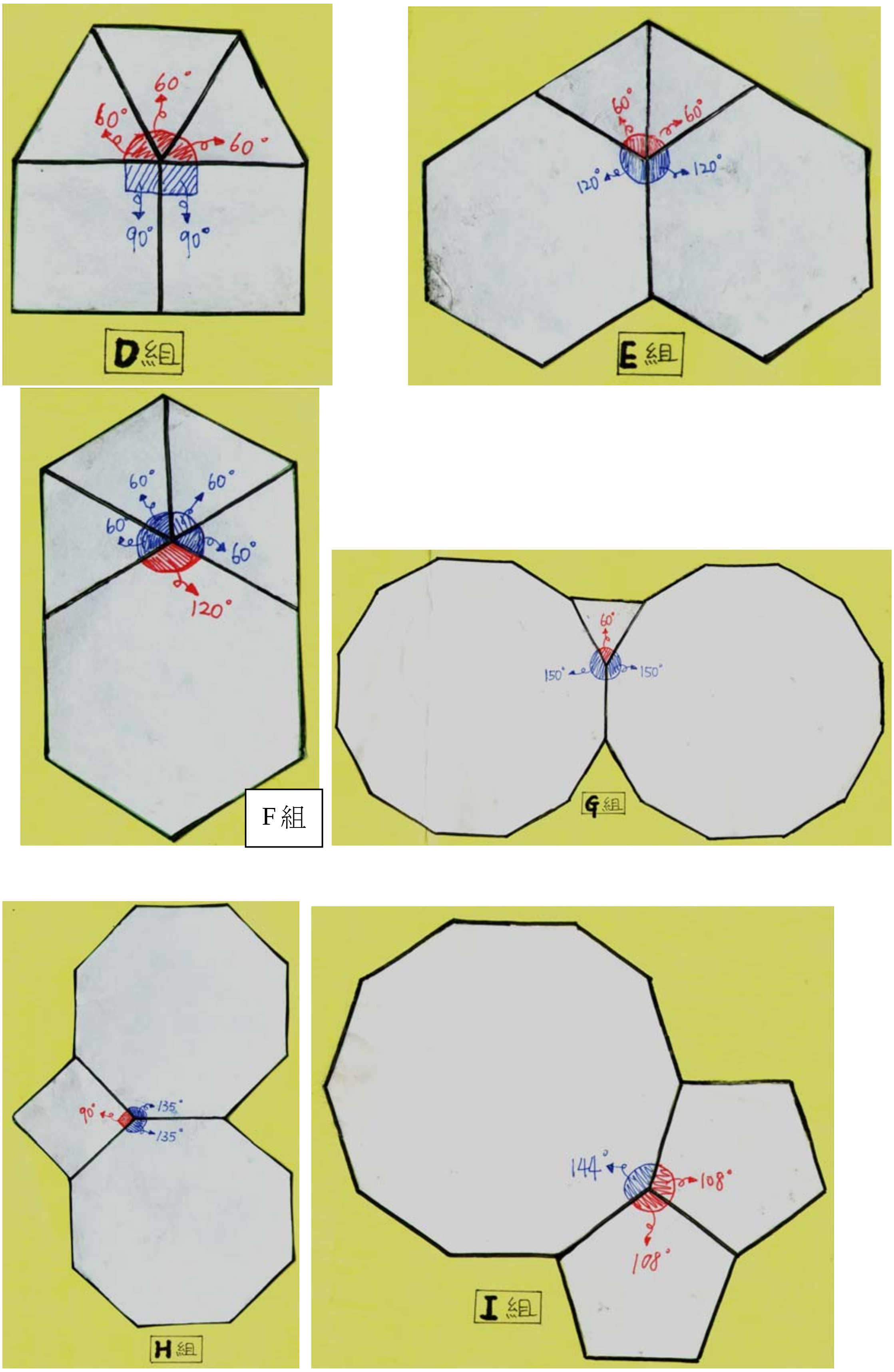


C 組

【圖一：一組樣式圖形僅包含一種正多邊形】

2.兩組正多邊形

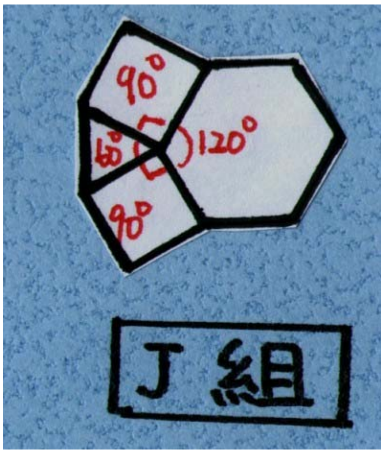
圖形如下表所示：

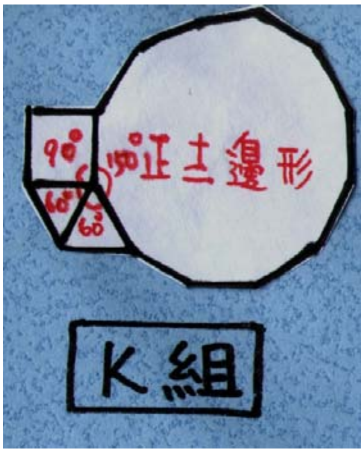


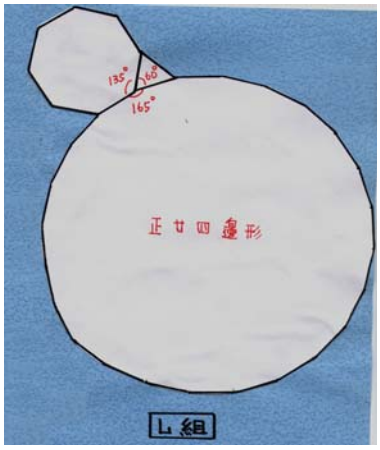
【圖二：一組樣式圖形包含兩種正多邊形】

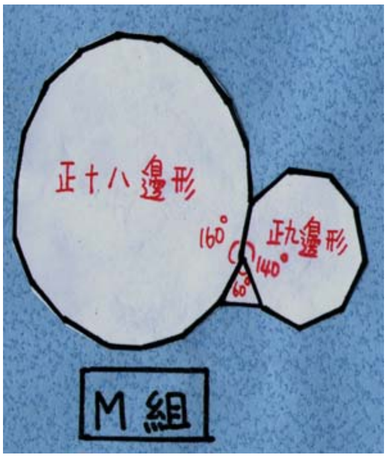
3.三組正多邊形

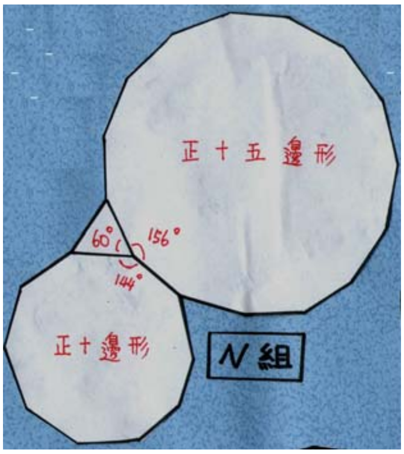
圖形如下表所示：

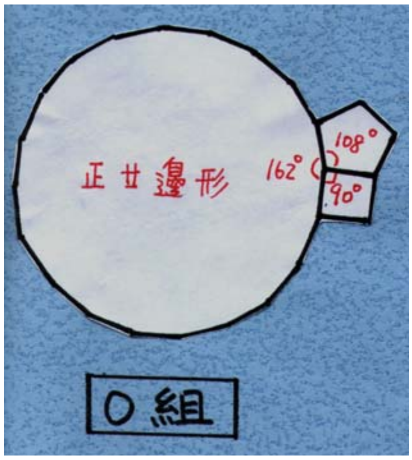


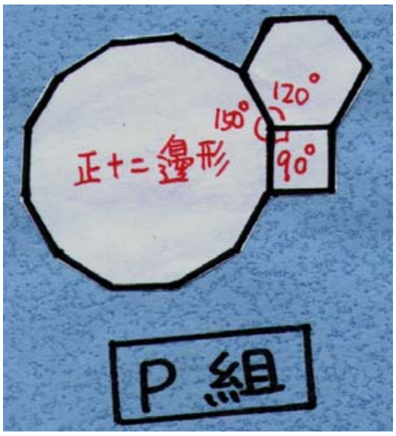












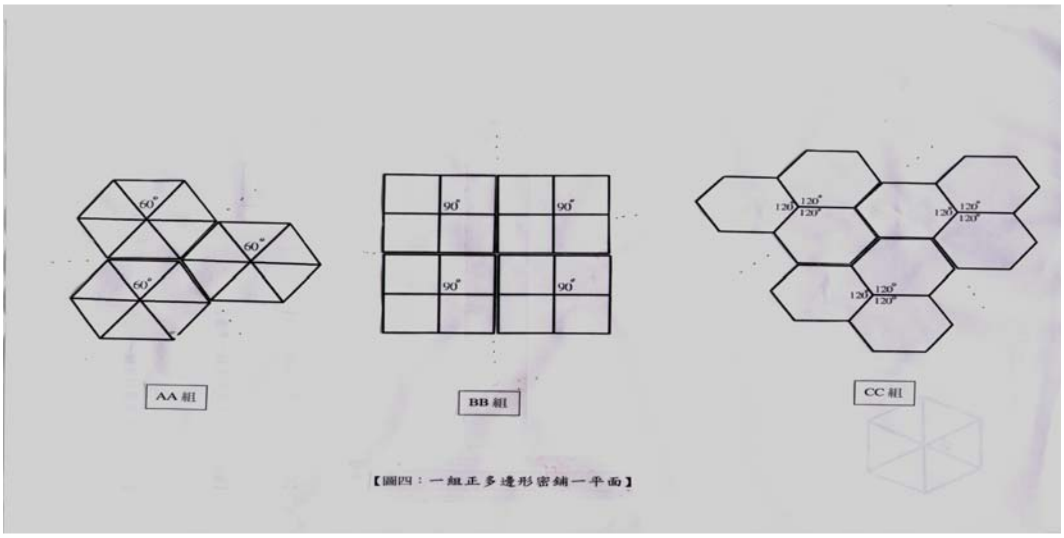
【圖三：一組樣式圖形包含三種正多邊形】

（二）密鋪一平面的美術磚圖形

爲了與鋪貼出一公用點的美術磚圖形作區別，因此將以 AA、BB、CC…等符號代表鋪滿平面的美術磚圖形，再從中檢查其圖形是否有滿足密鋪的特性。

1.一組正多邊形

圖形如下表所示：



【圖四：一組正多邊形密鋪一平面】

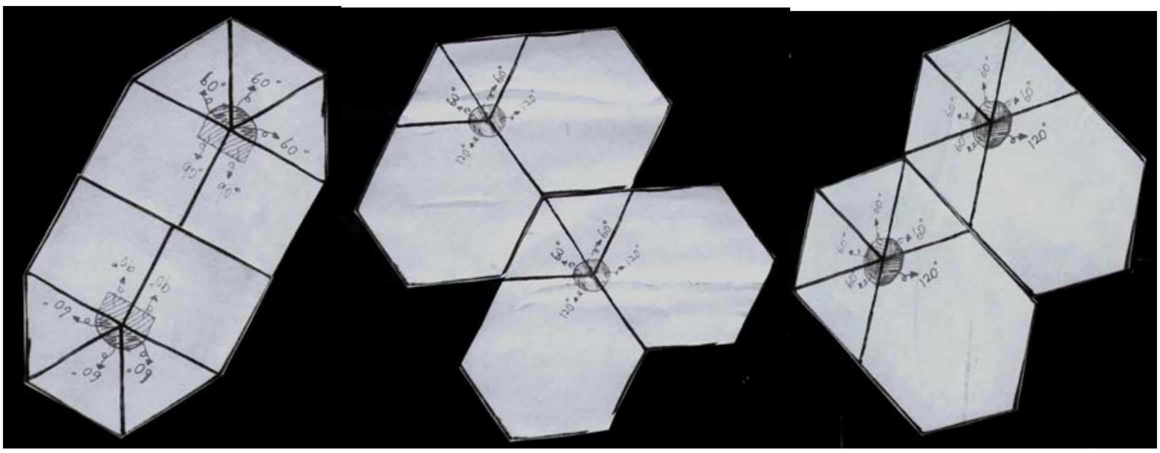
由【圖四】可見，如果使用單一組正多邊形來密鋪美術磚的話，只有**三種形狀**能鋪滿一個平面，而**中間沒有空隙**，這就是正三角形、正方形、正六邊形。因爲正三角形的一個角等於 60°，六個正三角形拼湊再一起時，在公共頂點上的六個角之和等於 360°；正方形的一個角等於 90°，所以四個正方形拼湊在一起時，在公共頂點上的四個角之和等於 360°；而正六邊形的一個角等於 120°，所以三個正六邊形拼再一起時，在公共頂點上的三個角之和也等於 360°【正多邊形的每一內角角度請見表二】。

如果用別的正多邊形，就不能達到這一要求。如正五邊形的每個內角角度爲 108°，把這三個正五邊形拼在一起，在公共點上的三個角的和是 3 ×108°=324°＜360°，有空隙，而 4×108°=432°＞360°，又放不下去。

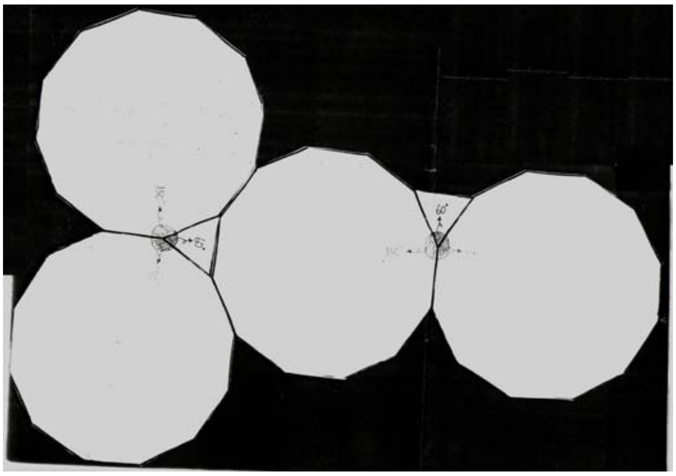
2.二組不同正多邊形

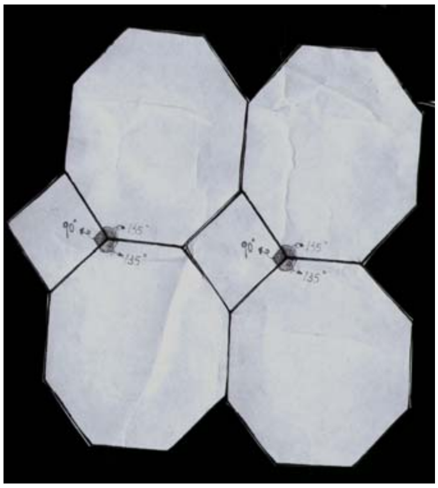
圖形如下表所示：

（1） 可以密鋪



DD 組　　EE 組　　FF 組

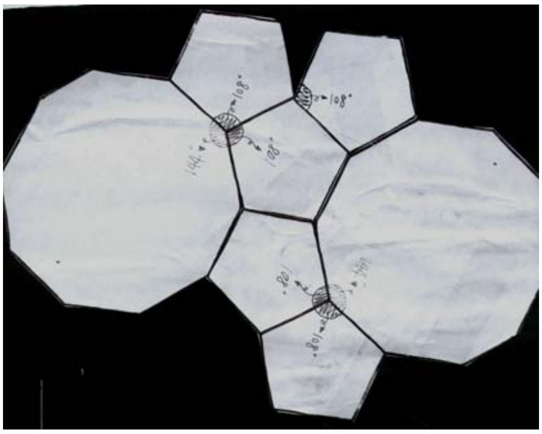




GG 組　　HH 組

【圖五：包含兩種正多邊形樣式圖形可密撲平面】

（2） 不可以密鋪



II 組

【圖六：包含兩種正多邊形樣式圖形不可密撲平面】

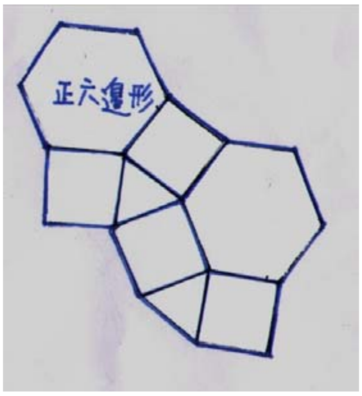
由【圖五】可見，如果使用兩組不同的正多邊形來密鋪美術磚的話，只有**五種形狀**能鋪滿一個平面，而**中間沒有空隙**，這就是 DD、EE、FF、GG、HH 組。

由【圖二】可見，I 組是由 2 個正五邊形及一個正十邊形所組成有共用點的樣式圖形，但出現數量由兩組以上拼湊時就會出現如【圖六】II 組所示，於某一頂點上會出現缺口或重疊，故此種情形不能完成密鋪一平面。

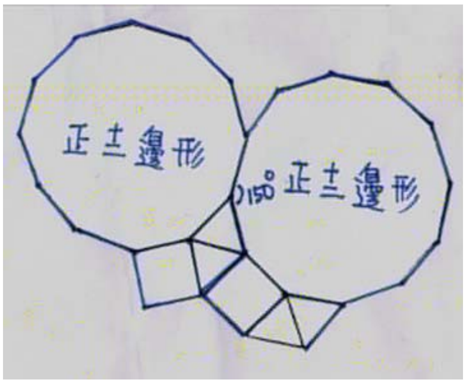
3.三組皆不同正多邊形

圖形如下表所示：

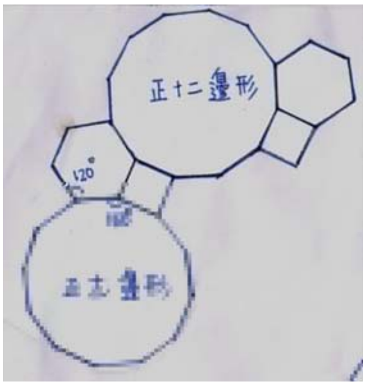
（1）可以密鋪



JJ 組



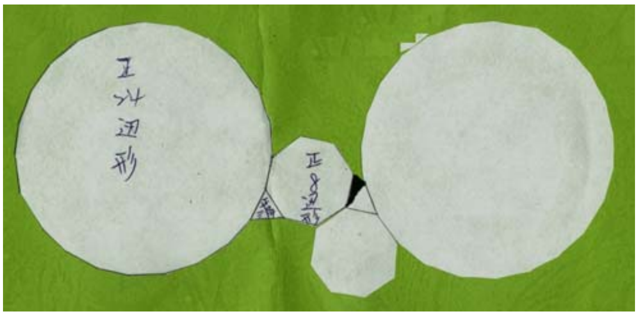
KK 組



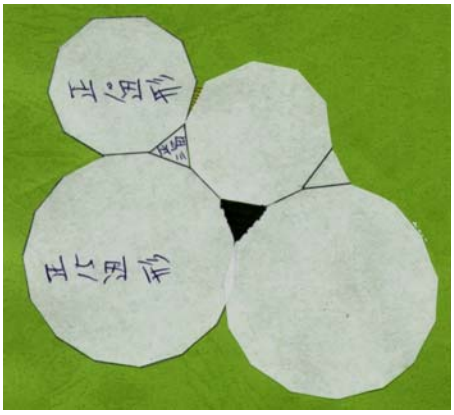
PP 組

【圖七：包含三種正多邊形樣式圖形可密撲平面】

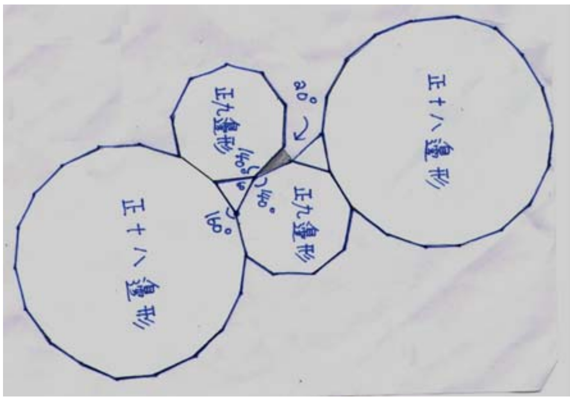
（2）不可以密鋪



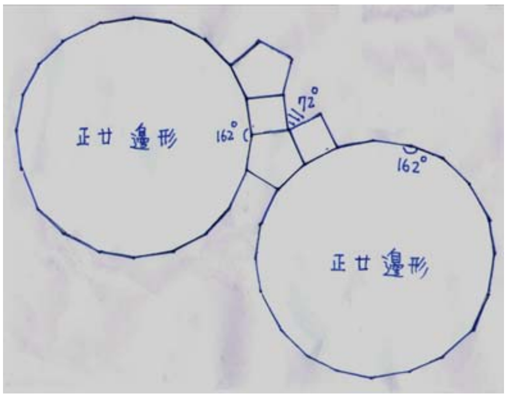
LL 組



NN 組



MM 組



OO 組

【圖八：包含三種正多邊形樣式圖形不可密撲平面】

肆、結 論

一、使用正多邊形來密鋪一平面的情形經驗證後發現有以下 11 種可能的鋪法：

類　　　　型	圖　　　　形	個　　　　數
一種正多邊形	正三角形	6
	正方形	4
	正六邊形	3
兩種不同的正多邊形	正三角形；正方形	3；2
	正三角形；正六邊形	2；2
	正三角形；正六邊形	4；1
	正三角形；正十二邊形	1；2
	正方形；正八邊形	1；2
三種不同的正多邊形	正三角形；正方形；正六邊形	1；2；1
	正三角形；正方形；正十二邊形	2；1；1
	正方形；正六邊形；正十二邊形	1；1；1

二、作爲密鋪一平面之 11 種美術磚圖形的正多邊形邊數必爲 24 的因數。

三、不可能出現有四種正多邊形以上（包含四種）可以密和拼湊出一組有共用點的樣式圖形。

四、如果一組可拼湊出共用點的樣式圖形，若其邊數出現奇數邊的正多邊形時，於某一頂點就會有可能出現缺口或重疊的現象，故可說可鋪貼出一共用點的一組正多邊形樣式圖形未必可密鋪出一平面。

伍、參考資料

一、　陳冒海教授主編，國中數學陳版（第一、二冊），92 年初版，台南，南一。

二、　中華民國中小學科學展覽第 21 屆至 30 屆優勝作品專輯，國中組數學科合訂本，84 年 6 月發行，國立台灣科學教育館編印。

三、　葛登能作品集，詭論、鋪瓷磚、波羅米歐環，初版，台北市：天下遠見出版。

評　語

030424 國中組數學科

幾何之美—美術磚的樣式與規律

主題具實用性，內容若再多加創意，結果將更豐富。