

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030423

屏東縣立明正國民中學

指導老師姓名

黃南燕

作者姓名

陳宏瑋

劉百里

沈怡伶

聶佑婷

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會
作品說明書

科 別：數學

組 別：國中組

作品名稱：正立方體的展開圖

關 鍵 詞：方連、正立方體、展開圖

編 號：

目錄

1. 摘要	2
2. 研究動機	2
3. 研究目的	2
4. 研究設備及器材	2
5. 研究過程	2
6. 研究結果	8
7. 討論	9
8. 結論	11
9. 參考資料	11

壹、摘要

我們研究的是「方連」，「方連」有單方、二方連、三方連。而這次我們所要研究的是如何判斷一個六方連能否摺成一個正立方體；我們發現所有排列是(1, 4, 1)的六方連都可摺成一個正立方體，但是排列不是(1, 4, 1)的六方連也可以用一種特殊方法判斷是否能轉換成(1, 4, 1)的六方連。再透過觀察，研究如何正確地畫出6面各有圖案的正立方體的展開圖。

貳、研究動機

在課堂上我們學習到各種立體圖形及其展開圖，其中正立方體的展開圖在不同的書中有不同的畫法，因此我們想知道正立方體的展開圖有幾種不同的畫法？有沒有方法可以判斷一個圖形是否可以摺成正立方體？還有正立方體的6面如果各有圖案時，畫成展開圖時又是怎樣的排列方式？

參、研究目的

先從找出方連的圖形開始，討論正立方體和方連的關係，希望找出正立方體的所有展開圖及其判別的方法。再觀察6個面的相對位置，找出規則以正確地畫出正立方體的展開圖。

肆、研究設備及器材

我們使用筆、紙先將一~六方連所有圖形畫出來，並找出六方連中可摺成正立方體的圖案，將他畫入電腦中做成報告。

伍、研究過程

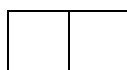
一、方連 (polyominoes)

老師說：正立方體的展開圖是由六個正方形組成，其實是方連的一種。由一組相同大小的正方形拼成的圖形就叫方連，其中每一個正方形至少與其他的一個正方形有一共用邊。最簡單的形式是只有一個正方形，稱為單方 (monomino)；而兩個正方形組成的，稱為二方連 (domino)；三個正方形組成的，稱為三方連 (trimino)；四個正方形組成的，稱為四方連 (tetromino)，其餘以此類推。但方連的圖形中，經過翻面或旋轉之後會相同的圖形就算同一個圖形。我們可以先找出方連的各個圖形，再進一步研究。

(一) 單方、二方連的圖形：我們可明顯地找出，只有各一個，如下圖：

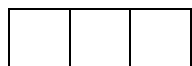


(單方)



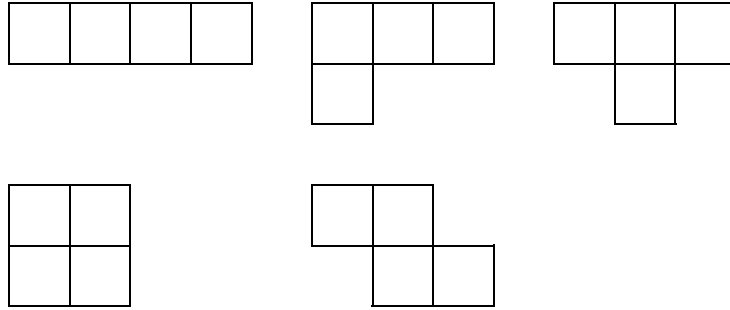
(二方連)

(二) 三方連的圖形有二個，如下圖：



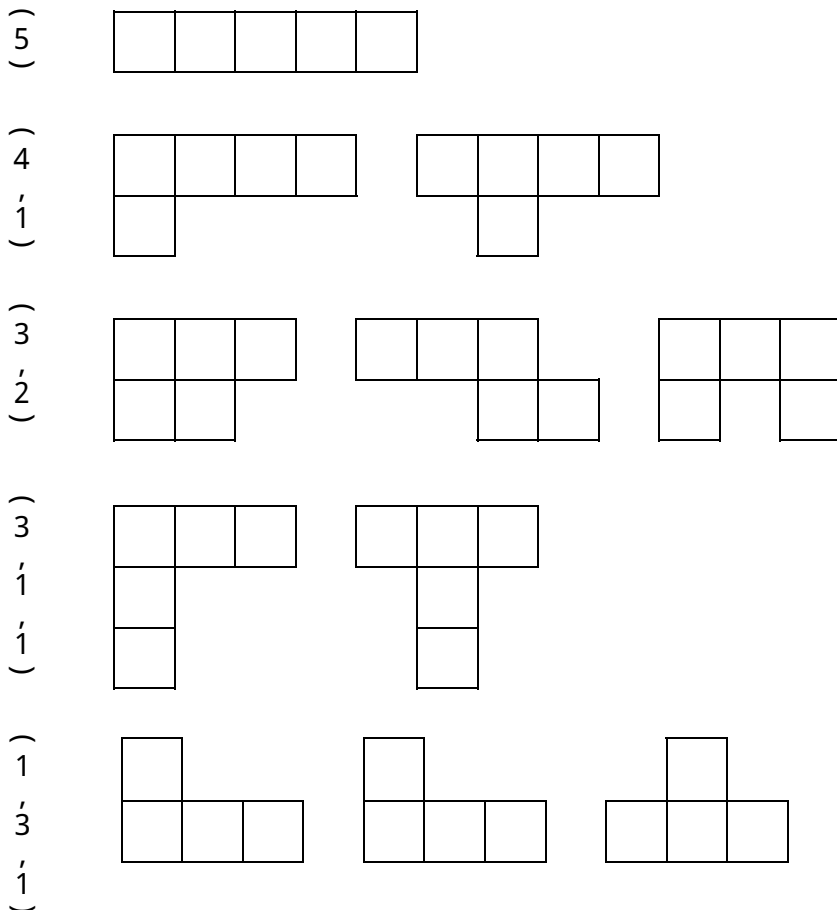


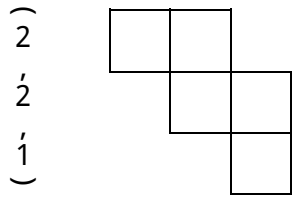
(三) 四方連的圖形有五個，如下圖：



(四) 五方連的圖形：

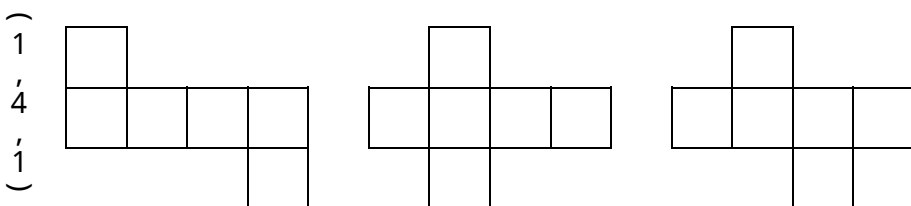
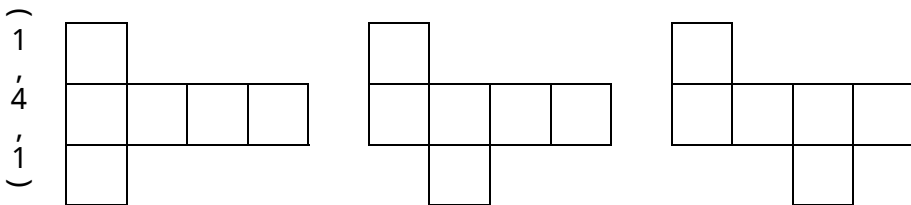
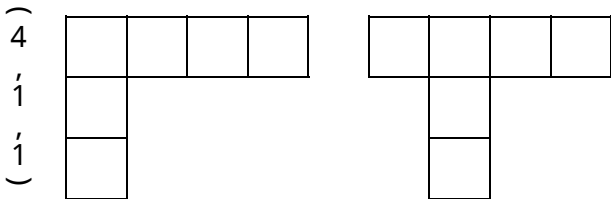
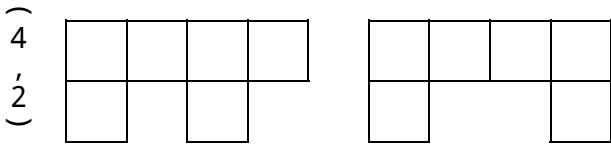
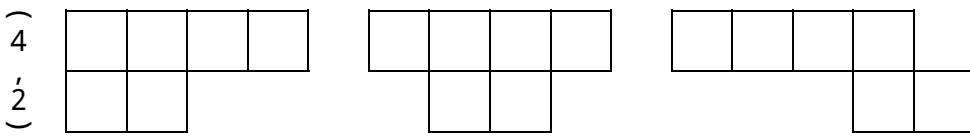
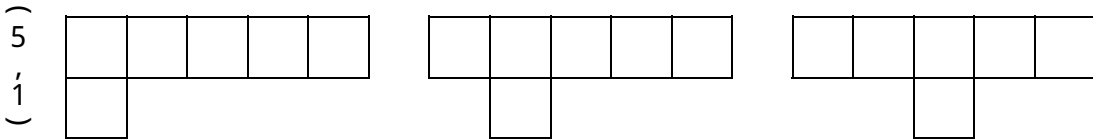
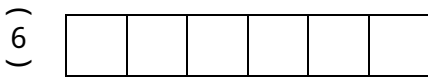
為了方便找出所有圖形，且可輕易避免重複，我們定出以下的方式來找出五方連的圖形：我們把圖形分成行、列，把每一列的正方形數量寫在左方，並且規定最長的行的正方形數量不能多於最長的列的正方形數量。這樣所有列的正方形數量相加會等於 5，如此可以先列出和為 5 的數字的排列組合，再畫出圖形。當畫到重複的圖形時，也可以輕易的看出而予以刪除。這樣，我們找到 12 個圖形：

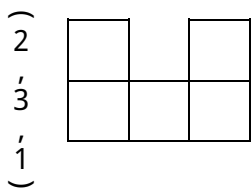
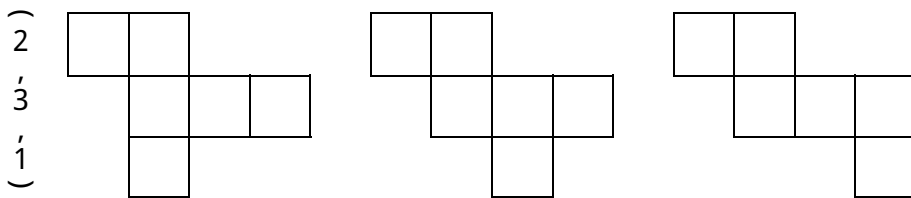
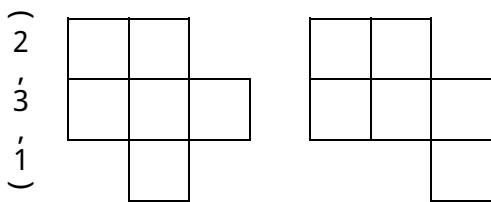
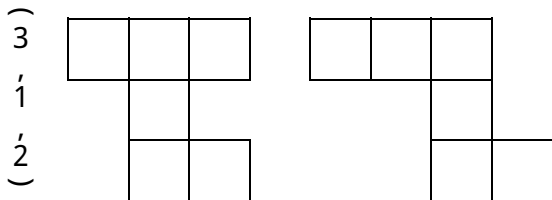
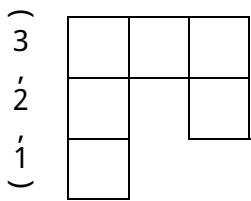
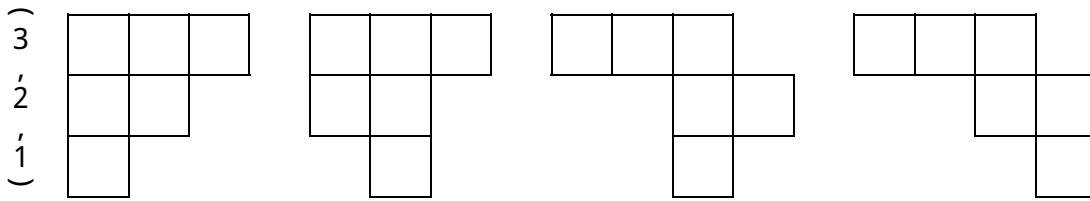
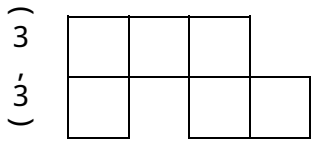
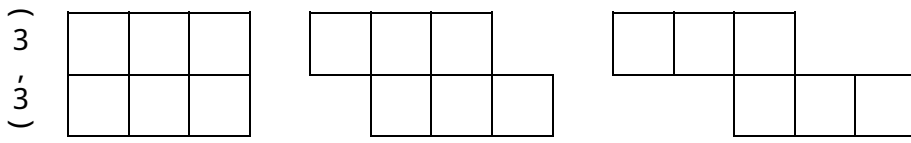


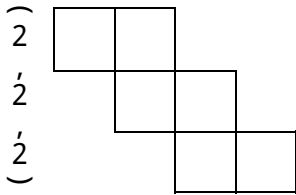
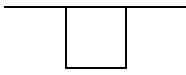


(五) 六方連的圖形：

用列出五方連的同樣方法，找出六方連的圖形，共有 35 個：



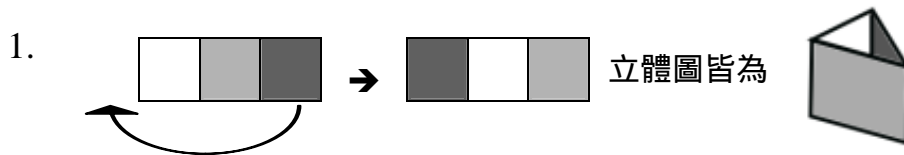




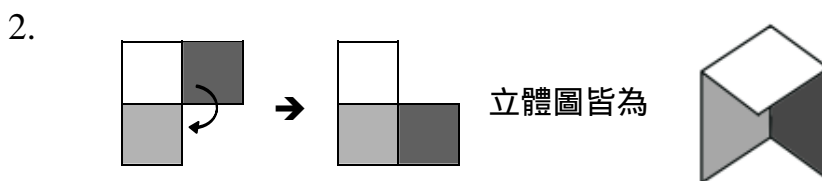
二、到底誰才能摺出正立體呢？

在找出六方連的圖形過程中，我們發現當中的 $(1, 4, 1)$ 的圖形就是一般我們見到的正立方體展開圖，而且根據課本角柱的特徵， $(1, 4, 1)$ 的圖形中，四個相連的正方形正是四個側面，而上、下的正方形正是上底面及下底面，所以所有 $(1, 4, 1)$ 的圖都可摺成正立方體。我們想能不能移動其他圖形的正方形，使之變成 $(1, 4, 1)$ 的圖形，就可推知能否摺成正立方體了。

(一) 正方形的移動：移動正方形，但所摺的立方體圖形不變。從最簡單的三方連來看，我們發現有兩種移動方式：

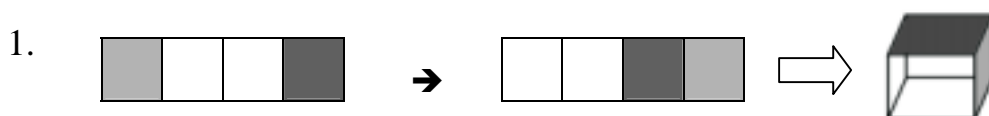


移動的方式是同一行(列)的正方形中，最前(後)面的正方形可移至最後(前)面，而摺成的立體圖形不變。以下我們把這種移動方式稱之為平移移動。



由摺成立體再展開的過程可發現，相異的正方形而相接的邊如果呈直角，摺成立體時，相接的邊會重合；如果成平角則不會重合。也就是說，正方形 旋轉 90 度與正方形 相接之後，所摺成的立體圖不變。以下我們把這種移動方式稱之為轉向移動。

(二) 從四方連驗證：



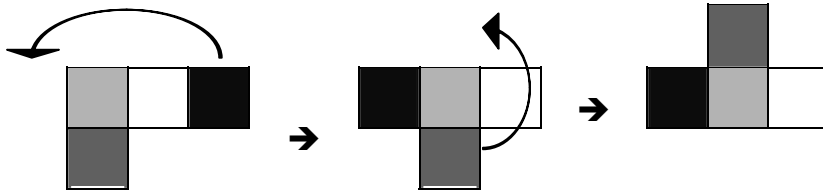


(圖 1)

只能用平移移動。

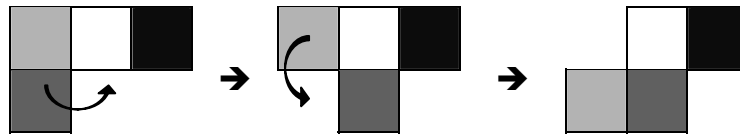
2.

(1)



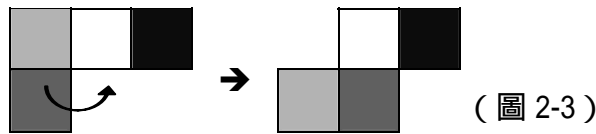
可用平移移動。(圖 2-1)

(2)



也可用轉向移動。(圖 2-2)

(3)

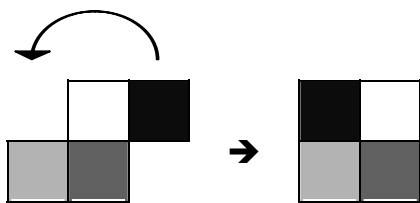


(圖 2-3)




也可相連的正方形一起轉向移動。

立體圖皆為  。

到此我們發現平移移動和轉向移動結果相同，雖然移動後變成不同的圖形，但立體圖形都相同（不考慮正方形上的圖案）。但是如果把圖 2-2 最後一個圖形做如圖 3 的平移移動，卻摺不出立體圖了。



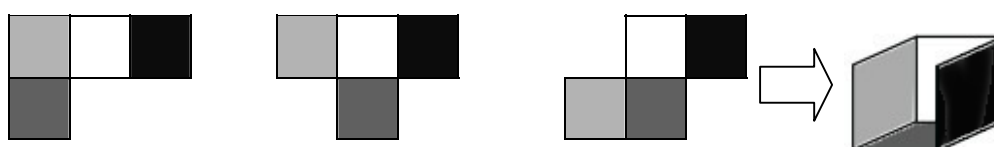
(圖 3)

因此我們必須再考慮平移移動的使用時機，它並不適用於任何圖形。我們觀察圖 3 發現，原先的圖形，正方形  和正方形  在立體圖中會相連，但移動過後，要相重合的邊都和正方形  相重合了，造成不同的結果：一個可摺成立體，一個不行。再進一步觀察圖 2-1 中平移移動的移動過程，會發現，平移移動雖然都可摺成相

同的立體圖，但如果連正方形上的圖案都考慮進去的話，其實圖案的相對關係都被改變了，如圖 4；再者圖 2-2 中轉向移動的移動過程；不管怎麼移動，所摺成的立體圖形都完全一樣，如圖 5。



(圖 4)



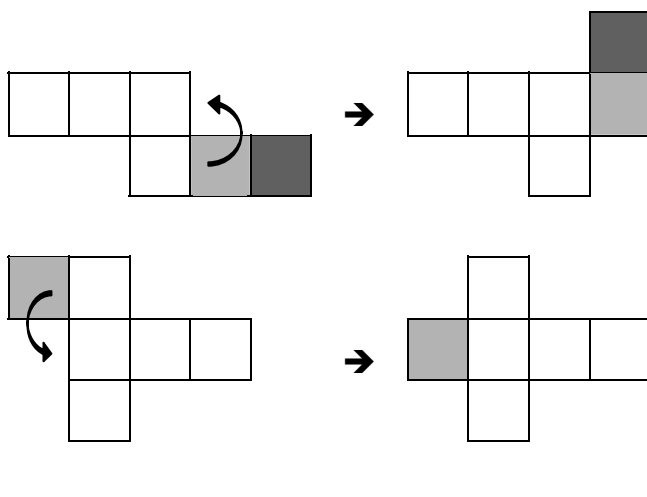
(圖 5)

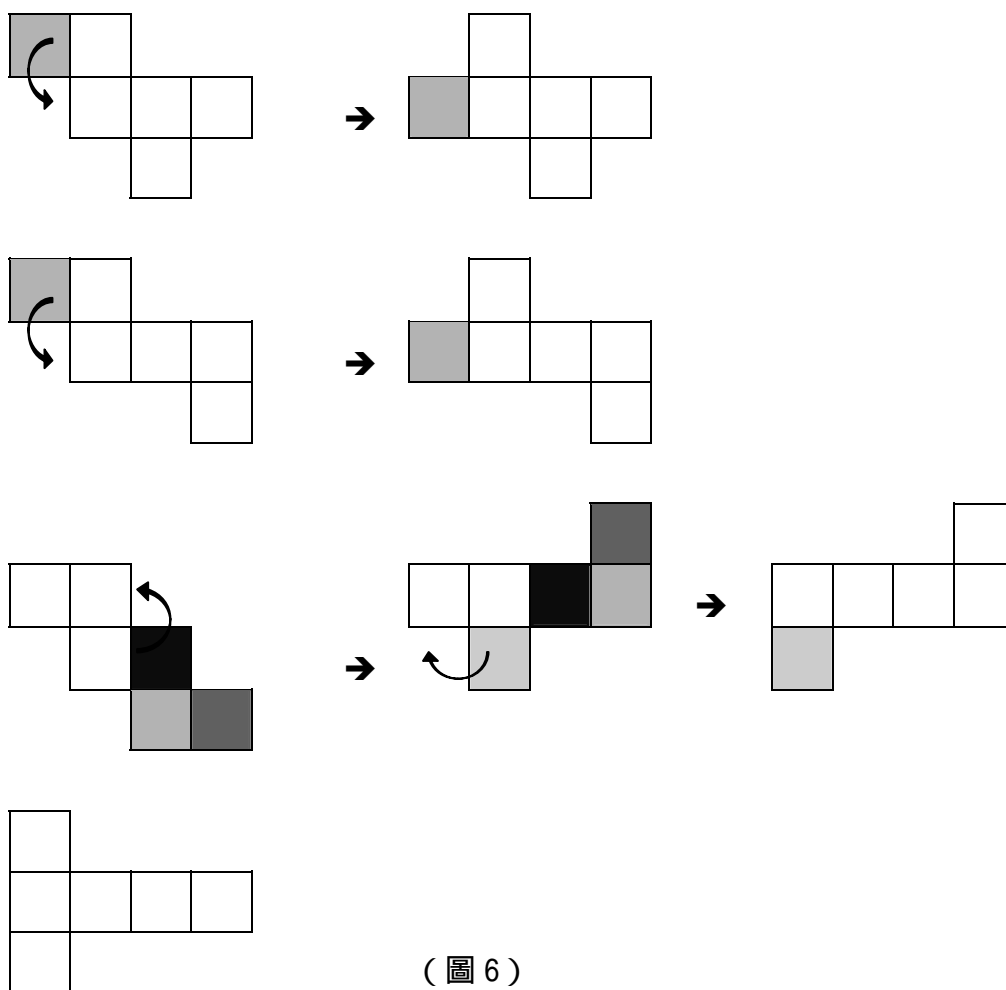
3.階段結論：


- (1) 平移移動適用於摺成立體圖形時成環狀相連的一列，此時這一系列的前後正方形才可使用平移移動。
- (2) 其他的情形，適合用轉向移動。

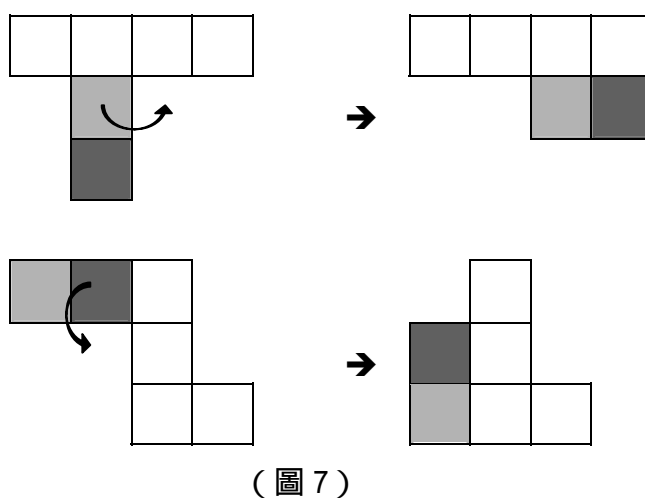
陸、研究結果

一、利用上面的階段結論，我們來找出六方連中，可摺成正立方體的圖形。將 $(1, 4, 1)$ 這類圖形之外的圖形做正方形的移動。結果有 5 個圖形可轉換成 $(1, 4, 1)$ 的圖形，而且剛好可換成 5 個不同的 $(1, 4, 1)$ 圖形，再加上還有 1 個 $(1, 4, 1)$ 的圖形，所以共有 11 個圖形可摺成正立方體。如下圖 6。由此可知，正立方體的展開圖有 11 個。





二、但是一個圖形要經過幾次正方形的移動，才能肯定它不能摺成正立方體呢？由四方連的研究過程中可知，如果一個圖形在移動正方形的過程中出現  這樣的部分圖形，我們就可肯定它不能摺成正立方體了，如圖 7。

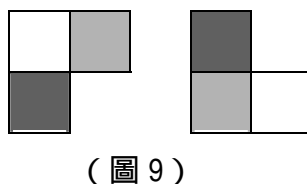
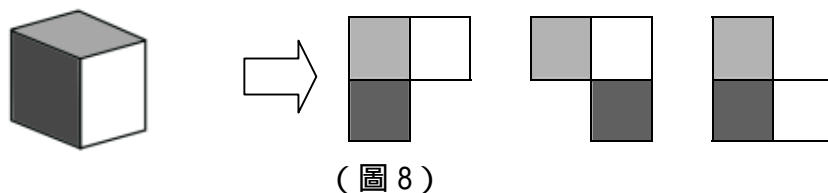


柒、討論

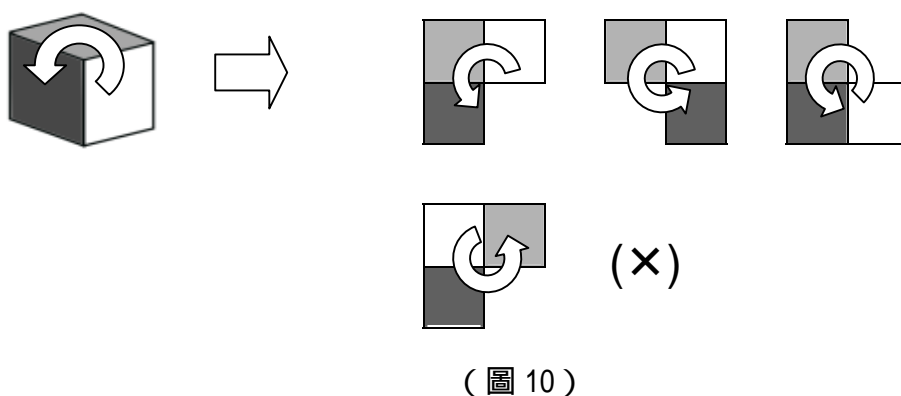
一個正立方體如果 6 個面各有不同的圖案，則它的展開圖非常的多，所以我們想，只要畫出其中一個固定形狀的展開圖，其餘利用正方形的移動就都可推導出來了。

一、三個面的展開圖：

在立體圖形中，一個頂點會碰到三個面，而這三個面在展開圖中有各種畫法，如圖 8。很容易和圖 9 的錯誤畫法混淆。

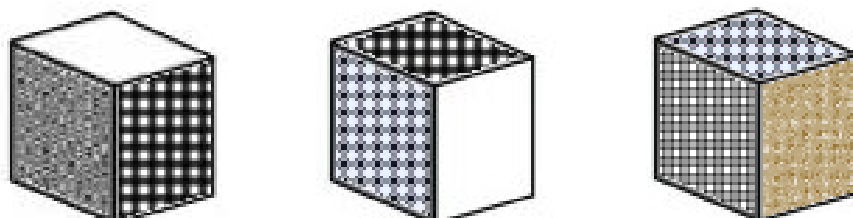


如何能分辨出正確的展開圖？我們發現，如果畫一個逆時針的箭頭把立體圖中的三個面排序，那麼展開圖中的三個面一定也是同樣的順序，如此就可輕易地找出正確的展開圖，如圖 10。



二、畫出完整的展開圖：

一個正立方體的三個立體圖如圖 11，那麼就可依照上述的方法畫出它正確的展開圖。

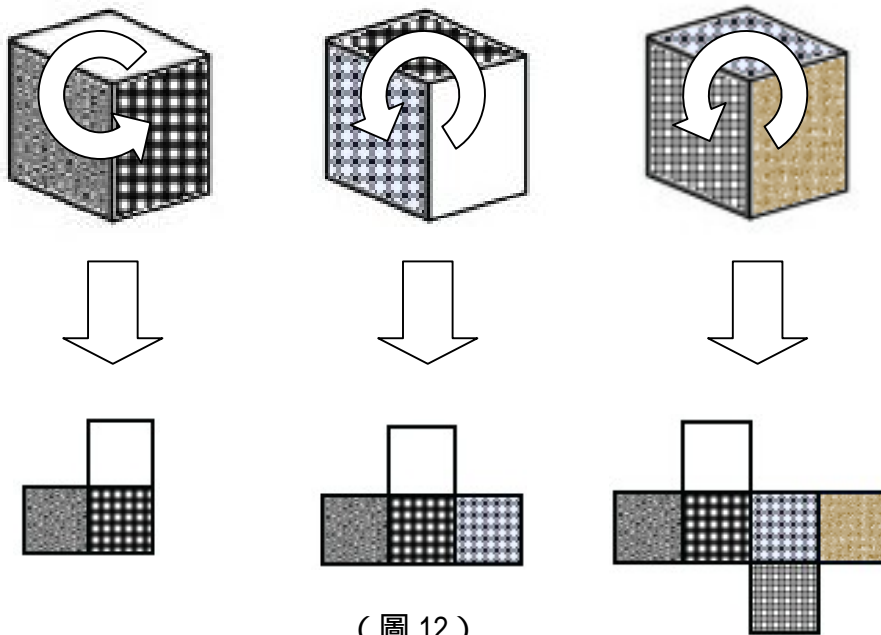


(圖 11)

步驟 1：依照第一個圖畫出三個面的展開圖，如圖 12。

步驟 2：根據和第一個圖重覆的面，接著畫出第二個圖的展開圖，如圖 12。

步驟 3：再根據和第二個圖重覆的面，接著畫出第三個圖的展開圖，則完成完整的展開圖，如圖 12。



(圖 12)

捌、結論

在六方連的圖形中，我們發現所有的 $(1, 4, 1)$ 的圖形都可摺成正立方體。因此我們想了兩種移動方式：1. 平移移動 2. 轉向移動。只要經過移動正方形可移動成 $(1, 4, 1)$ 的圖形，就可摺成正立方體。由此我們找出了 11 個正立方體的展開圖。而一個圖形只要在移動過程中出現「田」的部份圖形，就可知道它不能摺出正立方體。如果要畫一個 6 面各有圖案的正立方體的展開圖，可先將立體圖中共點相鄰的三個面排序，那麼展開圖中的三面也會是同樣順序，照這現象就可畫出正確的展開圖。這次的研究，使我們體會到了數學家的辛苦，而我們也經歷了多次的失敗才寫下成果，使我們對數學的了解更上一層樓，我們會再繼續努力。

玖、參考資料

一、南一書局教科書編撰委員會(民 92)。國民中學數學(陳版)第一冊(初版)。台南市：南一

書局。

二、**數學教學方法**(張靜譽譯) (民 90)。台北市：九章出版社。

評語

030423 國中組數學科

正立方體的展開圖

研究過程不屈不撓，頗具科學精神，內容深度可再加強，結果將更豐富。