中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030422

高雄縣立鳳山國民中學

指導老師姓名

杜鴻祥

范國薇

作者姓名

杜信璋

整邊正三角形的整邊二分割

摘　要

本文主要探討：由邊長為正整數的正三角形，分割成兩個較小的正整數邊長三角形時，分割前後各邊長之間的關係、一般式表示法及其適用範圍。

首先利用正三角形的高找出分割後三角形的三個邊長之間的關係式；再利用比例式推演出分割前後各三角形各邊長的一般式表示法及其適用範圍。並找出有一夾角為 60° 的不等邊整邊三角形成立的條件，接著又發現邊長為 $2^n, n \geqq 3$，$n \in N$ 的整邊正三角形可以二分割但奇質數乘方的整邊正三角形卻無法二分割成兩個邊長皆為整數的三角形，並加以證明。

壹、研究動機：

數學課上到商高定理時，老師介紹了畢氏三元數，提到可以把某些整數邊長的直角三角形分割成兩個整數邊長的直角三角形，它引發了我的興趣。我想，若換成一般三角形是否也可以二分割？但是一時找不到方法，因此換為把整數邊長的正三角形做整數邊長的二分割，就展開了這個研究。

貳、研究目的：

將整數邊長的正三角形分割成兩個較小的整數邊長三角形，討論它們邊長之間的關係。以下的整數邊長三角形都簡稱為整邊三角形。正三角形的邊長以 a 表示，將整邊正三角形的三邊長【a,a,a】二分割為【a,b,x】及【a,b,a-x】兩組整邊三角形，b 為公用邊，其中 $a,b,x \in N$。

參、研究內容：

一、整邊正三角形及其二分割後的整邊三角形邊長之間的關係？

二、整邊正三角形二分割後的各邊長如何表示？

三、整邊正三角形二分割後的各邊長有何關係？

四、邊長為質數的整邊正三角形，是否可以二分割？

五、P 為奇質數，$n \in N$，邊長 $a = p^n$ 的整邊正三角形能否二分割？

肆、研究過程：

一、整邊正三角形及其二分割後的整邊三角形邊長之間的關係。

整邊正三角形△ABC，若 $\overline{BC}$ 上能找到一點 D，使 $\overline{BD}, \overline{AD}$ 皆為整數，則 $\overline{AB}$，$\overline{BD}$，$\overline{AD}$ 之間有何關係？

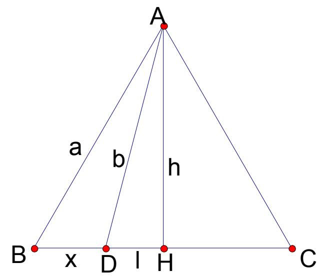
設 $\overline{AB}=a$，$\overline{AD}=b$，$\overline{BD}=x$，a,b,x∈N，則 a,b,x 之間有何關係？

作 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$

（一）$0<\overline{BD}=x<\dfrac{a}{2}$，如右圖（一）

∵ 正△ABC 邊長 a ∴ $\overline{HB}=\dfrac{a}{2}$，$\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$\overline{DH}=\dfrac{a}{2}-x$

顯然 $\overline{DH}>0$



∵ $\overline{AH}^2+\overline{DH}^2=\overline{AD}^2$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2=b^2$$

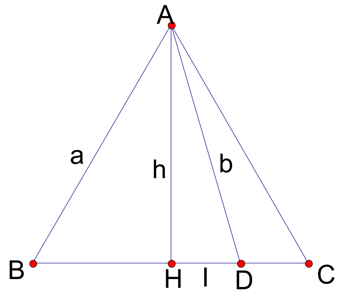
$$\frac{3a^2}{4}+\frac{a^2}{4}-ax+x^2=b^2$$

可得 $a^2-ax+x^2=b^2$ —

（二）$\dfrac{a}{2}<\overline{BD}=x<a$，如右圖（二）

∵ 正△ABC 邊長 a ∴ $\overline{HB}=\dfrac{a}{2}$，$\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$\overline{DH}=x-\dfrac{a}{2}$

顯然 $\overline{DH}>0$



∵ $\overline{AH}^2+\overline{DH}^2=\overline{AD}^2$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=b^2$$

$$\frac{3a^2}{4}+x^2-ax+\frac{a^2}{4}=b^2$$

$\therefore a^2-ax+x^2=b^2$

由上述證明可知：整邊正三角形邊長 a，若能二分割成【a,b,x】及【a,b,a-x】的兩個整邊三角形，則必定有 $a^2-ax+x^2=b^2$，$a>x$，a,b,x∈N。

但是我發現，在 $a^2-ax+x^2=b^2$ 的證明過程中，若 a,b,x 不是正整數，式也可以成立。所以對於任意邊長為 a 的正三角形，若分割成兩個邊長為 a,b,x 及邊長為 a,b,a-x 的一般三角形，則 $a^2-ax+x^2=b^2$ 同樣可以適用。

結論：邊長 a 的正三角形，若能二分割成邊長為 a, b, x 及邊長為 a, b, a−x 的三角形，則方程式 $a^2-ax+x^2=b^2$，a＞x 必成立；其中若 a, b, x∈N，則邊長 a 的整邊正三角形可以二分割成兩個邊長為【a, b, x】及邊長為【a, b, a−x】的整邊三角形。

二、整邊正三角形二分割後的各邊長如何表示？

得到 a,b,x 之間的關係式式之後，先嘗試以幾個 a 值代入，希望能求出式的解，即找出 a,b,x 的值。

分別以 a＝2,3,4,……代入式，發現只有計算到 a＝8 才有解，其餘的 a＝2,3,4,5,6,7 都找不到 b,x 的正整數解。而且在 a＝8 代入時，只得到一組解 x＝3、b＝7；即邊長 a＝8 的整邊正三角形只可以分割成【8,7,3】及【8,7,5】的兩個整邊三角形，但是計算很麻煩。若想再以 a＞8 求出 $a^2-ax+x^2=b^2$，a＞x 的其他解一定更複雜。所以想到分解式，求 a,b,x 的解。

得 a（a-x）＝（b+x）（b-x）

化成比例式二式（另兩式恰爲倒數式，討論過程類似，故予省略）。

$$\frac{b+x}{a-x}=\frac{a}{b-x}$$

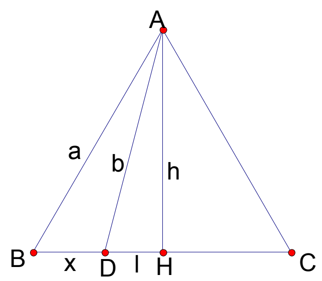
$$\frac{b+x}{a}=\frac{a-x}{b-x}$$

我發現：藉由二式利用比值可以找出 a,b,x 的一般式表示法。不過，要先確定 a,b,x,a-x 的大小關係，才能討論其適用範圍。

[已知] 正△ABC，$\overline{AB}$＝a，$\overline{AD}$＝b，$\overline{BD}$＝x，如圖（一）（二）

[求證] a＞b，b＞x，b＞a-x

[證明]∵ 正△ABC ∠B＝∠C＝60°



∴ ∠ADB＞∠C＝∠B

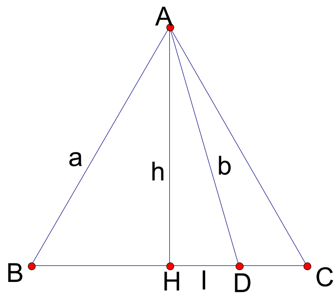
∴ a＞b [大角對大邊]

∴ 在△ABD 及△ACD 中

∵ ∠B＝60°＞∠BAD ∴$\overline{AD}$＞$\overline{BD}$ ∴b＞x

∵ ∠C＝60°＞∠CAD ∴$\overline{AD}$＞$\overline{CD}$ ∴b＞a-x

得證



接著，找出a,b,x的一般式表示法，

（一）由式，設 $\frac{b+x}{a-x}=\frac{a}{b-x}=t$　$t\in Q$

∴ b+x＝t（a-x）

a＝tb-tx

∴ a- tb+ t x ＝0

ta- b+（-t-1）x ＝0

解得 $a=\frac{t^2+2t}{t^2-1}x$

$b=\frac{t^2+t+1}{t^2-1}x$

∴ a：b：x＝（t^2+2t）：（t^2+t+1）：（t^2-1）

討論t的範圍：

1、若 $0<x<\frac{a}{2}$ 如圖（一）

$\because a>b>\frac{\sqrt{3}a}{2}$ —

$0>-x>\frac{-a}{2}$ —

$\therefore +a\quad b-x>\frac{\sqrt{3}-1}{2}a$

$1>\frac{b-x}{a}>\frac{\sqrt{3}-1}{2}>0$

$1<\frac{a}{b-x}<(\sqrt{3}+1)$

$1<t<(\sqrt{3}+1)$

2、若 $\frac{a}{2}<x<a$ 如圖（二）

$\therefore \frac{-a}{2}>-x>-a$

$\because a>b>\frac{\sqrt{3}}{2}a$

$\frac{a}{2}>b-x>\frac{\sqrt{3}-2}{2}a$

$\frac{a}{2} > b-x > 0$

$0 < \frac{2}{a} < \frac{1}{b-x}$

$t = \frac{a}{b-x} > 2$

∴對任意 x，$a > b > x > 0$ 時，$\frac{a}{b-x} = t > 1$

因此正三角形邊長為 t^2+2t 時，$t>1$，$t\in Q$，必可二分割為兩個三角形【t^2+2t, t^2+t+1, t^2-1】及【t^2+2t, t^2+t+1, $2t+1$】。但 t 取分數時（t^2+2t），（t^2+t+1），（t^2-1），（$2t+1$）皆為分數，雖然把有理數 t 代入之後所得的分數再化為整數比，依然可以得整邊正三角形的整數邊長及二分割後整邊三角形的整數邊長，但是畢竟無法直接正確表達 a,b,x 的整數邊長。另外，t 取任意正整數代入時，各邊長也可能出現公因數，所以必須進一步的找出 a,b,x 的整數表示法。

（二）由式，設 $\frac{b+x}{a} = \frac{a-x}{b-x} = t$，$t \in Q$

∴ $b+x = ta$

$a-x = t(b-x)$

∴ $a - tb + (t-1)x = 0$

$ta - b - \quad x = 0$

解得 $b = \frac{t^2-t+1}{t^2-1}x$

得 $a = \frac{2t-1}{t^2-1}x$

∴ $a : b : x = (2t-1) : (t^2-t+1) : (t^2-1)$

討論 t 的範圍：

若 $t=1$ 時，則 $b+x=a$ 不合

若 $t<1$ 時，則 $b+x<a$ 不合

若 $t=2$ 時，則 $a:b:x=3:3:3$ 不合

若 $t>2$ 時，則 $b+x>2a$，顯然與 $b<a$，$x<a$ 不合

∴對任意 x，$a > b > x > 0$ 時，$1 < \frac{b+x}{a} = t < 2$

因此正三角形邊長為 $2t-1$ 時，$1<t<2$，$t\in Q$ 必可二分割為兩個三角形【$2t-1$，t^2-t+1，t^2-1】及【$2t-1$，t^2-t+1，$2t-t^2$】。同理（$2t-1$），（t^2-t+1），（t^2-1），（$2t-t^2$）皆為分數，雖然 $1<t<2$，只要把有理數 t 代入之後再化簡，依然可以得整邊正三角形的整數邊長及二分割後整邊三角形的整數邊長，但是同樣也無法直接表達 a,b,x 的整數邊長，所以也必須進一步的找出 a,b,x 的整數表示法。

此時想到，在商高定理中，利用 m、n 兩個未知數可以得到畢氏三元數的一般式表示法（m^2+n^2，$2mn$，m^2-n^2），且 $m>n$，$m,n\in N$。因為 $t\in Q$，所以將 t 改為 $\frac{r}{s}$，$r,s\in N$ 代入，重新整理二式。為了能簡化 r,s 的討論，因此取（r,s）＝1。

（三）由式設 $\frac{b+x}{a-x} = \frac{a}{b-x} = \frac{r}{s}$，$(r,s)=1$ $r,s \in N$，$t=\frac{r}{s}>1$

$sa-rb+\ r\ x=0$

$ra-sb+(-r-s)\ x=0$

解得 $a=\frac{r^2+2rs}{r^2-s^2}x$

$b=\frac{r^2+rs+s^2}{r^2-s^2}x$

$a:b:x=\frac{r^2+2rs}{r^2-s^2}:\frac{r^2+rs+s^2}{r^2-s^2}:1$

∴ $a:b:x=(r^2+2rs):(r^2+rs+s^2):(r^2-s^2)$

由上述討論得知 $r>s$，$r,s\in N$

結論：整邊正三角形中，若邊長 $a=r^2+2rs$，$(r,s)=1$，$r,s\in N$，且 $r>s$，則必定可以二分割成兩個整邊三角形【r^2+2rs，r^2+rs+s^2，r^2-s^2】及【r^2+2rs，r^2+rs+s^2，$2rs+s^2$】。

（四）由式設 $\frac{b+x}{a}=\frac{a-x}{b-x}=\frac{r}{s}$ ，（r,s）＝1，r,s∈N，$1<t=\frac{r}{s}<2$

∴ ra- sb- s x ＝0

sa- rb+（-s+r）x ＝0

解得 $a=\frac{2rs-s^2}{r^2-s^2}x$

得 $b=\frac{r^2-rs+s^2}{r^2-s^2}x$

$$\therefore a:b:x=\frac{2rs-s^2}{r^2-s^2}:\frac{r^2-rs+s^2}{r^2-s^2}:1$$

a：b：x＝（$2rs-s^2$）：（r^2-rs+s^2）：（r^2-s^2）

由上述討論得知：s＜r＜2s，r,s∈N

結論：整邊正三角形中，若邊長 a＝$2rs-s^2$，（r, s）＝1，r, s∈N，且 s＜r＜2s，則必定可以二分割成兩個整邊三角形【$2rs-s^2$ ， r^2-rs+s^2 ， r^2-s^2】及【$2rs-s^2$ ， r^2-rs+s^2 ，$2rs-r^2$】。

由以上的討論得知：整邊正三角形在邊長 a＝r^2+2rs，r,s∈N，r＞s 及邊長 a＝$2rs-s^2$，r,s∈N，s＜r＜2s，都可以二分割成兩個整邊三角形。

比較之後發現：在邊長 a＝r^2+2rs 之中，當 s＝1 時，即爲式邊長 a＝t^2+2t 的類型；
在邊長 a＝$2rs-s^2$ 之中，當 s＝1 時，即爲式邊長 a＝2t-1 的類型。

但是，是否還有其他邊長的整邊正三角形也可以二分割成整邊三角形呢？如何找？

由前述討論得知：

這兩類整邊正三角形的邊長都是由式 $a^2-ax+x^2=b^2$ 分解成比例式而得到的，所以若能證明式爲唯一條件的話，就表示沒有其他的整邊正三角形可以二分割成整邊三角形。

由式的證明知道：若邊長爲 a 的整邊正三角形能二分割成整邊三角形【a,b,x】及【a,b,a-x】時，必有 $a^2-ax+x^2=b^2$，其中 a＞x，a,b,x∈N。

所以想到證明：

三角形內，若邊長 a, b, x 具有 $a^2-ax+x^2=b^2$，a＞x，a, b, x∈N，則必有邊長 a 的整邊正三角形。

[已知]如圖（一）（二），△ABC 中，$\overline{AB}=a$，$\overline{BD}=x$，$\overline{AD}=b$，$a^2-ax+x^2=b^2$，$a>x$，$a,b,x\in N$

[求證]必有邊長 a 的正△ABC，且 D 在 $\overline{BC}$ 上

[證明]（1）$0<\overline{BD}=x<\frac{a}{2}$，如圖（一）

作 $\overline{AH}\perp\overleftrightarrow{BD}$，設 $\overline{AH}=h$，$\overline{DH}=l$，則 $\overline{BH}=x+l$

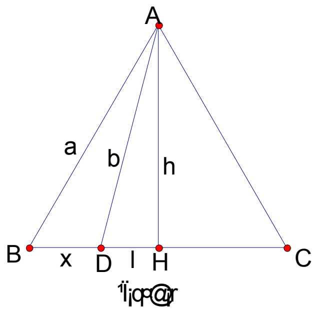
$\because \overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{BH}^2$

$\therefore a^2=h^2+(x+l)^2$

$a^2=h^2+x^2+2xl+l^2$ 代入式 $a^2-ax+x^2=b^2$

$(h^2+x^2+2xl+l^2)-ax+x^2=b^2$

$\because b^2=h^2+l^2$



$\therefore (h^2+x^2+2xl+l^2)-ax+x^2=h^2+l^2$

$\therefore 2x^2+2xl-ax=0$

$\because x>0$

$\therefore 2x+2l=a$

$a=2(x+l)$

$\therefore \overline{BH}=x+l=\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$\therefore \angle ABD=60^\circ$（直角三角形中，若最短邊長與斜邊長的比爲 1：2，則爲 30°-60°-90°）

$\therefore$ 延長 $\overline{BH}$ 至 $\overline{BC}$ 使 $\overline{BC}=2\overline{BH}=\overline{AB}$，則 $\angle B=60^\circ$

$\therefore \angle C=60^\circ=\angle BAC$

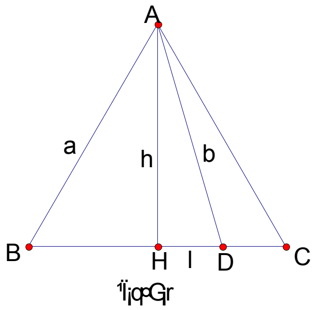
$\therefore$ △ABC 爲正三角形

（2）$\frac{a}{2}<\overline{BD}=x<a$，如圖（二）

作 $\overline{AH}\perp\overline{BD}$，設 $\overline{AH}=h$，$\overline{DH}=l$，則 $\overline{BH}=x-l$

$\because \overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{BH}^2$

$\therefore a^2 = h^2 + (x-l)^2$



$a^2 = h^2 + x^2 - 2xl + l^2$ 代入式 $a^2 - ax + x^2 = b^2$

$(h^2 + x^2 - 2xl + l^2) - ax + x^2 = b^2$

$\because b^2 = h^2 + l^2$

$\therefore (h^2 + x^2 - 2xl + l^2) - ax + x^2 = h^2 + l^2$

$\therefore 2x^2 - 2xl = ax$

$\because x > 0$

$\therefore 2x - 2l = a$

$\overline{BH} = x - l = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}\overline{AB}$

$\therefore \angle ABD = 60^\circ$

$\therefore$ 延長 $\overline{BH}$ 至 $\overline{BC}$ 使 $\overline{BC} = 2\overline{BH} = \overline{AB}$，則 $\angle B = 60^\circ$

$\therefore \angle C = 60^\circ = \angle BAC$

$\therefore \triangle ABC$ 為正三角形

a 薐a,b,x蕵 薐a,b,a-x蕵 a^2-
$ax+x^2$ b^2 a x 薐 a,b,x a^2-ax+x^2
b^2 a x a,b,x∈N a 薐

a

a r^2+2rs r,s 1 r,s∈N r s

薐r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , r^2-s^2蕵 薐r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , $2rs+s^2$蕵薐

a $2rs-s^2$ r,s 1 r,s∈N s r 2s

薐$2rs-s^2$, r^2-rs+s^2 , r^2-s^2蕵 薐$2rs-s^2$, r^2-rs+s^2 , $2rs-r^2$蕵薐

a r^2+2rs s 1 a t^2+2t

a $2rs-s^2$ s 1 a 2t-1 薐

找出整邊正三角形及二分割後整邊三角形邊長 a,b,x 的正整數表示法之後，嘗試將 r,s 以正整數代入這兩種類型的整邊正三角形：

1、$a=r^2+2rs$，$r,s\in N$ 且 $r>s$，分割爲【r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , r^2-s^2】及【r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , $2rs+s^2$】：

當（r , s）＝（2 , 1）得 a＝ 8 分割爲【 8, 7,3】及【 8, 7, 5】

當（r , s）＝（3 , 1）得 a＝15 分割爲【15,13,8】及【15,13,7】

2、$a=2rs-s^2$，$r,s\in N$ 且 $s<r<2s$，分割爲【$2rs-s^2$, r^2-rs+s^2 , r^2-s^2】及【$2rs-s^2$, r^2-rs+s^2 , $2rs-r^2$】：

當（r , s）＝（3 , 2）得 a＝ 8 分割爲【 8, 7,3】及【 8, 7, 5】

當（r , s）＝（4 , 3）得 a＝15 分割爲【15,13,8】及【15,13,7】

再以其他正整數代入計算，都會得到邊長相等的同一組三角形。我發現，因爲這兩種類型是出自同一個方程式的比例式，其實是同一種類型當然邊長會相同。所以就簡化成一種類型即：邊長 $a=r^2+2rs$ 的整邊正三角形，（r,s）＝1，$r>s$，$r,s\in N$，二分割爲【r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , r^2-s^2】及【r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , $2rs+s^2$】兩個整邊三角形。

另外，由邊長 $a=r^2+2rs$，（r,s）＝1，$r>s$，$r,s\in N$ 得知最小值在 r＝2,s＝1，所以式 $a^2-ax+x^2=b^2$，$a>x$ 成立的最小值 a＝8（此時 r＝2 , s＝1）。

結論：邊長 a 的整邊正三角形能二分割為兩個整邊三角形的條件為 $a=r^2+2rs$，（r, s）＝1，$r>s$，$r, s\in N$；其分割後的兩個整邊三角形為【r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , r^2-s^2】及【r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , $2rs+s^2$】。最小邊長 a＝8，即 r＝2，s＝1。

因爲 a ,b ,x ,a-x∈N，所以由邊長 a 的整邊正三角形二分割成【a,b,x】及【a,b,a-x】的性質可整理得到：有一夾角 60°的不等邊整邊三角形……

結論：有一夾角 60°的不等邊整邊三角形，其三邊長 a, b, x 必為方程式 $a^2-ax+x^2=b^2$ 的解，$a, b, x\in N$ 且邊長 b 的對角為 60°。若 $a>x$ 則最長邊 a 的最小值為 a＝8。

因爲（r,s）＝1，$r,s\in N$ 只是一般的正整數，而且 a,b,x 的一般式表示法是由計算比例式得到的，所以二分割後整邊三角形的三邊長 r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , r^2-s^2 可能會有公因數，即 a,b,x 不一定互質。因此再討論二分割後 a,b,x 各邊長之間的因數倍數關係。

三、整邊正三角形二分割後的各邊長有何關係？

（一）r,s 以 2k、2k+1 各别代入，

發現：二分割後三邊長【r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , r^2-s^2】之間，除了 r,s 皆偶數時 a,b,x 有因數 4 之外，

其餘的 a,b,x 沒有明顯的因數、倍數關係。

（二）r,s 以 3k、3k±1 各別代入，

1、若（r-s）有因數 3，則 r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , r^2-s^2 有公因數 3。

2、若（r-s）沒有因數 3，則 r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , r^2-s^2 互質。

（三）r,s 再以 4k、4k±1、4k±2……分別代入，發現計算很複雜，也找不到明顯的因數、倍數關係，就不再討論。

結論：邊長 a 的整邊正三角形能二分割的條件是方程式 $a^2-ax+x^2=b^2$ 有正整數解，且其解【a, b, x】如下：其中 r, s, k∈N 且 r＞s，（r, s）＝1，

若（r-s）沒有因數 3，則【a, b, x】互質，其解為【k（r^2+2rs），k（r^2+rs+s^2），k（r^2-s^2）】

若（r-s）有因數 3，則【a, b, x】有公因數 3，其解為【$\frac{1}{3}$k（r^2+2rs），$\frac{1}{3}$k（r^2+rs+s^2），$\frac{1}{3}$k（r^2-s^2）】

此時又發現：邊長 a＝r^2+2rs＝r（r+2s），r＞s 及邊長 a＝$2rs-s^2$＝s（2r-s），s＜r＜2s 之中，a 都是合數。所以想到：若 a 爲質數，則是否也可以二分割爲兩個整邊三角形呢？

四、邊長為質數的整邊正三角形，是否可以二分割？

設邊長 a 的整邊正三角形可以二分割爲【a,b,x】及【a,b,y】的兩個整邊三角形。

其中 a 爲質數，x+y＝a，x,y∈N

[證明] $a^2-ax+x^2=b^2$

$a^2-ay+y^2=b^2$

$a=x+y$

解 x 的方程式 $x^2-ax+(a^2-b^2)=0$

得 $x=\dfrac{a\pm\sqrt{4b^2-3a^2}}{2}$

同理，解 y 的方程式 $y^2-ay+(a^2-b^2)=0$

得 $y=\dfrac{a\pm\sqrt{4b^2-3a^2}}{2}$

若 x,y∈N，則判別式 $D=4b^2-3a^2$ 必爲完全平方數。

設 $4b^2-3a^2=k^2$，k∈N

$\therefore 4b^2-k^2=3a^2$

$\because$ a 爲質數

$\therefore (2b+k)(2b-k)=3a^2\cdot 1$

$=a^2\cdot 3$

$=3a\cdot a$

（一）$(2b+k)(2b-k)=3a^2\cdot 1$

$2b+k=3a^2$

$2b-k=1$

解得 $b=\dfrac{3a^2+1}{4}$

若 $a\geq 2$ 則 $\dfrac{3}{4}a\geqq\dfrac{6}{4}>1$

$\therefore \dfrac{3}{4}a^2=\dfrac{3}{4}a\cdot a>1\cdot a=a$

$\therefore b=\dfrac{3a^2+1}{4}>a$ 不合

（二）$(2b+k)(2b-k)=a^2\cdot 3$

$2b+k=a^2$

$2b-k=3$

解得 $b=\dfrac{a^2+3}{4}$

若 $a=2$ 則 $b=\dfrac{7}{4}\notin N$ 不合

若 $a=3$ 則 $b=3$ 不合

若 $a\geq 5$ 則 $\dfrac{a}{4}\geq\dfrac{5}{4}>1$

$\therefore \frac{a}{4} \cdot a > 1 \cdot a$

$\therefore b = \frac{a^2+3}{4} > a$　　不合

（三）（2b+k）（2b-k）＝3a·a

2b+k＝3a

2b-k＝a

解得 b＝a　　不合

結論：邊長為質數的整邊正三角形不能二分割為兩個整邊三角形。

此時想到，能二分割的整邊正三角形邊長 a 的最小值 $8=2^3$，其中 2 爲質數。是否 p 爲質數，邊長 a＝p 不能二分割；但是，n≧2，n∈N，邊長 $a=p^n$ 卻可以二分割？

先以質數 2 的乘方代入邊長 a，

發現：邊長 a＝8〈即 r＝2 ,s＝1〉、a＝32（即 r＝4 ,s＝2）……，皆可以利用 r（r+2s）分解出 r,s 值；但是 a＝16 ､64……，雖不能分解出 r,s 值，卻可以利用 a＝8 所二分割後的【8,7,3】及【8,7,5】再放大後得到。所以邊長 $a=2^n$, n≧3 , n∈N 顯然可以二分割成【2^n ,$7\cdot2^{n-3}$, $3\cdot2^{n-3}$】及【2^n ,$7\cdot2^{n-3}$, $5\cdot2^{n-3}$】。

結論：邊長 $a=2^n$， n≧3， n∈N 可以二分割成【2^n ， $7\cdot2^{n-3}$， $3\cdot2^{n-3}$】及【2^n ， $7\cdot2^{n-3}$， $5\cdot2^{n-3}$】。

接著，以 3 的乘方代入邊長 a；但是 $a=3^2$ 不能二分割，

再將 $a=3^3$ 嘗試分解爲 r（r+2s），r＞s，r,s∈N

∵ r，r+2s 爲同奇數，或同偶數且 r+2s＞r

發現：$a=3^3=3\cdot9$ 不能分解出 r,s 值

此時想到：是否 P 爲奇質數，n∈N，邊長 $a=P^n$ 皆無法二分割？再度引發了我的興趣。

五、P 為奇質數，n∈N，邊長 $a=p^n$ 的整邊正三角形能否二分割？

∵ 邊長 $a=2^n$, n≧3 , n∈N 已討論過，

∴ 從 $p≧3$，$n\in N$ 開始研究邊長 $a=p^n$ 整邊三三角形的二分割。

若邊長可以二分割，則必可分解爲 $r(r+2s)$，$r>s$，$r,s\in N$

以下證明：

若 p 爲奇質數，$n\in N$，則邊長 $a=p^n$ 不能二分割爲兩個整邊三角形。

[證明]：1、$n=1$

$a=p$，已證明知不能二分割

2、$n=2$

$a=p^2=1\cdot p^2=p\cdot p$

（1）$1\cdot p^2=1\cdot(1+p^2-1)$

$=1\cdot\left(1+2\cdot\frac{p^2-1}{2}\right)$ 不合

（2）$p\cdot p$ 不合

3、$n≧3$

設邊長 $a=p^n$ 可以分解爲 $r(r+2s)$，$r>s$，$n≧3$，$n,r,s\in N$

∵ p 爲奇質數，p^n 爲奇數

∴ r , $r+2s$ 同奇數且 $r<r+2s$

設 $p^n=p^k\cdot p^{n-k}$，$n-k>k$，$n,k\in N$

$=p^k\cdot(p^k+p^{n-k}-p^k)$

$=p^k\cdot\left(p^k+2\cdot\frac{p^{n-k}-p^k}{2}\right)$

∵ $n-k>k$ ∴$n-2k>0$

∴ $n-2k≧1$

∴ $p^{n-2k}≧p^1≧3$

$p^{n-2k}\cdot p^k \geqq 3\cdot p^k$

$\therefore p^{n-k} \geqq 3\cdot p^k$

$\therefore p^{n-k}-p^k \geqq 2\cdot p^k$

$\therefore \dfrac{p^{n-k}-p^k}{2} \geqq p^k$ 不合

∴ p 爲奇質數，n≧3，n∈N，則邊長 $a=p^n$ 不能二分割爲兩個整邊三角形。

結論：p 為奇質數，n∈N，邊長 $a=p^n$ 的整邊正三角形不能二分割為兩個整邊三角形。

伍、討論：

終於解決了整邊正三角形二分割的問題，也得到了一些結論。但是，邊長 a 的整邊正三角形二分割可以有幾種方法？如：a＝40 可以二分割成【40,35,15】及【40,35,25】，也可以二分割成【40,37,33】及【40,37,7】。

另外，哪些 a 的二分割會互質？哪些 a 不能二分割？條件爲何？整邊正三角形能否三分割？有幾種方法？條件如何？一般的整邊三角形能否二分割或三分割？若是可以，則二分割有幾種方法？三分割有幾種方法？條件如何？這些題材都有待繼續研究。期盼評審教授能給予指導。謝謝！！

陸、結論：

一、邊長 a 的正三角形，若能二分割成邊長爲 a,b,x 及邊長爲 a,b,a-x 的兩個三角形則方程式 $a^2-ax+x^2=b^2$，a＞x 必成立。反之，三角形內，若三個邊長 a,b,x 具有 $a^2-ax+x^2=b^2$，a＞x，則必有邊長 a 的正三角形。

其中，若 a,b,x∈N，且邊長 a 的整邊正三角形能二分割成【a,b,x】及【a,b,a-x】兩個整邊三角形，則方程式 $a^2-ax+x^2=b^2$，a＞x，有正整數解。反之，三角形內，若三個邊長 a,b,x 具有 $a^2-ax+x^2=b^2$，a＞x，a,b,x∈N，必有邊長 a 的整邊正三角形。

二、邊長 a 的整邊正三角形能二分割爲兩個整邊三角形的條件爲 $a=r^2+2rs$，（r,s）＝1，r,s∈N 且 r＞s；其二分割後的兩個整邊三角形邊長爲【r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , r^2-s^2】及【r^2+2rs , r^2+rs+s^2 , $2rs+s^2$】。最小邊長 a＝8，即 r＝2，s＝1。

三、有一夾角 60°的不等邊整邊三角形，其三邊長 a,b,x 必爲方程式 $a^2-ax+x^2=b^2$ 的解， a,b,x∈N 且邊長 b 的對角爲 60°。若 a＞x 則最長邊 a 的最小值爲 a＝8。

四、邊長 a 的整邊正三角形能二分割的條件是方程式 $a^2-ax+x^2=b^2$ 有正整數解，且其解【a,b,x】如下，其中 r,s,k∈N 且 r＞s，（r,s）＝1，

若（r-s）沒有因數3，則【a,b,x】互質，其解為【k（r^2+2rs），k（r^2+rs+s^2），k（r^2-s^2）】

若（r-s）有因數3，則【a,b,x】有公因數3，其解為【$\frac{1}{3}$k（r^2+2rs），$\frac{1}{3}$k（r^2+rs+s^2），$\frac{1}{3}$k（r^2-s^2）】。

五、邊長 $a=2^n$, $n\geqq3$, $n\in N$ 的整邊正三角形可以二分割成【2^n, $7\cdot2^{n-3}$, $3\cdot2^{n-3}$】及【2^n, $7\cdot2^{n-3}$, $5\cdot2^{n-3}$】。

六、p 為奇質數，$n\in N$，邊長 $a=p^n$ 的整邊正三角形不能二分割為兩個整邊三角形。

柒、參考資料：

一、國立編譯館　　　國民中學數學課本第三冊

二、康軒文教事業　　國民中學數學課本第四冊

三、盛立人 嚴鎮軍　　從勾股定理談起　　　　九章出版社

評　語

030422 國中組數學科

整邊正三角形的整邊二分割

研究的角度若能再多元一些，研究結果將更豐富。