中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030421

高雄縣立阿蓮國民中學

指導老師姓名

詹啟明

作者姓名

謝政佑

曹瑞彬

歐秀雯

中 華 民 國 第 四十四 屆 全 國 中 小 學 科 學 展 覽 會

作 品 說 明 書

科別：數學科

組別：國中組

作品名：

多邊形與二條水平平行線所截出的上下二個圖形其周長和之探討

關鍵詞：平移、旋轉、圖形周長和

編號：

《目錄》

摘要

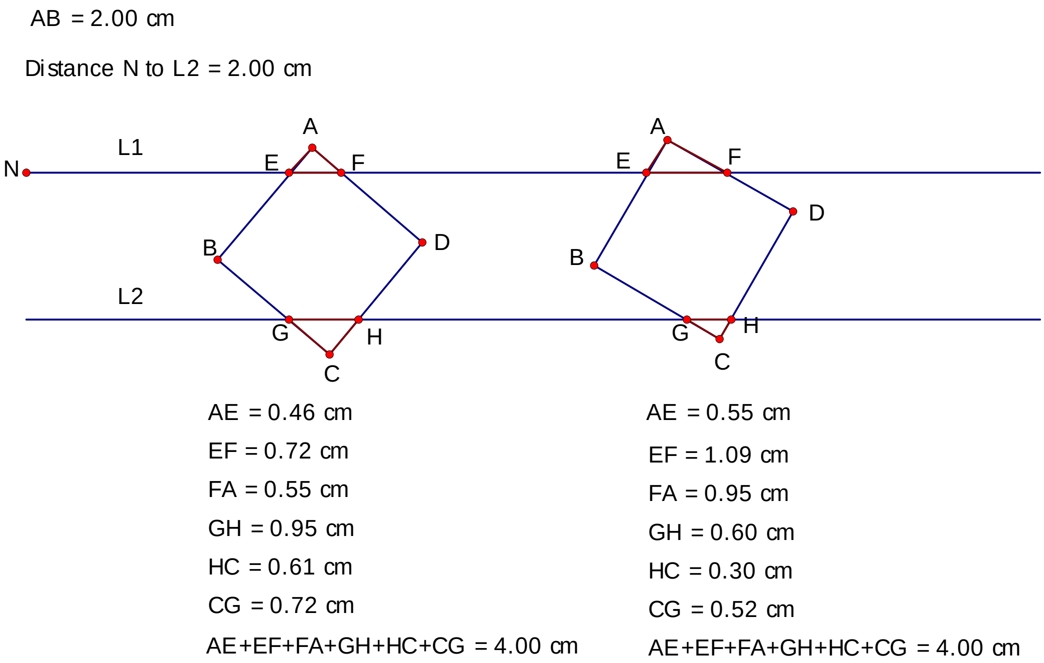
由 AMPO 的題目「設 ABCD 是一張長爲 a 的正方形的紙片。平面上有二平行直線 L_1, L_2，其間隔之長也是 a。將正方形的紙片置於平面上，使 AB，AD 兩邊分別交 L_1 於 E 和 F 兩點；同時 CB，CD 兩點分別交 L_2 於 G 和 H 兩點。設 ΔAEF 和 ΔCGH 的周長分別是 m_1 和 m_2。試證不論正方形 ABCD 如何擺，$m_1 + m_2$ 是一個常數。」展開這趟充滿挫折、振奮、驚喜…五味雜陳的研究之旅，過程雖然艱辛，卻也帶給我們無限的成就感與更敏銳的觀察力。

我們的研究內容爲**多邊形與二條水平平行線所截出上下二個圖形其周長和之探討**。一開始我們與在課本相似形單元時老師所問的問題連結並依此做猜想，再利用簡單的圖形基本性質做特殊化的驗證。當完成了原題目（正方形）的證明之後我們又繼續利用 GSP 做輔助去尋找是否有其他的圖形也能擁有如此漂亮的性質？接著我們將研究分成兩大方向：1.奇數邊多邊形 2.偶數邊多邊形的探討。

首先完成了所有奇數邊多邊形所能符合的條件討論與結果。接著又著手於偶數邊多邊形的探討：從正六、正八、正十、正十二邊形的研究中我們觀察出似乎按照某種方式去排放的話可以推廣至所有的偶數邊正多邊形使得它們都能像原題目那樣有著令人驚豔的結果呈現出來。

最後我們要對於先前所觀察猜測的部分做一完整的驗證：將所有偶數邊正多邊形分成兩大類 1.$n = 4k, k \in N$　2.$n = 4k + 2, k \in N$ 完成研究討論。至此我們已經完整的將全部的多邊形與二條平行線截出二個三角形時的所有情況討論完畢，並且成功的推導出了正 n 邊形的適用公式。

AMPO 原題目的圖形



壹、研究動機：

在看了 AMPO 的一道題目（圖形在第 2 頁）：「設 ABCD 是一張長為 a 的正方形的紙片。平面上有二平行直線 L_1, L_2，其間隔之長也是 a。將正方形的紙片置於平面上，使 AB，AD 兩邊分別交 L_1 於 E 和 F 兩點；同時 CB，CD 兩點分別交 L_2 於 G 和 H 兩點。設 ΔAEF 和 ΔCGH 的周長分別是 m_1 和 m_2。試證不論正方形 ABCD 如何擺，$m_1 + m_2$ 是一個常數。」之後，深深覺得其結果非常不可思議，激起了我們莫大的好奇心。一開始我們使用了在相似形單元所學到的方式逐步推測出此常數，緊接著利用圖形的基本性質著手驗證具有特別角時的情況，之後又考慮到若非特別角要怎麼去驗證呢？在與老師討論之後，知道要深入研究時會用到三角函數以及利用 GSP 做輔助工具，而老師也願意教導我們的情況下，展開了這趟研究的奇幻旅程！

貳、研究目的：

一、探討二平行線的距離與正方形的邊長在什麼條件下所截出的二個三角形周長和為一定值？又此定值為何？

二、探討二平行線與奇數邊正多邊形所截出上下二個圖形的周長和。

三、探討二平行線與偶數邊正多邊形所截出上下二個圖形的周長和。

四、推廣至所有的多邊形。

參、符號界定：（適用於本文）

一、「a」為正多邊形的邊長。

二、「h」為二平行線距離。

三、「$\sum b$」為二水平平行線與正多邊形所截出上下二個圖形的周長和。

四、「★」為研究過程中所得到的小結論。

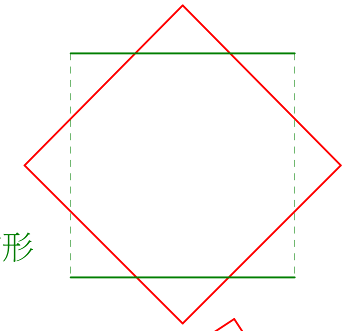
五、「■」為研究過程中所引發的猜想。

肆、研究過程與結果：

一、正方形的探討

（一）由在學習相似形單元時老師所問的問題猜想定值為 $2a$ ：

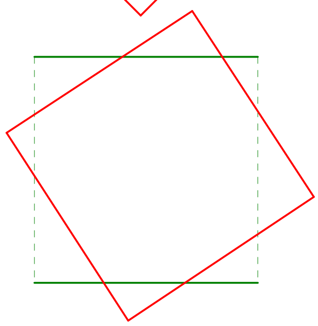
1. 與以前的題目作聯結：



兩個邊長為 a 的正方形互相截出 8 個全等的小三角形，此 8 個三角形周長和等於 2 個正方形周長和等於 $8a$ 。則一個小三角形周長和為 $8a/8=a$ 。

★1：由 AMPO 的題意可推知相距 a 的二平行線對邊長為 a 的正方形所截出 2 個三角形周長和為常數 $2a$ 。

2. 配合題目所需做推廣：

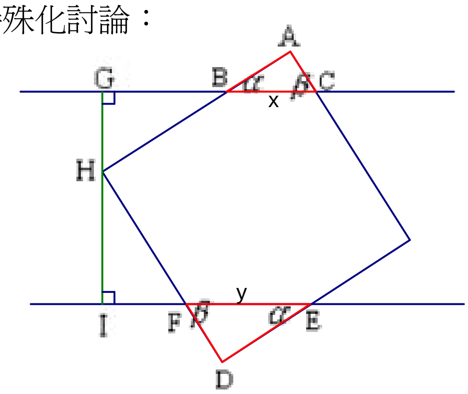


使其截出 8 個相似的小三角形，分成四組（上下、左右、左上右下、左下右上）可觀察出不論如何擺放都能形成 8 個相似三角形。

★2：由 AMPO 的題意可知每組周長和皆為常數（不論如何擺放），所以此常數為 $8a/4=2a$ 。

（二）由簡單的幾何圖形性質做討論：

1. 特殊化討論：



正方形邊長 a ，二平行線距離 a

$\sum b$ 為上下二個三角形的周長和

(1) $\alpha=45^\circ,\beta=45^\circ$ 且上下二個三角形全等

$\rightarrow\ \sum b=2a$（證明略）

(2) $\alpha=30^\circ,\beta=60^\circ$ 且上下二個三角形全等

$\rightarrow\ \sum b=2a$（證明略）

(3) $\alpha=45^\circ,\beta=45^\circ$ 且上下二個三角形相似

設 $\overline{BC}=x,\overline{EF}=y$

則 ΔABC 周長 $=x(1+\sqrt{2})$ ，ΔDEF 周長 $=y(1+\sqrt{2})$

$\therefore \sum b=(x+y)(1+\sqrt{2})$

又 $\overline{GH}+\overline{HI}=a \Rightarrow \dfrac{a-\dfrac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+\dfrac{a-\dfrac{y}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=a \quad \Rightarrow x+y=2(\sqrt{2}a-a)$

故 $\sum b = 2(\sqrt{2}a - a)\cdot(1+\sqrt{2})$

$$= 2a(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)$$

$$= 2a$$

★3：當「$h=a, \alpha=45^{\circ}, \beta=45^{\circ}$」時正方形不論如何平移（$\alpha,\beta$ 不變）$\sum b$ 都不變。

(4) $\alpha=30^{\circ}, \beta=60^{\circ}$ 且上下二個三角形相似

設 $\overline{BC}=x, \overline{EF}=y$

則 ΔABC 周長 $= x(1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\Delta$DEF 周長 $= y(1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\therefore \sum b = (x+y)(\frac{3+\sqrt{3}}{2})$

又 $\overline{GH}+\overline{HI}=a \Rightarrow \dfrac{a-\frac{\sqrt{3}x}{2}}{2}+\dfrac{a-\frac{y}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=a \quad \Rightarrow x+y=\dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}\cdot a$

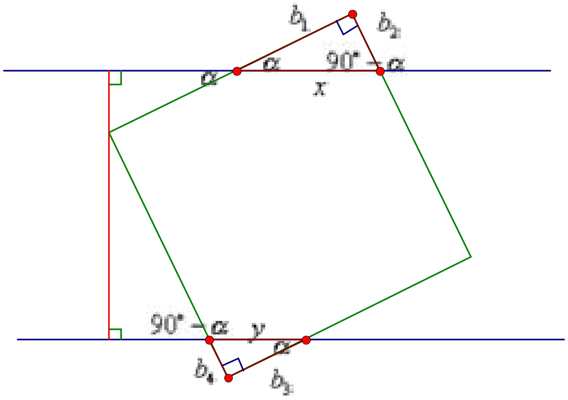
故 $\sum b = \dfrac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}}\cdot a\cdot(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}) = 2a$

★4：當「$h=a, \alpha=30^{\circ}, \beta=60^{\circ}$」時正方形不論如何平移（$\alpha,\beta$ 不變）$\sum b$ 都不變。

■1：由（3）（4）猜測在「$h=a$」的條件下當正方形旋轉時（α,β 改變）$\sum b$ 仍爲常數。

■2：是否不論 h 爲何，只要能截出二個三角形時，正方形無論如和移動（包括平移、旋轉）$\sum b$ 皆爲常數？又此常數爲何？

2. 一般化討論：(探討 h 與 a 在什麼條件之下 $\sum b$ 爲常數？又此常數爲何？)



正方形邊長 a，二平行線距離 h

$\sum b$ 爲上下二個三角形的周長和

$b_1 = x\cos\alpha \qquad b_2 = x\sin\alpha$

$b_3 = y\cos\alpha \qquad b_4 = y\sin\alpha$

$\Rightarrow \Sigma b = (x+y)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)$

又 $(a-b_1)\sin\alpha+(a-b_4)\sin(90^\circ-\alpha)=h$

$\Rightarrow (a-x\cos\alpha)\sin\alpha+(a-y\sin\alpha)\sin(90^\circ-\alpha)=h$

$\Rightarrow a\sin\alpha+a\cos\alpha-h=(x+y)\sin\alpha\cos\alpha$

$\therefore x+y=\dfrac{a\sin\alpha+a\cos\alpha-h}{\sin\alpha\cos\alpha}$ (至此可知平移時周長和不變)

故 $\Sigma b=\dfrac{a\sin\alpha+a\cos\alpha-h}{\sin\alpha\cos\alpha}\times(1+\sin\alpha+\cos\alpha)$

$$=\frac{a(\sin\alpha+\cos\alpha-1)+a-h}{\sin\alpha\cos\alpha}\times(\sin\alpha+\cos\alpha+1)$$

$$=\frac{a\left[(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1^2\right]}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{(a-h)(\sin\alpha+\cos\alpha+1)}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{a(2\sin\alpha\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{(a-h)(\sin\alpha+\cos\alpha+1)}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=2a+\frac{(a-h)(\sin\alpha+\cos\alpha+1)}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

因此當 $h=a$ 時 $\sum b$ 為常數 $2a$（不論平移或旋轉 $\sum b$ 皆為常數）。

★5： 由正方形的探討過程中，可得到的結論：

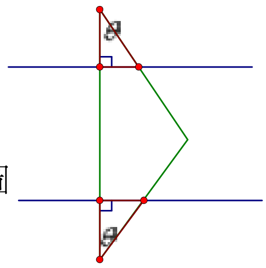
A.平移時 $\sum b$ 不變的條件：上下圖形相似。

B.旋轉時 $\sum b$ 不變的條件：h 與 a 滿足某一關係式且上下圖形一直保持相似。

■ 3： 除了正方形之外，是否有其他的多邊形也具有如此漂亮的性質？

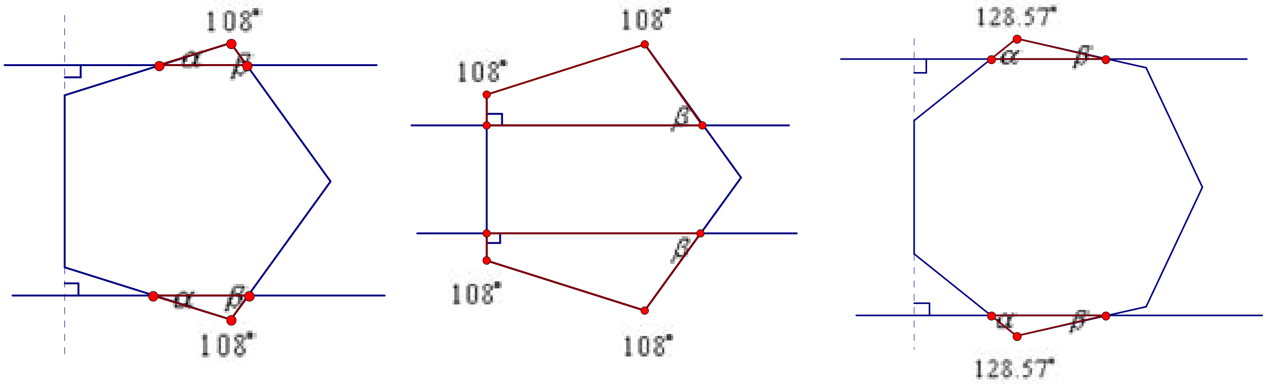
二、奇數邊多邊形的探討：

（一）三角形與二平行線所截出的圖形在什麼條件下會相似？



1. 由★5A 可知，要符合平移條件的必須是「等腰三角形」，且底邊垂直二平行線。
2. 由★5B 可知，三角形沒有辦法符合旋轉條件（∵旋轉之後上下圖形無法保持相似）。

（二）m 邊形（ $m=2k+3, k\in N$ ）與二平行線所截出的圖形在什麼條件下對應角相等？



1. 滿足★5A 的條件：(1)「正」m 邊形。
   (2) 多邊形其中一邊（或其延伸線）垂直二平行線。
   (3) 需截出上下二個邊數相同的多邊形。
2. 由★5B 可知 m 邊形沒有辦法符合旋轉條件(旋轉之後上下圖形無法保持對應角相等)。

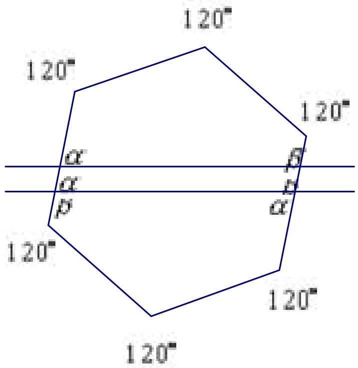
★6：A. 等腰三角形底邊垂直二平行線時，截出二個相似的三角形，且當其平移時 $\sum b$ 為常數。

B. 奇數邊正多邊形其中一邊（或其延伸線）垂直二平行線時，所截出邊數相同的二個圖形對應角相等，且當其平移時 $\sum b$ 為常數。

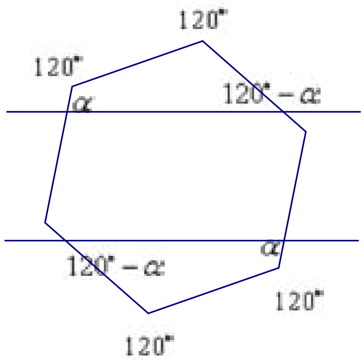
C. 當奇數邊正多邊形旋轉而不符合 B.的條件時，當其平移時 $\sum b$ 不為定值，因此不去討論 m 邊形的旋轉情形。

三、偶數邊多邊形的探討：

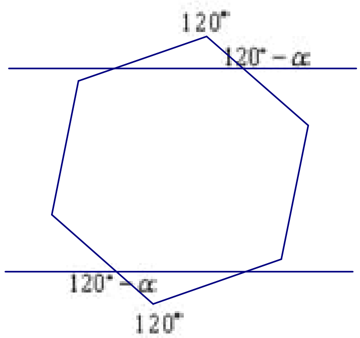
（一）n 邊形（ $n=2(k+1), k\in N$ ）與二平行線所截出的圖形在什麼條件下對應角相等？



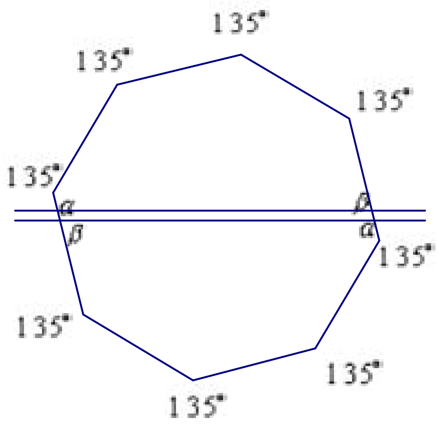
（圖 1）



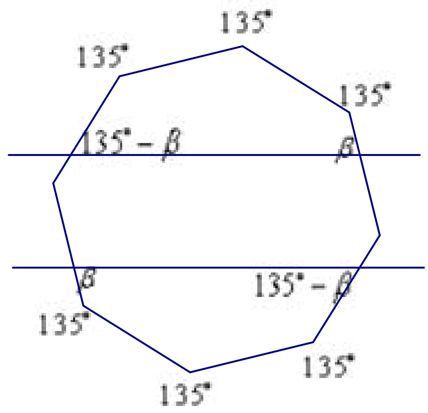
（圖 2）



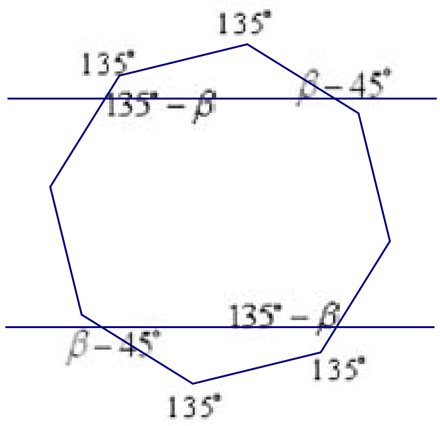
（圖 3）



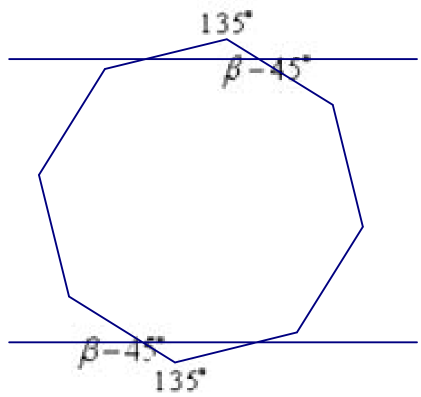
（圖 4）



（圖 5）



（圖 6）



（圖 7）

1. 由圖 1→圖 2→圖 3 的過程可知正六邊形與二平行線所截出的二個**等邊**多邊形對應角相等，不受平移、旋轉的影響。

2. 由圖 4→圖 5→圖 6→圖 7 的過程可知正八邊形與二平行線所截出的二個**等邊**多邊形對應角相等，不受平移、旋轉的影響。

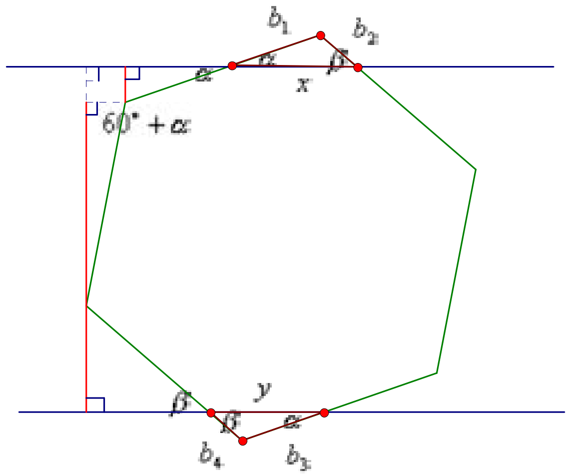
3. 由上述所使用的方法，利用正多邊形每一內角度數相等及同位角、內錯角、…等觀念可推廣至所有的偶數邊正多邊形。

★7：A.正 n 邊形與二平行線截出邊數相同的二個圖形對應角相等，當其平移時$\sum b$爲定值。

B.正 n 邊形旋轉之後與二平行線所截出邊數相同的二個圖形仍然會對應角相等，因此旋轉成一個新的角度之後當其平移時$\sum b$依然爲定值。

■4：是否存在某種偶數邊正多邊形具有與正方形一樣的漂亮性質：當 h 與 a 滿足某一關係式時不論此多邊形如何移動，$\sum b$皆爲定值？若存在的話，h 與 a 要滿足何種關係式？又此定值爲何？

（二）正六邊形的探討：



二平行線相距 h

正六邊形邊長 a ，每一內角 120°

$\sum b$ 爲上下二個三角形的周長和

$\alpha+\beta=60^\circ$

$$\frac{x}{\sin 120^\circ}=\frac{b_1}{\sin\beta}=\frac{b_2}{\sin\alpha}\Rightarrow b_1=\frac{2}{\sqrt{3}}x\sin\beta、b_2=\frac{2}{\sqrt{3}}x\sin\alpha$$

$$\frac{y}{\sin 120^\circ}=\frac{b_3}{\sin\beta}=\frac{b_4}{\sin\alpha}\Rightarrow b_3=\frac{2}{\sqrt{3}}y\sin\beta、b_4=\frac{2}{\sqrt{3}}y\sin\alpha$$

$$\therefore \Sigma b=(x+y)(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\beta)$$

又 $(a-b_1)\sin\alpha+a\sin(60^\circ+\alpha)+(a-b_4)\sin\beta=h$

$$\Rightarrow (a-\frac{2}{\sqrt{3}}x\sin\beta)\sin\alpha+a\sin(60^\circ+\alpha)+(a-\frac{2}{\sqrt{3}}y\sin\alpha)\sin\beta=h$$

$$\Rightarrow a\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin(60^\circ+\alpha)\right)-(x+y)\times\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin\alpha\sin\beta)=h$$

$$\Rightarrow x+y=\frac{a\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin(60^\circ+\alpha)\right)-h}{\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha\sin\beta}$$

故 $\Sigma b=\left[a(\sin\alpha+\sin\beta+\sin(60^\circ+\alpha))-h\right]\times\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$ $\qquad(\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 120^\circ)$

$$=\left[a\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin(60^\circ+\alpha)\right)-h\right]\times\frac{4\cos\frac{120^\circ}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\bullet 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$ 【註 1】

$$=\left[a\left(\sin\alpha+\sin\beta+\sin(60^\circ+\alpha)\right)-h\right]\times\frac{\cos 60^\circ}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{\sin 30^\circ g\left[a\left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin(60^\circ+\alpha)\right)-h\right]}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$ $\qquad(\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{60^\circ}{2}=30^\circ)$

$$=\frac{\frac{1}{2}a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{2}a\cos(30^\circ-\alpha)-\frac{1}{2}h}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{1}{2}a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2})}$$ 【註 2】

$$=\frac{2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-h}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{2a(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})+\sqrt{3}a-h}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

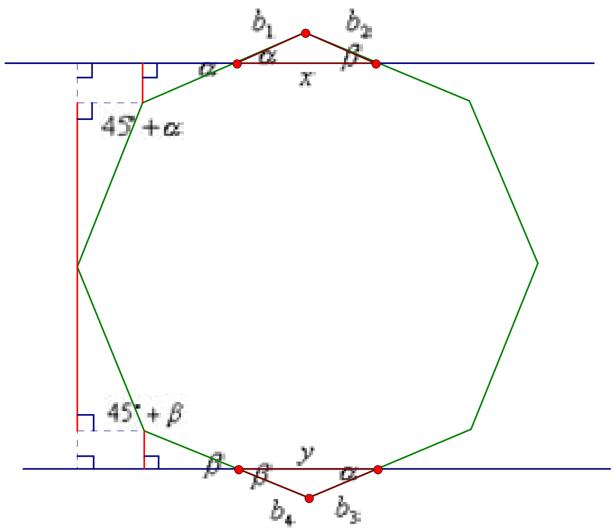
$$=2a+\frac{\sqrt{3}a-h}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

因此當 $h=\sqrt{3}a$ 時，$\sum b$ 爲定值$2a$ 。

【註 1】$\theta+\alpha+\beta=180^\circ$時，則 $\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta\ =4\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$

【註 2】$\cos(30^\circ-\alpha)=\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha)\ =\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\ =\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

（三）正八邊形的探討：



二平行線相距h

正八邊形邊長a ，每一內角135°

$\sum b$爲上下二個三角形的周長和

$\alpha+\beta=45^\circ$

$$\frac{x}{\sin 135°}=\frac{b_1}{\sin\beta}=\frac{b_2}{\sin\alpha}\Rightarrow b_1=\sqrt{2}x\sin\beta,b_2=\sqrt{2}x\sin\alpha$$

$$\frac{y}{\sin 135°}=\frac{b_3}{\sin\beta}=\frac{b_4}{\sin\alpha}\Rightarrow b_3=\sqrt{2}y\sin\beta,b_4=\sqrt{2}y\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \Sigma b=\left(x+y\right)(1+\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{2}\sin\beta)$$

又 $(a-b_1)\sin\alpha+a\sin(45°+\alpha)+a\sin(45°+\beta)+(a-b_4)\sin\beta=h$

$$\Rightarrow (a-\sqrt{2}x\sin\beta)\sin\alpha+a\sin(45°+\alpha)+a\sin(45°+\beta)+(a-\sqrt{2}y\sin\alpha)\sin\beta=h$$

$$\Rightarrow a(\sin\alpha+\sin(45°+\alpha)+\sin(45°+\beta)+\sin\beta)-\left(x+y\right)\times\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta=h$$

$$\Rightarrow x+y=\frac{a(\sin\alpha+\sin(45°+\alpha)+\sin(45°+\beta)+\sin\beta)-h}{\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta}$$

故 $\sum b=\left[a(\sin\alpha+\sin(45°+\alpha)+\sin(45°+\beta)+\sin\beta)-h\right]\times\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$

$$=\left[a(\sin\alpha+\sin(45°+\alpha)+\sin(45°+\beta)+\sin\beta)-h\right]\times\frac{\cos\frac{135°}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{a\sin 22.5°\left[(\sin\alpha+\sin\beta)+(\sin(45°+\alpha)+\sin(45°+\beta))\right]-h\sin 22.5°}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{a\sin 22.5°(2\sin\frac{45°}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{135°}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2})-h\sin 22.5°}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{2a\times\frac{1-\cos 45°}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2a\times\sin 22.5°\cos 22.5°\times\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-h\sin 22.5°}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{a\left(1-\cos 45°\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+a\times\sin 45°\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-h\sin 22.5°}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

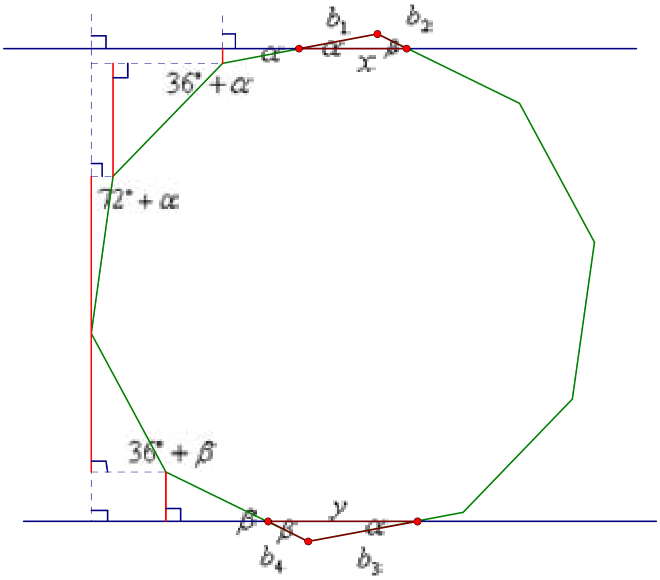
$$=\frac{a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-h\sin 22.5°}{\frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2})}$$

$$=2\times\frac{a(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos 22.5°)+a\cos 22.5°-h\sin 22.5°}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos 22.5°}$$

$$=2a+2\times\frac{a\cos 22.5°-h\sin 22.5°}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos 22.5°}$$

因此當 $h=\frac{a}{\tan 22.5°}$ 時 Σb 有定值 $2a$ 。

（四）正十邊形的探討：



二平行線相距 h

正十邊形邊長 a ，每一內角 144°

$\sum b$ 爲上下二個三角形的周長和

$\alpha+\beta=36^{\circ}$

$$\frac{x}{\sin 144°}=\frac{b_1}{\sin\beta}=\frac{b_2}{\sin\alpha}\Rightarrow b_1=\frac{x\sin\beta}{\sin 144°},b_2=\frac{x\sin\alpha}{\sin 144°}$$

$$\frac{y}{\sin 144°}=\frac{b_3}{\sin\beta}=\frac{b_4}{\sin\alpha}\Rightarrow b_3=\frac{y\sin\beta}{\sin 144°},b_4=\frac{y\sin\alpha}{\sin 144°}$$

$$\Rightarrow \Sigma b=(x+y)(1+\frac{\sin\alpha}{\sin 144°}+\frac{\sin\beta}{\sin 144°})$$

又 $(a-\frac{x\sin\beta}{\sin 144°})\sin\alpha+a\sin(36°+\alpha)+a\sin(72°+\alpha)+a\sin(36°+\beta)+(a-\frac{y\sin\alpha}{\sin 144°})\sin\beta=h$

$$\Rightarrow a[\sin\alpha+\sin(36°+\alpha)+\sin(72°+\alpha)+\sin(36°+\beta)+\sin\beta]-h=(x+y)\times\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin 144°}$$

$$\Rightarrow x+y=\frac{a\left[\sin\alpha+\sin\beta+\sin(36°+\alpha)+\sin(36°+\beta)+\sin(72°+\alpha)\right]-h}{\sin\alpha\sin\beta/\sin 144°}$$

故 $\sum b=\{a[\sin\alpha+\sin\beta+\sin(36°+\alpha)+\sin(36°+\beta)+\sin(72°+\alpha)]-h\}\times\frac{\sin 144°+\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$

$$=\{a[\sin\alpha+\sin\beta+\sin(36°+\alpha)+\sin(36°+\beta)+\sin(72°+\alpha)]-h\}\times\frac{\cos\frac{144^\circ}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{\sin 18°\{a[2\sin\frac{36°}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{108°}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos(18°-\alpha)]-h\}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{\sin 18°(2a\sin 18°\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2a\cos 36°\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-h)}{\frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2})}$$ 【註 3】

$$=\frac{a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(2\sin^2 18°+2\sin 18°\cos 36°+\sin 18°)-h\sin 18°}{\frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos 18°)}$$

$$=\frac{a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(1-\cos 36°+\sin 54°-\sin 18°+\sin 18°)-h\sin 18°}{\frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos 18°)}$$

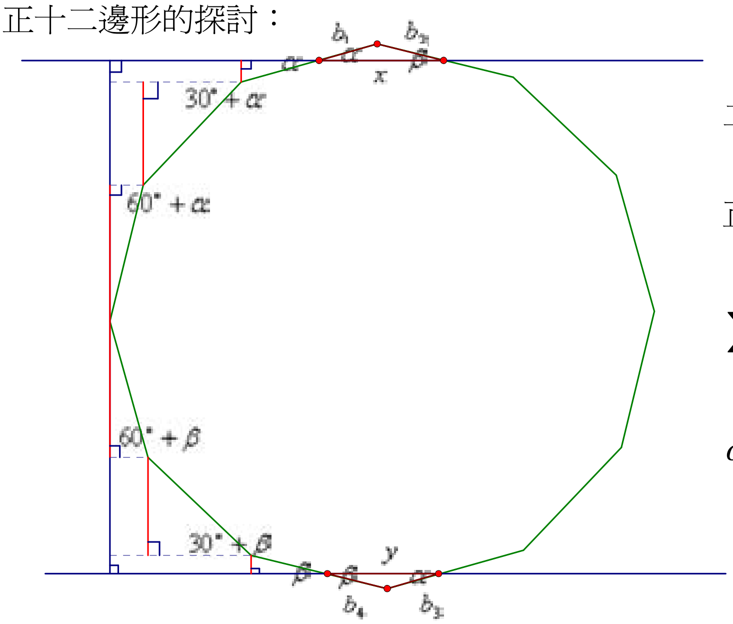
$$=2\times\frac{a(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos 18°)+a\cos 18°-h\sin 18°}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos 18°}$$

$$=2a+2\times\frac{a\cos 18°-h\sin 18°}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos 18°}$$

因此當 $h=\dfrac{a}{\tan 18°}$ 時 Σb 有定値 $2a$。

【註 3】$\cos(18^\circ-\alpha)=\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha)=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

（五）正十二邊形的探討：



二平行線距離 h

正十二邊形邊長 a ，每一內角 150°

$\sum b$ 爲上下二個三角形的周長和

$\alpha+\beta=30^\circ$

$$\frac{x}{\sin150^\circ}=\frac{b_1}{\sin\beta}=\frac{b_2}{\sin\alpha}\Rightarrow b_1=\frac{x\sin\beta}{\sin150^\circ},b_2=\frac{x\sin\alpha}{\sin150^\circ}$$

$$\frac{y}{\sin150^\circ}=\frac{b_3}{\sin\beta}=\frac{b_4}{\sin\alpha}\Rightarrow b_3=\frac{y\sin\beta}{\sin150^\circ},b_4=\frac{y\sin\alpha}{\sin150^\circ}$$

$$\Rightarrow\sum b=(x+y)(1+\frac{\sin\alpha}{\sin150^\circ}+\frac{\sin\beta}{\sin150^\circ})$$

又 $(a-\frac{x\sin\beta}{\sin150^\circ})\sin\alpha+a\sin(30^\circ+\alpha)+a\sin(60^\circ+\alpha)+a\sin(60^\circ+\beta)+a\sin(30^\circ+\beta)+$

$(a-\frac{y\sin\alpha}{\sin150^\circ})\sin\beta=h$

$$\Rightarrow x+y=\frac{a\left[\sin\alpha+\sin(30^\circ+\alpha)+\sin(60^\circ+\alpha)+\sin(60^\circ+\beta)+\sin(30^\circ+\beta)+\sin\beta\right]-h}{\sin\alpha\sin\beta/\sin150^\circ}$$

故$\sum b=\left\{a[\sin\alpha+\sin\beta+\sin(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ+\beta)+\sin(60^\circ+\alpha)+\sin(60^\circ+\beta)]-h\right\}\times\frac{\sin150^\circ+\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$

$$=\{a[\sin\alpha+\sin\beta+\sin(30^\circ+\alpha)+\sin(30^\circ+\beta)+\sin(60^\circ+\alpha)+\sin(60^\circ+\beta)]-h\}\times\frac{\cos\frac{150^\circ}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{a\sin15^\circ(2\sin\frac{30^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{150^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2})-h\sin15^\circ}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(2\sin^2 15^\circ+2\sin15^\circ\sin45^\circ+2\sin15^\circ\cos15^\circ)-h\sin15^\circ}{\frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos15^\circ)}$$

$$=\frac{a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(1-\cos 30^\circ+\cos 30^\circ-\cos 60^\circ+\sin 30^\circ)-h\sin 15^\circ}{\frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos 15^\circ)}$$

$$=2\times\frac{a(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos 15^\circ)+a\cos 15^\circ-h\sin 15^\circ}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos 15^\circ}$$

$$=2a+2\times\frac{a\cos 15^\circ-h\sin 15^\circ}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos 15^\circ}$$

因此當$h=\dfrac{a}{\tan 15^\circ}$時$\Sigma b$有定值$2a$。

★8：檢視正方形、正六邊形、正八邊形、正十邊形、正十二邊形的探討結果，歸納出了：

「當 $h=\dfrac{a}{\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})}$時，$\sum b$有定值$2a$」。

■5：A. 猜想是否全部的偶數邊正多邊形都能在h與a滿足某種關係式時不論此正多邊形如何移動都能使得其與二平行線所截出的二個三角形保持$\sum b$爲定值？

B. 若 A.的猜想是肯定的，那麼是否也是「當 $h=\dfrac{a}{\tan(\frac{\alpha+\beta}{2})}$時，$\sum b$有定值$2a$」？

伍、討論：

推廣至正n邊形（$n=2(k+1),k\in N$）：

由之前的探討可以發現 n 邊形可分成兩大類：1. $n=4k,k\in N$ 2. $n=4k+2,k\in N$

一、$n=4k,k\in N$：

正n邊形每一內角$\dfrac{(n-2)\times 180^\circ}{n}$ $\therefore \alpha+\beta=\dfrac{360^\circ}{n}$ 且三角形的角度由上而下依序爲：

「$\dfrac{360^\circ}{n}\times(i-1)+\alpha$，$i=1,2,\cdots,k$；$\dfrac{360^\circ}{n}\times(j-1)+\beta$，$j=k,k-1,\cdots,1$」亦即

「$\alpha,\dfrac{360^\circ}{n}+\alpha,\dfrac{720^\circ}{n}+\alpha,\ldots,\dfrac{360^\circ}{n}\times(\dfrac{n}{4}-1)+\alpha,\dfrac{360^\circ}{n}\times(\dfrac{n}{4}-1)+\beta,\ldots,\dfrac{720^\circ}{n}+\beta,\dfrac{360^\circ}{n}+\beta,\beta$」

並且可將其上下對稱分成$k\left(=n/4\right)$組。

$$\Rightarrow x+y=\left\{a[\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\frac{360^\circ}{n}+\alpha)+\sin(\frac{360^\circ}{n}+\beta)+\sin(\frac{720^\circ}{n}+\alpha)\right.$$

$$\left.+\sin(\frac{720^\circ}{n}+\beta)+\ldots+\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\times(\frac{n}{4}-1)+\alpha\right)+\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\times(\frac{n}{4}-1)+\beta\right)\right]-h\Bigg\}\Bigg/\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\left[180^\circ-(\alpha+\beta)\right]}$$

$$=\left\{a[2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin(\frac{360^\circ}{n}+\frac{\alpha+\beta}{2})\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin(\frac{720^\circ}{n}+\frac{\alpha+\beta}{2})g\right.$$

$$\left.\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\ldots+2\sin(90^\circ-\frac{360^\circ}{n}+\frac{\alpha+\beta}{2})\cos\frac{\alpha-\beta}{2}]-h\right\}\Bigg/\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(180^\circ-\frac{360^\circ}{n})}$$ 【註 4】

$$=\frac{2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}[\sin\frac{180^\circ}{n}+\sin\frac{540^\circ}{n}+\sin\frac{900^\circ}{n}+\ldots+\sin(90^\circ-\frac{180^\circ}{n})]-h}{\sin\alpha\sin\beta\Big/\sin(180^\circ-\frac{360^\circ}{n})}$$

故 $$\sum b=(x+y)(1+\frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ-\frac{360^\circ}{n})}+\frac{\sin\beta}{\sin(180^\circ-\frac{360^\circ}{n})})$$

$$=\left\{2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}[\sin\frac{180^\circ}{n}+\sin\frac{540^\circ}{n}+\sin\frac{900^\circ}{n}+\ldots\ldots+\sin(90^\circ-\frac{180^\circ}{n})]-h\right\}\times$$

$$\frac{\sin(180^\circ-\frac{360^\circ}{n})+\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\left\{2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}[\sin\frac{180^\circ}{n}+\sin\frac{540^\circ}{n}+\ldots+\sin(90^\circ-\frac{180^\circ}{n})]-h\right\}\times\frac{\cos(90^\circ-\frac{180^\circ}{n})}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}[\sin\frac{180^\circ}{n}\sin\frac{180^\circ}{n}+\sin\frac{180^\circ}{n}\sin\frac{540^\circ}{n}+\ldots+\sin\frac{180^\circ}{n}\sin(90^\circ-\frac{180^\circ}{n})]-h\sin\frac{180^\circ}{n}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\left\{a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}[(\cos 0^\circ-\cos\frac{360^\circ}{n})+(\cos\frac{360^\circ}{n}-\cos\frac{720^\circ}{n})+(\cos\frac{720^\circ}{n}-\cos\frac{1080^\circ}{n})+\ldots\right.$$

$$\left.+(\cos(90^\circ-\frac{360^\circ}{n})-\cos 90^\circ)]-h\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}\Bigg/\frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{180^\circ}{n})$$

$$=2\times\frac{a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-h\sin\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{180^\circ}{n}}$$

$$=2\times\frac{a(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{180^\circ}{n})+a\cos\frac{180^\circ}{n}-h\sin\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{180^\circ}{n}}$$

$$=2a+2\times\frac{a\cos\frac{180^\circ}{n}-h\sin\frac{180^\circ}{n}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{180^\circ}{n}}$$

因此當 $h=\dfrac{a}{\tan\frac{180^\circ}{n}}$ 時，上下二個三角形的周長和 $\sum b$ 有定值 $2a$ 。

【註 4】 $\dfrac{360^\circ}{n}\times(\dfrac{n}{4}-1)=\dfrac{90^\circ\times(n-4)}{n}=90^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$

二、 $n=4k+2,k\in N$ ：

正 n 邊形每一內角 $\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{n}$ $\therefore\alpha+\beta=\dfrac{360^\circ}{n}$ 且三角形的角度由上而下依序爲：

「 $\dfrac{360^\circ}{n}\times(i-1)+\alpha$ ， $i=1,2,\cdots,k,k+1$ ； $\dfrac{360^\circ}{n}\times(j-1)+\beta$ ， $j=k,k-1,\cdots,1$ 」亦即

「 $\alpha,\dfrac{360^\circ}{n}+\alpha,\dfrac{720^\circ}{n}+\alpha,\ldots,\dfrac{360^\circ}{n}\times(\dfrac{n-2}{4}-1)+\alpha,\dfrac{360^\circ}{n}\times\dfrac{n-2}{4}+\alpha,$

$\dfrac{360^\circ}{n}\times(\dfrac{n-2}{4}-1)+\beta,\ldots,\dfrac{720^\circ}{n}+\beta,\dfrac{360^\circ}{n}+\beta,\beta$ 」

並且可將其上下對稱分成 $k(=\dfrac{n-2}{4})$ 組加上 1 個單獨的。

$$\Rightarrow x+y=\left\{a[\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\frac{360^\circ}{n}+\alpha)+\sin(\frac{360^\circ}{n}+\beta)+\sin(\frac{720^\circ}{n}+\alpha)+\sin(\frac{720^\circ}{n}+\beta)+\ldots\right.$$
$$\left.+\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\times(\frac{n-2}{4}-1)+\alpha\right)+\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\times(\frac{n-2}{4}-1)+\beta\right)+\sin(\frac{360^\circ}{n}\times\frac{n-2}{4}+\alpha)\right]-h\right\}\Bigg/\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin[180^\circ-(\alpha+\beta)]}$$

$$=\left\{a[2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin(\frac{360^\circ}{n}+\frac{\alpha+\beta}{2})\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\ldots\right.$$
$$\left.+2\sin(90^\circ-\frac{540^\circ}{n}+\frac{\alpha+\beta}{2})\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin(90^\circ-\frac{180^\circ}{n}+\alpha)]-h\right\}\Bigg/\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(180^\circ-\frac{360^\circ}{n})}\qquad【註 5】$$

$$=\frac{2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}[\sin\frac{180^\circ}{n}+\sin\frac{540^\circ}{n}+\ldots+\sin(90^\circ-\frac{360^\circ}{n})+\frac{1}{2}]-h}{\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(180^\circ-\frac{360^\circ}{n})}}\qquad【註 6】$$

故$\sum b=(x+y)(1+\dfrac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n})}+\dfrac{\sin\beta}{\sin(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n})})$

$$=\left\{2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}[\sin\frac{180^\circ}{n}+\sin\frac{540^\circ}{n}+\ldots+\sin(90^\circ-\frac{360^\circ}{n})+\frac{1}{2}]-h\right\}\times$$

$$\frac{\sin(180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n})+\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\left\{2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}[\sin\frac{180^\circ}{n}+\sin\frac{540^\circ}{n}+\ldots+\sin(90^\circ-\frac{360^\circ}{n})+\frac{1}{2}]-h\right\}\times\frac{\cos(90^\circ-\dfrac{180^\circ}{n})}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}}$$

$$=\left\{2a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}[\sin\frac{180^\circ}{n}\sin\frac{180^\circ}{n}+\sin\frac{180^\circ}{n}\sin\frac{540^\circ}{n}+\ldots\right.$$

$$\left.+\sin\frac{180^\circ}{n}\sin(90^\circ-\frac{360^\circ}{n})+\frac{1}{2}\sin\frac{180^\circ}{n}]-h\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}\Big/\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$=\left\{a\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left[(\cos 0^\circ-\cos\frac{360^\circ}{n})+(\cos\frac{360^\circ}{n}-\cos\frac{720^\circ}{n})+\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\cos(90^\circ-\frac{540^\circ}{n})-\cos(90^\circ-\frac{180^\circ}{n})\right)+\sin\frac{180^\circ}{n}\right]-h\sin\frac{180^\circ}{n}\right\}\Big/\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

$$=\frac{a\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\left(1-\cos(90^0-\dfrac{180^\circ}{n})+\sin\dfrac{180^\circ}{n}\right)-h\sin\dfrac{180^\circ}{n}}{\dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\cos\dfrac{180^\circ}{n})}$$

$$=2\times\frac{a\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-h\sin\dfrac{180^\circ}{n}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\cos\dfrac{180^\circ}{n}}$$

$$=2\times\frac{a(\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\cos\dfrac{180^\circ}{n})+a\cos\dfrac{180^\circ}{n}-h\sin\dfrac{180^\circ}{n}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\cos\dfrac{180^\circ}{n}}$$

$$=2a+2\times\frac{a\cos\dfrac{180^\circ}{n}-h\sin\dfrac{180^\circ}{n}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\cos\dfrac{180^\circ}{n}}$$

因此當$h=\dfrac{a}{\tan\dfrac{180^\circ}{n}}$時，上下二個三角形的周長和$\sum b$有定值$2a$。

【註 5】$\frac{360^\circ}{n}\times(\frac{n-2}{4}-1)=\frac{360^\circ}{n}\times(\frac{n}{4}-\frac{3}{2})=90^\circ-\frac{540^\circ}{n}$

【註 6】$\sin(90^\circ-\frac{180^\circ}{n}+\alpha)=\cos(\frac{180^\circ}{n}-\alpha)=\cos(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha)=\cos\frac{\beta-\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

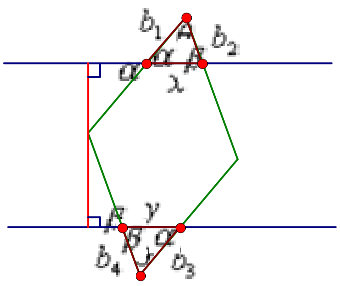
★9. 至此完成正n邊形的推廣。可以確定所有偶數邊正多邊形與二平行線所截出的二個小三角形的周長和不論此正多邊形如何移動（包括平移、旋轉）皆爲一定值。

意即「當 $h=\dfrac{a}{\tan\dfrac{180^\circ}{n}}$ 時，$\sum b$ 有定值 $2a$ 」。

陸、未來展望：

我們已經完成了所有的偶數邊正多邊形與二平行線所截出的二個三角形的周長和之研究，但是除了偶數邊正多邊形之外，是否有其他的圖形也能滿足★9 的情形？又若多邊形與二平行線所截出的圖形是二個四邊形，那麼也可以找出h與a的關係式使得不論此多邊形如何移動，$\sum b$ 皆爲定值嗎？這些延伸出來的問題一一浮現在我們的研究過程當中，經過一番努力之後有了初步的成果【補充一、二】，期望日後能繼續將之做一徹底的研究，把所有可能的結果都一網打盡。

【補充一】菱形與二平行線所截出的二個三角形的$\sum b$ 在某一條件之下是定值：



$\theta+\alpha+\beta=180^\circ$

$\frac{x}{\sin\theta}=\frac{b_1}{\sin\beta}=\frac{b_2}{\sin\alpha}\Rightarrow b_1=\frac{x\sin\beta}{\sin\theta}$、$b_2=\frac{x\sin\alpha}{\sin\theta}$

$\frac{y}{\sin\theta}=\frac{b_3}{\sin\beta}=\frac{b_4}{\sin\alpha}\Rightarrow b_3=\frac{y\sin\beta}{\sin\theta}$、$b_4=\frac{y\sin\alpha}{\sin\theta}$

上下二個三角形的周長和$\sum b=(x+y)(1+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+\frac{\sin\beta}{\sin\theta})$

又（$a-\frac{x\sin\beta}{\sin\theta}$）$\sin\alpha+(a-\frac{y\sin\alpha}{\sin\theta})\times\sin\beta=h$

$\Rightarrow x+y=\left[a(\sin\alpha+\sin\beta)-h\right]\times\frac{\sin\theta}{\sin\alpha\sin\beta}$

故 $\sum b=\left[a(\sin\alpha+\sin\beta)-h\right]\times\frac{\sin\theta}{\sin\alpha\sin\beta}\times(1+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+\frac{\sin\beta}{\sin\theta})$

解法一：（我們經過一番艱辛的嘗試後最先找出的解法）

$$\sum b=\left[a(\sin\alpha+\sin\beta)-h\right]\times(\frac{\sin\theta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\alpha})$$

$$=(a\sin\alpha+a\sin\beta-h)(\frac{\sin\theta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\alpha})$$

$$=\frac{a\sin\theta}{\sin\beta}+\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta}+a+\frac{a\sin\theta}{\sin\alpha}+a+\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}-\frac{h\sin\theta}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{h}{\sin\beta}-\frac{h}{\sin\alpha}$$

$$=2a+a\sin\theta(\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\alpha})+a\,(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha})-h(\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\alpha})-\frac{h\sin\theta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=2a+a\sin\theta(\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta})+a\times\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-h\times\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}-\frac{h\sin\theta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=2a+(a\sin\theta-h)\times\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}(a\sin^2\alpha+a\sin^2\beta-h\sin\theta)$$

$$=2a+(a\sin\theta-h)\times\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{a(\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\theta)+a\sin^2\theta-h\sin\theta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=2a+(a\sin\theta-h)\times\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{a(\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\theta)}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{\sin\theta(a\sin\theta-h)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=2a+\frac{(a\sin\theta-h)}{\sin\alpha\sin\beta}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\theta)+\frac{a\left[\sin^2\alpha+(\sin\beta+\sin\theta)(\sin\beta-\sin\theta)\right]}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=2a+\frac{(a\sin\theta-h)}{\sin\alpha\sin\beta}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\theta)+\frac{a\left[\sin^2\alpha+\sin\alpha\times\sin(\beta-\theta)\right]}{\sin\alpha\sin\beta}$$ 【註 7】

$$=2a+\frac{(a\sin\theta-h)}{\sin\alpha\sin\beta}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\theta)+\frac{a\left[\sin\alpha+\sin(\beta-\theta)\right]}{\sin\beta}$$

$$=2a+\frac{(a\sin\theta-h)}{\sin\alpha\sin\beta}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\theta)+a\left[\frac{2\sin(\frac{\alpha+\beta-\theta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta+\theta}{2})}{\sin\beta}\right]$$

$$=2a+\frac{(a\sin\theta-h)}{\sin\alpha\sin\beta}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\theta)+a(\frac{2\cos\theta\sin\beta}{\sin\beta})$$ 【註 8】

$$=2a+\frac{(a\sin\theta-h)}{\sin\alpha\sin\beta}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\theta)+2a\cos\theta$$

$$=2a(1+\cos\theta)+\frac{(a\sin\theta-h)}{\sin\alpha\sin\beta}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\theta)$$

因此當 $h=a\sin\theta$ 時，$\sum b$ 爲定值 $2a(1+\cos\theta)$。

【註 7】$\theta+\alpha+\beta=\pi$

$$(\sin\beta+\sin\theta)(\sin\beta-\sin\theta)$$

$$=2\sin(\frac{\beta+\theta}{2})\cos(\frac{\beta-\theta}{2})\times 2\cos(\frac{\beta+\theta}{2})\sin(\frac{\beta-\theta}{2})$$

$$=2\sin(\frac{\beta+\theta}{2})\cos(\frac{\beta+\theta}{2})\times 2\sin(\frac{\beta-\theta}{2})\cos(\frac{\beta-\theta}{2})$$

$$=\sin(\beta+\theta)\times\sin(\beta-\theta)=\sin\alpha\times\sin(\beta-\theta)$$

【註 8】$\theta+\alpha+\beta=\pi$

$$\sin(\frac{\alpha+\beta-\theta}{2})=\sin(\frac{\alpha+\beta+\theta-2\theta}{2})=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\alpha-\beta+\theta}{2})=\cos(\frac{\alpha+\theta-\beta}{2})=\cos(\frac{\pi-2\beta}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)=\sin\beta$$

解法二：（經過長時間的修正與改良之後所得到最爲通用的解法）

$$\alpha+\beta+\theta=180°\text{時},\sin\alpha+\sin\beta+\sin\theta=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\sum b=[a(\sin\alpha+\sin\beta)-h]\times\frac{\sin\theta}{\sin\alpha\sin\beta}\times(1+\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}+\frac{\sin\beta}{\sin\theta})$$

$$=\frac{a(\sin\alpha+\sin\beta)-h}{\sin\alpha\sin\beta}\times(\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta)$$

$$=\left[a\left(\sin\alpha+\sin\beta\right)-h\right]\times\frac{4\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\left[a(\sin\alpha+\sin\beta)-h\right]\times\frac{4\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\times 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}(a\times 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-h)}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}(2a\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-h)}{\frac{1}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2})}$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\times\frac{2a\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\theta}{2})+2a\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}-h}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\times 2a\cos\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}\times\frac{(a\sin\theta-h)}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=4a\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{2\cos\frac{\theta}{2}(a\sin\theta-h)}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=4a\times\frac{1+\cos\theta}{2}+\frac{2\cos\frac{\theta}{2}(a\sin\theta-h)}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}$$

因此當 $h=a\sin\theta$ 時，$\sum b$ 為定值 $2a(1+\cos\theta)$ 。

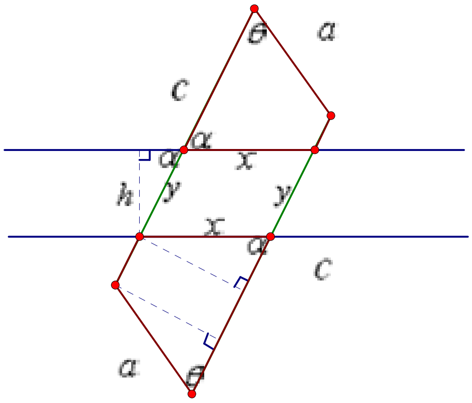
★10：菱形與二平行線截出二個三角形會有兩種情況：(1)三角形為銳角三角形 (2)三角形為鈍角三角形，都可以適用上述的公式。

★11：驗證了正方形與二平行線所截出二個三角形的 $\sum b$ 之情況：

若 $\theta=90^\circ$ 則此菱形即為邊長為 a 的正方形

因此當 $h=a\sin 90^\circ=a$ 時，$\sum b$ 為定值 $2a(1+\cos 90^\circ)=2a\times 1=2a$ 。

【補充 2】平行四邊形與二平行線所截出的二個四邊形的 $\sum b$ 在某一條件之下是定值：



平行四邊形邊長為 a 、 c ，所夾角度為 θ

二平行線距離 h

邊 c 與平行線夾角 α

上下二個四邊形的周長和 $\sum b=2(a+c)-2y+2x$

又 $y=h\csc\alpha$ ， $x=a\sin\theta\csc\alpha$

故 $\sum b=2(a+c)-2\cdot h\cdot\csc\alpha+2\cdot a\cdot\sin\theta\cdot\csc\alpha$

$$=2(a+c)+2\cdot\csc\alpha(a\sin\theta-h)$$

因此當 $h=a\sin\theta$ 時，$\sum b=2(a+c)$ 為定值且恰為平行四邊形的周長。

★12：長方形的情況是平行四邊形的一種特例

亦即當$\theta = 90^\circ$時$h = a\sin 90^\circ = a$則$\sum b = 2(a+c)$爲定值。

柒、總結：

（a爲正多邊形的邊長；h爲二平行線距離；$\sum b$爲二水平平行線與正多邊形所截出上下二個圖形的周長和。）

一、多邊形平移時$\sum b$不變的條件：上下圖形對應角相等；旋轉時$\sum b$不變的條件：h與a滿足某一關係式時且上下圖形一直保持對應角相等。

二、A.等腰三角形底邊垂直二條平行線時，截出二個相似的三角形，且當其平移時$\sum b$爲定值。

B.奇數邊正多邊形其中一邊（或其延伸線）垂直二平行線時，所截出邊數相同的二個圖形對應角相等，且當其平移時$\sum b$爲定值。

C.當奇數邊正多邊形旋轉而不符合 B.的條件時，其平移時所截出邊數相同的二個圖形對應角不會相等，因此$\sum b$不爲定值。

三、A.偶數邊正多邊形與二平行線所截出邊數相同的二個圖形對應角相等，且當其平移時$\sum b$ 爲定值。

B.偶數邊正多邊形旋轉之後與二平行線所截出邊數相同的二個圖形仍然會對應角相等，因此旋轉後當其平移時$\sum b$依然爲定值。

四、所有偶數邊正多邊形（正 n 邊形，邊長a）與二平行線（相距h）所截出的二個小三角形的周長和當h與a滿足某一關係式時不論此多邊形如何移動（包括平移、旋轉）皆爲一定值。意即「當$h = \dfrac{a}{\tan\dfrac{180^\circ}{n}}$時，$\sum b$有定值$2a$」。

五、菱形（邊長爲a，兩邊所夾的角爲θ）與二平行線截出二個三角形（θ爲三角形的其中一角）當 $h = a\sin\theta$ 時，$\sum b$爲定值 $2a(1+\cos\theta)$。

六、平行四邊形（邊長爲a、c，所夾角度爲θ）與二平行線截出二個四邊形當$h = a\sin\theta$時，$\sum b = 2(a+c)$爲定值且恰爲此平行四邊形的周長。

捌、參考資料：

一、余文卿等所編「高中數學(二)」。台北縣：龍騰文化(民 90)。

二、陳冒海等所編「國民中學數學 4」。台南市：南一書局(民 93)。

三、張靜嚳等所編「國民中學數學 1、2」。台南市：南一書局(民 92)。

評　語

030421 國中組數學科　佳作

多邊形與二條水平平行線所截出的上下二個圖形其周長和之探討

能針對研究主題，作出系統性的探討與整理，值得嘉許。