中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030420

花蓮縣立花崗國民中學

指導老師姓名

陳貞泰

蔡尚軒

作者姓名

黃柏瑋

方大瑋

房暐宸

張乃文

壹、研究的動機:

上學期,在學校的社團活動的課程中,我選擇了「數學研習社」;而在期末,指導老師要求我們每組繳交一份研究報告,研究報告的主題是---「過定點的直線如何平分三角形面積」。針對這個主題,我們開始蒐集資料,並利用閒暇之餘展開研究,遇有問題,就隨時請教老師;以下內容,就是我們這組的研究過程與心得。

貳、研究的目的:

(一) 企圖從三角形的頂點、邊上、內部、外部的任一點找出平分面積的方法

(二) 探討在各個位置上的點各能作出幾條平分線

參、研究的器材:圓規、三角板、方格紙

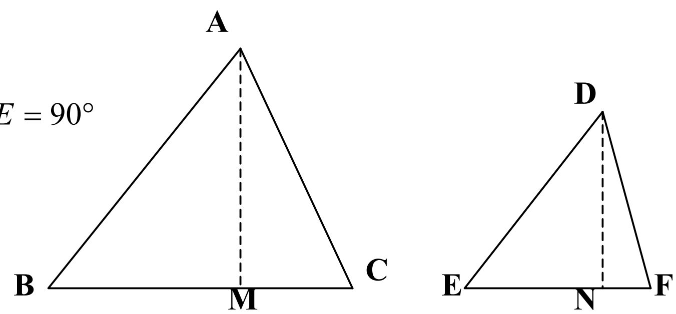
肆、預備的定理:

[預備定理一]:(共角定理)

若兩三角形有一角相等,則此兩三角形的面積比等於夾此角的兩邊乘積之比。

[已知]: ΔABC和ΔDEF中$\angle B=\angle E$

[求証]: $\dfrac{\Delta ABC}{\Delta DEF}=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{DE}\cdot\overline{EF}}$



[証明]: 1.作$\overline{AM}\perp\overline{BC},\overline{DN}\perp\overline{EF}$,則$\angle AMB=\angle DNE=90°$

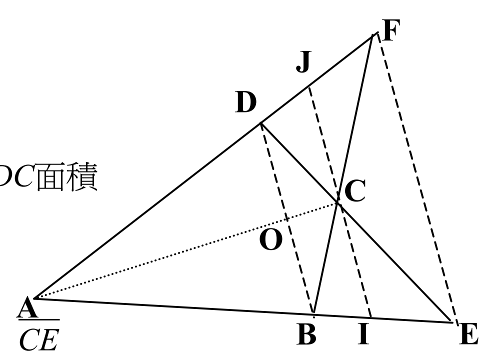
2.在ΔABM與ΔDEN中

$\because \angle B=\angle E,\angle AMB=\angle DNE$

$\therefore \Delta ABM\sim\Delta DEN$,故$\dfrac{\overline{AM}}{\overline{DN}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$

$$3.\because \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF}=\frac{\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AM}}{\frac{1}{2}\overline{EF}\cdot\overline{DN}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}\cdot\frac{\overline{AM}}{\overline{DN}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\overline{DE}\cdot\overline{EF}}$$

[預備定理二]: 如圖四邊形$ABCD$的相對兩邊延長線各交於E、F,若ΔBCE面積$=\Delta DCF$面積,則此四邊形面積必被一對角線所等分。



[証明]: 1.連$\overline{BD},\overline{EF},\overline{AC}$,並使$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於$O$

2.$\because \Delta BCE$面積$=\Delta DCF$面積,

$\therefore \Delta BCE$面積$+\Delta BDC$面積$=\Delta DCF$面積$+\Delta BDC$面積

故ΔBDE面積$=\Delta BDF$面積, 得$\overline{BD}//\overline{EF}$

3.過C作$\overline{IJ}//\overline{BD}//\overline{EF}$分別交$\overline{BE}$與$\overline{DE}$於$I,J$

則$\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CB}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}}\Rightarrow\dfrac{\overline{CF}}{\overline{CB}+\overline{CF}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}+\overline{CE}}\Rightarrow\dfrac{\overline{CF}}{\overline{BF}}=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{DE}}$

又$\because \dfrac{\overline{CF}}{\overline{BF}}=\dfrac{\overline{CJ}}{\overline{BD}},\dfrac{\overline{CE}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{CI}}{\overline{BD}}$,故$\overline{CI}=\overline{CJ}$

4. $\because \overline{IJ}//\overline{BD},\therefore \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AJ}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AI}}$,且$\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AJ}}=\dfrac{\overline{DO}}{\overline{CJ}},\dfrac{\overline{BO}}{\overline{CI}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AI}}$,故$\dfrac{\overline{DO}}{\overline{CJ}}=\dfrac{\overline{BO}}{\overline{CI}}$,即$\overline{BO}=\overline{DO}$

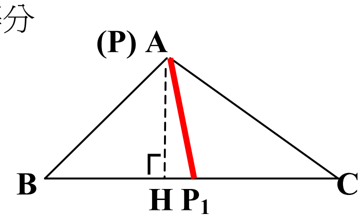
$\therefore \Delta ABO$面積$=\Delta ADO$面積,ΔCBO面積$=\Delta CDO$面積,

故ΔADC面積$=\Delta ABC$面積,即對角線平分四邊形$ABCD$的面積

伍、研究的過程與方法：

(一)P爲ΔABC的頂點時：

[分析]：若P爲ΔABC的頂點時,平分線必與對邊相交,因此只要找出對邊中點,就可利用「等底同高」的觀念將面積兩等分



[作法]：1.取$\overline{BC}$的中點P_1

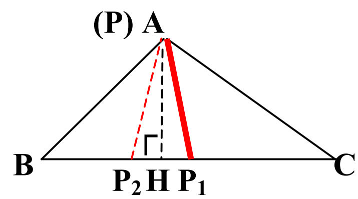
2.連$\overline{PP_1}$,則$\overline{PP_1}$即爲所求

[証明]：1.作$\overline{AH}(\overline{PH})\perp\overline{BC}$交$\overline{BC}$於$H$

2. $\because \overline{BP_1}=\overline{CP_1},\therefore \Delta A(P)BP_1=\dfrac{1}{2}\overline{BP_1}\times\overline{A(P)H}=\dfrac{1}{2}\overline{CP_1}\times\overline{A(P)H}=\Delta A(P)CP_1=\dfrac{1}{2}\Delta A(P)BC$

[討論]：過頂點的平分線恰有一條(如右圖)

因對邊的中點恰有一點,所以分割線只有過對邊中點,才可將對邊二等分,而得分割的兩面積相等

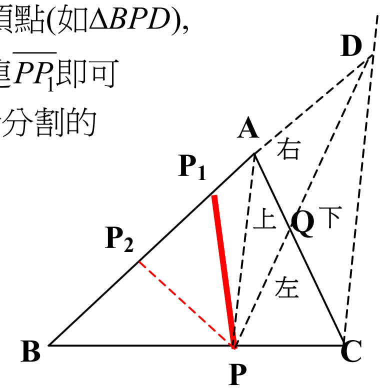


(二)若P爲ΔABC邊上之一點(但P不爲頂點)

(A) < 方法一 >　< 外分法(暫定) >

[分析]：1.若P爲ΔABC邊上之一點時,可將P視爲另一三角形的頂點(如ΔBPD),且在ΔABC面積$=\Delta BPD$面積時,只須取$\overline{AD}$中點P_1,再連$\overline{PP_1}$即可

2.要使ΔABC面積$=\Delta BPD$面積,可利用梯形兩對角線,所分割的「上」、「下」、「左」、「右」四面積中的「左」面積 =「右」面積來替換。



[作法]：1.連$\overline{AP}$,過C作$\overline{CD}//\overline{AP}$,交$\overrightarrow{BA}$於$D$

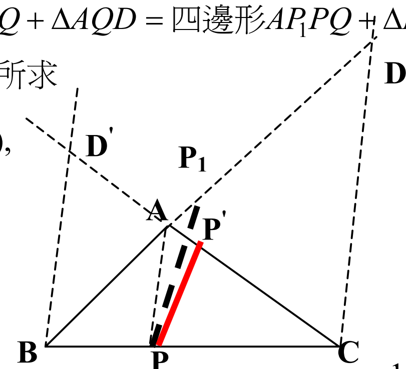
2.取$\overline{BD}$中點P_1,連$\overline{PP_1}$,則PP_1即爲所求。

[証明]：1. $\because \overline{AP}//\overline{CD},\therefore \Delta AQD=\Delta PQC$

2. $\because P_1$爲$\overline{BD}$的中點,$\therefore \Delta BP_1P=\Delta DP_1P=$四邊形$AP_1PQ+\Delta AQD=$四邊形$AP_1PQ+\Delta PQC$
$=$四邊形AP_1PC,故$\overline{PP_1}$將ΔABC兩等分,即$\overline{PP_1}$合於所求

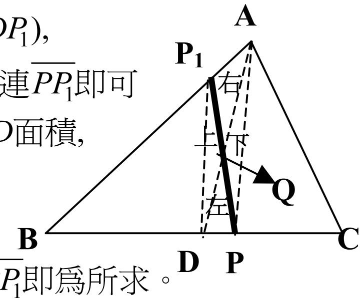
[討論]：1.此法有個缺點,若P點較靠近B點時(即$\overline{BP}<\dfrac{1}{2}\overline{BC}$),易使$P_1$點在$\overline{AD}$上,而無法平分$\Delta ABC$面積

2.解決此一問題,可從B點作$\overline{BD'}//\overline{AP}$交$\overrightarrow{CA}$於$D'$,再取$\overline{CD'}$的中點$P'$,連$\overline{PP'}$　　[如右圖]



3.平分線$\overline{PP_1}$恰有一條　[如上頁右下圖]　$(\because P_2\neq P_1$時,$\Delta BPP_2\neq$四邊形$ACPP_2\neq\dfrac{1}{2}\Delta ABC)$

(B) < 方法二 >　< 內分法(暫定) >



[分析]：1.若P爲ΔABC邊上之一點時，可將P視爲梯形中的頂點(如梯形$APDP_1$)，

且使ΔABD面積 $=\Delta ACD$面積時，只須取$\overline{BC}$中點D，作$\overline{DP_1}\,//\,\overline{AP}$，再連$\overline{PP_1}$即可

2.要使ΔPBP_1面積 = 四邊形$ACPP_1$面積，可先作得ΔABD面積 $=\Delta ACD$面積，

再利用梯形兩對角線，所分割的「上」、「下」、

「左」、「右」四面積中的「左」面積 =「右」面積來替換。

[作法]：1.取$\overline{BC}$中點D，連$\overline{AD}$，$\overline{AP}$，過D作$\overline{DP_1}\,//\,\overline{AP}$，交$\overline{AB}$於$P_1$　2.，連$\overline{PP_1}$，則$\overline{PP_1}$即爲所求。

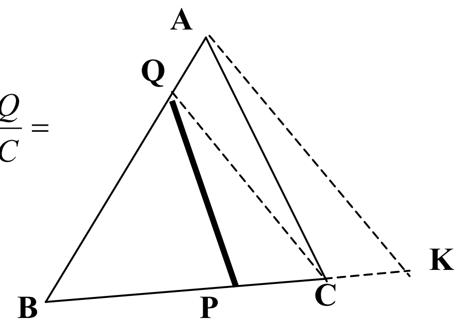
[証明]：1.$\because \overline{AP}\,//\,\overline{DP_1}, \therefore \Delta AQP_1=\Delta PQD$

2.$\because D$爲$\overline{BC}$的中點，$\therefore \Delta ABD=\Delta ACD$，故四邊形$BP_1QD+\Delta AP_1Q$ = 四邊形$AQPC+\Delta PQD$

即四邊形$BP_1QD+\Delta PQD$ = 四邊形$AQPC+\Delta AP_1Q$ $\therefore \Delta BPP_1$面積 = 四邊形AP_1PC面積

故$\overline{PP_1}$將ΔABC兩等分，即$\overline{PP_1}$合於所求

(C) < 方法三 >　< 共角定理法 >



[分析]：1.若P在$\overline{BC}$上，且$\overline{PQ}$二等分ΔABC，則依共角定理知$\dfrac{\Delta BPQ}{\Delta ABC}=$

$$\frac{\overline{BQ}\times\overline{BP}}{\overline{AB}\times\overline{BC}}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2\overline{BQ}\times\overline{BP}=\overline{AB}\times\overline{BC}\text{即}\frac{2\overline{BP}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BQ}}$$

2.依平行線截比例線段作圖，只需延長$\overline{BP}$(或在$\overline{BP}$上)，

取$\overline{BK}=2\overline{BP}$，作$\overline{CQ}\,//\,\overline{AK}$，連$\overline{PQ}$即可。

[作法]：1.在$\overrightarrow{BC}$上，取$\overline{BK}=2\overline{BP}$　2.連$\overline{AK}$，過C作$\overline{CQ}\,//\,\overline{AK}$交$\overline{AB}$於$Q$，　3.連$\overline{PQ}$，則$\overline{PQ}$即爲所求。

[証明]：1.在ΔABK中，$\because \overline{AK}\,//\,\overline{CQ}\ \therefore \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BK}}=\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{AB}}$，又$\because \overline{BK}=2\overline{BP}, \therefore \dfrac{\overline{BC}}{2\overline{BP}}=\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{AB}}$，故$2\overline{BP}\times\overline{BQ}=\overline{AB}\times\overline{BC}$

2.$\because \angle QBP=\angle ABC, \therefore \dfrac{\Delta BQP}{\Delta ABC}=\dfrac{\overline{BP}\times\overline{BQ}}{\overline{AB}\times\overline{BC}}=\dfrac{\overline{BP}\times\overline{BQ}}{2\overline{BP}\times\overline{BQ}}=\dfrac{1}{2}$，即$\Delta ABC=2\Delta BQP$

3.$\because$ 四邊形$AQPC=\Delta ABC-\Delta BQP=\Delta ABC-\dfrac{1}{2}\Delta ABC=\dfrac{1}{2}\Delta ABC=\Delta BQP$，故$\overline{PQ}$合於所求

[小結]：1.以上三種方法雖都可以找出平分線，但 < 方法一 >< 方法二 > 都利用到了P爲梯形

頂點產生「左面積」=「右面積」的特性而求得的

2.若P點在三角形內部時，P點不再爲梯形的頂點，因此以下 "過三角形內部一點P，作平分

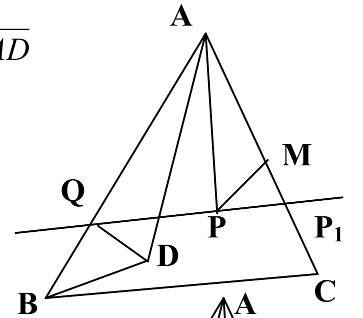
線，則以「共角定理」法較佳

(三)若P爲ΔABC內部之一點

(A)但不爲分角線上之一點時：(若P位在角平分線上時，則須另採他法，我們留在後面討論)

[分析]：1.若P在ΔABC內部，而$\overleftrightarrow{PP_1}$交$\overline{AB}$、$\overline{AC}$於$Q$及$P_1$且二等分$\Delta ABC$，則$\dfrac{\Delta AP_1Q}{\Delta ABC}=\dfrac{\overline{AQ}\times\overline{AP_1}}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\dfrac{1}{2}$

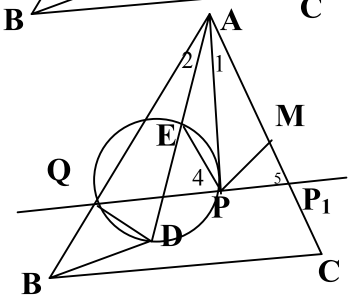
2.$\because \overline{AQ}\times\overline{AP_1}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AB}, \therefore$ 取$\overline{AC}$中點M，造成$\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$



3.設法作得$\Delta ABD \sim \Delta APM \Rightarrow \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \overline{AM} \times \overline{AB} = \overline{AP} \times \overline{AD}$

4.作得$\Delta ADQ \sim \Delta AP_1P \Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AP} \times \overline{AD} = \overline{AQ} \times \overline{AP_1}$,

可得$\overline{AM} \times \overline{AB} = \overline{AQ} \times \overline{AP_1}$,即$\overline{AQ} \times \overline{AP_1} = \dfrac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{AB}$。



[作法]:1.連$\overline{AP}$,取$\overline{AC}$中點M,連$\overline{MP}$

2.以$\overline{AB}$爲一邊,作$\Delta ABD \sim \Delta APM$,且$\angle PAM < \dfrac{1}{2}\angle BAC$

3.作$\overline{PE} // \overline{AC}$,交$\overline{AD}$於$E$,並使三點依序$A-E-D$

4.作一圓過P、E、D三點,交$\overline{AB}$於Q'、Q,取其較近B點的Q點

5.連$\overline{PQ}$且交$\overline{AC}$於P_1,則$\overleftrightarrow{PQ}$即爲所求。

[証明]:1.$\because \Delta ABD \sim \Delta APM, \therefore \angle 1 = \angle 2$,又$\because$ P、E、Q、D四點共圓,$\therefore \angle 3 = \angle 4$,

且$\because \overline{PE} // \overline{AC}, \therefore \angle 4 = \angle 5 = \angle 3$,故$\Delta ADQ \sim \Delta AP_1P, \therefore \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AP_1}}$,即$\overline{AQ} \times \overline{AP_1} = \overline{AD} \times \overline{AP}$

2.$\because \Delta ABD \sim \Delta APM, \therefore \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$,即$\overline{AB} \times \overline{AM} = \overline{AD} \times \overline{AP}$,故$\overline{AQ} \times \overline{AP_1} = \overline{AB} \times \overline{AM}$

$= \dfrac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{AB}$

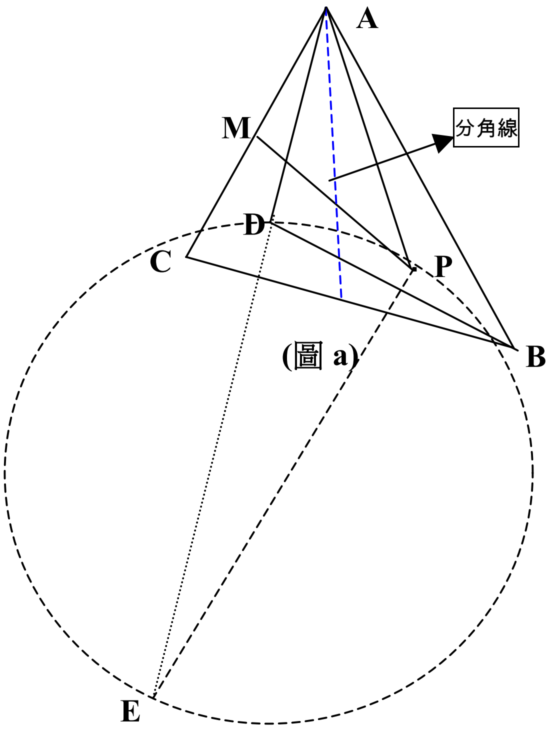
3.$\because \angle BAC = \angle BAC \therefore \dfrac{\Delta AQP_1}{\Delta ABC} = \dfrac{\overline{AQ} \times \overline{AP_1}}{\overline{AC} \times \overline{AB}} = \dfrac{\frac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{AB}}{\overline{AC} \times \overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$,即過$P$之$\overleftrightarrow{QP_1}$將$\Delta ABC$

面積二等分而合於所求

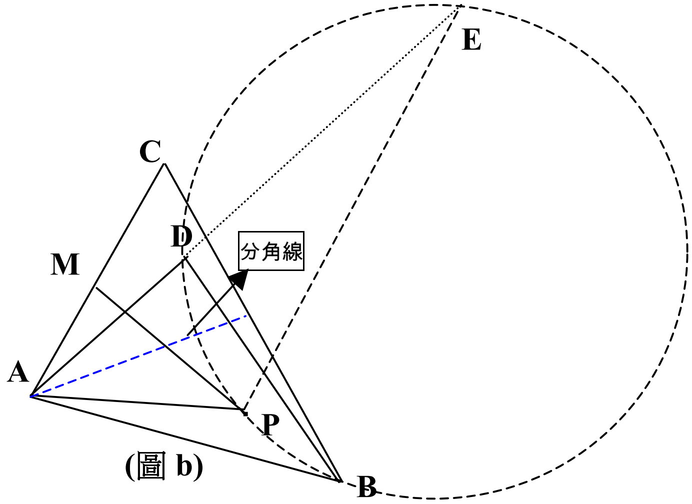
[註]:用此方法,雖然可以找出過內部一點平分三角形面積的平分線,但它總是嘗試數次後才得到的,爲了解決此一問題,因此我們展開了以下的討論

[討論a]:1.若$\angle PAM > \dfrac{1}{2}\angle BAC$時,$P$點必落於$\angle ABD$的內部,此時若作$\overline{PE} // \overline{AC}$,會產生

(i)與$\overline{AD}$的延長線交於E,而過P、D、E三點所作的外接圓,不是與$\overline{AB}$不相交就是與$\overline{AB}$只交於一點,如此都無法找得分點Q(如下圖a、下圖b)



(圖 a)

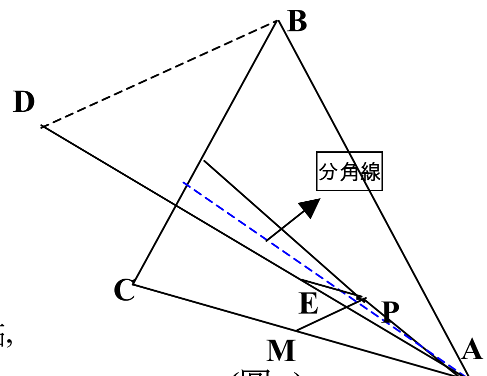


(圖 b)

$(ii)D$點落於ΔABC之外部,且$\overline{PE} \,//\, \overline{AC}$交$\overline{AD}$於$E$,

而過P、D、E三點的外接圓,與$\overline{AB}$只交於一點,

亦無法找得分點Q(如圖c)

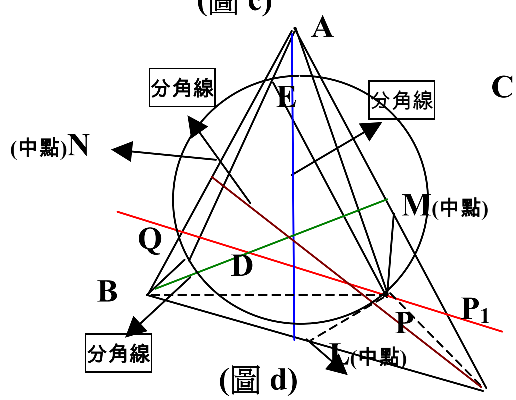


(圖 c)

2.此時我們可改找出以$\angle PAM < \frac{1}{2}\angle BAC$的$\Delta PAM$

或$\angle PCM < \frac{1}{2}\angle BCA$的$\Delta PCM$或$\angle PBL < \frac{1}{2}\angle ABC$

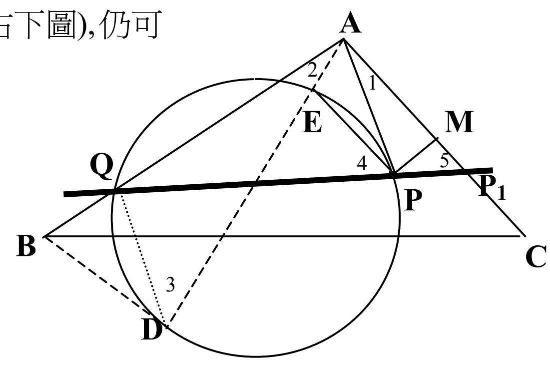
的ΔPBL為基準作出等分線$\overline{P_1Q}$(如圖d)



(圖 d)

[討論b]: 在$\angle PAM < \frac{1}{2}\angle BAC$,此時$D$雖落於三角形外部(如右下圖),仍可

能找得平分線$\overline{P_1Q}$。



[作法]:1.連$\overline{AP}$,取$\overline{AC}$中點M,連$\overline{MP}$　　2.以$\overline{AB}$爲一邊,作$\Delta ABD \sim \Delta APM$,且$\angle PAM < \frac{1}{2}\angle BAC$

3.作$\overline{PE} // \overline{AC}$,交$\overline{AD}$於$E$　　4.作一圓過P、E、D三點,交$\overline{AB}$於Q

5.連$\overline{PQ}$且交$\overline{AC}$於P_1,則$\overleftrightarrow{PQ}$即爲所求。

[証明]:1.$\because \Delta ABD \sim \Delta APM, \therefore \angle 1 = \angle 2$,又$\because P$、$E$、$Q$、$D$四點共圓,$\therefore \angle 3 = \angle 4$,

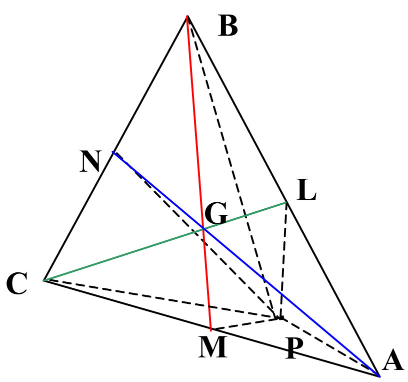
且$\because \overline{PE} // \overline{AC}, \therefore \angle 4 = \angle 5 = \angle 3$,故$\Delta ADQ \sim \Delta AP_1P, \therefore \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AP_1}}$,即$\overline{AQ}\times\overline{AP_1} = \overline{AD}\times\overline{AP}$

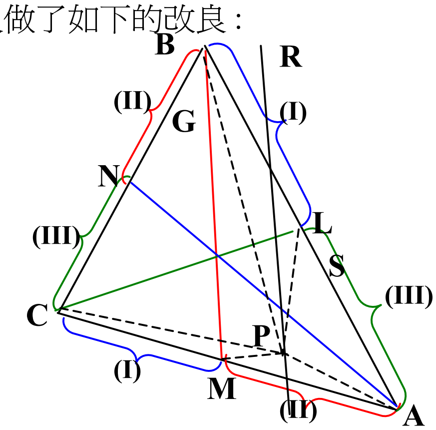
2.$\because \Delta ABD \sim \Delta APM \therefore \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$,即$\overline{AB}\times\overline{AM} = \overline{AD}\times\overline{AP}$故$\overline{AQ}\times\overline{AP_1} = \overline{AB}\times\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AB}$

3.$\because \angle BAC = \angle BAC \therefore \frac{\Delta AQP_1}{\Delta ABC} = \frac{\overline{AQ}\times\overline{AP_1}}{\overline{AC}\times\overline{AB}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AB}}{\overline{AC}\times\overline{AB}} = \frac{1}{2}$,即過$P$之$\overleftrightarrow{QP_1}$將$\Delta ABC$面積二等分

而合於所求

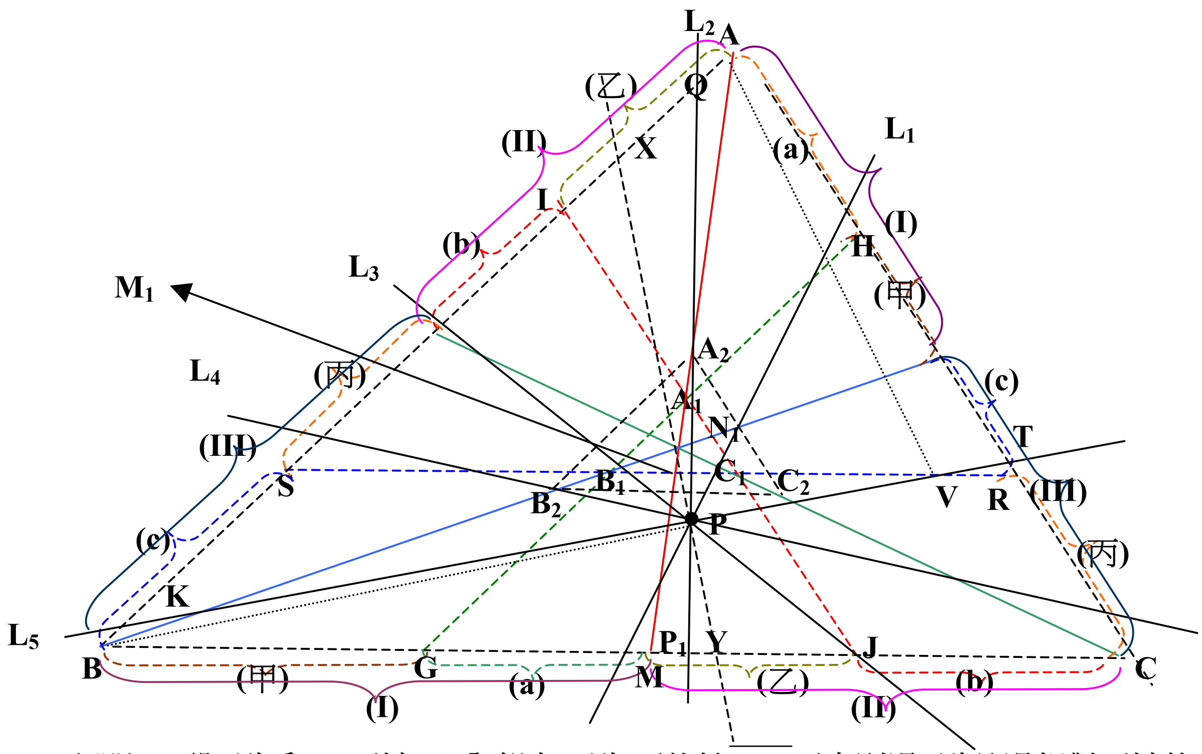
從上述的討論中,雖已大幅度縮減作圖的程序,而只剩下以ΔCPM,ΔBPL與ΔAPM爲基準的三種作圖(如左下圖)不過仍嫌瑣碎。因此我們又做了如下的改良:





(1).(如右上圖),因爲三角形三中線,將面積分成六等份(分成三組相對區域),而過定點P的平分線必通過其相對區域,否則平分線必完全在中線的同一側,而無法平分三角形面積。
(例如:直線R未過相對區域,因而R完全在中線$\overline{BM}$的右側,必無法平分三角形面積);
又經P且過相對區域的直線中,往往不可能通過某一相對區域(如圖中,平分線必不可能過(I)區域),因此以ΔAPM爲基準的作圖也被剔除了,如此就只剩餘ΔBPL與ΔCPM爲基準等兩種作圖

(2).利用平行線截比例線段的觀念,(即如下圖,若$\overline{RS} // \overline{BC}, \frac{\overline{AS}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,則$\frac{\Delta ARS}{\Delta ABC} = \frac{1}{2}$)與三中線取中點$A_2, B_2, C_2$圍成$\Delta A_2B_2C_2$的觀念,將$\Delta ABC$分成($i$)$\Delta A_1B_1C_1$($ii$)夾於$\Delta A_1B_1C_1$與$\Delta A_2B_2C_2$的區域($iii$)夾於$\Delta ABC$與$\Delta A_2B_2C_2$的區域等三部分;而將$\Delta ABC$分成十二區(即原來每一組相對區再分成兩組相對區)。然後比照上述的方法處理,結果我們發現:(i)過本身所屬的相對區域恰有一條平分線(ii)在梯形$AA_2C_2C, CC_2B_2B, BB_2A_2A$內部的點,都只可作得一條過本身所屬的相對區域的平分線,因此在梯形$AA_2C_2C, CC_2B_2B, BB_2A_{21}A$內部的點都可簡化剩下一種作法。
(其証明如下)



[証明]:1.設P點為(II)區域(乙)內部之一點,而位於$\overline{B_2C_2}$下方則過P點且過相對區域的直線,

計有L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,其中L_2為過(II)區域(乙)內部之平分線(即$\overline{P_1Q}$)

2.設過P與(III)區域(c)內部之平分線L_5分別交$\overline{AB},\overline{AC},\overline{RS}$於$K,T,V$

則$\Delta AKT=\frac{1}{2}\Delta ABC=\Delta ARS$,故$\Delta TVR=\Delta KVS$

3.連$\overline{AV}$,由[預備定理2]得$\overline{AV}$平分四邊形$ATVS$,$\therefore \Delta ATV=\Delta AVS$

故$\Delta ATV+\Delta TVR>\Delta AVS$,又$\because \Delta ATV+\Delta TVR+\Delta AVS=\Delta ARS$,$\therefore \Delta AVR>\frac{1}{2}\Delta ARS$

4.$\because \overline{RM_1}=\overline{SM_1}$(証明見附件一),$\therefore \Delta ARM_1=\frac{1}{2}\Delta ARS>\Delta AVR$,

而與$\Delta AVR>\frac{1}{2}\Delta ARS$矛盾故$L_5$為過$P$與$(III)$區域$(c)$內部之平分線的假設不成立。

同理L_1,L_3,L_4為過P之平分線亦不成立。(見附件二附圖)

5.設$\overline{XY}$為過(II)區域(乙)內部除了平分線$\overline{QP_1}$外的另一平分線,連$\overline{BP}$

則$\Delta QXP=\Delta YP_1P$,依[預備定理2]得$\overline{BP}$平分四邊形$BXPP_1$,$\therefore \Delta BXP=\Delta BP_1P$

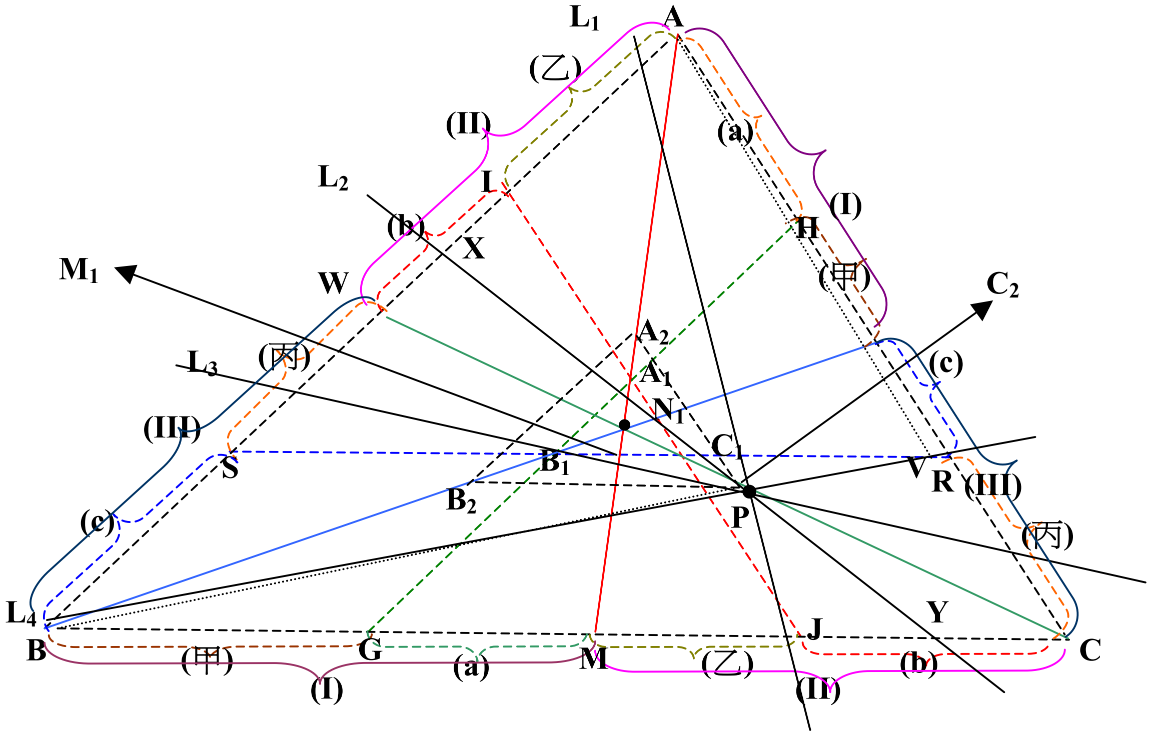
且$\Delta BXP+\Delta BP_1P+\Delta PP_1Y=\Delta BXY=\frac{1}{2}\Delta ABC$故$\Delta BPY>\frac{1}{2}\Delta BXY=\frac{1}{4}\Delta ABC$,

又$\because \Delta BN_1J=\frac{1}{4}\Delta ABC$,且$\Delta BN_1J>\Delta BPY$,矛盾。

即$\overleftrightarrow{XY}$為過(II)區域(c)內部除了平分線$\overline{QP_1}$外的另一平分線之假設也不成立

6.綜合上述,得知(i)過本身所屬的相對區域恰有一條平分線(ii)在梯形$AA_2C_2C,CC_2B_2B,BB_2A_2A$內部的點,都只可作得一條過本身所屬的相對區域的平分線。

(3)位於梯形$AA_2C_2C,CC_2B_2B,BB_2A_2A$腰邊上(如:$\overline{AA_2}$、$\overline{BB_2}$、$\overline{CC_2}$不含$A_2$、$B_2$、$C_2$、)的$P$點,亦恰有一條平分線。(即爲過此點的中線)(証明如下)



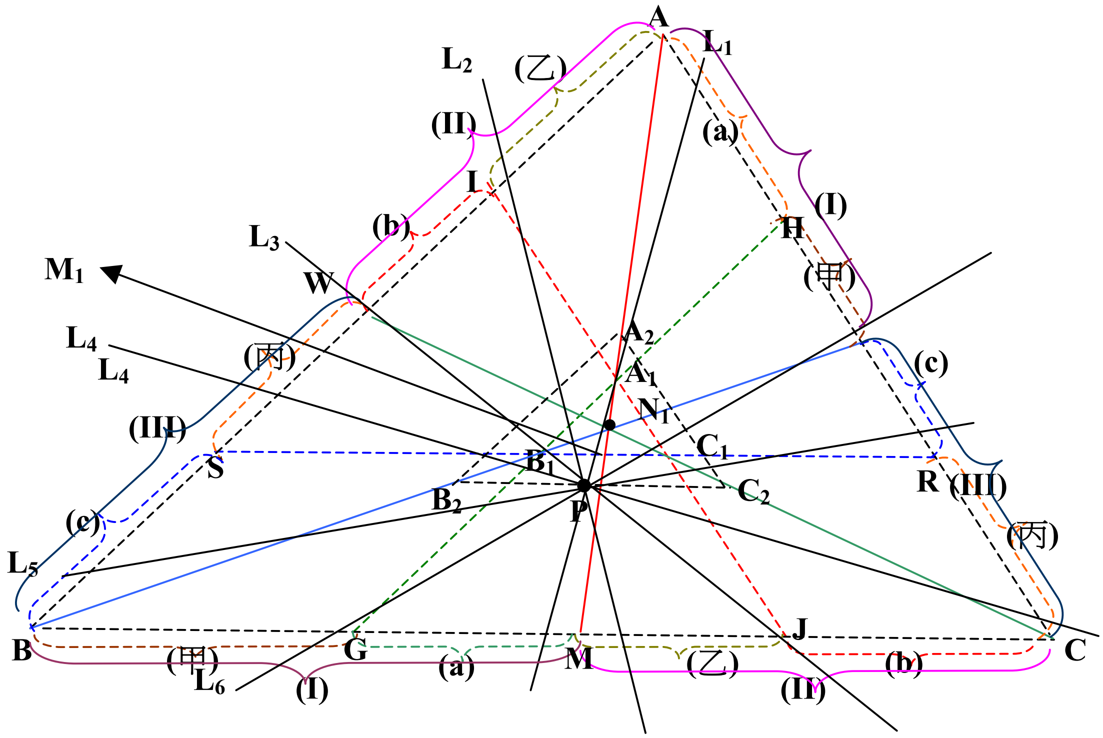
[証明]:1.設P點$\overline{CC_2}$上之一點,則過P之直線必不可能過(a)或(甲)之相對區域,又過(乙),(b),(丙),(c)之相對區域的平分線分別爲L_1,L_2,L_3,L_4;其中L_4交$\overline{RS}$於V,可証得$\Delta AVR > \frac{1}{4}\Delta ABC$,而以$\Delta AVR < \Delta AM_1R = \frac{1}{4}\Delta ABC$矛盾,所以不成立

2.$\because$ P點位於$\overline{CC_2}$上,P必介於$C_2 - P - C$且C_2爲$\overline{CW}$的中點;連$\overline{BC_2}$,則$\Delta BC_2C = \frac{1}{4}\Delta ABC$,故$\Delta BPC < \frac{1}{4}\Delta ABC$,

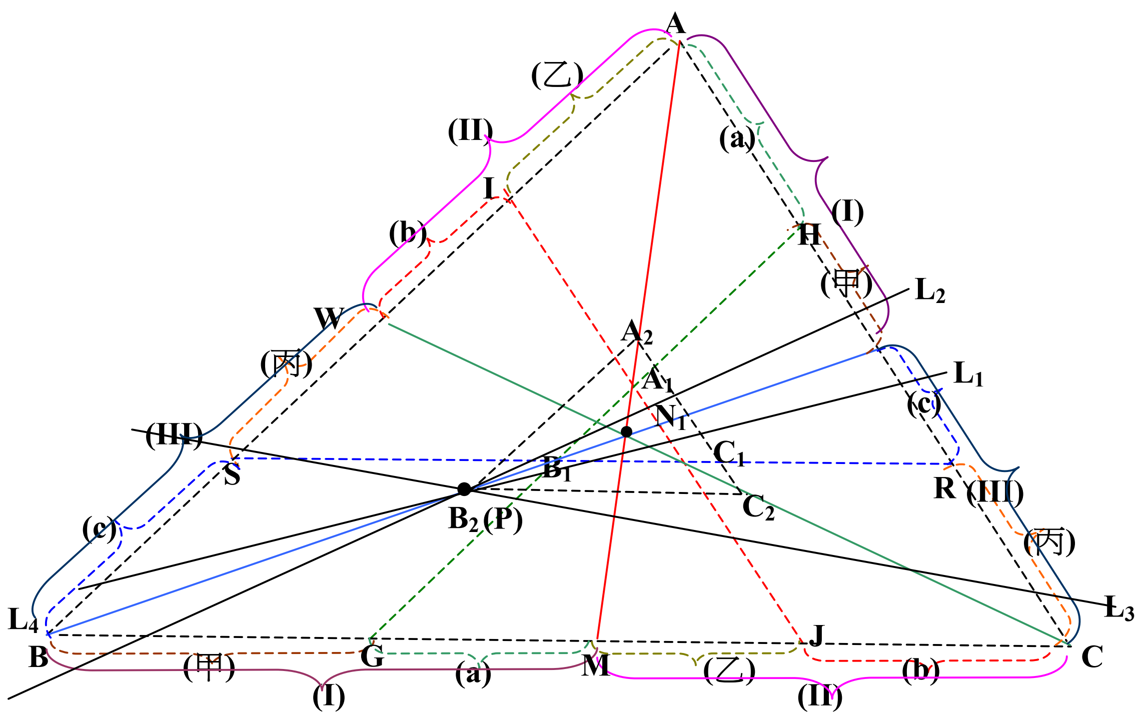
3.設L_2爲過P且過(b)之平分線,則$\Delta XWP = \Delta CYP$,依[預備定理2]得$\Delta BPC > \frac{1}{4}\Delta ABC$與2.矛盾,故$L_2$爲過$P$且過$(b)$之平分線的假設不成立。

同理L_1,L_3爲過P之平分線的假設亦不成立,即過P之平分線恰有一條$\overline{CW}$中線

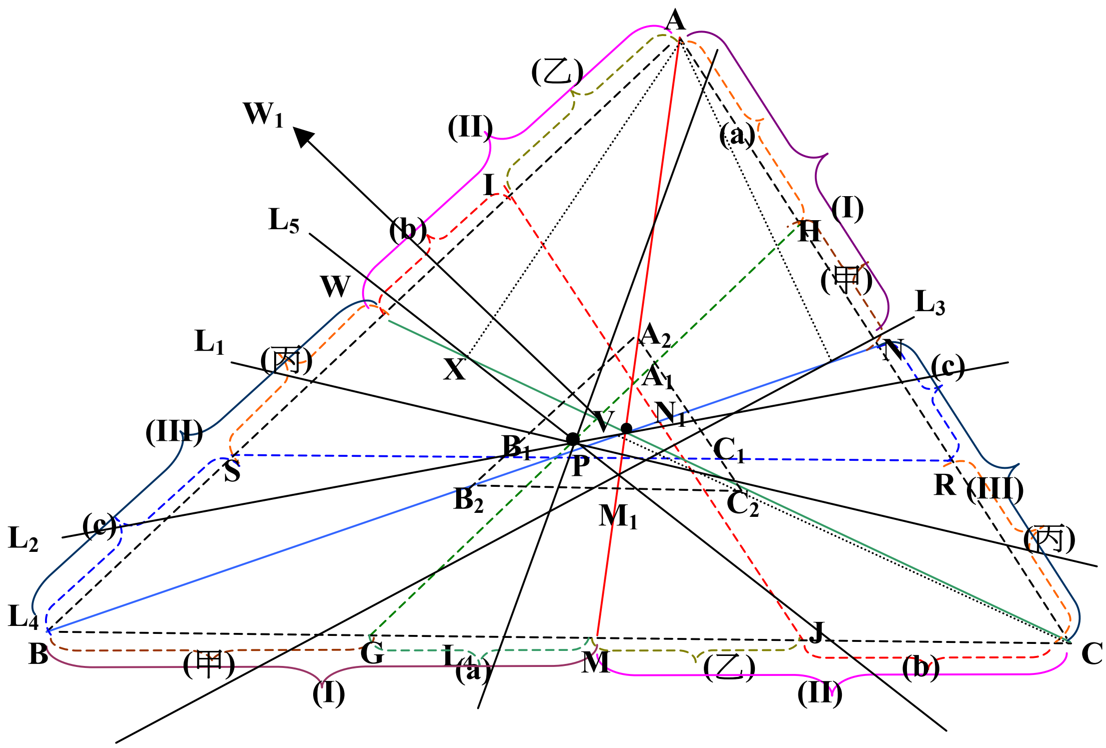
(4)位於梯形$AA_2C_2C, CC_2B_2B, BB_2A_2A$底邊上(如：$\overline{A_2B_2}$、$\overline{C_2B_2}$、$\overline{A_2C_2}$不含$A_2$、$B_2$、$C_2$、)的$P$點，亦恰有一條平分線。(如下圖，$L_1$為過$P$之平分線，証明省略)



(5)位於A_2, B_2, C_2之P點有兩條平分線。(其中一條為中線，另一條為L_1，如下圖)(証明省略)



(6)若P位在$\overline{A_1B_1}$、$\overline{B_1C_1}$、$\overline{C_1A_1}$上,但$P \neq A_1, P \neq B_1, P \neq C_1$時,會有兩條平分線(証明如下):



[証明]:1.設P點$\overline{A_1B_1}$上之一點,則過P之直線必不可能過(乙)之相對區域,又過(丙)(c),(甲),(a),(b)之相對區域的平分線分別爲L_1, L_2, L_3, L_4, L_5;其中L_2交$\overline{NB}$於V,可証得$\Delta CNV > \frac{1}{4}\Delta ABC$,而以$\Delta CNV < \Delta CB_2N = \frac{1}{4}\Delta ABC$矛盾,所以不成立

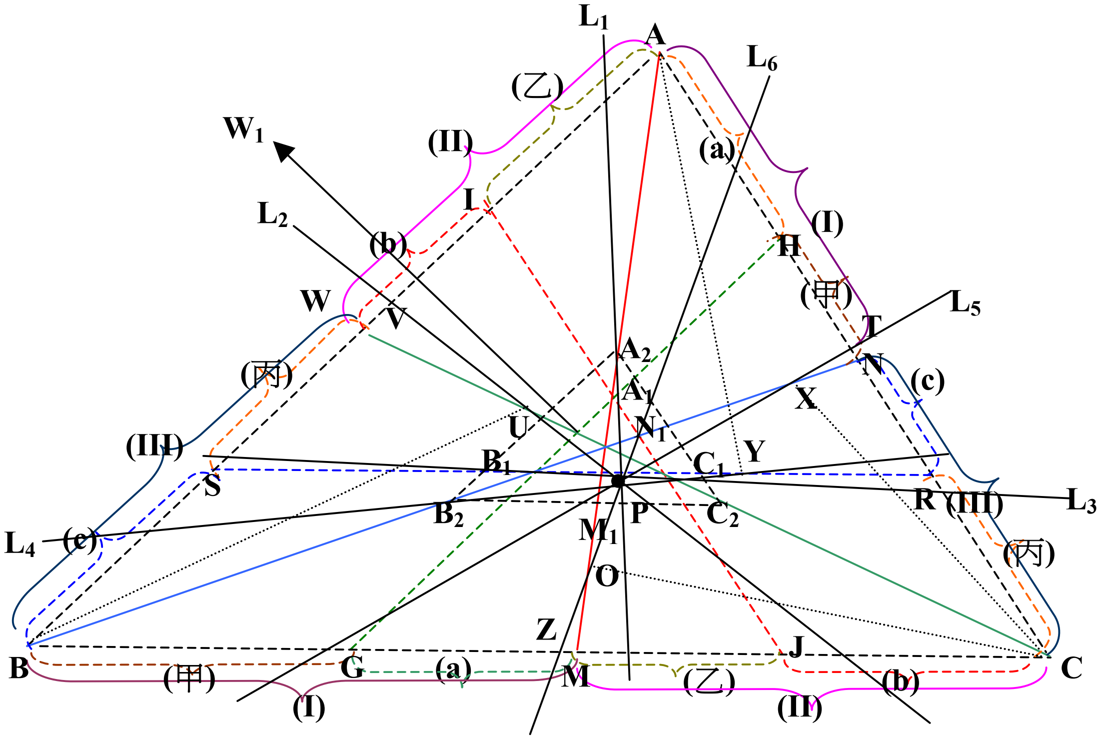
同理L_4亦不成立

2.設L_5過P及(b)區交$\overline{CW}$於X,連$\overline{AX}$,可得$\Delta AXW > \frac{1}{4}\Delta ABC$,

但$\Delta AXW < \Delta ASM_1 = \frac{1}{4}\Delta ABC$,故矛盾,所以不成立;同理$L_3$亦不成立

3.綜合1.2.知過P的平分線只有L_1成立,再加上P位於$\overline{GH}$平分線上,因此過P共有兩條平分線

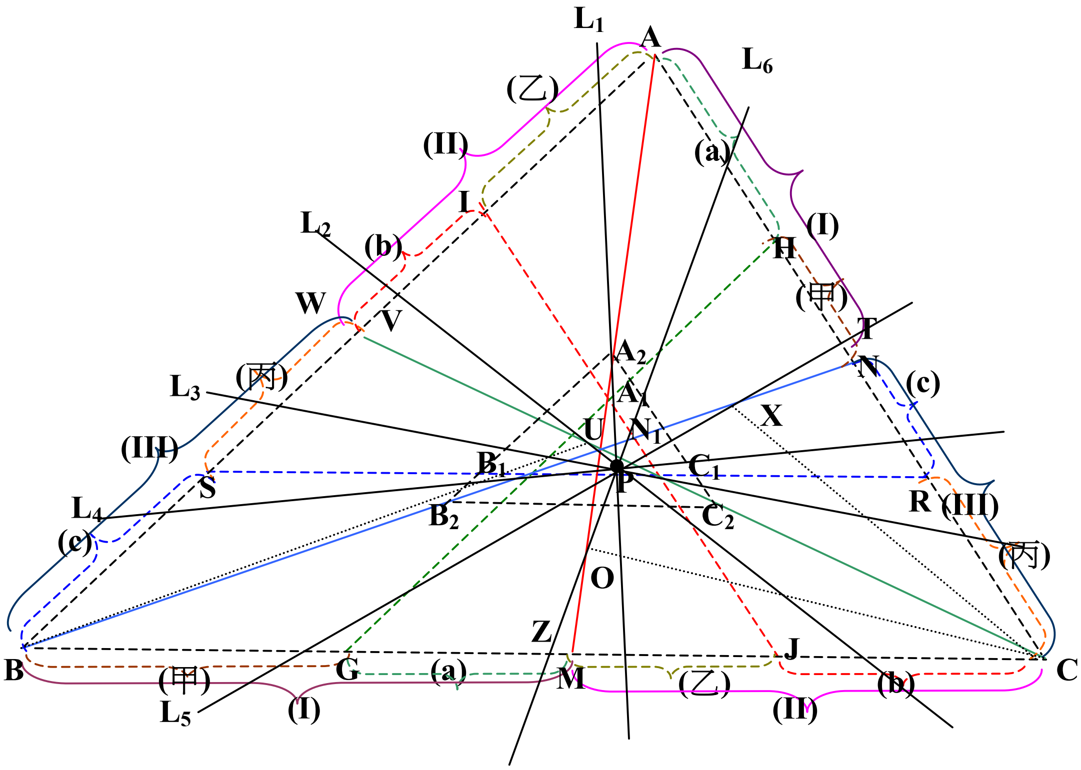
(7) P若位於$\Delta A_1B_1C_1$與$\Delta A_2B_2C_2$所夾的區域間,也會有兩條平分線(証明如下):



[証明]: 1.設過P點且過(乙),(b),(丙),(c),(甲),(a)之相對區域的平分線分別為L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,L_6;其中L_2產生的ΔBUV, L_4產生的ΔAYR, L_5產生的ΔCXT, L_6產生的ΔCOZ皆可証得其面積大於$\frac{1}{4}\Delta ABC$,

而與事實小於$\frac{1}{4}\Delta ABC$矛盾,所以不成立;故過P之平分線只有L_1與L_3兩條

(8).位於$\Delta A_1B_1C_1$內部之一點(不含重心G),都有兩條平分線。(証明如下)



[証明]:設過P點且過(乙),(b),(丙),(c),(甲),(a)之相對區域的平分線分別

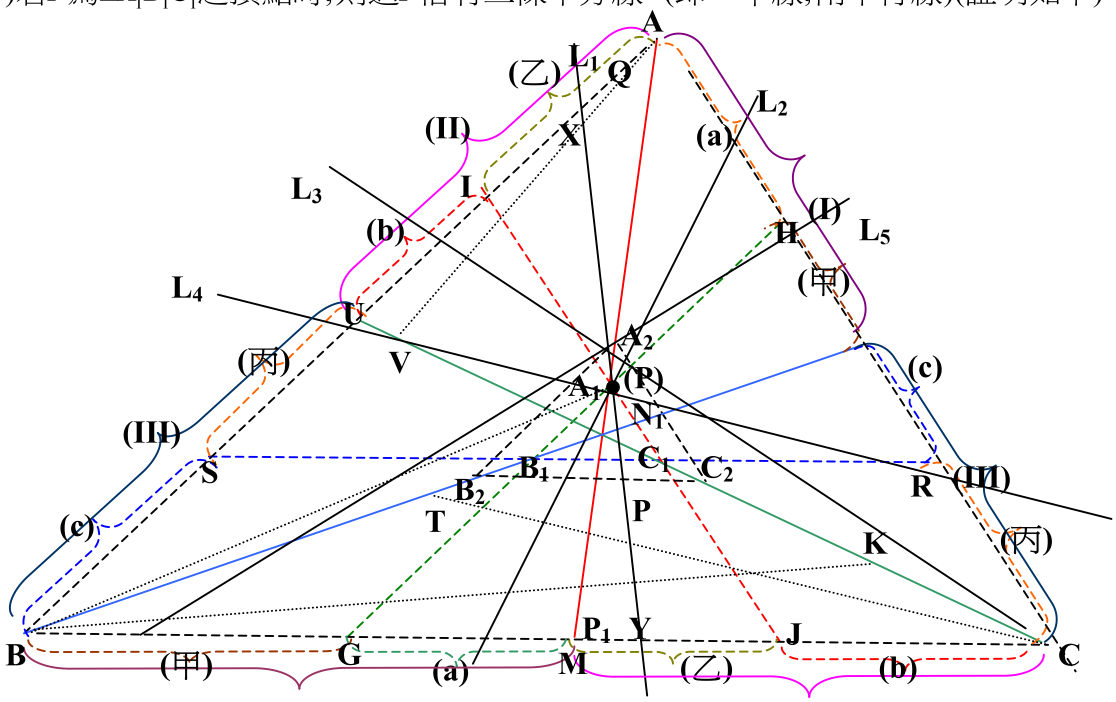
爲L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,L_6;其中L_2產生的ΔBUV,L_4產生的ΔAPR,

L_5產生的ΔCXT,L_6產生的ΔCOZ皆可証得其面積大於$\dfrac{1}{4}\Delta ABC$,

而與事實小於$\dfrac{1}{4}\Delta ABC$矛盾,所以不成立;故過P之平分線只有L_1與

L_3兩條

(9)若P爲$\Delta A_1B_1C_1$之頂點時,則過P恰有三條平分線。(即一中線,兩平行線)(証明如下)



[証明]:1.設L_1爲過$P(A_1)$之平分線,交$\overline{AB},\overline{BC}$於$X,Y$,則$\Delta P(A_1)AX=\Delta P(A_1)MY$,

$\Delta P(A_1)IX=\Delta P(A_1)JY$,

2.$\because \overline{IJ}\,//\,\overline{AC},\overline{RS}\,//\,\overline{BC},\overline{GH}\,//\,\overline{AB}$,且$\dfrac{\overline{AR}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\overline{CH}}{\overline{AC}}\ \therefore \overline{AR}=\overline{CH}$,故$\overline{AH}=\overline{CR}$

3..設$\overline{BC}=2k,\overline{BJ}=\overline{CG}=\sqrt{2}k$,則$\overline{CJ}=\overline{BG}=(2-\sqrt{2})k$,

$\overline{GJ}=2(\sqrt{2}-1)k$,故$\dfrac{\overline{GJ}}{\overline{BG}}=\dfrac{2(\sqrt{2}-1)k}{(2-\sqrt{2})k}=\dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{2})k}{(2-\sqrt{2})k}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\dfrac{\overline{JP(A_1)}}{\overline{IP(A_1)}}$,

又$\because \overline{XY}$爲經$P(A_1)$過(乙)區域之平分線,$\therefore \Delta IP(A_1)X=\Delta JP(A_1)Y$,

故$\dfrac{\Delta IP(A_1)X}{\Delta JP(A_1)Y}=1=\dfrac{\overline{IP(A_1)}\cdot\overline{XP(A_1)}}{\overline{JP(A_1)}\cdot\overline{YP(A_1)}}=\dfrac{\overline{IP(A_1)}}{\overline{JP(A_1)}}\cdot\dfrac{\overline{XP(A_1)}}{\overline{YP(A_1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\overline{XP(A_1)}}{\overline{YP(A_1)}}$,

即$\dfrac{\overline{XP(A_1)}}{\overline{YP(A_1)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}$,

4.又$\because \Delta IP(A_1)A=\Delta JP(A_1)M\ \therefore \dfrac{\overline{AP(A_1)}}{\overline{MP(A_1)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}$,但$\because \Delta XP(A_1)A=\Delta YP(A_1)M$

$\therefore \dfrac{\overline{XP(A_1)}}{\overline{YP(A_1)}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$與3.矛盾,故$L_1$的假設不成立;同理$L_2$的假設亦不成立

5.圖中所假設的L_3所產生的ΔBKC,L_4所產生的ΔAUV,L_5所產生的ΔBTC,

都可証得其面積$>\dfrac{1}{4}\Delta ABC$而與事實矛盾。故過$\Delta A_1B_1C_1$頂點的平分線

恰有三條:一爲中線,其餘兩條爲平行線

(10)P為重心時：只可得到過重心的3條平分線,

[証明]:(如右圖)

1.設$\overline{P_1Q}$為過P之任意一條平分線(但不為中線)

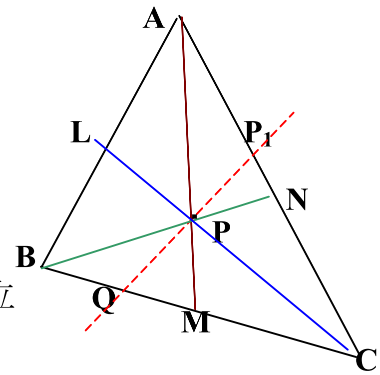
2.$\because$ P為重心,$\overline{AM}$、$\overline{BN}$為中線 $\therefore$ 若$\overline{P_1Q}$為過P之另一條平分線

則$\Delta APP_1 = \Delta PQM$,依共角定理得$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PP_1}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{PM}} = \dfrac{2}{1}$

且$\Delta PP_1N = \Delta PBQ \Rightarrow \dfrac{\overline{PN}}{\overline{BP}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PP_1}} = \dfrac{1}{2}$,與$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{PP_1}} = \dfrac{2}{1}$矛盾

故$\overline{P_1Q}$為過P之任意一條平分線(但不為中線)的假設不成立

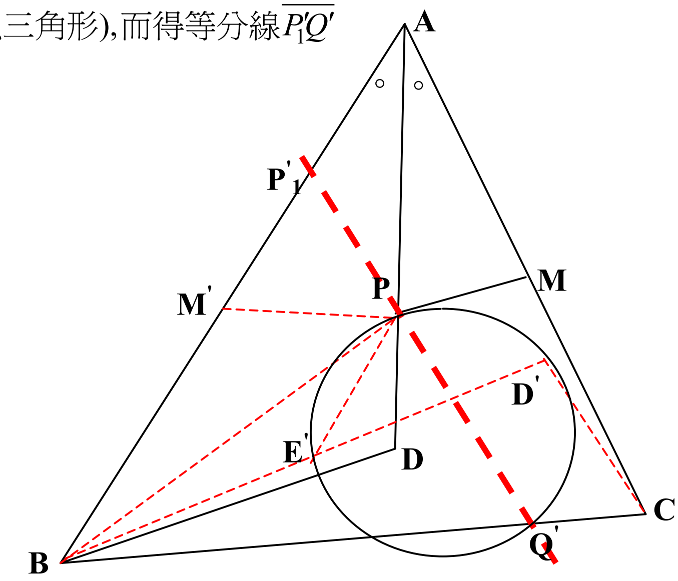
即過重心P的直線中,除了三中線外不再有任何的平分線



(B)P在分角線上時：

[分析]:1.若P在$\angle BAC$的平分線上,則A、P、D三點共線,若作$\overline{PE} // \overline{AC}$,就不會與$\overline{AD}$相交於$E$點,如此即無法作出過$E$、$P$、$D$三點的圓,而找得分點$Q$。

2.此時我們可將作法改以B或C為頂點作$\Delta BPM' \sim \Delta BCD'$(如下圖)(圖中虛線為以$B$頂點所作得的相似三角形),而得等分線$\overline{P_1'Q'}$



(C)若P為三角形內心時：

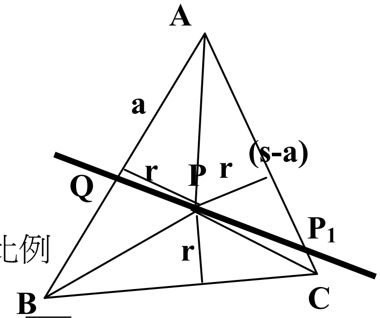
[分析]:1.若$\overline{QP_1}$為過P,且將在ΔABC二等分的直線,則$\dfrac{\Delta AQP_1面積}{\Delta ABC面積} = \dfrac{1}{2}$,又$\because$ P為內心,

$\therefore$ P至$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$等距離。

2.若設P至$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$的距離為r,則$\Delta AQP_1面積 = \Delta AQP面積 + \Delta APP_1面積 = \dfrac{1}{2}r(\overline{AQ} + \overline{AP_1})$,

又因$\Delta ABC面積 = \dfrac{1}{2}r(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC})$,$\therefore$ $\dfrac{\Delta AQP_1面積}{\Delta ABC面積} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}r(\overline{AQ} + \overline{AP_1})}{\frac{1}{2}r(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC})}$,

故$\overline{AQ} + \overline{AP_1} = \dfrac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC})$

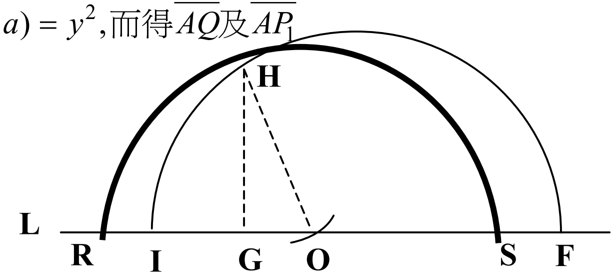


3.設$\overline{AQ}=a,\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})=s$,則$\overline{AP_1}=s-a$,又因$\frac{\Delta AQP_1\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}$

$=\frac{\overline{AQ}\times\overline{AP_1}}{\overline{AB}\times\overline{AC}}$(共角定理)$=\frac{a\times(s-a)}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\frac{1}{2}$,$\therefore a\times(s-a)=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}$

4.由於$a\times(s-a)=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}$,$\therefore \sqrt{a\times(s-a)}=\sqrt{\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}}$,故可由比例

中項(y)作圖,先得$y^2=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}$,再逆推$a\times(s-a)=y^2$,而得$\overline{AQ}$及$\overline{AP_1}$



[作法]:1.在L上取F、G、I三點,使$\overline{FG}=\overline{AB},\overline{GI}=\frac{1}{2}\overline{AC}$,

以$\overline{IF}$爲直徑,作一半圓

2.過G作$\overline{GH}\perp L$交半圓於H

3.以H爲圓心,$\frac{1}{4}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$爲半徑(即$\frac{1}{2}s$),畫弧交$L$於$O$

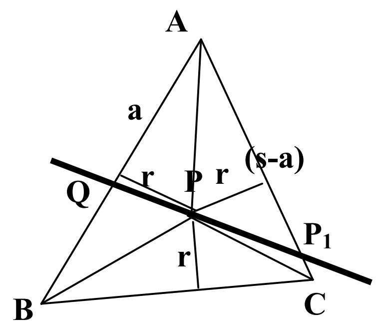
4.以O爲圓心,$\overline{OH}$爲半徑,作一半圓交L於R,S兩點,則$\overline{GR}=a,\ \overline{GS}=s-a$

$(\because \overline{GH}=\sqrt{a(s-a)},\overline{OH}=\frac{1}{2}s$,且$\overline{GH}\perp L$,$\therefore \overline{OH}^2=\overline{GH}^2+\overline{GO}^2$,

故$\overline{GO}^2=\frac{1}{4}s^2-a(s-a)=\frac{s^2-4as+4a^2}{4}=\frac{(s-2a)^2}{4}$,

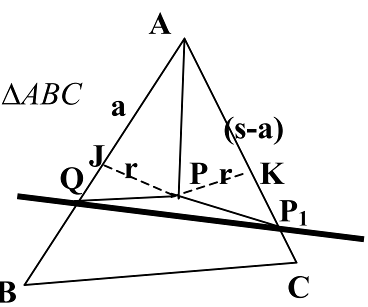
$\therefore \overline{GO}=\frac{s-2a}{2}=\frac{1}{2}s-a$,而$\overline{GR}=\overline{OR}-\overline{OG}=\frac{1}{2}s-(\frac{1}{2}s-a)=a$,

且$\overline{GS}=\overline{RS}-\overline{GR}=2\cdot\frac{1}{2}s-a=s-a)$



5.ΔABC中,在$\overline{AB}$上取$\overline{AQ}=a,\overline{AP_1}=s-a$,連$\overleftrightarrow{QP_1}$,則$\overleftrightarrow{QP_1}$即爲所求

[証明]:1.由作圖中知,$\overline{AQ}=a,\overline{AP_1}=s-a$,$\therefore \overline{AQ}\times\overline{AP_1}=a(s-a)=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}$



故依共角定理,得$\frac{\Delta AQP_1}{\Delta ABC}=\frac{\overline{AQ}\times\overline{AP_1}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=\frac{1}{2}\ \therefore \Delta AQP_1=\frac{1}{2}\Delta ABC$

2.假設$\overleftrightarrow{QP_1}$不過$P$點時(如右圖),作$\overline{PJ}\perp\overline{AB}$交$\overline{AB}$於$J$,$\overline{PK}\perp\overline{AC}$交$\overline{AC}$於$K$

$\because P$爲內心$\therefore \overline{PJ}=\overline{PK}=r$,且$\Delta ABC=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})$

又$\because \overline{AQ}=a,\overline{AP_1}=s-a,s=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})\ \therefore \overline{AQ}+\overline{AP_1}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})$

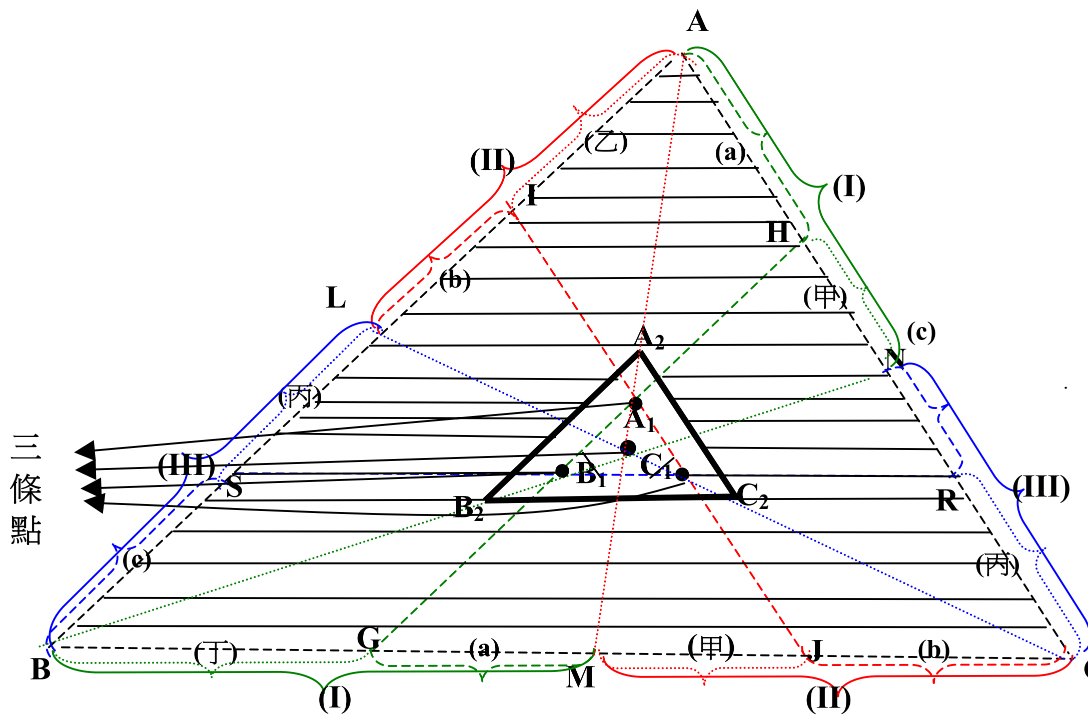
故$\Delta AQP+\Delta APP_1=\frac{1}{2}r\cdot\overline{AQ}+\frac{1}{2}r\cdot\overline{AP_1}=\frac{1}{2}r(\overline{AQ}+\overline{AP_1})=\frac{1}{2}r[\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})]$

$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC})]=\frac{1}{2}\Delta ABC$

則$\Delta QPP_1=\Delta AQP_1-(\Delta AQP+\Delta APP_1)=\frac{1}{2}\Delta ABC-\frac{1}{2}\Delta ABC=0$

故P點必落在$\overleftrightarrow{QP_1}$上,即$\overleftrightarrow{QP_1}$過$P$將$\Delta ABC$二等分

綜合以上所述,我們得知P位於ΔABC內部時,過P所作得的平分線,如下圖所示:



(i)過位於$\Delta A_2B_2C_2$與ΔABC之間區域的點,都恰有一條過本身相對區域的平分線(含邊但不含$\Delta A_2B_2C_2$的三頂點)

(ii)過位於$\Delta A_2B_2C_2$內部的點(除重心外),都恰有兩條平分線

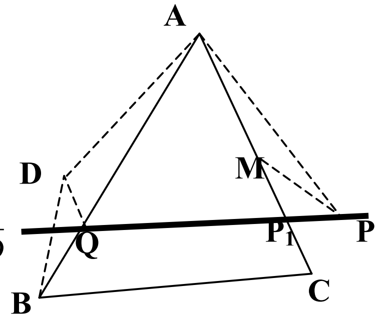
(iii)過$\Delta A_2B_2C_2$三頂點的點,都恰有兩條平分線

(vi)過重心G及$\Delta A_1B_1C_1$三頂點的點,都恰有三條平分線(也是最多)

(四)若P為ΔABC外部之一點時：

[分析]：1.若P在ΔABC外部，而$\overleftrightarrow{PP_1}$交$\overline{AB}$、$\overline{AC}$於$Q$及$P_1$且二等分$\Delta ABC$，

則$\dfrac{\Delta AP_1Q}{\Delta ABC}=\dfrac{\overline{AQ}\times\overline{AP_1}}{\overline{AB}\times\overline{AC}}=\dfrac{1}{2}$

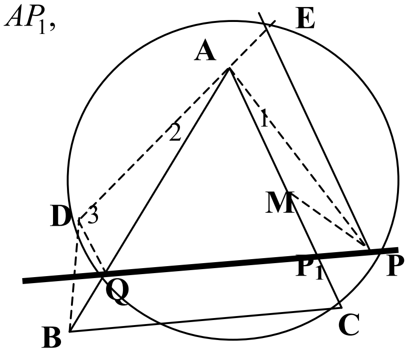


2.$\because \overline{AQ}\times\overline{AP_1}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AB}$，$\therefore$ 取$\overline{AC}$中點M，造成$\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$

3.設法作得$\Delta ABD\sim\Delta APM \Rightarrow \dfrac{\overline{AM}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}\Rightarrow \overline{AM}\times\overline{AB}=\overline{AP}\times\overline{AD}$

4.若再作得$\Delta ADQ\sim\Delta AP_1P \Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AP_1}}=\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AD}}\Rightarrow \overline{AP}\times\overline{AD}=\overline{AQ}\times\overline{AP_1}$，

可得$\overline{AM}\times\overline{AB}=\overline{AQ}\times\overline{AP_1}$，即$\overline{AQ}\times\overline{AP_1}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AB}$。



[作法]：1.連$\overline{AP}$，取$\overline{AC}$中點M，連$\overline{MP}$

2.以$\overline{AB}$為一邊，作$\Delta ABD\sim\Delta APM$，且使D點落於ΔABC之外部

3.作$\overline{PE}\,//\,\overline{AC}$，交$\overleftrightarrow{AD}$於$E$

4.作一圓過P、E、D三點，交$\overline{AB}$於Q

5.連$\overline{PQ}$且交$\overline{AC}$於P_1，則$\overleftrightarrow{PQ}$即為所求。

[証明]：1.$\because \Delta ABD\sim\Delta APM$，$\therefore \angle 1=\angle 2$，又$\because P$、$E$、$D$、$Q$四點共圓，

且$\because \overline{PE}\,//\,\overline{AC}$，$\therefore \angle 3+\angle EPQ=\angle AP_1P+\angle EPQ=180°$，故$\angle 3=\angle AP_1P$

即$\Delta ADQ\sim\Delta AP_1P$，$\therefore \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AP_1}}$，故$\overline{AQ}\times\overline{AP_1}=\overline{AD}\times\overline{AP}$

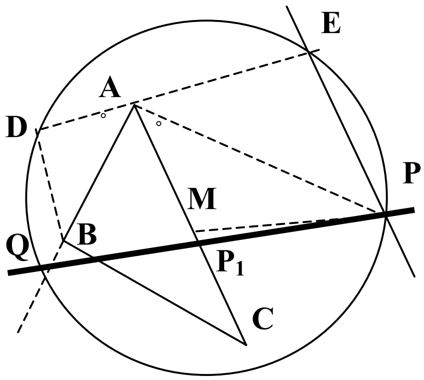
2.$\because \Delta ABD\sim\Delta APM$，$\therefore \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AD}}$，即$\overline{AB}\times\overline{AM}=\overline{AD}\times\overline{AP}$，故$\overline{AQ}\times\overline{AP_1}=\overline{AB}\times\overline{AM}$

$=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AB}$

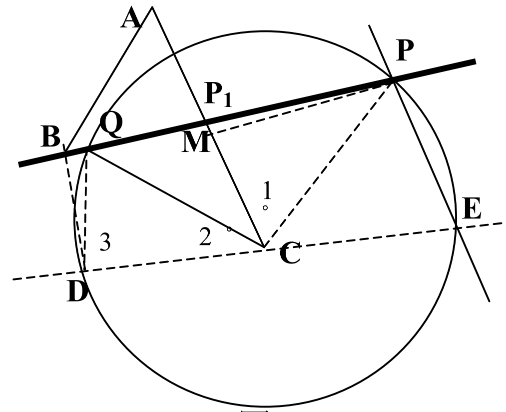
3.$\because \angle BAC=\angle BAC \therefore \dfrac{\Delta AQP_1}{\Delta ABC}=\dfrac{\overline{AQ}\times\overline{AP_1}}{\overline{AC}\times\overline{AB}}=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{AB}}{\overline{AC}\times\overline{AB}}=\dfrac{1}{2}$，即過$P$之$\overleftrightarrow{QP}$將$\Delta ABC$

面積二等分而合於所求

[討論a]:若在(如下圖a)中過E、P、D三點的圓不能與$\overline{AB}$相交,則需改以B或C為頂點作相似三角形(如下圖b),否則找得分點Q(在$\overline{AB}$的延長線上),亦無法過P將ΔABC面積二等分



(圖 a)



(圖 b)

[證明]:1.$\because \Delta CBD \sim \Delta CPM$,$\therefore \angle 1 = \angle 2$,又$\because$ P、E、D、Q四點共圓,

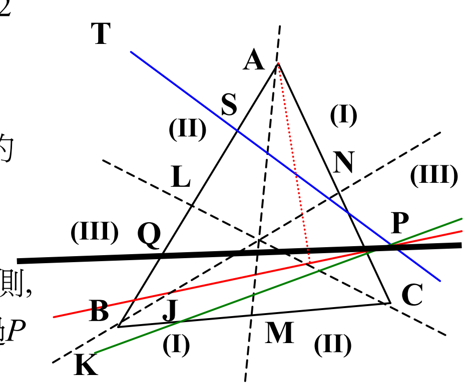
且$\because \overline{PE} // \overline{AC}$,$\therefore \angle 3 + \angle EPQ = \angle CP_1P + \angle EPQ = 180°$,故$\angle 3 = \angle CP_1P$

即$\Delta CDQ \sim \Delta CP_1P$,$\therefore \dfrac{\overline{CQ}}{\overline{CP}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{CP_1}}$,故$\overline{CQ} \times \overline{CP_1} = \overline{CD} \times \overline{CP}$

2.$\because \Delta CBD \sim \Delta CPM$,$\therefore \dfrac{\overline{CP}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{CD}}$,即$\overline{CB} \times \overline{CM} = \overline{CD} \times \overline{CP}$,故$\overline{CQ} \times \overline{CP_1} = \overline{CB} \times \overline{CM}$

$= \dfrac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{CB}$

3.$\because \angle BCA = \angle BCA$ $\therefore \dfrac{\Delta CQP_1}{\Delta ABC} = \dfrac{\overline{CQ} \times \overline{CP_1}}{\overline{AC} \times \overline{CB}} = \dfrac{\frac{1}{2}\overline{AC} \times \overline{AB}}{\overline{AC} \times \overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$,即過$P$之$\overleftrightarrow{QP}$將$\Delta ABC$面積二等分而合於所求



[討論b]:過三角形外部一點,所作得的平分線必過相對區域

[理由]:(如右圖),$\overleftrightarrow{AM}$,$\overleftrightarrow{BN}$,$\overleftrightarrow{CL}$為ΔABC的三中線,所分成的面積皆為$\dfrac{1}{2}\Delta ABC$的面積,若過P的直線不過相對區域,則此直線必完全在其中一條中線的一側,而無法平分三角形面積。(如P在(III)區域內,而過P之T直線只過$(I)(II)(III)$區域但未過(III)區域的相對區域,因而T上之$\overline{PS}$完全在中線$\overline{CF}$的上方,而無法平分ΔABC面積)

同理:K上之$\overline{PJ}$完全在中線$\overline{BN}$的下方,而無法平分ΔABC面積

[討論c]:過三角形外部一點,恰有一條平分線且過相對區域

[理由]:1.(如下頁右圖),$\because$ 過P及(III)區域之平分線必與中線$\overleftrightarrow{CL}$相交

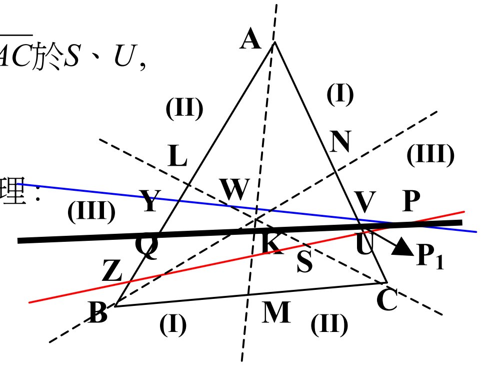
(i)設過P及(III)區域之另一平分線$\overline{PY}$且分別交$\overline{LK}$、$\overline{AC}$於W、V,

則$\Delta AVY < \Delta AP_1Q = \dfrac{1}{2}\Delta ABC$,故$\overline{PY}$不合所求

(ii)設過P及(III)區域之另一平分線$\overline{PZ}$且分別交$\overline{CK}$、$\overline{AC}$於S、U,

則$\Delta AUZ > \Delta AP_1Q = \dfrac{1}{2}\Delta ABC$,故$\overline{PZ}$,也不合所求

2.綜合上述:知過P及(III)區域之平分線恰有一條,同理:
過外部P及(I)區域或 過外部P及(II)區域之平分線
亦恰有一條



陸、研究的結果:

(一).三角形邊上(含頂點)之點,都恰有一條平分線。

(二).過三角形邊上一點作平分線的方法,在本報告中共有三種作法,分別爲內分法、外分法及共角定理法,其中以共角定理法較佳。

(三).採共角定理法可過三角形內部一點作平分線,而利用三中線及$\sqrt{2}:2$的平行線截比例線段可將三角形面積分成 12 區域,並利用中線中點爲成三角形的方法,可簡化其作法。

(四).過三角形內部一點之平分線,可分爲:

(i)位於三中線中點所圍成三角形外部(含邊,但不包括頂點),都恰有一條平分線。

(ii)位於三中線中點所圍成三角形內部(不含邊、重心及平行三角形三邊且比值爲$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$的三平行線,所圍成的三角形的頂點),都恰有兩條平分線。

(iii)位於三中線中點所圍成三角形的頂點,恰有兩條平分線。

(iii)位於平行三角形三邊且比值爲$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$的三平行線,所圍成的三角形頂點及重心,都有三條平分線。

(五).過三角形外部一點之平分線,都恰有一條。

(六).最後謝謝老師在百忙之中,撥冗指導我們,使得我們的報告能如期順利完成。

柒、參考資料:

中華民國第 42 屆中小學科展數學科(高中組)

評　語

030420 **國中組數學科**

過定點平分三角形面積的探討

研究過程循序漸進具組織性，研究結果之應用性可再加強。