中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030419

基隆市立中正國民中學

指導老師姓名

林耀南

許家源

作者姓名

鄭毓葵

高承楷

朱建威

# 中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

# 作品說明書

科別：數學科

組別：國中組

作品名稱：形形色色 —— 一種創新的色卡遊戲探討

關鍵詞：三色卡、四色卡

編號：

# 目次

# 形形色色 —
# 一種創新的色卡遊戲探討

## 壹、摘要


在三色卡中，發現若能排列成使所有(n-1)(n-2)/2 個正六邊形中都有 0 或 3 或 6 張「相異卡」時，此色卡必可拼成。

四色卡共有 A、B、C、D、E、F 六種，其中 A 和 F，B 和 D，C 和 E 顏色排列順序恰好相反。當任取四張四色卡排成田字欲判斷是否有解時，可用**換半套法**將 F 換成 A，D 換成 B，E 換成 C，再依**判別規則**即知是否有解。這在 n×n 拼圖上可迅速檢查出無解排列。

四色卡中只取相對一組卡(如 A 和 F)作九宮格拼圖，在所有$(n-2)^2$個排列組合中，若均有(1)一條鞭型 (2)提燈籠型 (3) Y 字型 (4)X 字型 四形之一則此色卡必可拼成，反之則否。

利用 $n^2/2$ 張 A 與 $n^2/2$ 張 F，想在一張空白 n×n 拼盤上快速拼出一個成功的拼圖，須使 一、 行中 A 張數×列中 A 張數＋行中 F 張數×列中 F 張數＝$n^2/2$ 張。 或 二、 只要在一排中放 n/2 張 A，亦能拼成。

在一種創新四色卡兩人拼圖競賽(甲欲拼成，乙扯後腿)中，常態下輸贏機率各半，但本文中找到一種**贏的策略**，若甲方使用此策略必勝。


## 貳、研究動機

在幾何量變動單元中，老師教我們使用七巧板拼排各種好玩圖形，如提燈籠、黃金屋……等，接著老師又拿出四色卡，要我們在同色相鄰條件下將卡拼成，那非常好玩，但拼了好久都失敗，老師說若只是胡亂拼就沒意義了，是否能找到一種快速檢驗法，使大家還沒去亂轉之前就能判定能不能拼成？這有如當頭棒喝，一語驚醒夢中人，大夥兒就開始奮力去尋找。

## 參、研究目的

一、找出「邊長 n」三色卡拼排是否有解的快速檢驗法。
二、找出 n×n 四色卡拼排是否有解的快速檢驗法。
三、對一種創新 6×6 四色卡拼圖遊戲競賽，找出贏的策略。

## 肆、研究設備器材

三色卡、四色卡、棋盤

## 肆、研究過程

一開始對於色卡在同色相鄰條件下，我們想對能成功拼出的百分率多加了解。在不同邊數下拼排成功百分率是否隨著邊數增加而越來越高或越低？百分率的變化曲線大約成何種形狀？這些問題很重要，因在選擇某種邊數來做遊戲時，成功百分率高低與遊戲者興趣高低關係密切，我們不希望把失敗百分率太高的遊戲交給玩家玩，這將很快使玩家感到挫折而失去興趣。底下開始我們的研究：

### 一、色卡是否有解的探討（理論）

（一）三色卡：

三色卡共有兩種不同樣式，如圖 1（各準備 16 張，單面著色，不考慮翻轉）

設黃色＝1，紅色＝2，藍色＝3

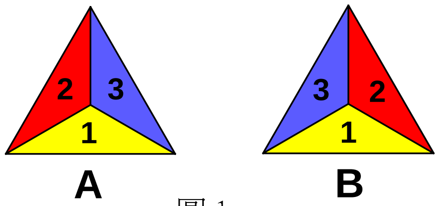
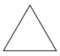
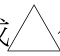
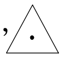



圖 1

以上兩類三色卡我們能明顯看出 A 卡和 B 卡顏色排列順序恰相反。我們先從最簡單的**邊長 2** 三角形開始做起，再找出能讓**邊長 n** 三角形全部顏色都能同色相鄰的方法。

註：(1)黑點代表不同的色卡（代表 A，就代表 B；或代表 B，就代表 A）。

(2)成功率百分率以四捨五入法取到小數點後第二位。

(3)成功百分率是一個個清點，花了八個月時間，有資料 1 待查。

1. 邊長 2

共 $2^4$＝16 種排列

(1)0+4（即 0 張 A 配 4 張 B 或 0 張 B 配 4 張 A，以下相同）

全都有解：1 種，圖 2

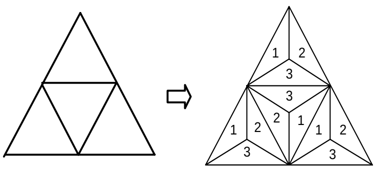


圖 2

(2)1+3

全都有解：4 種，圖 3

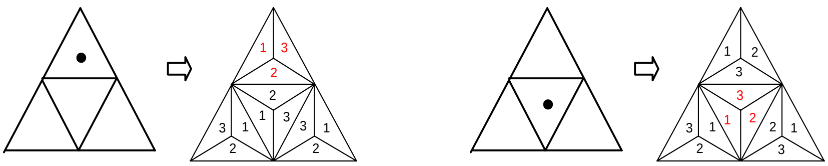


圖 3

(3)2+2

全都有解：6 種，圖 4

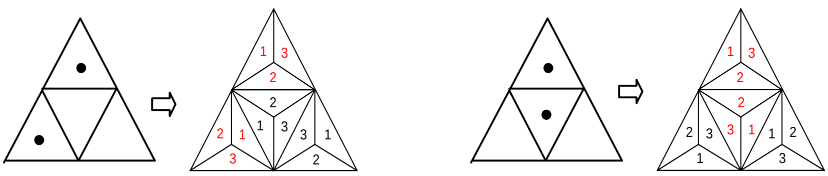


圖 4

合計邊長 2 三角形共 16 種排列，有解有 16 種，成功百分率為 100%

2. 邊長 3

共 $2^9$＝512 種排列

(1)0+9

全都有解：1 種，圖 5

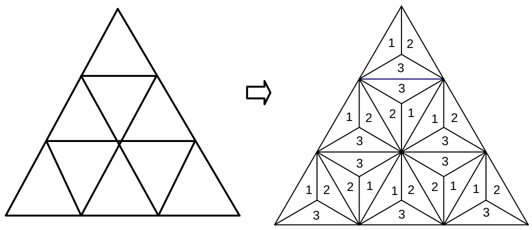


圖 5

(2)1+8

有解：3 種，圖 6

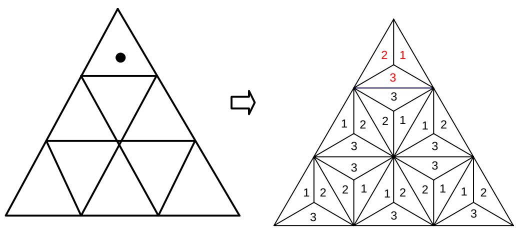


圖 6

無解：6 種，圖 7

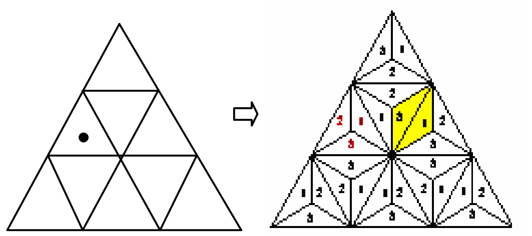


圖 7(黃色區塊表示該位置發生了不同色相鄰，即拼不成的衝突區，以下相同）

(3)2+7

有解：3 種，圖 8

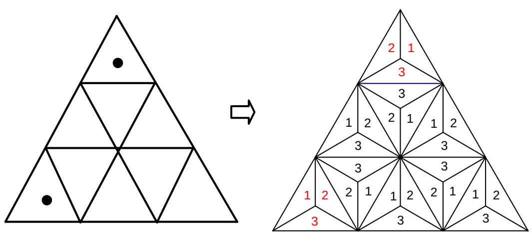


圖 8

無解：33 種，圖 9

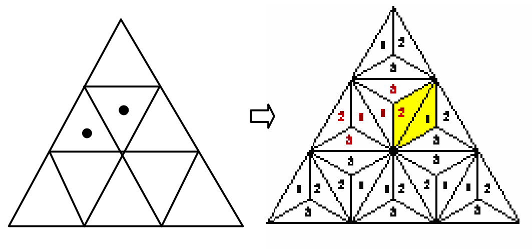


圖 9

(4)3+6

有解：21 種，圖 10

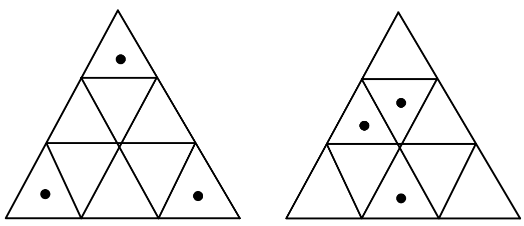


圖 10

無解：63 種，圖 11

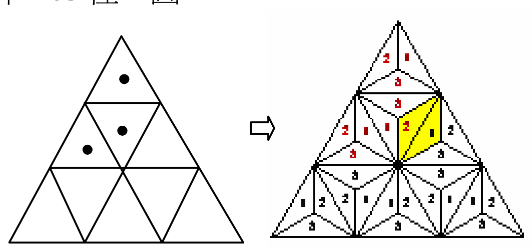


圖 11

(5)4+5

有解：60 種，圖 12　　　　　　　　　　　　　無解：66 種，圖 13

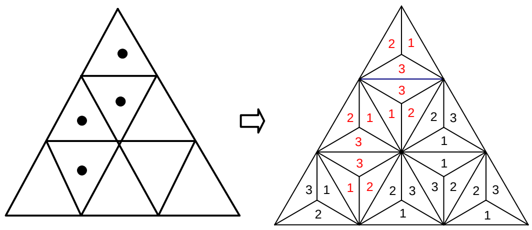


圖 12

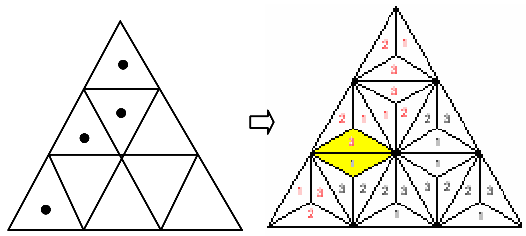


圖 13

合計邊長 3 三角形共 512 種排列，有解 86 種，成功百分率為 16.80%

3. 邊長 4

共 $2^{16}$＝65536 種排列，有解圖例見圖 14，無解圖例見圖 15

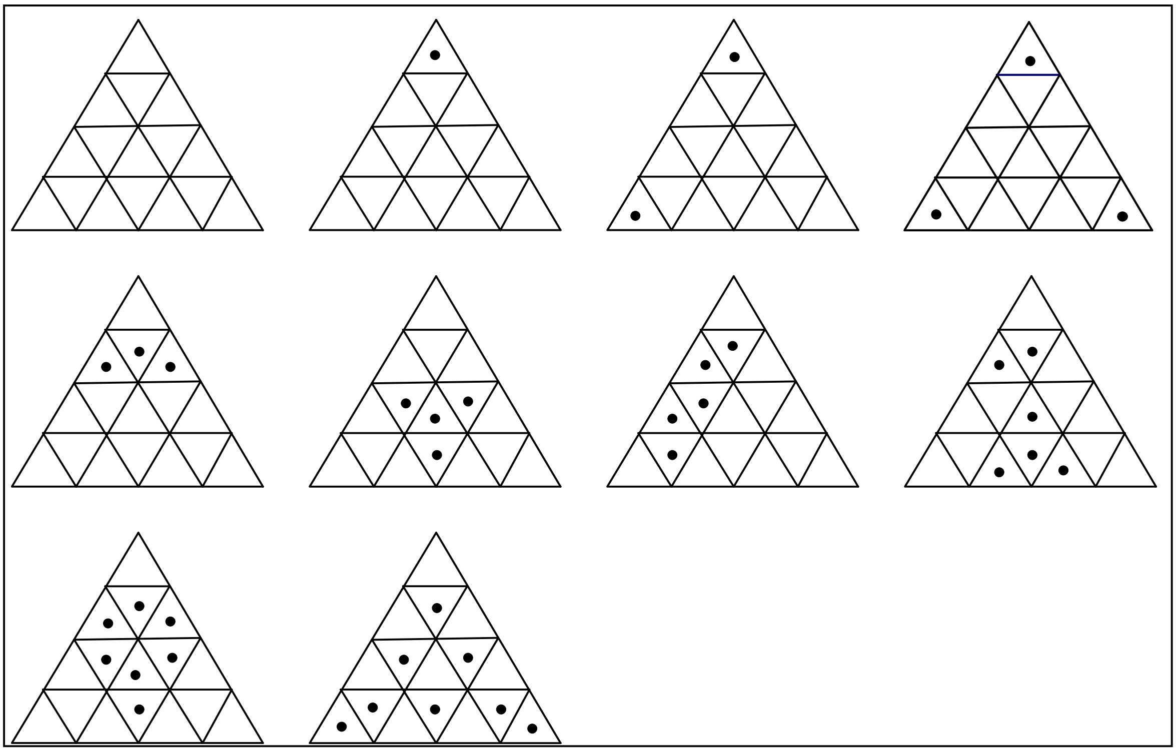


圖 14

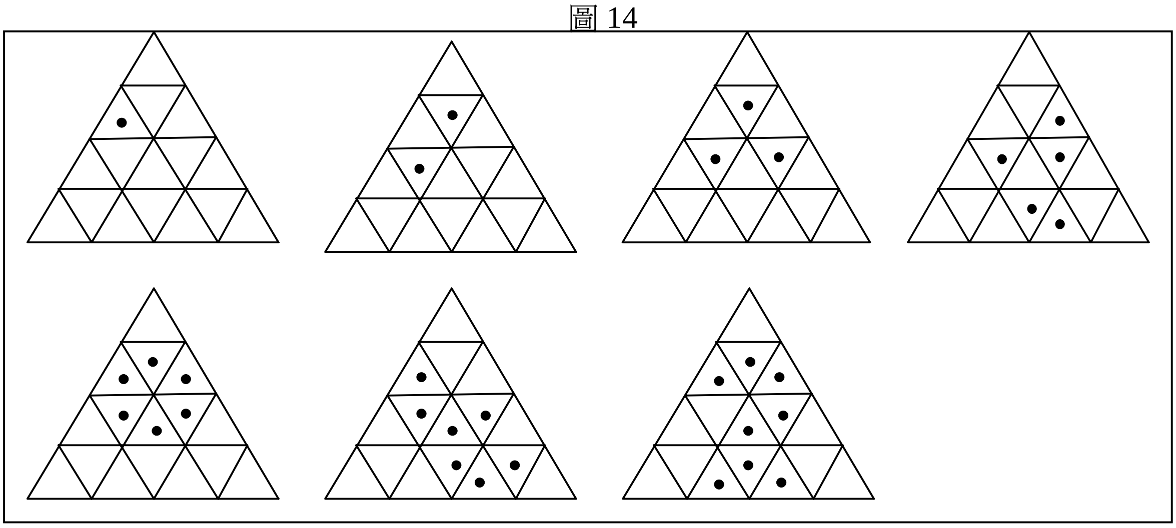


圖 15

合計邊長 4 三角形共 65536 種排列，有解有 1540 種，成功百分率僅為 2.35 ％

歸納上述探討心得如下：

a. 成功百分率計算中，發現成功百分率隨邊數增加急速下降，因此當 n>4 時幾乎很難拼成功。我們將邊長數與成功百分率統計成表一並繪成圖 16：

三色卡成功百分率表

| 邊長 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 總數 | 16 | 512 | 65536 |
| 成功數 | 16 | 86 | 1540 |
| 成功率（％） | 100 | 16.80 | 2.35 |

表一

三色卡成功百分率圖

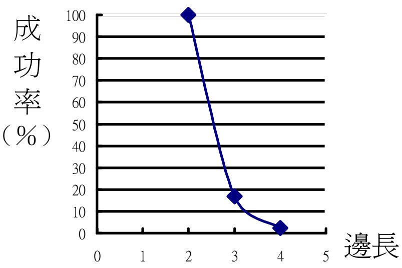



圖 16

b 邊長 2 三角形，不論怎麼排全都有解，是因無論中央的卡是 A 或 B，外側三邊上的卡必有一種顏色與之同色相鄰。

c. 邊長 3 和邊長 4 三角形有解排列中，三角形裡每一個正六邊形必定要有 0 或 3 或 6 個點才有解(圖 17、18)，否則無解（圖 19 紅色正六邊形中只有 1 個點；圖 20 紅色正六邊形中有 4 個點，黃色正六邊形中只有 1 個點）。

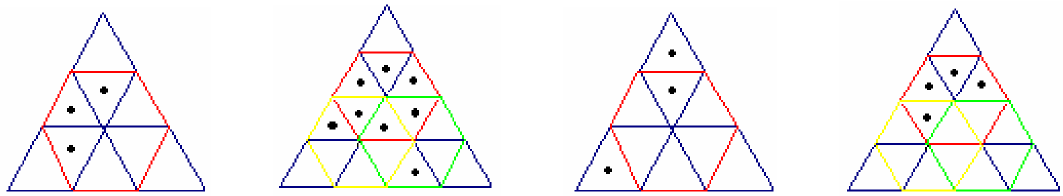


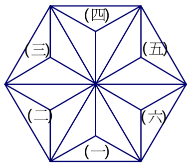
圖 17 圖 18 圖 19 圖 20

性質一：

在「邊長 n」的三角形中，n≧3，若所有的（n－1）（n－2）／2 個正六邊形中都有 0 或 3 或 6 個黑點時，則此色卡必可拼成，否則無解。

證明：一個正六邊形圖是由六片 A 或 B 三色卡組成，又對 A 或 B 中顏色分別給了三個代表數字 1、2、3，當任選六片色卡組成一個正六邊形時，靠在此六邊形六邊上的顏色數字，我們將它稱為此六邊形的一個「標記」，如圖 21~33。

定義：




標記【(一),(二),(三),(四),(五),(六)】

分類如下，共 13 大類，如表二：

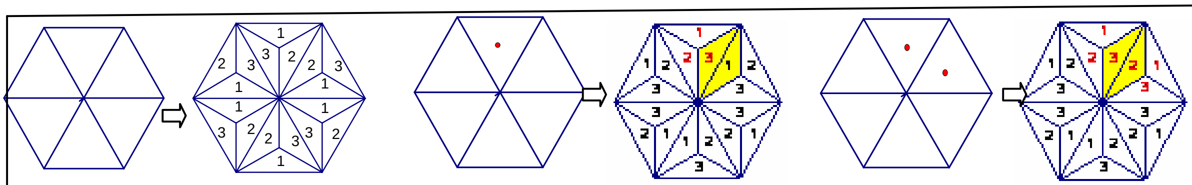


圖 21 標記【1,3,2,1,3,2】 圖 22 標記【3,2,1,1,2,1】 圖 23 標記【3,2,1,1,1,1】

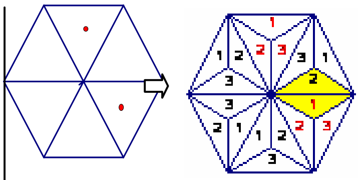


圖 24 標記【3,2,1,1,1,3】

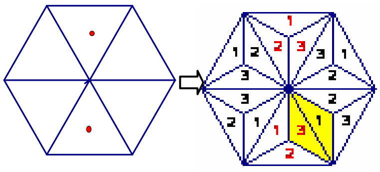


圖 25 標記【2,2,1,1,1,3】

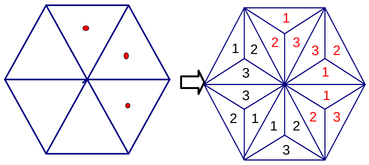


圖 26 標記【3,2,1,1,2,3】

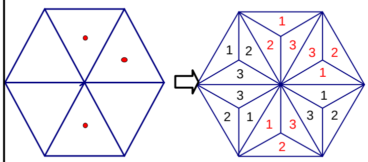


圖 27 標記【2,2,1,1,2,2】

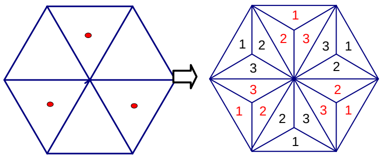


圖 28 標記【1,1,1,1,1,1】

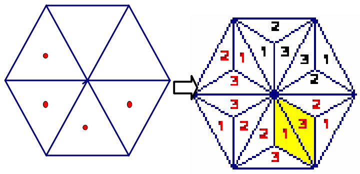


圖 29 標記【3,1,2,2,1,1】

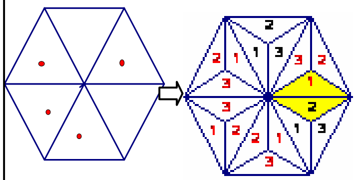


圖 30 標記【3,1,2,2,2,3】

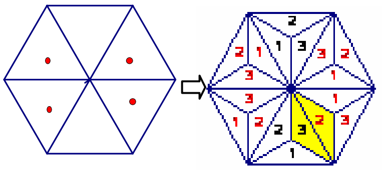


圖 31 標記【1,1,2,2,2,3】

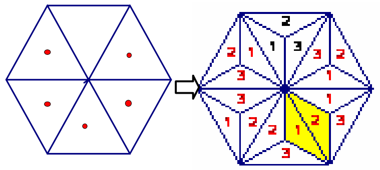


圖 32 標記【3,1,2,2,2,3】

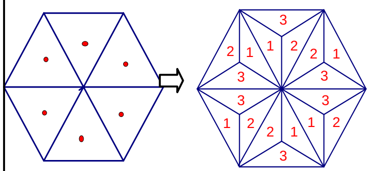


圖 33 標記【3,1,2,3,1,2】

表二

黑點在六邊形中共 64 種排列，但因一些圖形經翻轉後會相同，所以我們共將它分成以上 13 大類，且若有解則同色相鄰顏色數字必成對抵消，導致殘留在標記中顏色數字也必成對；反之若無解，則殘留在標記中某些顏色數字必落單，將這 13 大類標記及對應黑點數整理成表三：

| | 正六邊形中黑點數 | 六張三色卡的外邊數字（標記） |
|---|---|---|
| 有解 | 0 | 1,3,2,1,3,2（圖 21） |
| | 3 | 3,2,1,1,2,3、2,2,1,1,2,2、1,1,1,1,1,1（圖 26、27、28） |
| | 6 | 3,1,2,3,1,2（圖 33） |
| 無解 | 1 | 3,2,1,1,2,1（圖 22） |
| | 2 | 3,2,1,1,1,1、3,2,1,1,1,3、2,2,1,1,1,3（圖 23、24、25） |
| | 4 | 3,1,2,2,1,1、3,1,2,2,2,3、1,1,2,2,2,3（圖 29、30、31） |
| | 5 | 3,1,2,2,2,3（圖 32） |

表三

由表三明顯得知有解時黑點數必為 0 或 3 或 6，標記中數字完全成對，其它黑點數則無解。為了充分測試這個性質，我們舉了兩個超大(邊長＝10)例子，敘述如下：

若每個正六邊形都有解，則此三角形必有解(圖 34)；若有任一正六邊形無解，則此三角形必無解(圖 35)。

有解：

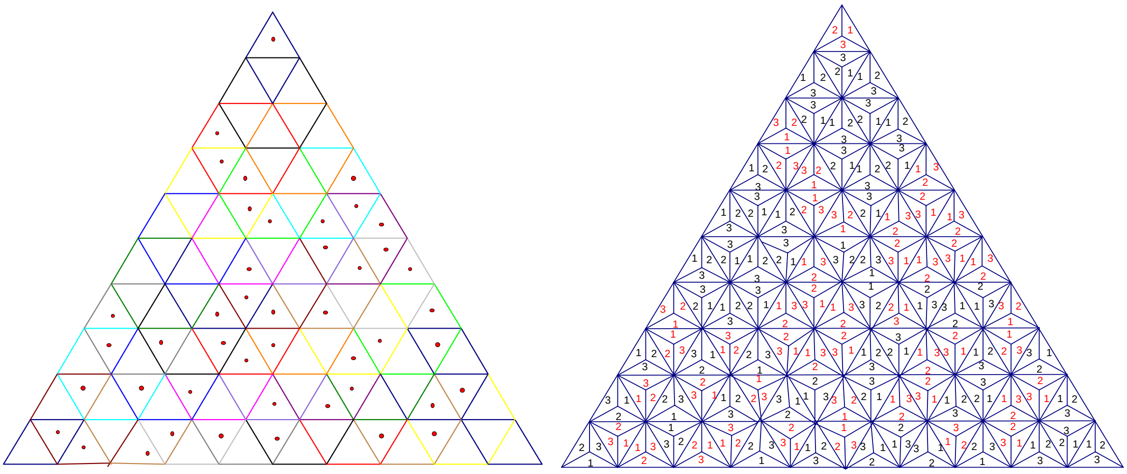


圖 34

無解：

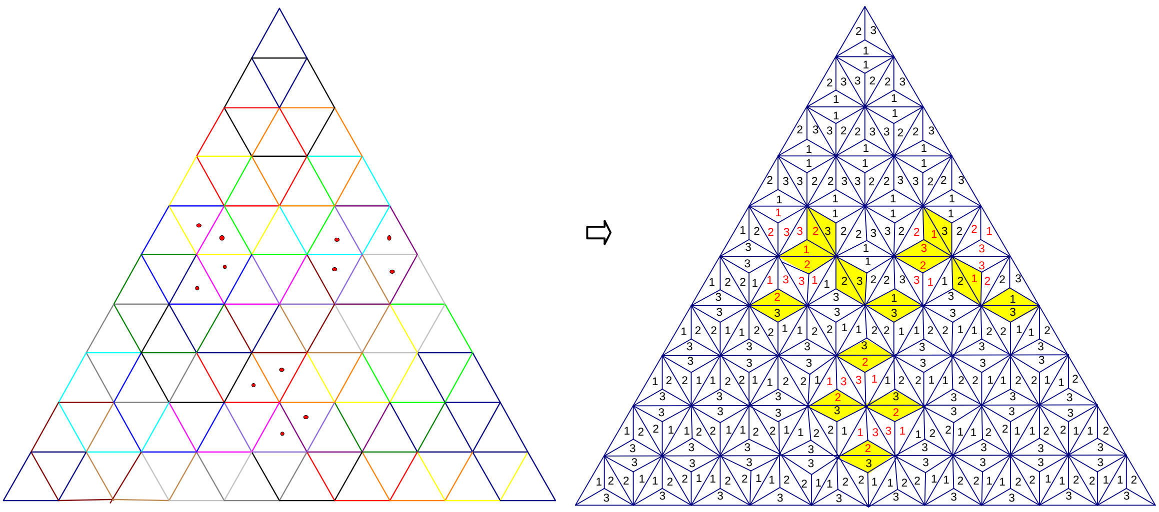


圖 35

（二）**四色卡：**

四色卡共有六種不同樣式，如圖 36（各準備 36 張，單面著色，不考慮翻轉）

設黃色＝1，紅色＝2，藍色＝3，綠色＝4

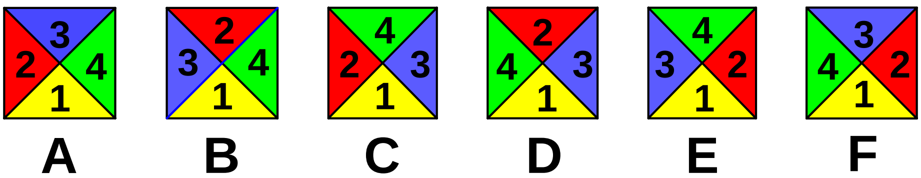



圖 36

1. 六類混合型快速檢驗法

　　把以上六類四色卡混合在一起，想找出能快速檢驗正方形是否有解的方法，我們先從最簡單的「田字形」開始做起：

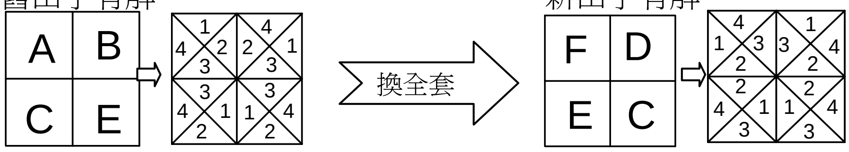
田字：(共 $6^4$＝1296 種不同排列，見<u>資料 2</u>)

發現以上六類四色卡中有一個極有趣現象，A 和 F，B 和 D，C 和 E 顏色排列順序恰相反，就決定從這方面著手，想藉此找出能快速檢驗「田字形」是否有解的方法。

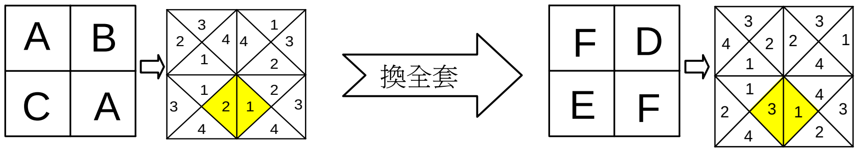
(1)換全套

將田字中所有 A 都換成 F，B 換 D，C 換 E，D 換 B，E 換 C，F 換 A，則原本有解的田字還是有解，原本無解的田字亦無解。例：

舊田字有解　　　　　　　　　　新田字有解

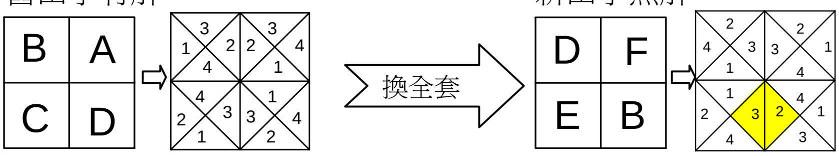



舊田字無解　　　　　　　　　　新田字無解

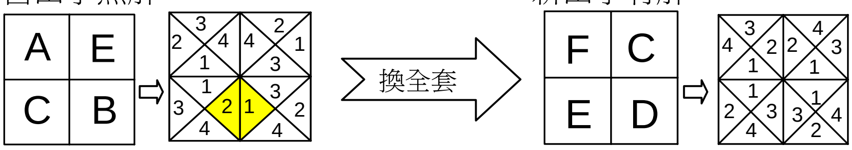



例外的僅 24 種(見資料 3)，若舊田字中一對角線兩卡相反，另一對角線是不同組的兩張卡，若舊田字有解，則新田字無解；若舊田字無解，則新田字有解。例：

舊田字有解　　　　　　　　　　新田字無解




舊田字無解　　　　　　　　　　新田字有解



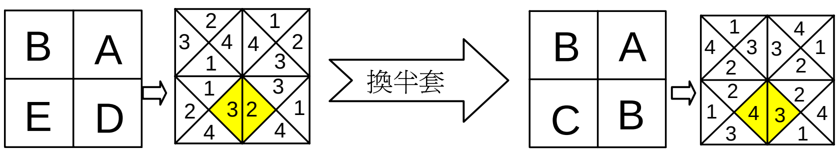

這引發我們想要簡化轉換只做「換半套」檢驗構想，敘述如下：

(2)換半套

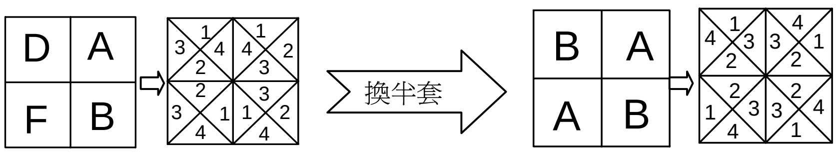
只將田字形中 D 換成 B，E 換 C，F 換 A，讓新田字中只剩下 A、B、C

a. 若新田字中兩對角線相乘，形如 $A^2=BC$ 或 $B^2=AC$ 或 $C^2=AB$，則無解。例：

舊田字無解　　　　　　　　　　新田字無解




舊田字有解　　　　　　　　　　新田字有解



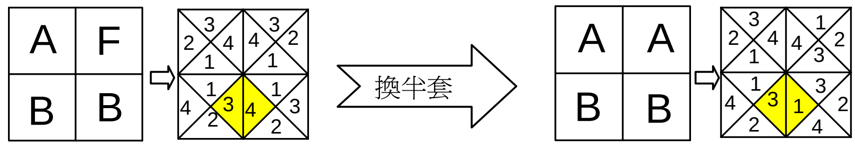

例外僅 12 種，若舊田字中一對角線兩卡相反，另一對角線是不同組的兩張卡，則須進一

步檢查以下例外 12 種排列，若是這 12 種之一即為有解，不必轉換。

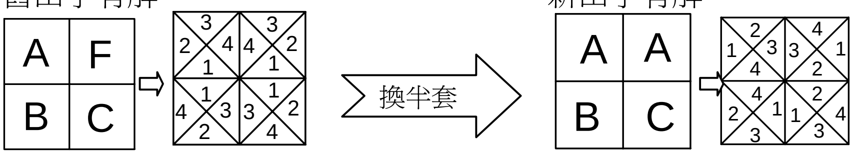
| 有解 | 有解 | 有解 | 有解 | 有解 | 有解 |
|---|---|---|---|---|---|
| A B<br>E F | A C<br>B F | A D<br>C F | A E<br>D F | B A<br>C D | B C<br>F D |
| 有解 | 有解 | 有解 | 有解 | 有解 | 有解 |
| B E<br>A D | B F<br>E D | C A<br>D E | C B<br>A E | C D<br>F E | C F<br>B E |

b.若新田字中上下兩組卡相同，則無解。例：

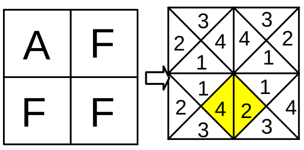
舊田字無解　　　　新田字無解



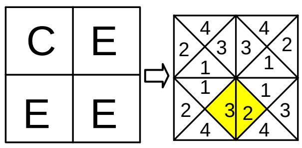

舊田字有解　　　　新田字有解




c. 若舊田字中有 3 張卡相同，另一張與此 3 張恰相反，則不必換半套即可判定其無解。例：

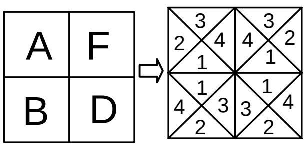


（A⇔F）

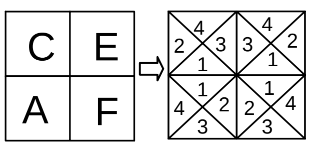


（C⇔E）

d. 若舊田字中上、下兩組卡都相反，則不必換半套即可判定其有解。例：



（A⇔F）
（B⇔D）



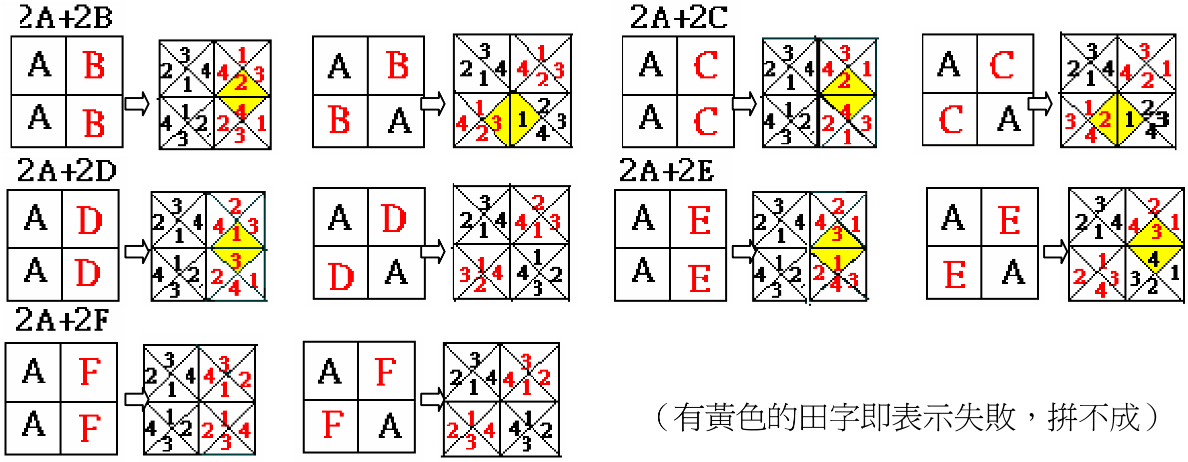
（C⇔E）
（A⇔F）

性質二：
根據上述四項換半套規則，我們對任取的 4 張四色卡，當排成田字形時，我們可以很快就能判定出它是否有解，這用來檢驗較大的正方形非常方便。

2. 相對兩類混合型快速檢驗法

接下來要把研究方向轉到單對四色卡。我們先從最簡單「田字形」開始做起，再找出能快速檢驗 n×n 四色卡都能有解的方法。

(1)2×2（田字）先以 A 卡爲主，搭配其它色卡加以觀察。




（有黃色的田字即表示失敗，拼不成）

由於 A 和 F 兩種排列方式都能成功，於是就決定以下都用 A 和 F 來研究。而 B 和 D、C 和 E 效果亦同，因它們彼此顏色排列順序都相反。

(2)3×3（九宮格）

a .9A＋0F　有解

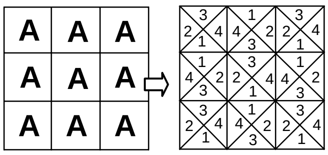
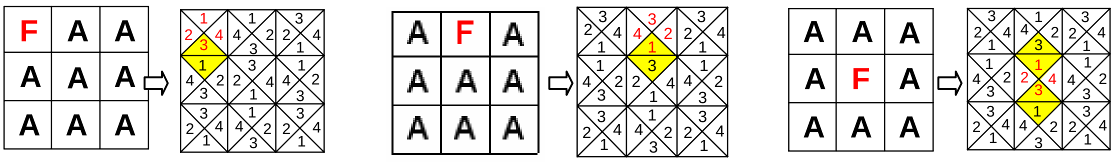
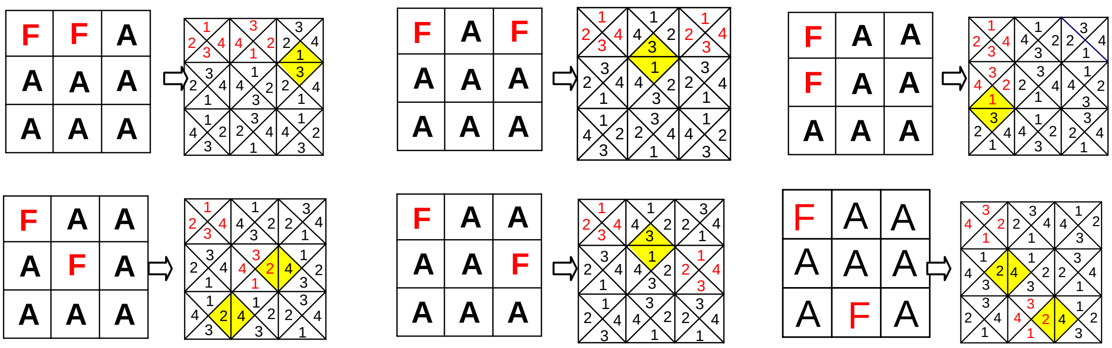


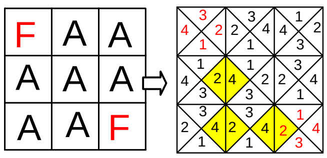
圖 37

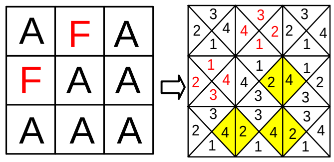
b. 8A＋1F　全無解

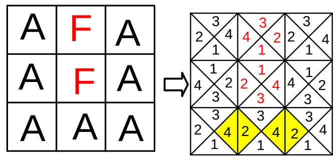


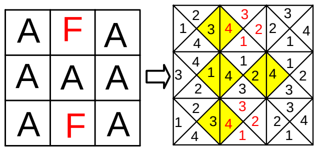
c. 7A＋2F　全無解











d. 6A＋3F　2 種有解

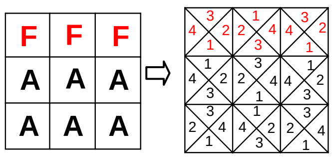


圖 38

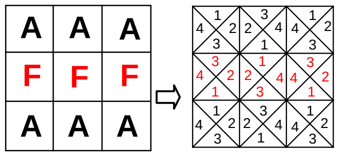


圖 39

e. 5A＋4F　3 種有解

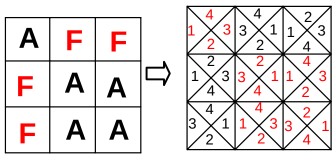


圖 40

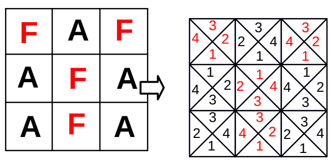


圖 41

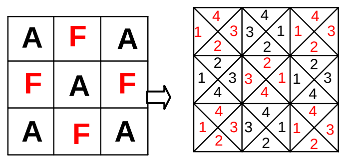


圖 42

(3)4×4

有解圖例見圖 43，無解圖例見圖 44

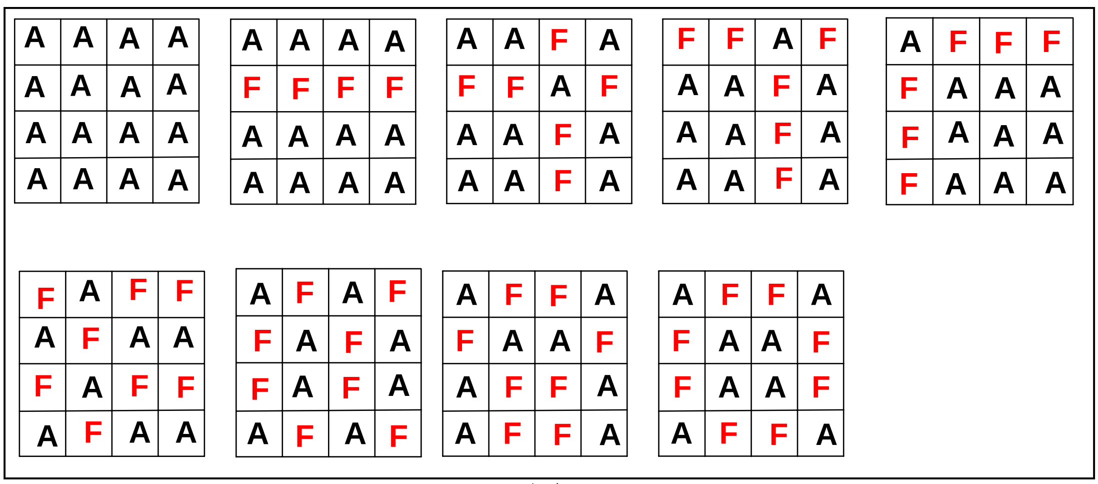


圖 43

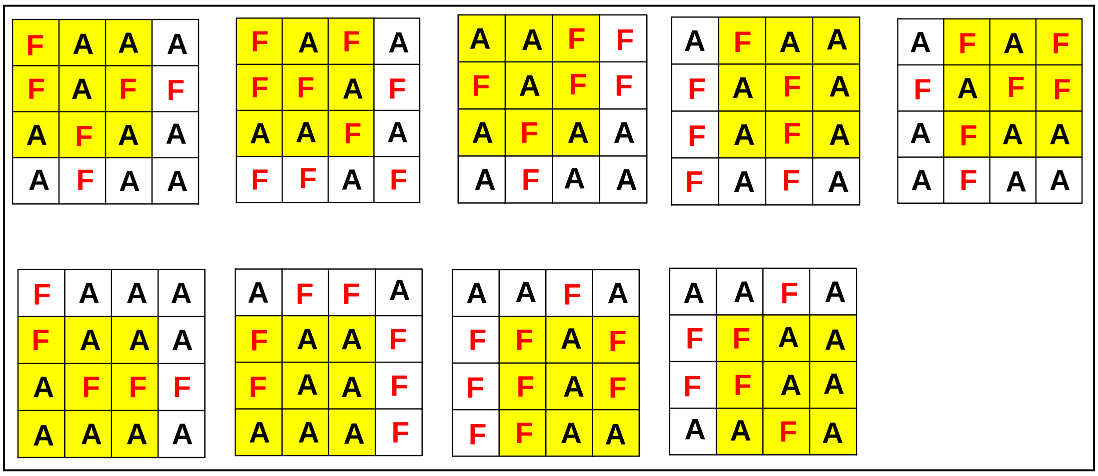



圖 44

歸納發現 4x4 正方形有解排列，圖中每一個九宮格必爲下列四型中任一型：
a. 一條鞭型，圖 37、38、39　b. 提燈籠型，圖 40　c. Y 字型，圖 41　d. X 字型，圖 42

性質三：
在 n×n 且僅含 A 卡和 F 卡的正方形拼圖中，若圖中的（n－2）$^2$ 個九宮格都爲 a.一條鞭型　b. 提燈籠型　c. Y 字型　d. X 字型　則必有解，否則無解。(n≧3)，其它的色卡排列請見資料 4）

在六類混合型中，因組合太複雜，只能用田字檢驗，但在僅兩類混合型中，我們能進步到使用九宮格檢驗，又因偶數格子邊正方形才能使 A 和 F 平分，可使競賽者持卡種類對應相等，於就決定以下全都研究偶數格子邊正方形。

(4)6x6(或更大時）
a. 因 A 和 F 顏色排列順序恰相反，若 A 和 F 相鄰，則兩卡的鄰邊顏色必相同(圖 45)。

b. 若同樣的兩卡相鄰，則鄰邊顏色必不同(圖 46)。

此即所謂**異卡排則同色，同卡排則異色**。

c. 綜合以上兩點以圖 47 爲例，若 A(一，1)下面是 F(一，2)，又和 A(一，1)右邊相鄰也是 A(二，1)，則 A(二，1)下面一定是 F(二，2)。因 A(一，1) 和 F(一，2)相鄰，則此兩卡的鄰邊顏色必相同，因此和這兩卡相鄰的兩卡鄰邊顏色也須相同，有可能是 A(二，1) 和 F(二，2)(圖 47)，也有可能是 F(二，1) 和 A(二，2)(圖 48)。

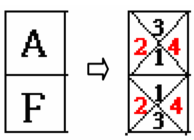



圖 45 異卡排則同色

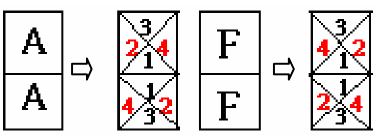



圖 46 同卡排則異色

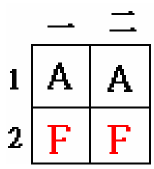



圖 47

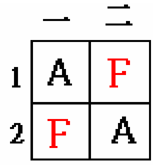



圖 48

d. 以圖 49 爲例，A(一，1)下面是 A(一，2)，和 A(一，1)右邊相鄰也是 A(二，1)，則 A(二，1）的下面一定是 A(二，2）。因 A(一，1）和 A(一，2）相鄰，則此兩卡的鄰邊顏色必不同，因此和這兩卡相鄰的兩卡鄰邊顏色也須不同，有可能是 A(二，1）和 A(二，2)(圖 49)，也有可能是 F(二，1)和 F(二，2)(圖 50)。

此即所謂**兩張同卡必接兩張同卡**，而**兩張異卡必接兩張異卡**。

e. 由 c~d，**推得若在一列中有相同的卡，則這些卡所在的直行的排列順序必相同**（圖 51 的第一、四行和第二、三、五、六行）；**若在一列中有不同的卡，則這些卡所在的直行的排列順序必相反**（A 和 F 爲相反）（圖 51 的第一、二行、第一、三行和第二、四行）。

| | 一 | 二 |
|---|---|---|
| 1 | A | A |
| 2 | A | A |

圖 49

| | 一 | 二 |
|---|---|---|
| 1 | A | F |
| 2 | A | F |

圖 50

| | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | F | F | A | F | F |
| 2 | F | A | A | F | A | A |
| 3 | A | F | F | A | F | F |
| 4 | F | A | A | F | A | A |
| 5 | A | F | F | A | F | F |
| 6 | A | F | F | A | F | F |

圖 51

性質四：
在 n×n 正方形拼圖中（兩種卡的張數不一定相等），若在一列中有相同的卡，且這些卡所在的直行的排列順序一致；又在一列中有不同的卡，且這些卡所在的直行的排列順序剛好相反，那麼這個拼圖必有解，否則無解。

3. 當找到 n×n 拼圖判別是否有解的快速檢驗法後，還欠一個反方向操作技巧：在 $n^2/2$ 張 A 與 $n^2/2$ 張 F 前提下，要如何在一張空白 n×n 拼盤上快速拼出一個成功拼圖？這在後面拼圖競賽中非常有用。

以圖 52 爲例，若已拼好第一行和第一列，因要符合＜性質四＞條件，可知第四行和第一行排列順序將一致；第二、三、五、六行和第一行排列順序將相反，也就是在第一行的 F 所在的列，在第二、三、五、六行會變爲 A，就能算出 A 在此種組合中的張數，若兩種卡張數相等，計算後若爲 18（以 6x6 正方形爲例）張則拼圖能拼成，因若不是 18 張則拼到最後必會有一種卡剩下，另一種卡缺少。公式如下：

行中 A 張數×列中 A 張數＋行中 F 張數×列中 F 張數＝18 張，則能拼成。

| | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | F | F | A | F | F |
| 2 | F | A | A | F | A | A |
| 3 | A | F | F | A | F | F |
| 4 | F | A | A | F | A | A |
| 5 | F | A | A | F | A | A |
| 6 | A | F | F | A | F | F |

圖 52

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| F | A | A | A | A | A |
| A | F | F | F | F | F |
| F | A | A | A | A | A |
| F | A | A | A | A | A |
| A | F | F | F | F | F |
| A | F | F | F | F | F |

圖 53

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | F | A | F | F | A |
| F | A | F | A | A | F |
| F | A | F | A | A | F |
| F | A | F | A | A | F |
| A | F | A | F | F | A |
| F | A | F | A | A | F |

圖 54

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | A | A | A | F |
| A | A | F | F | F | A |
| A | A | F | F | F | A |
| F | F | A | A | A | F |
| A | A | F | F | F | A |
| F | F | A | A | A | F |

圖 55

性質五：
取 $n^2$ / 2 張 A 與 $n^2$ / 2 張 F，想在一張空白的 n×n 拼盤上快速的拼出一個成功的拼圖，若行中的 A 張數×列中的 A 張數＋行中的 F 張數×列中的 F 張數＝$n^2$ / 2 張，則拼圖能拼成。

但這還要計算太費時了，爲了要快速拼出，只須在拼圖上一排放 3 張 A（以 6×6 正方形爲例），且符合＜性質四＞條件，則這拼圖必定能拼成(圖 53~58)，因計算後必等於 18 張。（紅色部分爲已排好的行和列）

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | A | F | A | A | F |
| F | F | A | F | F | A |
| F | F | A | F | F | A |
| A | A | F | A | A | F |
| F | F | A | F | F | A |
| A | A | F | A | A | F |

圖 56

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | A | F |
| A | A | A | A | F | A |
| F | F | F | F | A | F |
| A | A | A | A | F | A |
| F | F | F | F | A | F |
| A | A | A | A | F | A |

圖 57

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | A | A | A | A | A |
| F | F | F | F | F | F |
| F | F | F | F | F | F |
| A | A | A | A | A | A |
| F | F | F | F | F | F |
| A | A | A | A | A | A |

圖 58

性質六：
取 $n^2 / 2$ 張 A 與 $n^2 / 2$ 張 F，想在一張空白的 n×n 拼盤上快速的拼出一個成功的拼圖，只要在一排中放上 n / 2 張 A，則此拼圖必能拼成。

4. 現在讓我們來觀察拼圖上的對稱軸：

(1)只需觀察任意一列和一行，(因只要有一列或一行有對稱，其他列或行一定也會對稱，參考＜性質四＞)以中間的線當對稱軸(不包括對角線)，若列和行全都是 A 對 F，則此組合必有 2 條對稱軸，也是一點對稱圖形。如圖 59 若只觀察第一列和第一行，以直線 L 和直線 M 作爲對稱軸，列和行互相對稱的卡全都爲 A 對 F，則此種組合必有 2 條對稱軸，且也是一個點對稱圖形。

(2)若只有列或行互相對稱的卡爲 A 對 F，則此種組合就只有 1 條對稱軸。如圖 60 只有列以直線 L 爲對稱軸互相對稱的卡爲 A 對 F，行卻沒有，那此種組合就只有 1 條對稱軸。

(3)若橫列和直行互相對稱的卡都無 A 對 F (圖 61)，則此種組合就無對稱軸。

L

M

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | F | A | F | A | F |
| A | F | A | F | A | F |
| A | F | A | F | A | F |
| F | A | F | A | F | A |
| F | A | F | A | F | A |
| F | A | F | A | F | A |

⇨

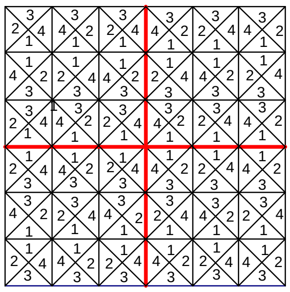


圖 59

L

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | A | F | A | F | F |
| A | A | F | A | F | F |
| F | F | A | F | A | A |
| F | F | A | F | A | A |
| A | A | F | A | F | F |
| F | F | A | F | A | A |

⇨

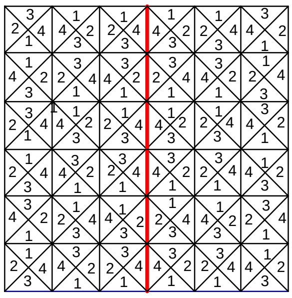


圖 60

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | A | F | F | A | F |
| A | A | F | F | A | F |
| A | A | F | F | A | F |
| A | A | F | F | A | F |
| F | F | A | A | F | A |
| F | F | A | A | F | A |

⇨

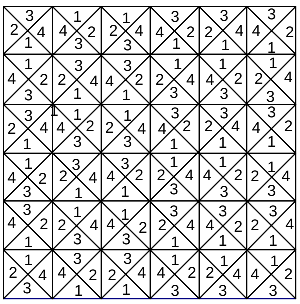


圖 61

性質七：
（1）若直行與橫列皆有 n / 2 張 A（或 F），且互相對稱的卡皆爲 A 對 F，則此種組合必有 2 條對稱軸，且也是一個點對稱圖形。
（2）若只有直行或橫列互相對稱的卡爲 A 對 F，則此種組合就只有 1 條對稱軸。
（3）若直行和橫列互相對稱的卡都沒有 A 對 F，則此種組合必沒有對稱軸。

5. 再來是探討色卡的顏色方向與此種組合所表現出來的特色之關係：
只須將第一行的第一張卡旋轉，讓四種顏色都有朝下的機會，這樣其它卡也會跟著旋轉。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | F | A | F | A | F |
| A | F | A | F | A | F |
| A | F | A | F | A | F |
| A | F | A | F | A | F |
| A | F | A | F | A | F |
| F | A | F | A | F | A |

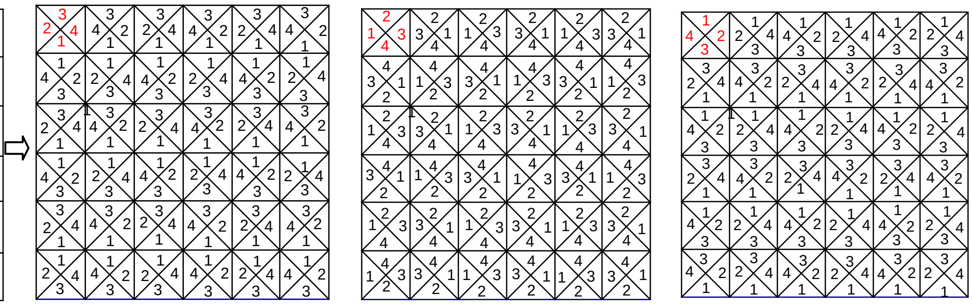


圖 62

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | A | A | F | A | F |
| A | A | A | F | A | F |
| F | F | F | A | F | A |
| F | F | F | A | F | A |
| A | A | A | F | A | F |
| F | A | A | F | A | A |

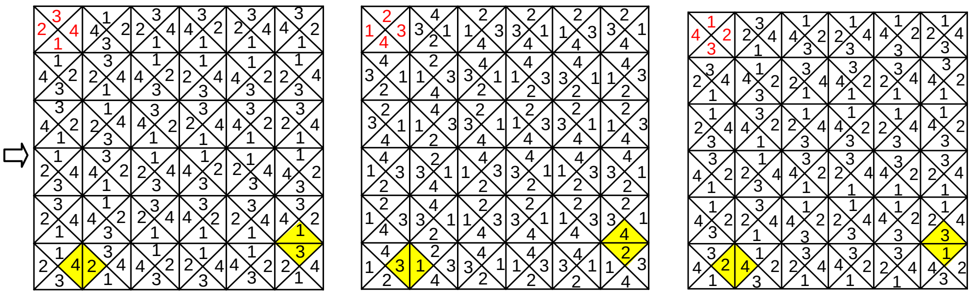


圖 63

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | A | A | A | F | F |
| F | F | F | F | A | A |
| A | A | A | A | F | F |
| F | F | F | F | A | A |
| A | A | A | A | F | F |
| F | F | F | F | A | A |

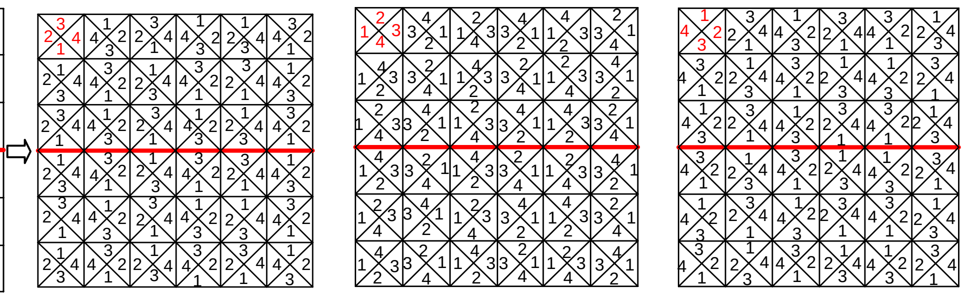


圖 64

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | A | F | A | F | F |
| A | A | F | A | F | F |
| A | A | F | A | F | F |
| F | F | A | F | A | A |
| F | F | A | F | A | A |
| F | F | A | F | A | A |

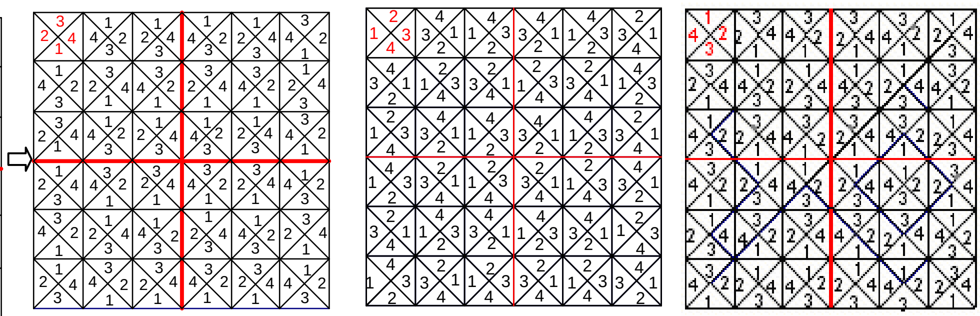


圖 65

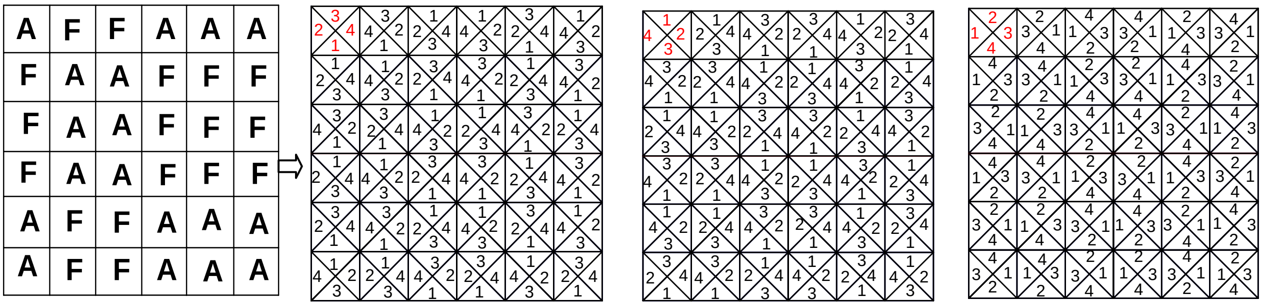


圖 66

性質八：
將某行中的某一張卡輪動旋轉 90°，則此種拼圖組合所表現出來的特色恆相同，也就是有解的恆有解（圖 62），無解的恆無解（圖 63），有一條對稱軸的恆有一條對稱軸（圖 64），有 2 條的對稱軸的恆有 2 條對稱（圖 65），有點對稱的恆有點對稱（圖 65），沒有對稱軸的恆沒有對稱軸（圖 66）。

## 二、創新四色卡拼圖遊戲競賽，贏的策略探討(應用)

| | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | a | g | m | s | y | ee |
| 2 | b | h | n | t | z | ff |
| 3 | c | i | o | u | aa | gg |
| 4 | d | j | p | v | bb | hh |
| 5 | e | k | q | w | cc | ii |
| 6 | f | l | r | x | dd | jj |

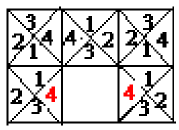
一般四色卡遊戲都是隨意取一把色卡要求參賽者在一定時間內將圖拼出，這最大缺點是大部分無解 (n 愈大機率愈小)且只能一人遊戲較乏味，在這要提出一個創新四色卡玩法可大大提升趣味性，如右圖先準備一個 6x6 棋盤（因經實驗這些戰略對 4x4 正方形雖有效，但太小了很快就下完，沒趣味性。8x8 以上又太大，因一張卡只能限制上下或左右各 2 張卡，就算依戰略下，有很多格子還是無法被限制到，這樣輸的機率就會大增，玩家很快就感到無趣。所以 6x6 正方形是**最適當選擇**），為了說明方便，把每一個格子標示一個代號，遊戲規則說明如下：

（一）遊戲規則（本遊戲適合 2 人玩，設甲要拼成功，乙迫使甲失敗。）

1.取 A 和 F 各 18 張（或 B 和 D、C 和 E）。

2.決定誰先下、誰後下。

3.卡片一定要一張黏著一張，不能分開，且同色要相鄰。（注意！如右圖，不能讓 2 張卡有相同顏色同時面向同一格子。）



4.為了讓下棋者不易因上圖而導致競賽卡住，因此提出一個新名詞叫「限制」，在已知一串至少 3 張卡的旁邊相鄰格子中，一張卡可「限制」上、下或左、右 2 格，即這些格子已被固定。

(1) 如圖 67 在已知第一行及第二行的 F 卡條件下，(二，3)一定得放 F，若放 A 有一邊顏色會不同(圖 68)；如圖 67 (二，5)一定要放 A，若放 F 有一邊顏色也會不同(圖 69)。此為可<u>限制</u>（強迫一定要放某一種卡才能使其同色相鄰或是不讓兩卡有相同的顏色面向同一個格子）上、下第一張卡。

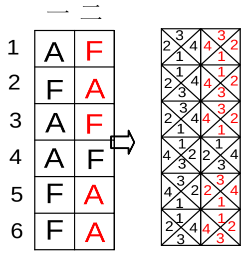


圖 67

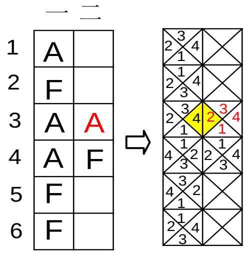


圖 68

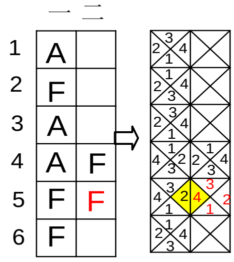


圖 69

(2) 如圖 67 在相同條件下，(二，2)一定要放 A，若放 F 則 F(二，2)會和 F(二，4)有相同顏色同時面向(二，3)，如圖 70 這與遊戲規則不合；如圖 67 (二，6)一定要放 A，若放 F 則 F(二，6)會和 F(二，4)有相同顏色同時面向(二，5)，如圖 71。此為 1 張卡可限制上、下第 2 張卡。

(3) 如圖 67，(二，1)一定要放 F 卡才會遵守＜性質四＞條件，但放 A 也不會犯規(圖 72)，所以無法被 F(二，4)限制到。

(4) 若把圖 67~72 旋轉 90°，就變為左右了。因此一張卡可限制上下或左右各 2 張卡。

5. 不管誰先誰後下，最後無法讓全部卡都同色相鄰則乙勝；能同色相鄰則甲勝。或讓乙沒地方下甲也勝；當甲沒地方可下則乙勝。

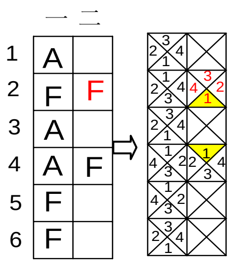


圖 70

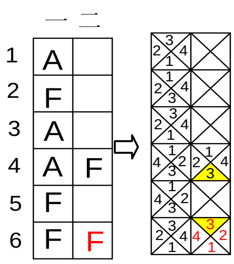


圖 71

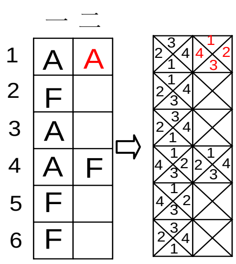


圖 72

（以下全都以 A 和 F 為例，因 B 和 D、C 和 E 效果與 A 和 F 相同）

（二）贏的戰略(要幫助甲方獲勝)

圖片解釋：

1. 如圖 73 黃色部分為已下的卡；紅色部分為甲可下的最佳格子；綠色框表示在此框內不論黃色部分位於哪裡，甲方所要下的最佳格子均相同。
2. 如圖 74 若有編號 ***1***、***2*** 格子，表示甲要先考慮下在 ***1*** 是否恰當，如不行再下在 ***2***。
3. 如圖 75 圖中右上角 X 表示不能讓此種形狀形成。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 73

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***1*** | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | ***2*** | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 74

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 75

策略說明：

我把比賽中可能會形成的圖形歸納成棒狀、正方形、L 形、T 形四種，並根據各種戰況列出最佳下棋點(每張圖解釋見資料五)

1. 預防乙把下一張卡下在甲方需要再使用一張卡去限制它的情況

(1)棒狀，圖 76

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

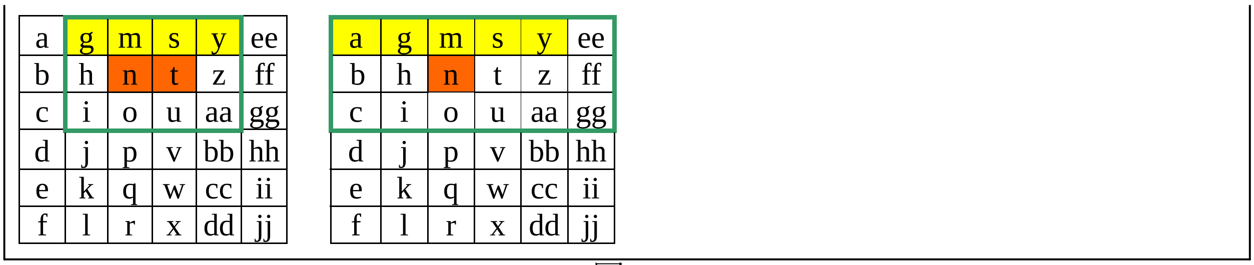


圖 76

(2)正方形，圖 77

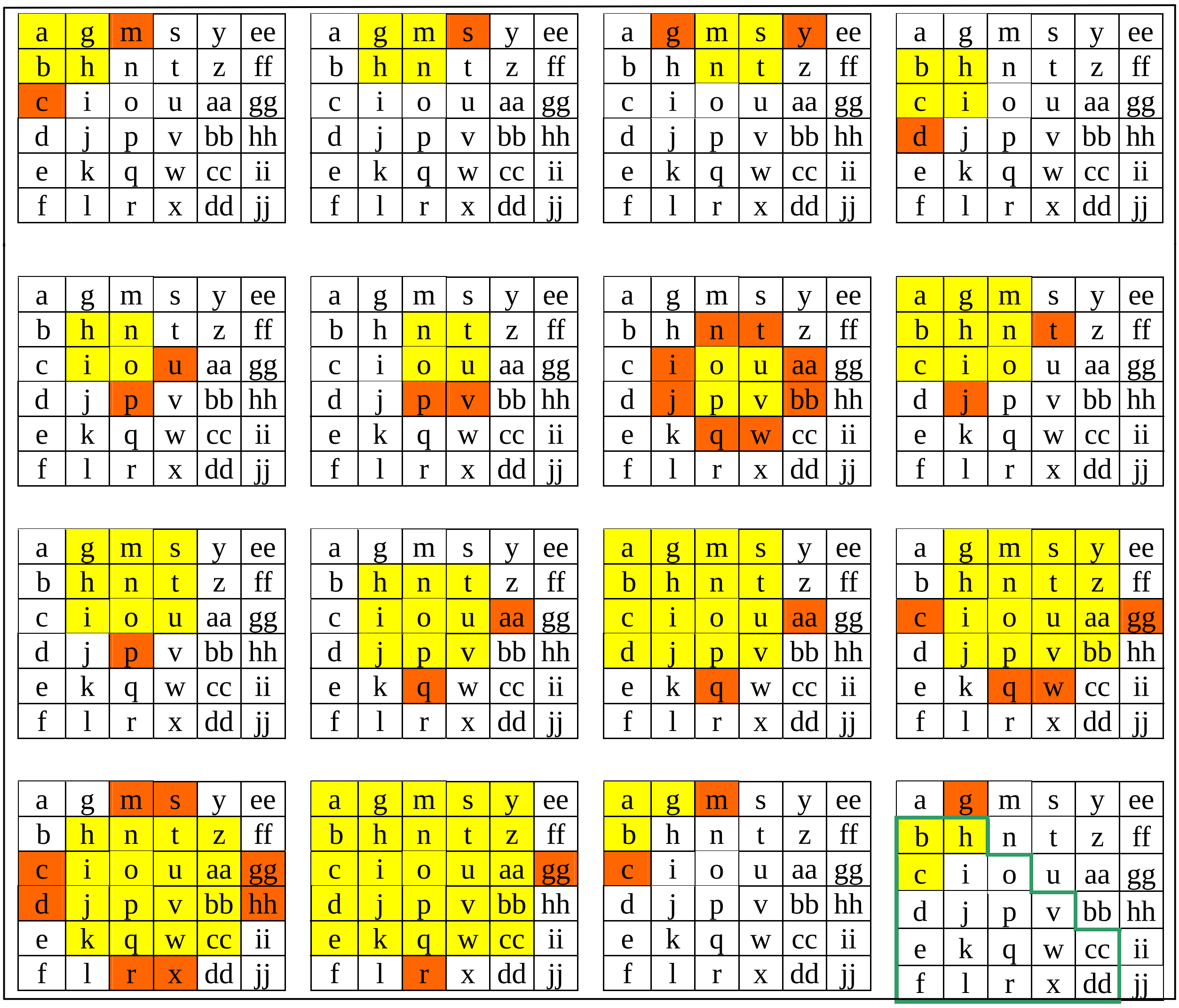
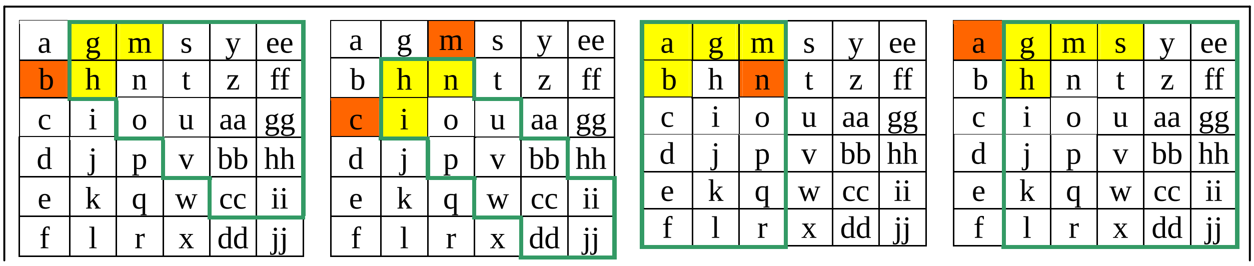


圖 77

(3)L 形，圖 78



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 78

(4)T 形，圖 79

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | a | g | m | s | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 79

2. 當出現兩種危險點的情況（有輕重之分）先考慮下在 ***1***，如果不行，再下在 ***2***
T 形，圖 80

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***1*** | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | ***2*** | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | ***1*** | m | s | y | ee |
| b | h | ***2*** | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | ***1*** | ee |
| b | h | n | ***2*** | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ***1*** |
| b | h | ***2*** | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 80

3.不馬上下則甲方會面臨輸的情況
(1)L 形，圖 81

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 81

(2)T 形，圖 82

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 82

4.不能讓這些圖形形成，否則甲方可能會處在輸的情況

(1)棒狀，圖 83

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 83

(2)L 形，圖 84

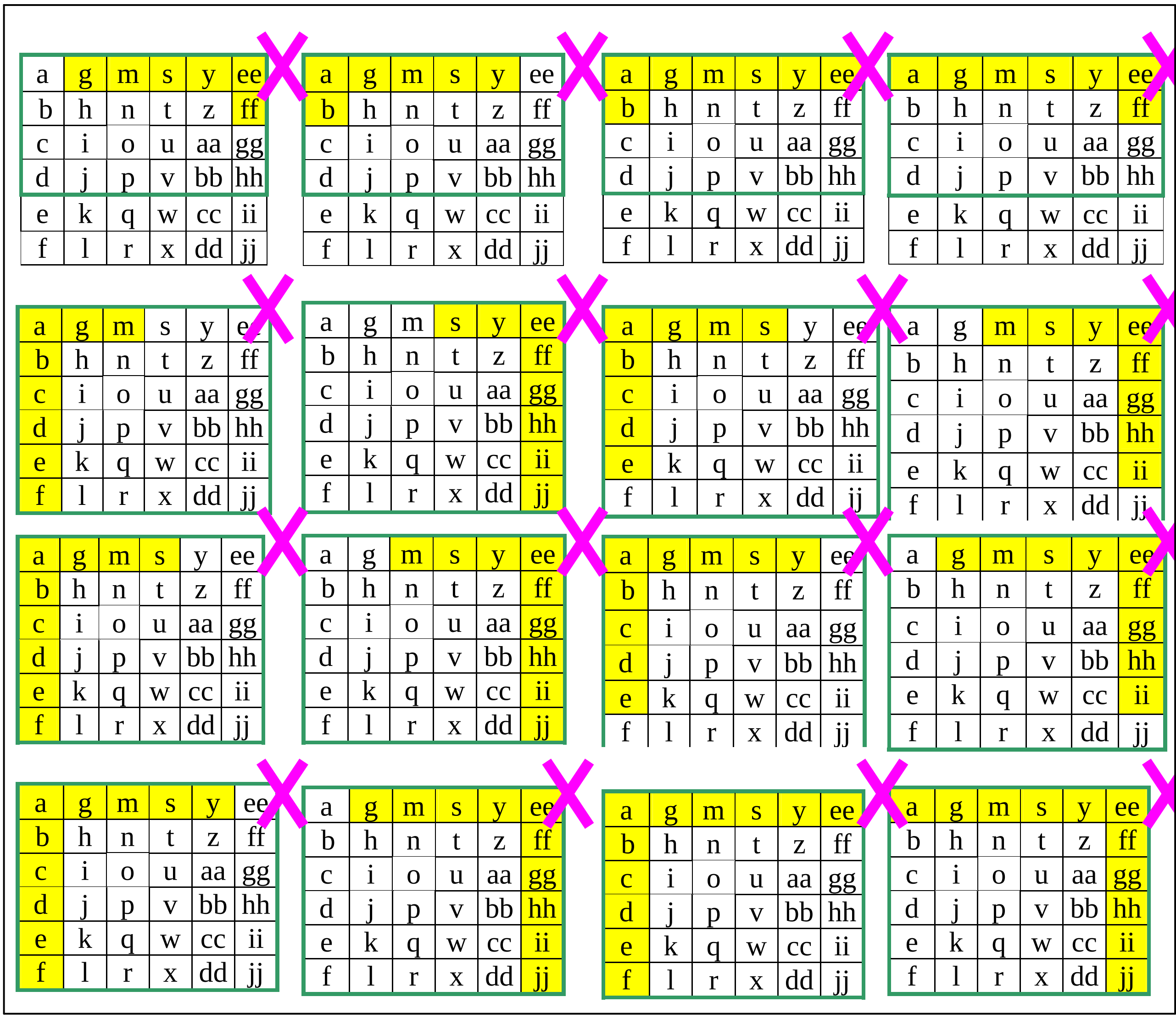
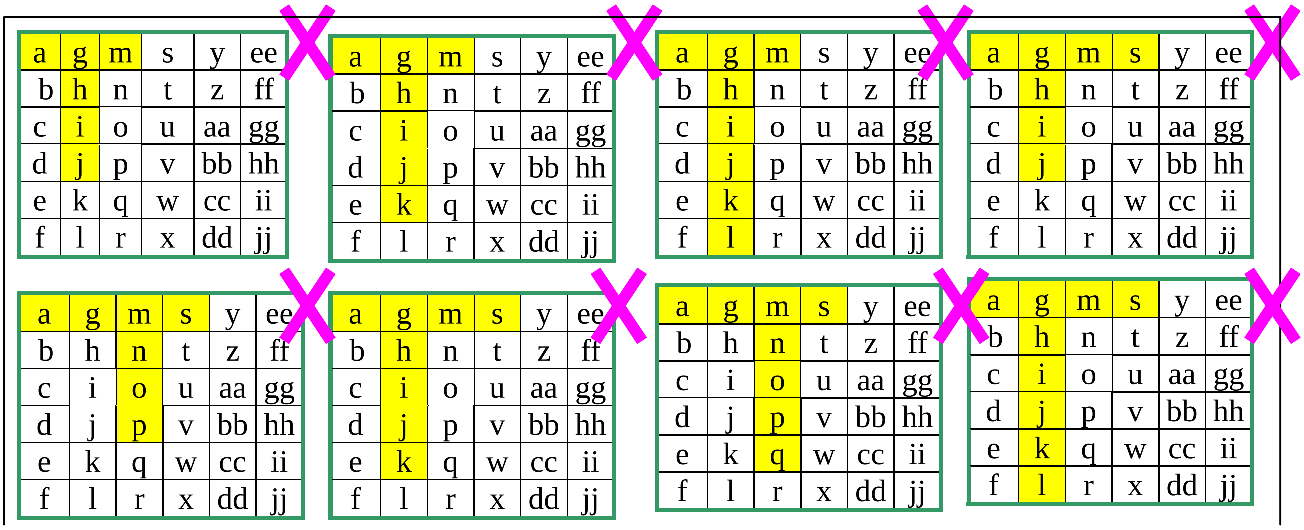


圖 84

(3)T 形，圖 85



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 85

5.爲讓一排中有 3 張 A，符合＜性質六＞條件，要遵守以下 4 點：

(1)若形成連續 2 格，又要下在和此 2 個格子相鄰且垂直(不交叉)排中，如圖 86 不能讓 a、g、m 或 a、b、c 3 格全都是 A 或 F，因若乙又下 1 張 A 或 F 在 s 或 d 使一排中有 4 張 A 或 F，那剛甲下的卡就浪費了。

(2)若形成連續 3 格，又要下在和此 3 格相鄰且垂直(不交叉)排中，如圖 87 若 a、g、m 3 格只有一張 A 則 s 一定要下 A，若有 2 張 A 則 s 要下 F；若 3 格全 A 則 s 要下 F。

(3)若形成兩排互相垂直連續 3 格，又要下在分別和這 2 排互相垂直排中，如圖 88 若 h、n、t 3 張都是 A 或 F，則甲就要下在 m；若只有 1 張 A 則甲就要下 1 張 A 在 c。

(4)若形成連續 4 格，又要下在和此 4 格相鄰且垂直(不交叉)排中，如圖 89，若 g、m、s、y 只有 1 張 A 則要在 a 下 A；若有 2 張 A 則 a A 和 F 都能下；若全都是 A 或 F 就去下別地方。

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 86

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 87

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 88

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | g | m | s | y | ee |
| b | h | n | t | z | ff |
| c | i | o | u | aa | gg |
| d | j | p | v | bb | hh |
| e | k | q | w | cc | ii |
| f | l | r | x | dd | jj |

圖 89

（三）比賽（實際演練）

綜合以上規則，現在就讓我們實際來下幾盤棋：

設甲先下，乙後下（甲要拼成功，乙要迫使甲失敗）

1.甲下 A 在 1，乙下 F 在 2，甲選擇下 A 在 3 (圖 76)。

2.乙下 F 在 4，甲選擇下 F 在 5(圖 77）。

3.乙下 A 在 6，甲選擇下 F 在 7(圖 80）。

4.乙下 A 在 8，甲須下 F 在 9(圖 81)。

5.乙下 A 在 10，因無卡沒被限制到，甲就可先下 F 在 11，預防乙下在(二，2)或(二，3)。

| | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 15A | 14A | 13F | | | 23F |
| 2 | | 12F | 6A | | 17A | 22A |
| 3 | | | 1A | 2F | 16A | 18A |
| 4 | 11F | 9F | 3A | 4F | | |
| 5 | | | 5F | 19A | 21F | |
| 6 | 10A | 8A | 7F | 20A | 24F | 25F |

6.乙下 F 在 12，因無卡沒被限制到，甲就可下 F 在 13，符合＜性質六＞。
7.乙下 A 在 14，甲須下 A 在 15，因它沒被限制到。
8.乙下 A 在 16，因無卡沒被限制到，甲就可先下 A 在 17，預防乙把下一卡下在(六，3)。
9.乙下 A 在 18，因無卡沒被限制到，甲除(六，2）、(四，6）、(六，4）以外都能下，因若下在(六，2）則(六，1）限制不到；若下在(四，6）則(五，6）限制不到；若下在(六，4)則(六，5)限制不到。甲選擇下 A 在 19。
10.乙下 A 在 20，甲須下 F 在 21(圖 81)。
11.乙下 A 在 22，甲須下 F 在 23，因它沒被限制到。
12.乙下 F 在 24，甲須下 F 在 25，因它沒被限制到。

因全部卡都被限制了，不管怎麼下甲都會勝。(其它例子見資料六）

由上面例子發現，甲若按照**最佳下棋點**去下，則獲勝機會很大；反之若乙按照相同秘笈搞破壞，則乙方贏的機會就大增，這遊戲很有趣，我們希望能申請專利，並推廣給大家。

## 陸、結論

一、三色卡拼排成功百分率隨邊數增加急遽降低，四色卡亦同。

二、在「邊長 n」三角形中($n\geqq3$)，若所有$(n-1)(n-2)/2$ 個正六邊形都有 0 或 3 或 6 張「相異卡」，則此色卡必有解。

三、對於六類四色卡混合拼排的檢驗，可用其田字結構檢驗，將無解組合迅速排除。而這田字結構檢驗可靠「換半套」達成。

四、對於單對(如 A 和 F)四色卡則可利用其九宮格檢驗，若圖中$(n-2)^2$個九宮格都具有 a.一條鞭型　b.提燈籠型　c. Y 字型　d. X 字型　任一者，則此 $n\times n$($n\geqq3$)正方形必有解。

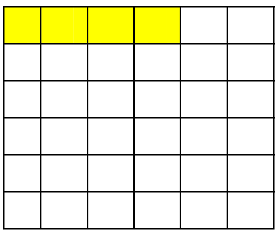
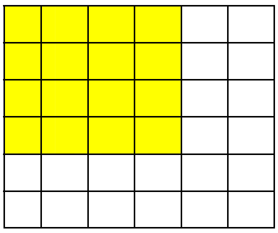
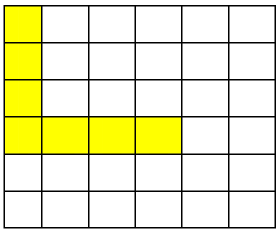
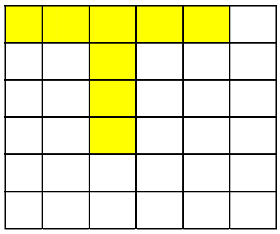
五、進一步對於巨大 n 值，有如下快速檢驗法：
不論兩種卡張數是否相等，只要檢驗某列中同種卡的直行排列是一致，又不同卡的直行排列恰相反，則此拼圖有解，否則無解。

六、取 $n^2/2$ 張 A 與 $n^2/2$ 張 F，想在一空白 $n\times n$ 拼盤上快速拼出一成功拼圖，須使
（一）行中 A 張數×列中 A 張數＋行中 F 張數×列中 F 張數＝$n^2/2$ 張，則拼圖能拼成。
（二）或只要在一排中放 n／2 張 A，則此拼圖必能拼成。

七、在一個已排好的邊長 $n\times n$ 四色卡中，依直行與橫列中 A 與 F 的對稱性可判斷原圖的對稱軸數。

八、將 $n\times n$ 正方形拼圖中某張卡輪動旋轉 $90^\circ$，則拼圖中其它卡跟著轉動，此時原圖所具有特性（對稱軸數、解的狀況），在新圖中恆保留。

九、在兩人創新四色卡（A 和 F）競賽中，可能會出現形狀有下列 4 種：

1.棒狀

2.正方形

3.L 形

4.T 形


若競賽者依研究過程中**最佳下棋點**去下，則獲勝機會大增。

## 柒、參考資料

一、數學國中 1 下 康軒文教事業 92 年 2 月
二、色以類聚 43 屆全國科展

## 評　語

**030419 國中組數學科　佳作**

**形形色色—一種創新的色卡遊戲探討**

**從色卡遊戲出發，利用數學思維循序漸進地探索，並對色卡遊戲賦以新意，頗具創意與趣味性。**