中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030416

高雄市立五福國民中學

指導老師姓名

梁益彰

余尚芸

作者姓名

林宜樺

李佳駿

唐婉馨

張博盛

舖天蓋地

壹、摘要：

本文動機來自新聞報導美伊戰爭的消息，美軍從航空母艦發射巡弋飛彈轟炸情報地點；由於飛彈昂貴，情報地點範圍遼闊，若將飛彈落點視為圓心，爆炸範圍為單位圓，轟炸範圍為欲覆蓋面積，最少應發射幾顆飛彈才能完全轟炸？引起我們極大的好奇心去探討**『最少需要幾個單位圓才能完全覆蓋半徑為 n 單位的圓？』**

研究中利用學過的幾何概念，分成有邊界及無邊界限制兩方向討論。經探討後，發現：在正三、四、五邊形時，有邊界限制的覆蓋方式所需的單位圓數較少，且其數量公式分別為 $\frac{n+n^2}{2}$ 、 n^2 、還有 $\frac{5n^2}{4}$ (n為偶數) 及 $1+5\left(\frac{n^2-1}{4}\right)$ (n為奇數) 。

另外，**無邊界限制的情形下（利用正六邊形切割平面再覆蓋），覆蓋大圓所需單位圓的數量不但有規律且為最少**。應用此規律性設計電腦程式輔助，不但能快速且正確計算覆蓋圓所需數量及最大覆蓋半徑，並能將此結果應用在「6 邊以上正多邊形的覆蓋」，還有日常生活中的園藝灑水、山中救難和尋找黑盒子…等。本文在全市科展獲獎後，**曾與當時搜救華航空難的相關學術單位討論，我們的研究結果是否真的有所助益？答案是肯定的（相關存證文件詳見附錄）。**

貳、研究動機：

前陣子在新聞上看到美伊戰爭的消息，美軍從航空母艦發射巡弋飛彈轟炸情報地點，但巡弋飛彈造價昂貴且轟炸範圍有限，加上情報地點範圍遼闊，如何用最少的巡弋飛彈能將該情報地點的所有範圍完全轟炸，且沒有遺漏？

我們將飛彈落點視為圓心，爆炸範圍為單位圓，轟炸範圍為欲覆蓋面積，老師建議：可以從圖形的基本性質（康版第一冊單元六）及幾何圖形與幾何量的變動（康版第二冊單元四）等方向思考研究。

參、研究目的：

探討最少需幾個單位圓才能完全覆蓋半徑為 n 單位的圓。

肆、研究器材：

圓規、直尺、計算器、電腦及電腦軟體 AutoCAD、Photoshop

伍、解釋名詞：

一、覆蓋定義：

【定義一】兩個圖形 A 和 B，如果 A 經適當的移動使圖形 B 的每一點都能與 A 中某一點重合，則稱「圖形 A 能覆蓋圖形 B」。

【定義二】兩個圖形 A 和 B，如果 A 無論經過甚麼樣的移動，在 B 中都有一點不與 A 中任一點重合，則稱「圖形 A 不能覆蓋圖形 B」。

【定義三】圖形 A_1、A_2、...、A_n和圖形 B，如果 A_1、A_2、...、A_n經過適當的運動能使 B 中每一點都能與 A_1、A_2、...、A_n中的某一個重合，則稱「圖形 A_1、A_2、...、A_n能覆蓋圖形 B」。

二、關於圓覆蓋的基本性質：

1.若能在圖形 A 中找到一點 O，使圖形 A 中任一點與 O 的距離都不大於 r，則圖形 A 一定能被半徑爲 r 的圓所覆蓋。

2.若圖形 A 中任何兩點距離的最大値爲 d，則這個圖形 A 不能被直徑小於 d 的圓所覆蓋。

陸、研究過程：

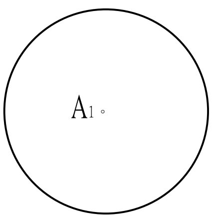
一、 探討半徑爲 2 單位的圓最少需要幾個單位圓覆蓋？

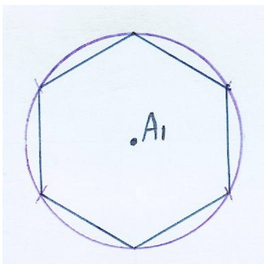
首先以半徑單位爲 2 的圓開始研究：

圓 A_1 爲半徑 2 單位的圓，在其內部作一個正六邊形（圖Ⅰ-1）

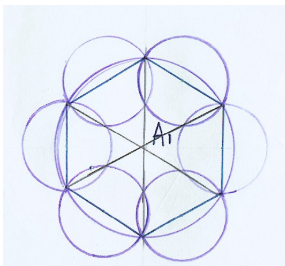
➔則正六邊形的邊長恰好爲 2 單位，再以正六邊形邊長爲直徑，畫 6 個單位圓，這 6 個單位圓可將圓 A_1 的圓周完全覆蓋（圖Ⅰ-2），

➔最後以 A_1 爲圓心，作一個單位圓便可完成覆蓋（圖Ⅰ-3）。

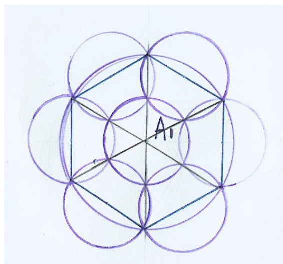




圖Ⅰ-1



圖Ⅰ-2



圖Ⅰ-3

故半徑 2 單位的圓需要 7 個單位圓來覆蓋。

【證明半徑 2 單位的圓最少需要 7 個單位圓來覆蓋】

證明：**首先證明** 6 個單位圓不能覆蓋半徑為 2 的圓，

作圓 O（半徑為 2）的內接正六邊形 ABCDEF，

∵正六邊形的邊長為 2，

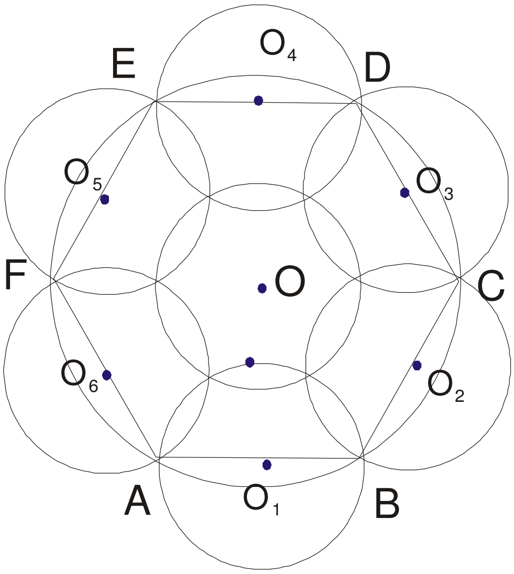
∴每個單位圓至多能覆蓋圓 O 的 $\frac{1}{6}$ 圓周，

若 6 個單位圓能覆蓋圓 O，則每個單位圓須恰好覆蓋圓周的 $\frac{1}{6}$（如圖一）

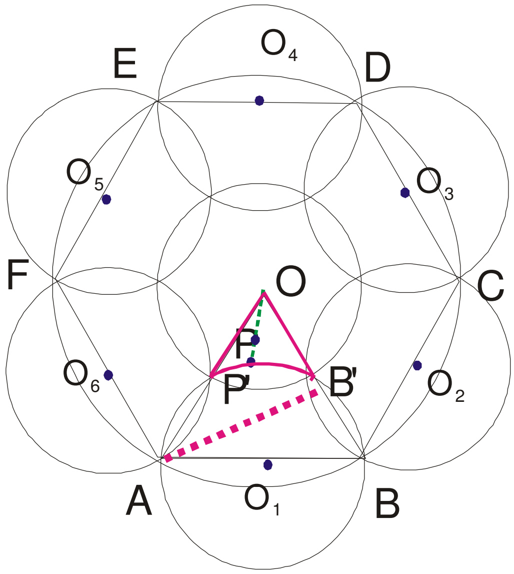
但 $\overline{OO_i} = \sqrt{3} > 1$（單位圓半徑），$i = 1,2,\ldots,6$，

∴O 點不屬於每個單位圓內，

∴6 個單位圓不能覆蓋半徑為 2 的圓，



圖一



圖二

其次證明最少再需要 1 個單位圓就能將圓 O 覆蓋（如圖二）

設 P 為圓 O 中的任一點，且 P 點不在 6 個單位圓中，

不失一般性地假設 P 點落在 ΔOAB 中，

圓 O_1、O_2 的交點為 B、B'，

∵ ΔOAB 為正三角形，$\overline{AB'}$ 是 $\overline{OB}$ 上的高，

∴ $\overline{AB'}$ 是 $\overline{OB}$ 上的中線，

∴ $\overline{OB'} = 1$

延長 $\overline{OP}$ 交圓 O_1 於 P'，則 $\overline{OP} < \overline{OP'} \le \overline{OB'} = 1$

∴P 恆在以 O 為圓心的單位圓中，

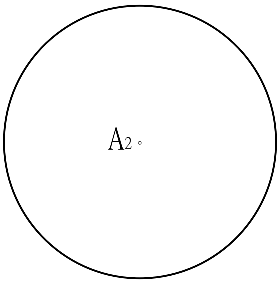
也就是最少再需要 1 個單位圓就能將圓 O 覆蓋

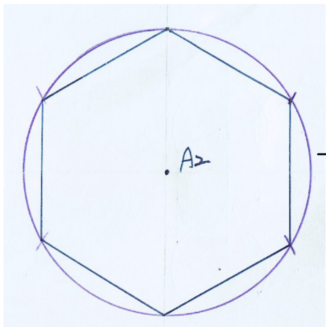
故<u>加上原來覆蓋圓周的 6 個圓，最少需要 7 個圓能將半徑 2 單位的圓完全覆蓋。</u>

二、探討半徑 n 單位（n≧2）的圓最少需要幾個單位圓才能完全覆蓋？

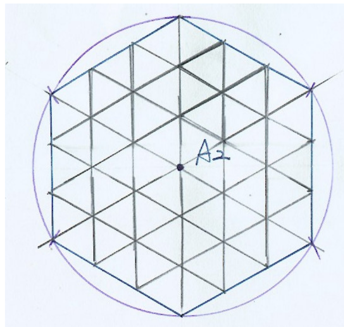
接著研究半徑 3 單位的圓。

仿照上面的步驟，作一個半徑 3 單位的圓 A_2，並且在內部作一個正六邊形（圖Ⅱ-1），此時正六邊形邊長為 3 單位，我們仿照以上的方法先將 A_2的圓周覆蓋，為了方便訂出圓心位置，再將正六邊形內部切割成邊長 1 單位的正Δ（圖Ⅱ-2）。如圖Ⅱ-3 以 A_{21}、A_{22}為圓心畫兩個圓，便可將$\frac{1}{6}$的圓周覆蓋。以同樣方法畫 10 個圓，將其餘$\frac{5}{6}$的圓周覆蓋（圖Ⅱ-4），最後內圈畫 6 個圓便完成（圖Ⅱ-5）。故 3 單位圓需要 18 個單位圓來覆蓋。

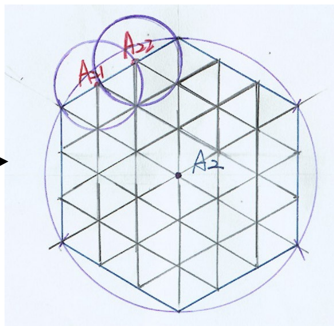




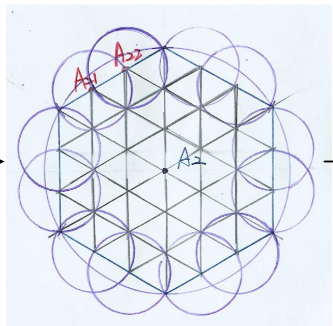
圖Ⅱ−1



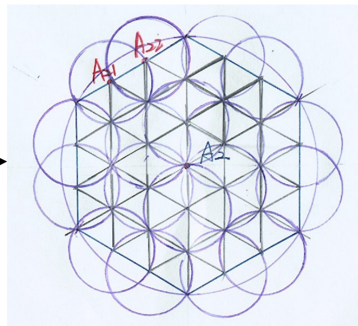
圖Ⅱ−2



圖Ⅱ−3

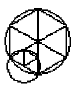
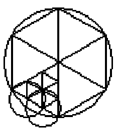


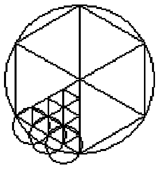
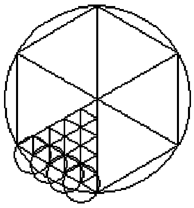
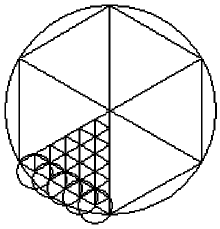
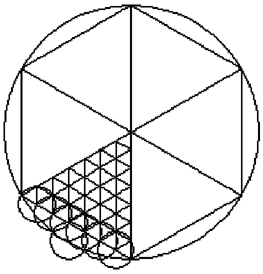
圖Ⅱ−4



圖Ⅱ−5

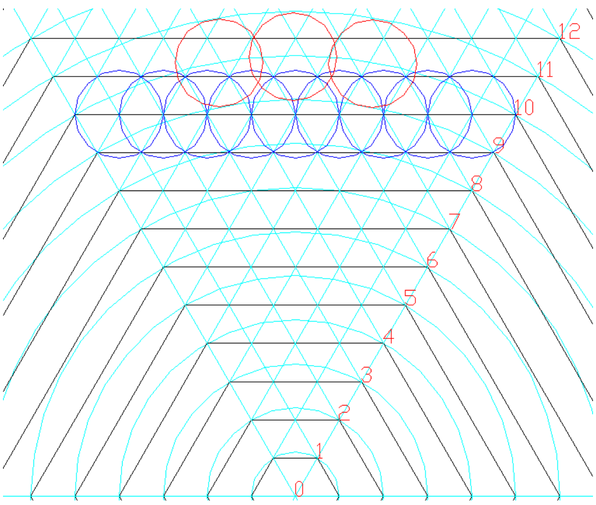
以相同的方法覆蓋 4、5、6、7 單位的圓，可得到表中的的數據如下：

單位	圓	需要單位圓個數	規律
1		1	1
2		7	1x6＋1＝7
3		18	2x6+6＝18

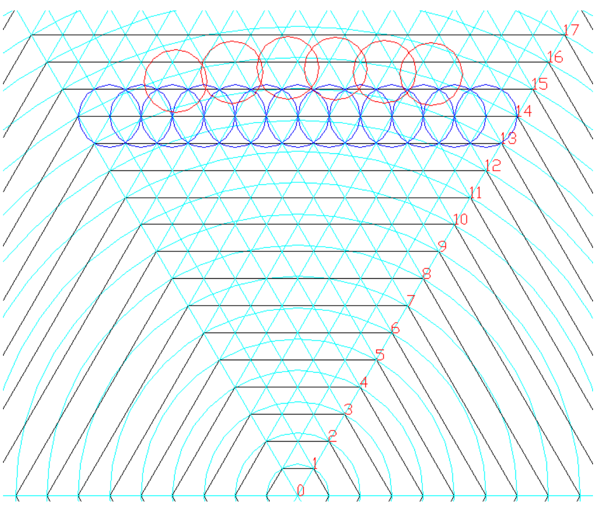
單位	圓	需要單位圓個數	規律
4		31	3×6＋13＝31
5		48	4×6＋24＝48
6		67	5×6＋37＝67
7		96	7×6＋54＝96

結果發現：

當我們往下繼續研究時，也就是大於 7 單位圓的圖形，爲了覆蓋圓周需要以兩層的單位圓來覆蓋，可是**<u>第 2 層紅色的圓其圓心位置卻沒有規律性</u>**(圖Ⅲ-1、圖Ⅲ-2)。並且無法證明我們所得到的數據爲最少，因此不再以相同的方法往下研究。



圖Ⅲ-1



圖Ⅲ-2

三、探討如何利用最少單位圓覆蓋整個平面？

由以上的研究，我們**發現：在有邊界限制的條件下，①無法找到覆蓋方式的規律性，也就是無法預測數量。②就算用土法煉鋼的方式找出覆蓋圓的數量，但無法確定其數量爲最少。**

因此我們**改變方式＝＞打破邊界的限制**來進行研究。也就是將研究的方向改爲「**利用最少單位圓覆蓋整個平面**」，再加上有規律且有效率的條件，因此我們**尋找能切割整個平面的正多邊形**；在”幾何的寶藏”一書中，帕普斯曾提到：「能鋪滿平面區域的正多邊形只有正三、四、六邊形」。（說明如下）

說明: 正 n 邊形內角和爲 $(n-2)\times 180^o$，正 n 邊形每個內角度數爲 $\dfrac{(n-2)\times 180^o}{n}$

設 k 個正 n 邊形在平面上的一點接合，

$\because$ 要鋪滿整個平面區域， k 個正 n 邊形內角和爲 360^0

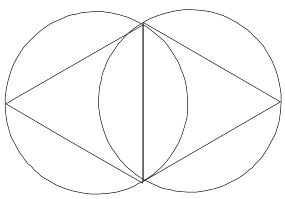
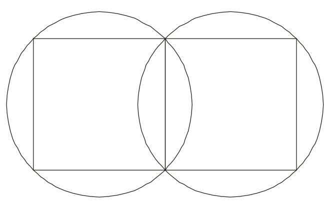
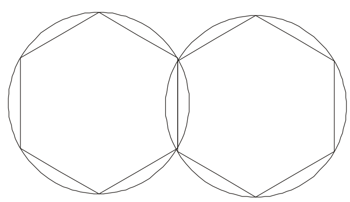
$$\therefore\ k\times\frac{(n-2)\times 180^0}{n}=360^o$$

$$\Rightarrow n=\frac{2k}{k-2}=2+\frac{4}{k-2}$$

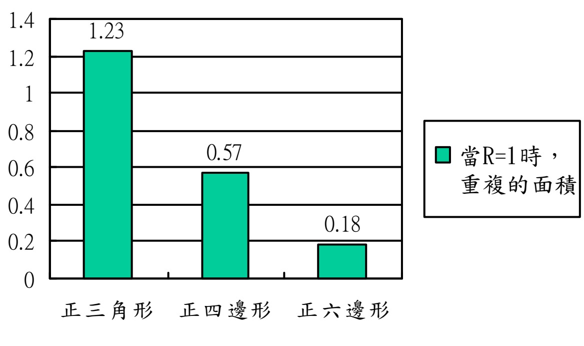
$\therefore$ n ＝3、4 或 6　(因爲 n 爲正整數，$\dfrac{4}{k-2}$ 也須爲正整數)

接下來，**從正三、四、六邊形切割平面的方式中，尋找圓覆蓋重複面積最少的正多邊形：**

假設圓半徑爲 R，

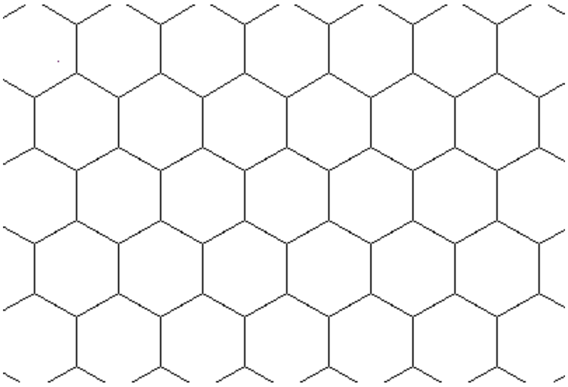
以正三角形切割時重複面積=	以正方形切割時重複面積=	以正六邊形切割時重複面積=
$[\pi R^2-\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{3}R)^2]\times\frac{1}{3}\times 2$ $=\frac{2}{3}R^2\times(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4})$ $\approx 1.23R^2$	$[\pi R^2-(2R)^2\div 2]\times\frac{1}{4}\times 2$ $=\frac{1}{2}R^2\times(\pi-2)$ $\approx 0.57R^2$	$[\pi R^2\times\frac{60}{360}-\frac{\sqrt{3}}{4}R^2]\times 2$ $=R^2\times(\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2})$ $\approx 0.18R^2$
		

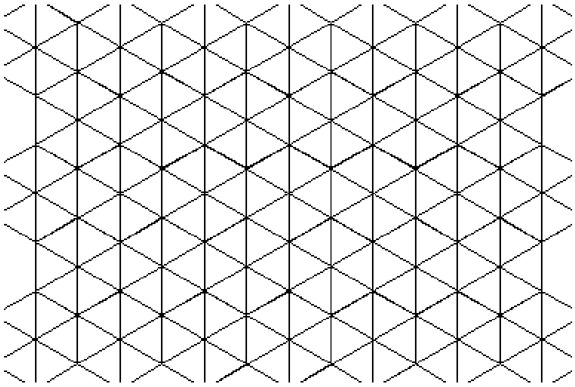
結論：以正六邊形切割平面時，圓覆蓋重複的面積最少。



四、探討 n 個單位圓最大覆蓋圓半徑爲多少？

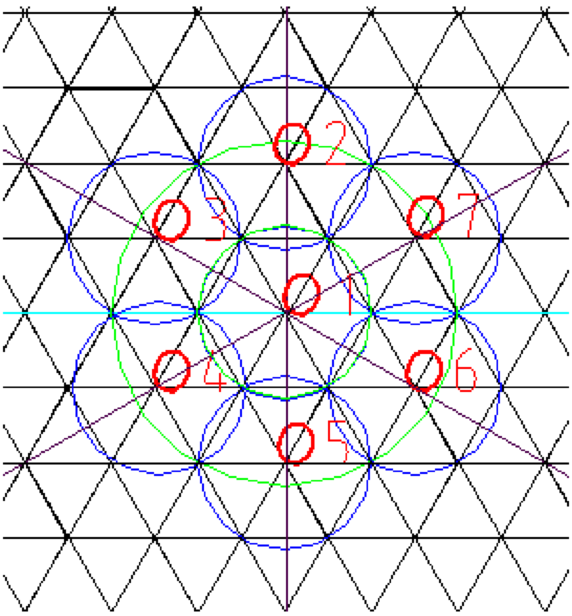
根據三的結論，我們將平面切割成無數個正六邊形（如圖Ⅳ－1），再進一步將圖Ⅳ－1 中的每一個正六邊形細分成 6 小正三角形（如圖Ⅳ－2），方便我們進行研究。

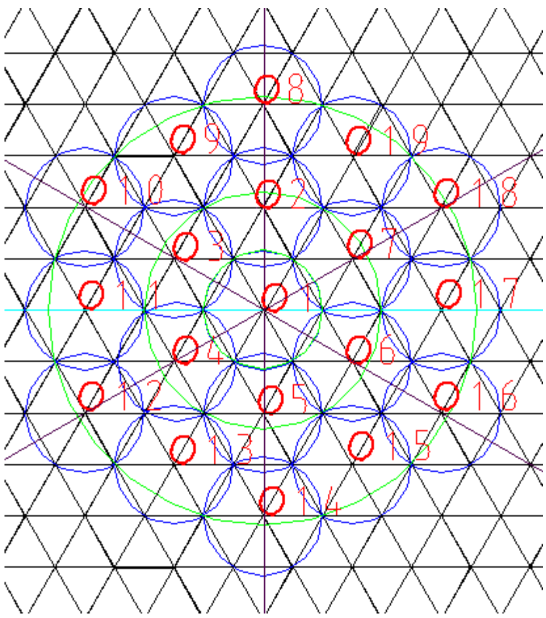

圖Ⅳ－1


圖Ⅳ－2

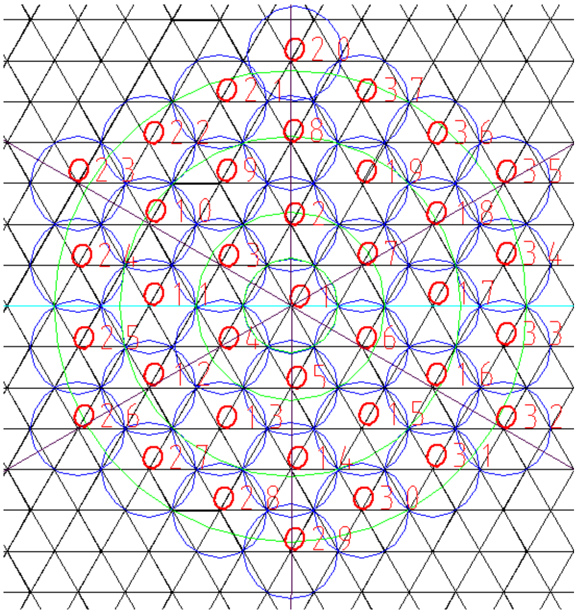
以 O_1、O_2、…、O_7 爲圓心，做 7 個圓（圖Ⅳ－3），在這 7 個圓（1+6）的區域內，可以求得最大覆蓋圓半徑爲 2，如此可得第 1 層覆蓋圓。

繼續在外層以 O_8、O_9、…、O_{19} 爲圓，作 12 個圓（圖Ⅳ－4），在這 19 個圓（1+6+12）的區域內，可以求得最大覆蓋圓半徑爲 $\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{52}}{2}\approx 3.6055$，如此可得第 2 層覆蓋圓，也就是半徑爲 3.6055 需 19 個（1+6+12）小圓覆蓋。


圖Ⅳ－3

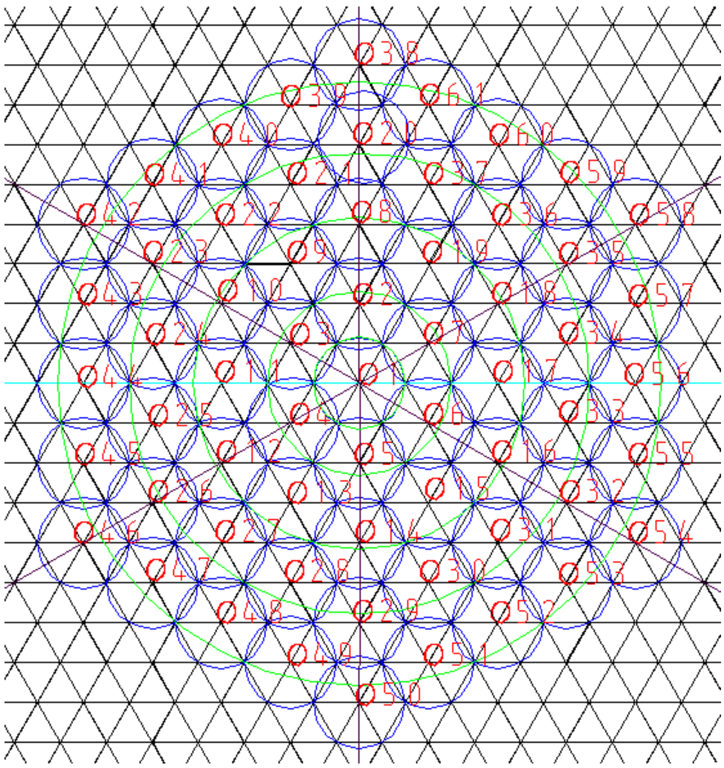

圖Ⅳ－4

繼續在外層以 O_{20}、O_{21}、…、O_{37} 爲圓，作 18 個圓（圖Ⅳ－5），在這 37 個圓（1+6+12+18）的區域內，可以求得最大覆蓋圓半徑爲 5（$=\dfrac{3\times3+1}{2}$），如此可得第 3 層覆蓋圓，半徑爲 5 需 37 個（1+6+12+18）小圓覆蓋。



圖Ⅳ－5

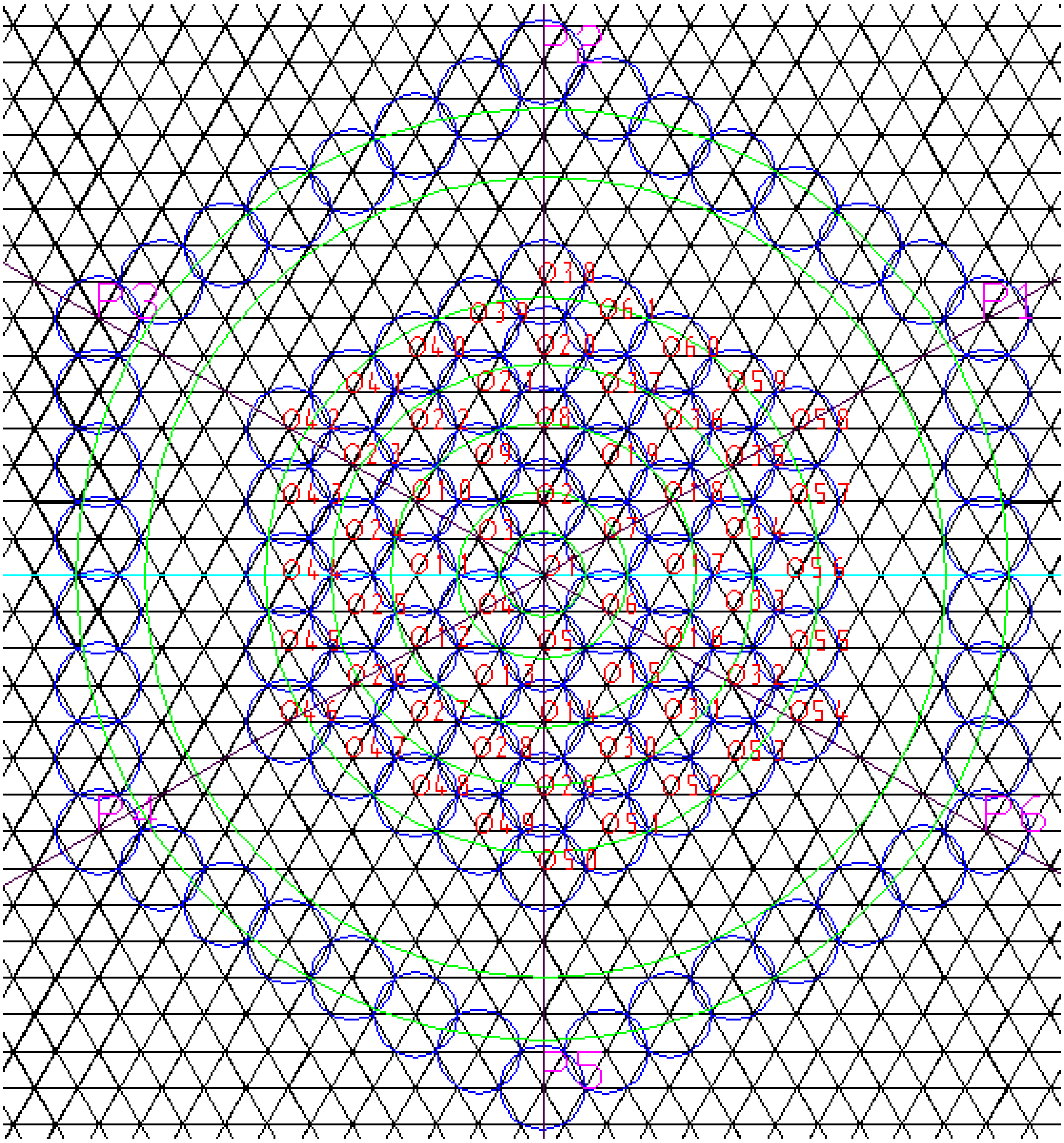
第四層的建構方式，和前三層相同（圖Ⅳ－6），如此可得第 4 層覆蓋圓，且最大覆蓋圓半徑爲 $\sqrt{\left(\dfrac{13}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{172}}{2}\approx 6.5574$，需 61 個（1+6+12+18+24）小圓覆蓋。



圖Ⅳ－6

從以上步驟看來第 n 層覆蓋圓的半徑以及所需要的小圓數量，似乎存在規律性，但當我們研究到第 7 層時（圖Ⅳ－7），從圖形發現半徑雖然有規律，可是所需小圓的

數量卻不是 $1+6\times1+6\times2+\cdots+6\times7=169$，而是 163，也就是必須扣除 P_1、P_2、…、P_6 等 6 個圓。



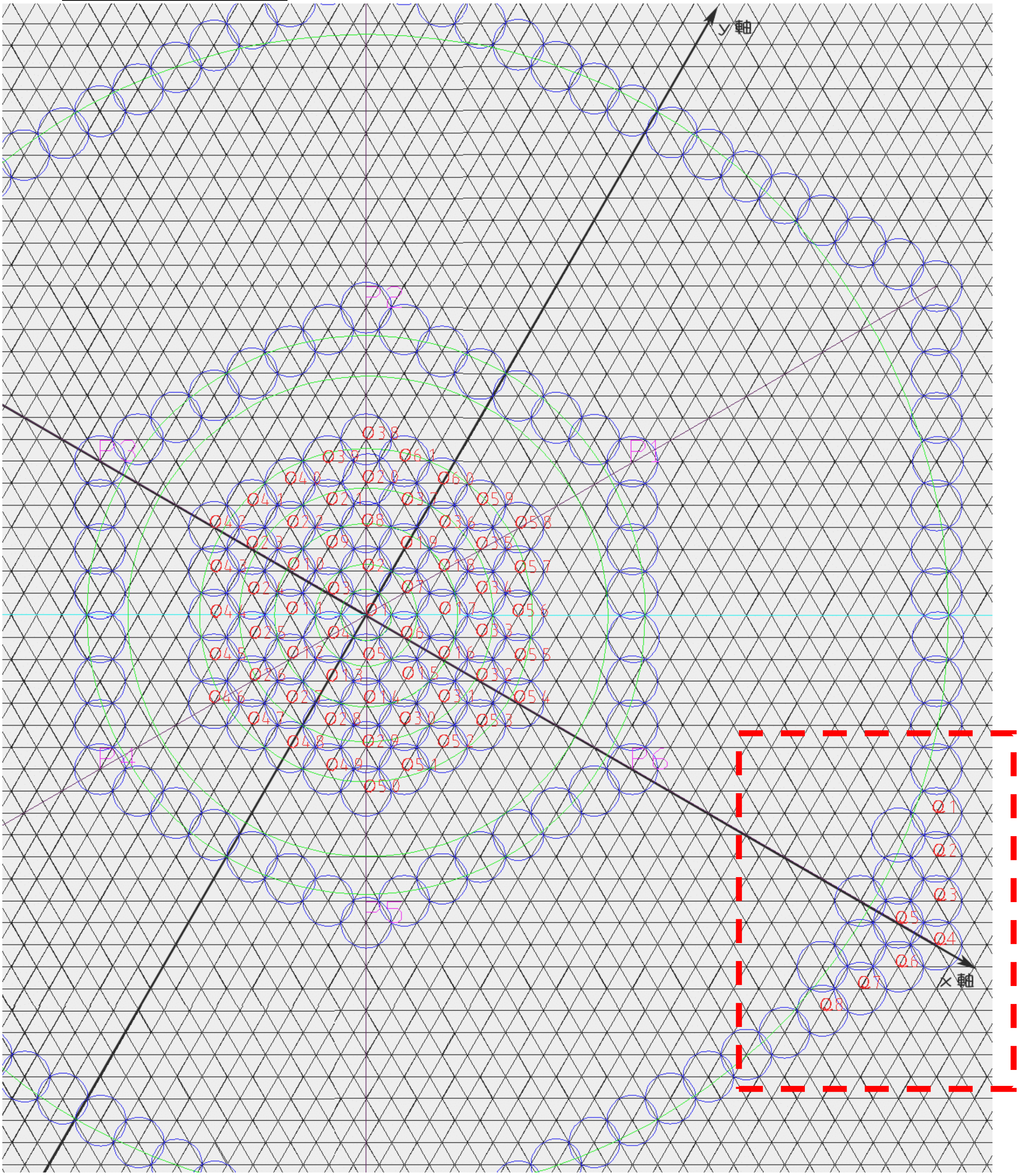
圖Ⅳ－7

同樣地，我們研究第八、九、十層時，所需小圓的總數也必須扣除 6 個。

到第十一、十二、十三層時必須扣除 18 個，第十四層必須扣除 30 個。

越往下研究就發現扣除的數量沒有規律，難以預測。我們希望找到一個方法可以**<u>快速得到第 n 層時，最大覆蓋圓半徑的值，必須扣除的數量以及所需小圓的總量。</u>**

如圖Ⅳ－8，在一開始分割平面時，我們**<u>將平面分割成無數個正三角形，這正好方便我們將它座標化</u>**。



圖Ⅳ－8

首先假設 O_1 為原點，令通過 O_1、O_6、O_{16}、O_{32}、O_{54}、P_6…等點的直線為 x 軸，通過 O_1、O_{19}、O_{60} 等點的直線為 y 軸，且正三角形的邊長為 1。

圖Ⅳ－8 中為第 15 層圓覆蓋的情形，因為圖形太大，只秀出其中一部份來說明。

由圖Ⅳ－8 看來 **Q_1、Q_2⋯、Q_8 等 8 個圓似乎並沒有與最大覆蓋圓有相交的情形，由於作圖時的誤差，Q_1、Q_8 讓我們不敢確定。**

於是**我們觀察後，利用數學的方法（商高定理）來檢定：**

以 Q_4 圓圓心為起始點，Q_4 的圓心座標為 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 30，0\right)$

檢驗圓	檢驗圓座標	檢驗圓座標至原點的距離	關係	最接近檢驗圓的最大圓覆蓋半徑	是否扣除
Q_4	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 30，0\right)$	$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 30\right)^2+0^2}-1\approx 24.98$	>	$\frac{3\times 15+1}{2}=23$	扣除
		↓			
Q_3	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 30-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$	$\sqrt{\left(\frac{30\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(\frac{3}{2})^2}-1\approx 24.158$	>	23	扣除
		↓			
Q_2	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 30-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2,\frac{3}{2}\times 2\right)$	$\sqrt{\left(\frac{30\sqrt{3}}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2+(\frac{6}{2})^2}-1\approx 23.432$	>	23	扣除
		↓			
Q_1	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times 30-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3,\frac{3}{2}\times 3\right)$	$\sqrt{\left(\frac{30\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+(\frac{9}{2})^2}-1\approx 22.49$	<	23	不能扣除
		停止			

至於 Q_6、Q_7、Q_8 與 Q_3、Q_2、Q_1 對稱，所以不用重複檢驗，經檢驗後我們知道扣除個數是 6 個並不是 8 個，總扣除數為 6×6＝36 個

結論：從以上的檢驗過程中發現規律性

Step1.第一檢驗起始點為 $(\sqrt{3}n，0)\rightarrow(\sqrt{3}n-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1, \frac{3}{2}\times 1)$

$\rightarrow(\sqrt{3}n-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2, \frac{3}{2}\times 2)\rightarrow\cdots\rightarrow(\sqrt{3}n-\frac{\sqrt{3}}{2}\times \mathrm{m}，\frac{3}{2}\times m)$，m＝0、1、2、3、⋯，

當（圓心到原點距離-1）<最大覆蓋圓半徑時，停止檢驗。

Step2.第二檢驗起始點為 $(\sqrt{3}n-\sqrt{3}\times 1, 0)\rightarrow(\sqrt{3}n-\sqrt{3}\times 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 1, \frac{3}{2}\times 1)$

$\rightarrow(\sqrt{3}n-\sqrt{3}\times 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2, \frac{3}{2}\times 2)\rightarrow\cdots\rightarrow(\sqrt{3}n-\sqrt{3}\times 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\times m，\frac{3}{2}\times \mathrm{m})$， m＝0、1、2、3、⋯

當（圓心到原點距離-1）<最大覆蓋圓半徑時，停止檢驗。

⋯以此類推⋯

Step3.第 t 檢驗起始點為 ($\sqrt{3}n-\sqrt{3}\times(t-1)$, 0)，t = 1、2、3、….

當（圓心到原點距離-1）<最大覆蓋圓半徑時，全部檢驗停止，

此時便可知必須扣除圓的個數。

此外我們也**歸納出第 n 層時，與最大覆蓋圓半徑的關係如下：**

①當 n＝奇數時，未扣除前小圓數＝（1+2+…+n）×6+1，半徑為 $\frac{3n+1}{2}$

②當 n＝偶數時，未扣除前小圓數＝（1+2+…+n）×6+1，半徑為 $\sqrt{(\frac{3n+1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$

由於**以上檢驗的步驟非常繁複**，我們**根據以上的理念設計電腦程式，將一連串數據交給電腦處理，可以快速得到第 n 層的最大覆蓋半徑及所需單位圓的數量。**

部分結果整理後如下：

第 n 層	第 n 層最大覆蓋半徑	未扣除前的小圓數	需扣除的小圓數	所需單位圓數量
1	2	7	0	7
2	3.605551275464	19	0	19
3	5	37	0	37
4	6.557438524302	61	0	61
5	8	91	0	91
6	9.5393920141695	127	0	127
7	11	169	6	163
8	12.529964086142	217	6	211
9	14	271	6	265
10	15.52417469626	331	6	325
11	17	397	18	379
12	18.520259177452	469	18	451
13	20	547	18	529
14	21.51743479135	631	30	601
15	23	721	36	685
16	24.515301344263	817	36	781
17	26	919	48	871
18	27.513632984395	1027	60	967
…	…	…	…	…

我們找出的規律性在電腦程式的輔助下，不管再多層都能迅速地推算出來最大的覆蓋半徑。

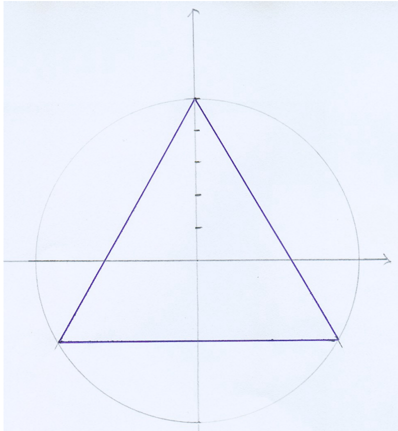
四、探討如何利用最少單位圓覆蓋正多邊形？

爲研究方便起見，

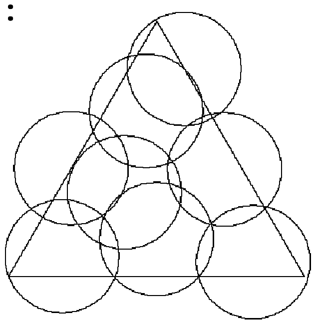
首先，定義 m 單位的正多邊形：

畫一半徑爲 m 單位的圓，並將其 n 等分後連接，即爲 m 單位的正 n 邊形。

（如右圖爲 5 單位的正三角形）



接下來嘗試尋找如何利用最少單位圓覆蓋 m 單位的正 n 邊形的方法。**一開始我們不做切割，利用邊緣開始覆蓋法及中心開始覆蓋法嘗試：**



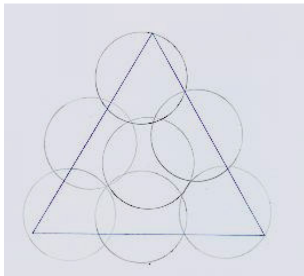
【邊緣開始覆蓋法】不做任何切割，從三角形的邊緣往中心做圓覆蓋

困難處：無法有規律地確定所需覆蓋圓的圓心位置，會造成覆蓋圓的不規則排列，容易造成誤差。

因此，我們嘗試思考別的方法。

【中心開始覆蓋法】不做任何切割，從三角形的中心往邊緣做圓覆蓋

困難處：無法有規律地確定所需覆蓋圓的圓心位置，同樣會造成覆蓋圓的不規則排列，且容易造成誤差。

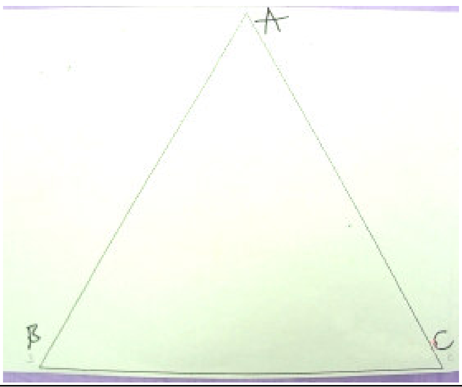
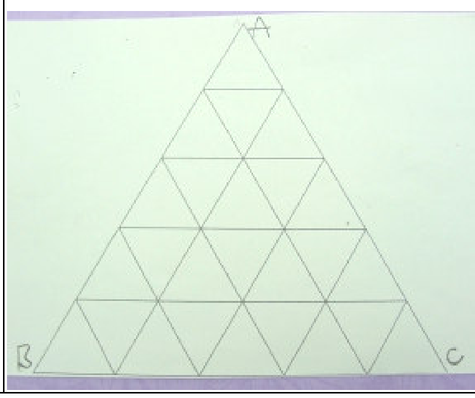


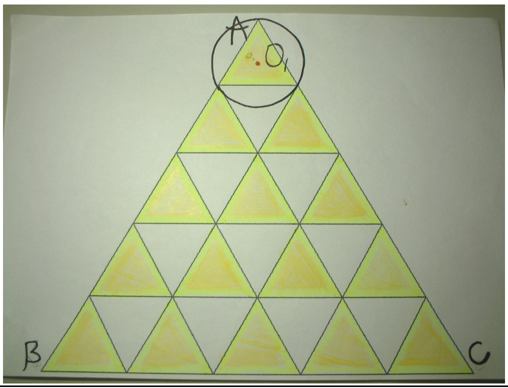
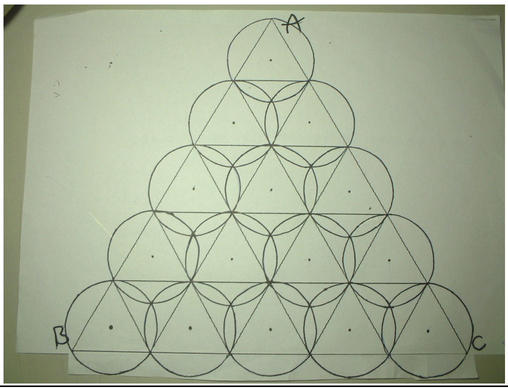
發現：邊緣開始覆蓋法、中心開始覆蓋法都不是很恰當。

【小圖形切割覆蓋法】把單位大於 1 的正 n 邊形切割成 1 單位的小正 n 邊形，找出單位圓心位置，從正 n 邊形的邊緣往中心做圓覆蓋。

因此先做切割試試看再做覆蓋，以下是【小圖形切割覆蓋法】分解步驟圖：

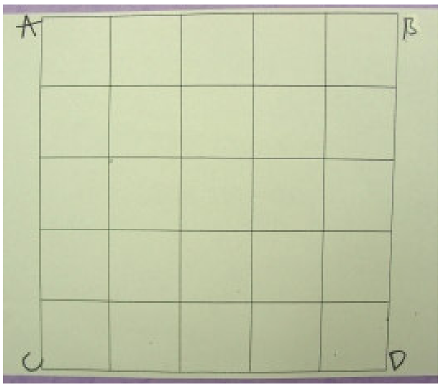
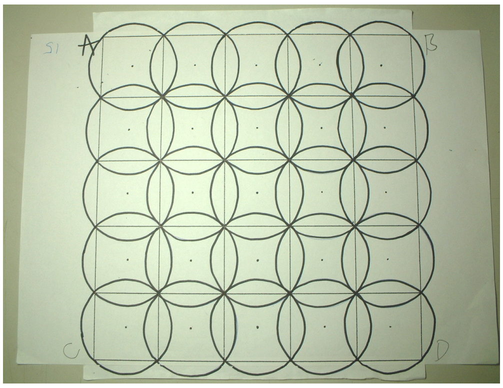
1.以 5 單位正三角形爲例

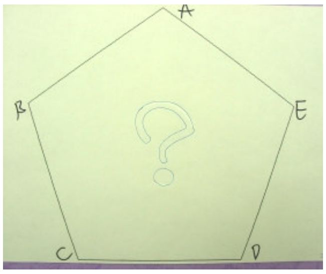
畫一個 5 單位的正△ABC 	➔	將 5 單位的正△ABC 分割成 25 個 1 單位的小正△ 	➔

用單位圓覆蓋正向的正△（黃色部分）  	➔	發現只要 15 個單位圓就可以完全覆蓋  	

四邊形也可以利用一樣的方法：

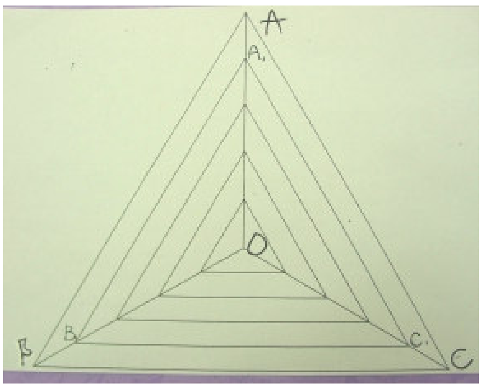
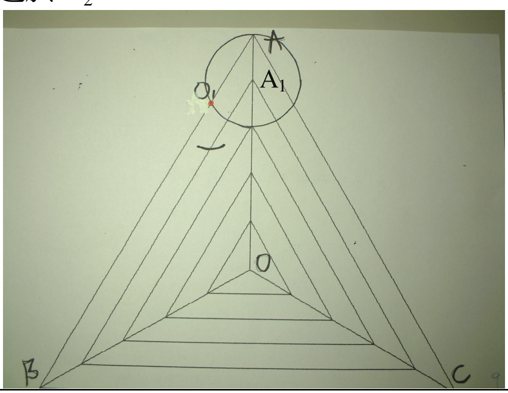
2.以 5 單位的正方形爲例

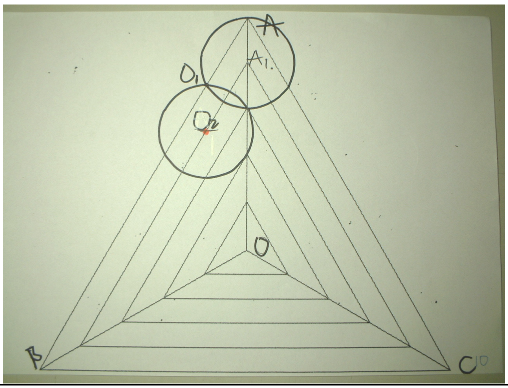
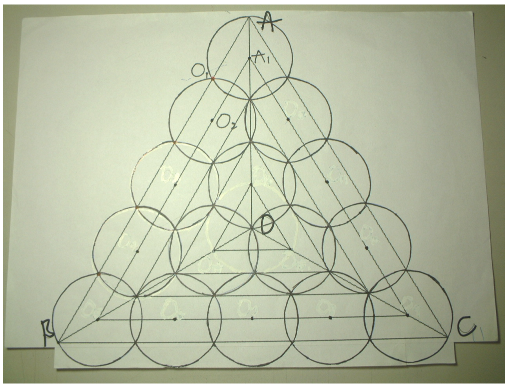
將 5 單位正方形 ABCD，分割成 25 塊 1 單位的小正方形  	➔	用單位圓覆蓋每個小正方形，發現只要 25 個單位圓就可以完全覆蓋 



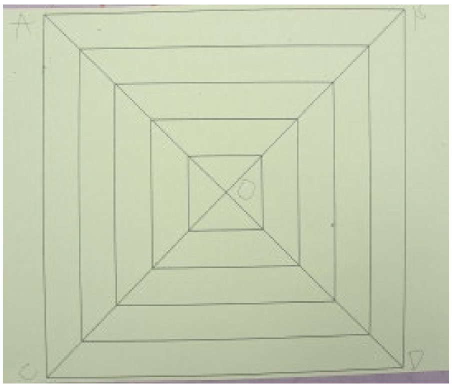
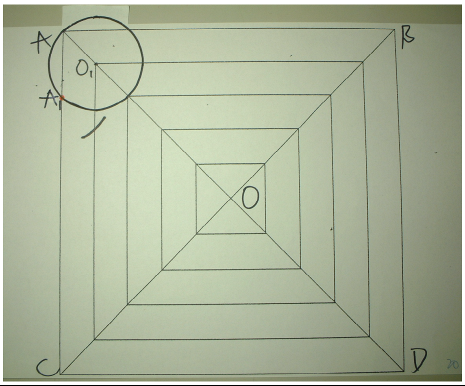
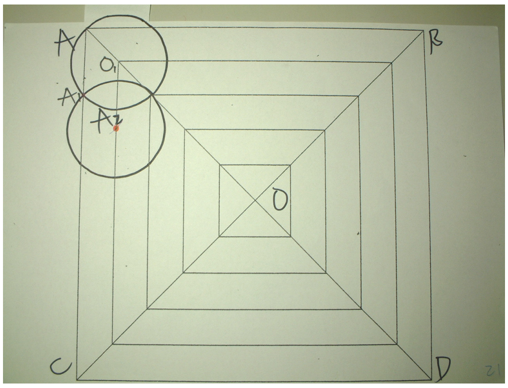
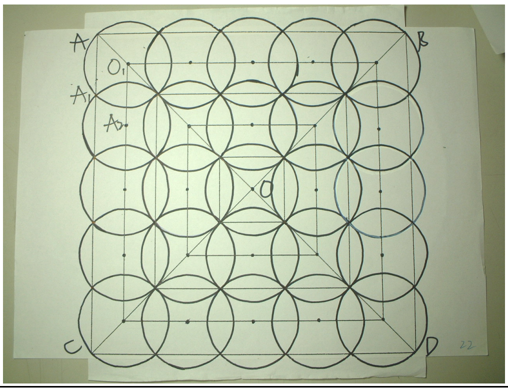
但是正五邊形無法等分成小正五邊形，故無法利用小圓切割覆蓋法繼續，因此尋找其他方法：

1. 以 5 單位的正 Δ ABC 爲例

將中心到三頂點 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$ 連接並等分成五段、再將 A_1 、 B_1 、 C_1 連接，以此類推  	➔	以 A_1 爲圓心作一單位圓，再以 O_1 （圓 A_1 交於 $\overline{AB}$ ）爲圓心，作弧交 $\Delta A_1B_1C_1$ 的邊於 O_2  	➔

以 O_2（O_1 圓弧與 $\overline{A_1B_1}$ 的交點）爲圓心作圓 	➔	發現只要 15 個單位圓就可以完全覆蓋 	

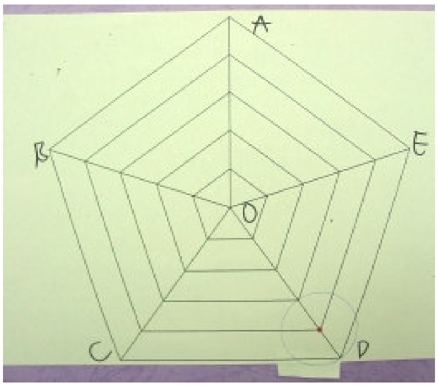
2.以 5 單位的正方形爲例

找出 5 單位的正方形 ABCD 的中心點 O，連接 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$ 並等分成五段，再連接 	➔	以 O_1（四單位的頂點）爲圓心作圓，再以 A_1（O_1 圓與 $\overline{AC}$ 的交點）爲圓心畫條圓弧 	➔
並將此圓弧與四單位邊長的交點作爲圓 A_2 的圓心 	➔	以相同的方式將五單位正方形，發現 25 個單位圓便可完全覆蓋 	

利用同樣的方式覆蓋正五邊形：

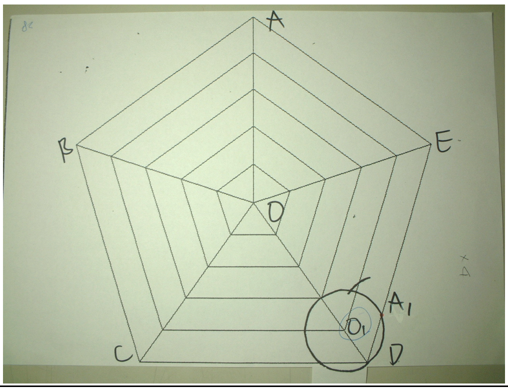
3.以 5 單位的正五邊形為例

找出 5 單位的正五邊形 ABCDE 中心 O，連接$\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$、$\overline{OE}$ 並等分成五段，再連接



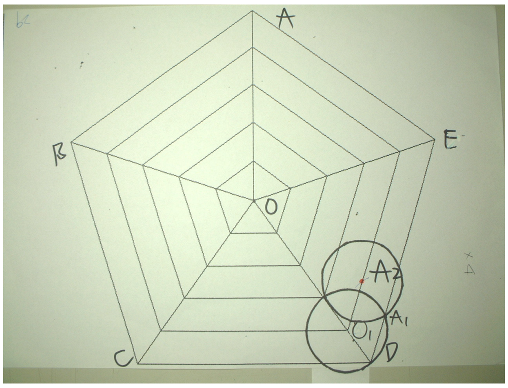
→

以 O_1（4 單位的頂點）為圓心作圓，再以 A_1（O_1 圓與 $\overline{ED}$ 的交點）為圓心畫條圓弧



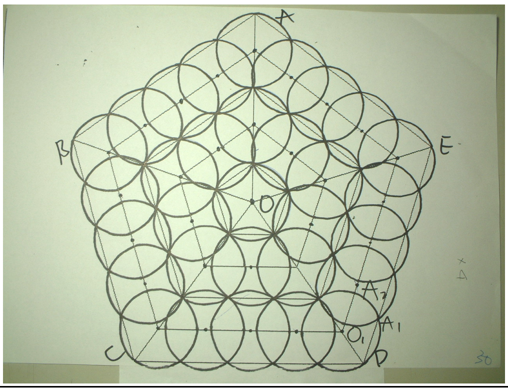
→

並將此圓弧交點作為 A_2 圓的圓心



→

以相同的方式將 5 單位正五邊形完全覆蓋



依照以上步驟以此類推，得到下表數據：

m 邊形 n 單位	正三邊形最少覆蓋圓數	正方形最少覆蓋圓數	正五邊形最少覆蓋圓數	正六邊形最少覆蓋圓數	正七邊形最少覆蓋圓數	正八邊形最少覆蓋圓數	…	正 m 邊形最少覆蓋圓數
1	1	1	1	1	1	1	…	?
2	3	4	5	6	7	8	…	?
3	6	9	11	13	15	17	…	?
4	10	16	20	24	28	32	…	?
5	15	25	31	37	43	49	…	?
6	21	36	45	54	63	72	…	?
7	28	49	61	73	85	97	…	?
…	…	…	…	…	…	…	…	?
n	?	?	?	?	?	?	…	?

附註：以上討論中的相關證明詳見附件一、二、三。

發現:（1）三角形最少覆蓋圓的個數公式為$1+2+3+\dots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{(n^2+n)}{2}$

（2）正方形最少覆蓋圓的個數公式為$(1+3+5+\dots+n)=n^2$

（3）正五邊形最少覆蓋圓的個數公式分成兩種情形討論

情形一、n=奇數時，最少覆蓋圓的個數公式為

$$1+5\times2+5\times4+5\times6+\ldots+5(n-1)$$
$$=1+5[2+4+6+\ldots+(n-1)]$$
$$=1+5\left\{\frac{\frac{(n-1)}{2}[2+(n-1)]}{2}\right\}$$
$$=1+5\left(\frac{n^2-1}{4}\right)$$

情形二、n=偶數時，最少覆蓋圓的個數公式為

$$5\times1+5\times3+5\times5+\ldots+5(n-1)$$
$$=5[1+3+5+\ldots+(n-1)]$$
$$=5\left\{\frac{\frac{n}{2}[1+(n-1)]}{2}\right\}$$
$$=\frac{5n^2}{4}$$

依照上述的方法繼續研究，歸納整理得到以下的結果：

正m邊形	偶數單位	奇數單位
正三邊形	$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n+n^2}{2}$	$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n+n^2}{2}$
正四邊形	$n^2=\frac{4n^2}{4}$	$n^2=1+4\left(\frac{n^2-1}{4}\right)$
正五邊形	$\frac{5n^2}{4}$	$1+5\left(\frac{n^2-1}{4}\right)$
正六邊形	$\frac{6n^2}{4}$	$1+6\left(\frac{n^2-1}{4}\right)$
正七邊形	$\frac{7n^2}{4}$	$1+7\left(\frac{n^2-1}{4}\right)$
正八邊形	$\frac{8n^2}{4}$	$1+8\left(\frac{n^2-1}{4}\right)$
正九邊形	$\frac{9n^2}{4}$	$1+9\left(\frac{n^2-1}{4}\right)$

正十邊形	$\dfrac{10n^2}{4}$	$1+10\left(\dfrac{n^2-1}{4}\right)$
…	…	…
正 m 邊形(m≧4)	$\dfrac{mn^2}{4}$	$1+m\left(\dfrac{n^2-1}{4}\right)$

由於我們研究的方向是尋找最少的覆蓋圓，作以下的驗證後發現以上的正 m 邊形的公式並不是都滿足我們的要求：

假設單位圓覆蓋平面至 n 層，則其覆蓋半徑爲 $\dfrac{3n+1}{2}$ ，

討論覆蓋層數 n ＝？時，$\dfrac{3n+1}{2}$ 單位正 m 邊形覆蓋單位圓數會比利用單位圓覆蓋平面的方式多？

情形一、$\dfrac{3n+1}{2}$ **單位**<u>正六邊形</u>

$$\frac{n(n+1)}{2}\times 6+1<1+6\times\left[\frac{(\frac{3n+1}{2})^2-1}{4}\right]$$

$$2n^2+2n<\frac{9n^2+6n+1}{4}-1$$

$$n^2-2n-3>0$$

$$(n-3)(n+1)>0$$

$$n>3\text{，}n<-1\text{（不合）}$$

故當在第 4 層以上，利用單位圓覆蓋平面的方式時覆蓋單位圓數會比較少

情形二、$\dfrac{3n+1}{2}$ **單位**<u>正五邊形</u>

$$\frac{n(n+1)}{2}\times 6+1<1+5\times\left[\frac{(\frac{3n+1}{2})^2-1}{4}\right]$$

$$n(n+1)\times 3\times\frac{4}{5}<\frac{9n^2+6n+1}{4}-1$$

$$16n^2+16n<15n^2+10n-5$$

$$n^2+6n+5<0$$

$$(n+5)(n+1)<0$$

$$-5<n<-1\text{（不合）}$$

故無論在哪一層，正五邊形覆蓋單位圓數會比較少。

結論：無論在哪一層，在正三、四、五邊形時這樣有邊界的覆蓋方式恆比無邊界的覆蓋方式所需的單位圓數較少。

柒、研究結果：

一、大圓需單位圓覆蓋的數量比較如下

有邊界限制的圓	覆蓋圓半徑單位	1	2	3	4	5	6	7	8	…
	需單位圓覆蓋的數量	1	7	18	31	48	67	96	135	…

無邊界限制的圓	覆蓋圓半徑單位	1	2	3.6055	5	6.5574	8	9.5393		…
	需單位圓覆蓋的數量	1	7	19	37	61	91	127		…

由以上的的數據可知：有邊界限制的圓，所需單位圓覆蓋的數量並不是最少，而**無邊界限制的圓（利用正六邊形切割平面），需單位圓覆蓋的數量不但有規律且爲最少**。

二、正 m 邊形 n 單位所需覆蓋圓的數量公式

（一）無論在哪一層，在正三、四、五邊形時這樣有邊界的覆蓋方式恆比無邊界的覆蓋方式所需的單位圓數較少。

1. n 單位正三角形所需覆蓋圓的數量公式＝$1+2+3+4+\ldots+n=\dfrac{n+n^2}{2}$

2. n 單位正四邊形所需覆蓋圓的數量公式＝n^2

3. n 單位正五邊形所需覆蓋圓的數量公式$=\begin{cases}\dfrac{5n^2}{4}, & \text{n爲偶數}\\[2mm] 1+5\left(\dfrac{n^2-1}{4}\right), & \text{n爲奇數}\end{cases}$

（二）在 6 邊以上的正多邊形，無邊界的覆蓋方式恆比有邊界的覆蓋方式所需的單位圓數較少，故在 6 邊以上的正多邊形則利用無邊界的覆蓋方式，並利用電腦輔助計算。

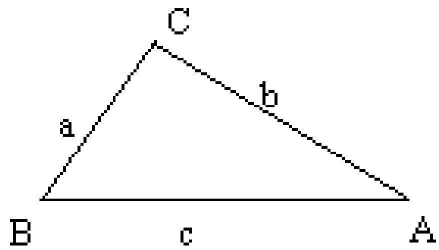
捌、討論

一、探討任意Δ最小覆蓋圓半徑爲多少？

不失一般性假設 ΔABC 的邊長爲 $\overline{AB}=c$ 、 $\overline{BC}=a$ 、 $\overline{AC}=b$ ，且 $a\le b\le c$

故我們計算ΔABC 外接圓半徑

令 ΔABC 的半周長$=s=\dfrac{a+b+c}{2}$



ΔABC 的面積 $= A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（根據海龍公式）

$$\therefore R = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC}}{4A} = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

經討論後可得：

結論：1. ΔABC 是銳角 Δ，其最小覆蓋圓半徑及其外接圓半徑 R。

2. ΔABC 是鈍角 Δ，其最小覆蓋圓半徑為 $\frac{c}{2}$（最大邊之一半）。

3. ΔABC 是直角 Δ，其最小覆蓋圓半徑為 $R = \frac{c}{2}$（外接圓圓心恰是斜邊中點）。

二、由討論一可知，任意三邊形以三邊為直徑作三個圓，可將三邊形覆蓋，若任一凸多邊形均可以由以其各邊為直徑的圓所覆蓋？

（1） 我們從四邊形討論起

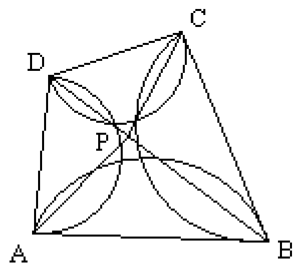
(i)以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 為直徑畫四個圓，假設 P 為四邊形 ABCD 內任一點且不屬於四個圓的點

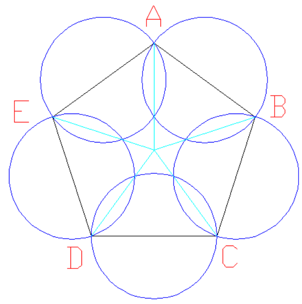
(ii)連接 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$、$\overline{PC}$、$\overline{PD}$，則 $\angle DPA < 90^o$、$\angle APB < 90^o$、$\angle BPC < 90^o$、$\angle CPD < 90^o$

$\therefore \angle DPA + \angle APB + \angle BPC + \angle CPD < 360^o$（不合）

$\therefore$ P 至少屬於一個圓內的點

$\therefore$ 以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 為直徑畫四個圓，可將四邊形 ABCD 覆蓋





（2）探討任意五邊形是否可由以其各邊為直徑的圓所覆蓋？

假設五邊形 ABCDE 為正五邊形（如圖）

則 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOA = 72^0 < 90^0$

可知 O 點必在這五個覆蓋圓之外

故任意五邊形不一定可由以其各邊為直徑的圓所覆蓋

結論：1.任意凸三邊形及凸四邊形可由以其各邊為直徑的圓所覆蓋。

2.當 $n \geq 5$ 時，任意凸 n 邊形不一定可由以其各邊為直徑的圓所覆蓋。

玖、結論與應用

本研究結果不只可用在軍事用途上，且能更生活化的運用它。例如：在園藝洒水設計，假設灑水器的灑水半徑為 1 單位，不管是正多邊形、圓形或不規則的草坪上，利用我們找出的規律性加上電腦輔助計算，就可以知道最少需要多少之灑水器及放置位置，才能將整個草坪都灑過。

另外，我們在全市科展獲獎後，**曾與當時搜尋華航空難的相關學術單位討論我們的研究結果是否真的有所助益？答案是肯定的(相關存證文件詳見附錄)。**也就是當發生空難時，飛航單位必須尋找到黑盒子才能夠厘清真正的失事原因，此時設定一個黑盒子有可能的掉落範圍，再利用我們研究出來的方法來計算，最少需要偵測多少次才能夠每個地方都搜索到，以及最大搜索半徑為多少？還有山難發生時，也可以利用本研究結果去減少其搜救時間及人力，才能在黃金 72 小時之中迅速找到遇難者。

拾、參考資料

（一）參考書目

有趣的圖形－覆蓋	河南科學技術出版社	周春荔
康軒版國中數學第一冊	單元六　圖形的基本性質	
康軒版國中數學第二冊	單元三　三角形與圓	
	單元四　幾何圖形與幾何量的變動	
康軒版國中數學第三冊	5-1 直角座標與平面	
	5-2 二元一次方程式的圖形	
康軒版國中數學第四冊	1-2 平方根	
	1-3 商高定理	

（二）參考網站

http://www.hdsdbook.com.cn/jsdd/aoshu/jsdd.files/mingdan.htm

行政院飛航安全委員會　函

機關地址：台北市復興北路99號16樓
承辦人：蘇水灶
電話：02-25475200 分機 172
傳真：02-25474975

受文者：　國民中學

速別：普通件
密等及解密條件：普通
發文日期：中華民國九十三年六月二十一日
發文字號：飛安字第0930006026號
附件：

主旨：復　貴校　福中教字第0930001872號來函，請　查照。

說明：

一、雖在海上偵搜飛航記錄器受甚多因素影響，例如海象、氣象、載具、偵測裝備、飛機原飛航高度、飛航速度及解體方式等。但該作品搭配經驗豐富之偵搜專家，仍可於偵搜規劃時提供偵搜區域及路徑之參考。

二、該作品具創意且考量災難搜救時之實際需求，值得鼓勵。

正本：　中學
副本：

保存年限：
檔號：

抄知照
教學科作品實屬優秀作品，值得嘉許學生
請指導老師口頭告知
敬會　師

市府文號　93.6.23
上層文號　2063

第1頁

附件一：

證明至少需用 3 個單位圓覆蓋中心至頂點為 2 單位之正三角形
（i.e. 不能用 2 個圓覆蓋中心至頂點為 2 單位之正三角形）

假設圓K圓心不在A點上，但圓周通過V點
若要用 2 個圓覆蓋中心至頂點為 2 單位之正三角形

$\therefore$ 每個圓需覆蓋 $3\sqrt{3} = 5.196$ 的周長

利用反証法證明

$\overline{vw} = \overline{vy}$（∵同對弧 xy）

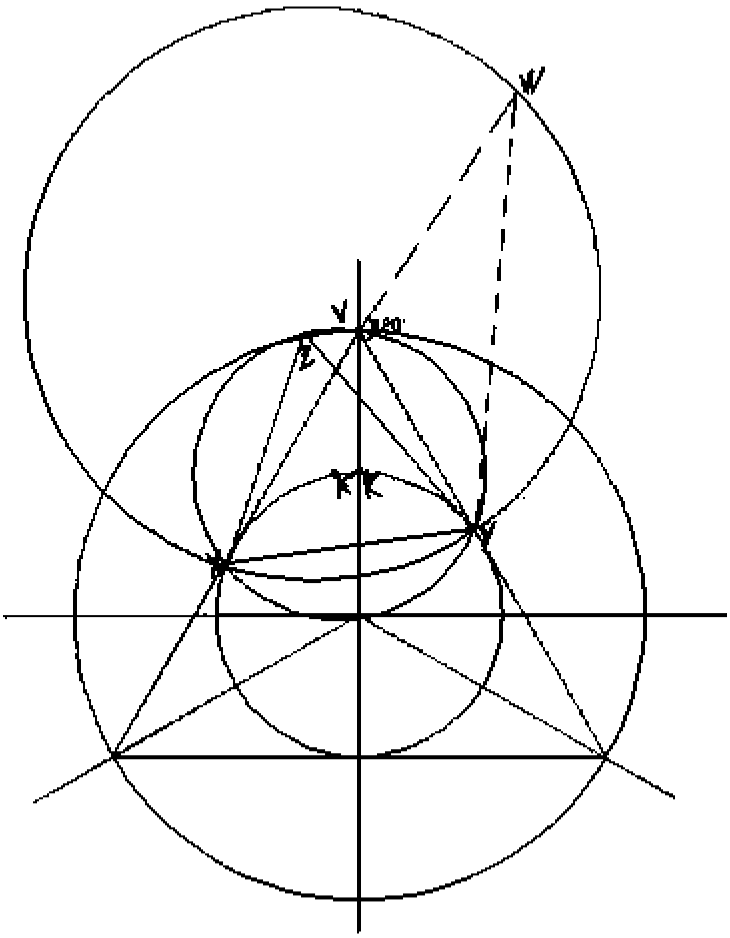
$\overline{vx} + \overline{vy} \le 2\overline{xz}$

$\overline{xy}^2 = \overline{xz}^2 + \overline{yz}^2 - 2(\overline{xz})(\overline{yz})\cos 60^\circ = \overline{xz}^2$

$\overline{xy} \le 2$（弦 ≤ 直徑）

$\overline{xz} \le 2$

$\therefore \overline{xv} + \overline{vy} \le 2\overline{xz} \le 4 < 3\sqrt{3} = 5.1$



附件二：

證明至少需用 5 個單位圓覆蓋中心至頂點為 2 單位之正五邊形
（i.e. 不能用 4 個圓覆蓋中心至頂點為 2 單位之正五邊形）

假設圓 K 圓心不在 A 點上，但圓周通過 V 點

正五邊形邊長 $=(2\times\sin 36^\circ)\times 2\approx 2.35$

若用4個圓覆蓋周長爲$2.35\times 5\approx 11.75$之正五邊形

每圓需覆蓋$2.35\times 5\div 4\approx 2.9375$的長度

利用反證法證明

*step*1. $\overline{vw}=\overline{vx}$

$\angle yux=108^\circ=\angle yzx$（對同弧 xy）＝圓周角

$\therefore \angle ywx=54^\circ$

又 $\because \angle wvx=72^\circ$

$\therefore \angle vxw=54^\circ$

$\therefore \overline{vw}=\overline{vx}$

*step*2. $\therefore \overline{yv}+\overline{vx}=\overline{yv}+\overline{vw}<\overline{yv}+\overline{zw}=2\overline{yz}$

*step*3. $\overline{xy}^2=\overline{xz}^2+\overline{yz}^2-2\overline{xz}\cdot\overline{yz}\cdot\cos 108^\circ\approx 2\overline{yz}^2-2\overline{yz}^2\cdot(-0.3090)\approx 2.618\overline{yz}^2$

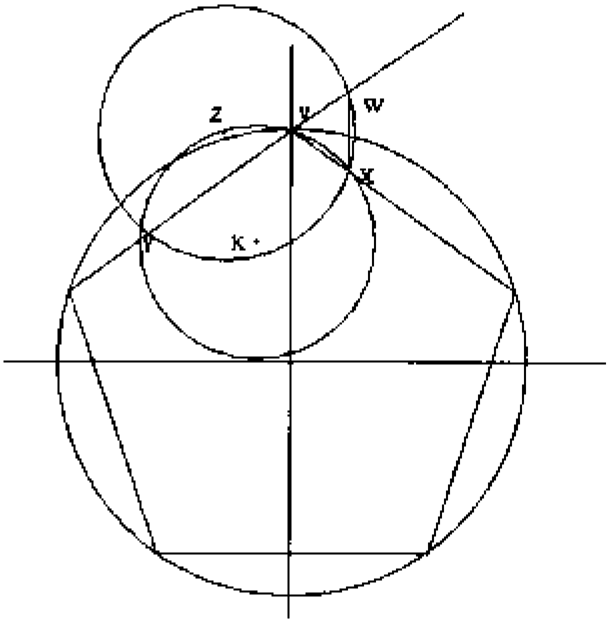
$\overline{xy}\approx 1.618\overline{yz}$

$\overline{xy}\le 2$（$\because \overline{xy}$是單位圓的弦）

$1.618\overline{yz}\approx\overline{xy}\le 2$

$\overline{yz}\le\dfrac{2}{1.618}\approx 1.23609$

$\therefore \overline{yv}+\overline{vx}=\overline{yv}+\overline{vw}<\overline{yv}+\overline{zw}=2\overline{yz}\le 2.472<2.9375$



2

附件三：

證明至少需用 6 個單位圓覆蓋中心至頂點為 2 單位之正六邊形
（i.e. 不能用 5 個圓覆蓋中心至頂點為 2 單位之正六邊形）

假設圓 K 圓心不在 A 點上，但圓周通過 V 點
若要用 5 個圓覆蓋正六邊形（周長 12）
$\therefore$ 每個圓需覆蓋 $\frac{12}{5}$ 的周長
利用反証法證明

$$\overline{xv}+\overline{vy}\le 2\overline{xz}$$

$$\left(\overline{xy}\right)^2=\left(\overline{xz}\right)^2+\left(\overline{yz}\right)^2-2\left(\overline{xy}\right)\left(\overline{yz}\right)\cos 120^\circ=3\left(\overline{xz}\right)^2$$

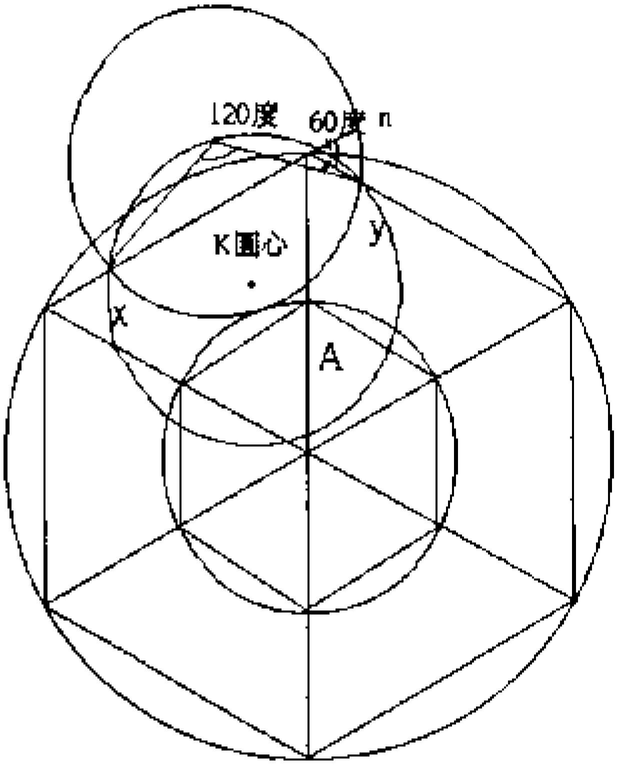
$$\overline{xy}\le 2$$

$$3\left(\overline{xz}\right)^2\le 4$$

$$\overline{xz}\le\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$2\overline{xz}\le\frac{4}{\sqrt{3}}\approx 2.4$$

$$\overline{xv}+\overline{vy}\le 2\overline{xz}\approx 2.4=\frac{12}{5}$$



評　語

030416 國中組數學科　第二名

鋪天蓋地

能由實際情境引發數學問題的探索，又能將研究成果回饋至實際生活的應用，將數學與生活作了很好的聯結，兼具學術與實用價值。