中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030415

高雄市立民族國民中學

指導老師姓名

陳重榮

陳震遊

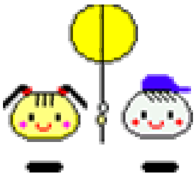
作者姓名

廖郁文

張殷綸

陳冠維

黃瓊誼



姻圓一線牽

一、摘要

1、由一點至兩圓切線長若相等，可推得此點至兩圓的圓心距離的平方差為定值，而由預備定理可知此點分佈的軌跡為過此點做連心線的垂線（稱為姻圓線）。

2、討論當兩圓的位置改變時（外離、外切、相交兩點、內切、內離），此條姻圓線的相關性質，並藉之以尺規作圖分別作出姻圓線。

3、推至三圓時，發現三圓心若共線時，三條姻圓線重合或平行，而當三圓心不共線時，則三條姻圓線相交於一點（稱為姻圓心）。

4、探討出姻圓心分別在三圓的內部及外部時，則此姻圓心必分別為某一個被三圓皆平分及與三圓都直交的圓的圓心。

5、最後更進一步發現了有關姻圓心的另一些特性：

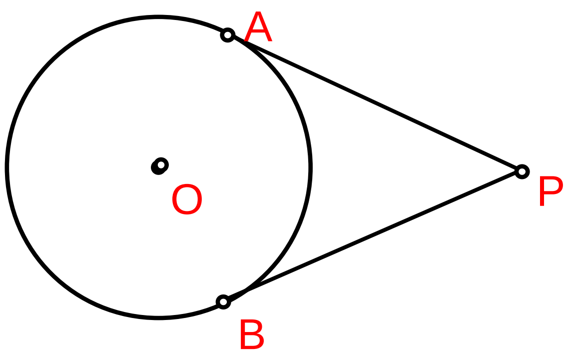
（1）任一三角形的垂心亦為分別連接三頂點與對邊任一點的三線段為直徑的三個圓的姻圓心。

（2）當三圓兩兩外切時，則姻圓心為以三圓心為頂點的三角形的內心。

（3）作任一三角形的三高，而三垂足之間兩兩連接的三條直線與三邊的延長線分別交於三點，則此三點必在原三角形與以三垂足為頂點的三角形的兩外接圓的姻圓線上。

二、研究動機

為了迎接學校一年一度的園遊會，班上同學全體動員佈置所負責的攤位，而正當我在剪一些同長度的繩子欲將所有的氣球綁在攤位四週時，剎那間腦海中浮現出上幾何課時，老師曾教到圓外一點可作圓的兩條切線，且兩條切線長相等，如圖（一），A、B 為切點則 $\overline{PA}=\overline{PB}$ ，此時心中疑惑著，一點至相異兩圓的切線長是否也可以相等？而這樣的點分佈的軌跡又是如何？在這些疑惑的動力下，就找了一些同學開始做研究之旅。



圖（一）

三、研究目的：

1.是否有任何點至相異兩圓的切線長相等？而這樣的點是否有一定的分佈軌跡（姻圓線）？

2.當兩圓的位置改變時（外離、外切、相交兩點、內切、內離）此條姻圓線有何相關性質？並如何以尺規作圖畫出兩圓的姻圓線？

3.圓心不共線的相異三圓所形成的三條姻圓線是否會共點（姻圓心）？並能以此姻圓心作出前兩圓的姻圓線。

4.以姻圓心為圓心的圓與三圓有何相關性質？

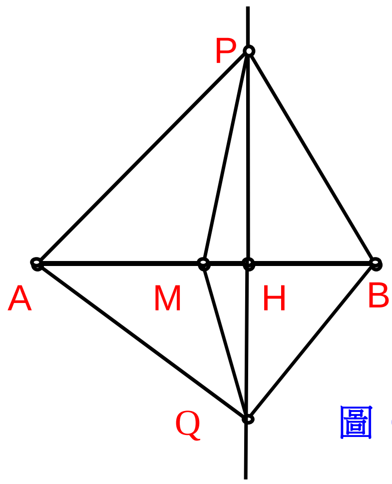
5.三圓的姻圓心與相關三角形的垂心、內心有何相關性質？

四、研究器材：

直尺、圓規

五、研究過程與方法

【預備定理】：設 P 點至兩定點 A、B 的距離的平方差等於定值，則點 P 分佈的軌跡形成一條直線。



圖（二）

證明：不失一般性，可設 $\overline{PA} \geq \overline{PB}$，

且 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = m^2$，$\overline{AB} = c$

(1) 如圖（二）過 P 點作 $\overline{AB}$ 的垂線與中線 $\overleftrightarrow{PH}, \overleftrightarrow{PM}$ 則

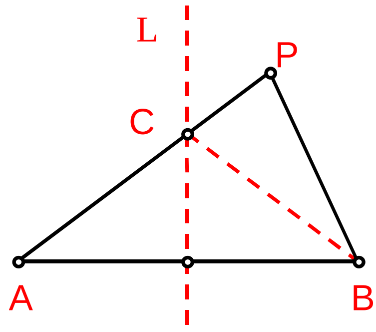
$$m^2 = \overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \left(\overline{AH}^2 + \overline{PH}^2\right) - \left(\overline{BH}^2 + \overline{PH}^2\right)$$
$$= \overline{AH}^2 - \overline{BH}^2 = \left(\overline{AH} + \overline{BH}\right)\left(\overline{AH} - \overline{BH}\right)$$
$$= \overline{AB}\left[\left(\overline{AM} + \overline{MH}\right) - \left(\overline{BM} - \overline{MH}\right)\right] = 2c\overline{MH}$$

$\therefore \overline{MH} = \dfrac{m^2}{2c}$ ＝定值，即表示 P 點在過與 $\overline{AB}$ 的中點 M 相距 $\dfrac{m^2}{2c}$ 的 H 點的垂線上。

（2）反之，在此條垂線取另一點 Q 則亦可得 $\overline{QA}^2 - \overline{QB}^2 = 2c\overline{MH} = \overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = m^2$，由此可知 Q 點亦是適合條件的點。

※由（1）（2）可得證與兩定點 A、B 的距離的平方差等於定值的點所形成軌跡爲過此點作兩點連線的垂線（是否唯一？）。

討論：若 L 為 $\overline{AB}$ 的中垂線



圖（三）

（1）P 點在 L 上 $\Rightarrow \overline{PA}=\overline{PB}$ 。

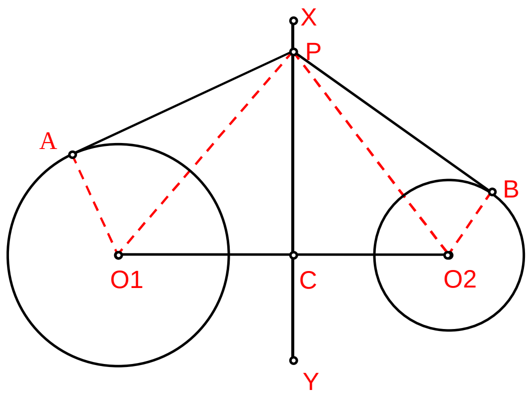
（2）P 點在 L 的右側，如圖（三）

$\because$ L 為 $\overline{AB}$ 的中垂線 $\therefore \overline{CA}=\overline{CB}$ ，又 $\overline{PC}+\overline{CB}>\overline{PB}$ $\therefore \overline{PC}+\overline{CA}>\overline{PB}$ $\therefore \overline{PA}>\overline{PB}$

（3）P 點在 L 的左側，同理可得 $\overline{PA}<\overline{PB}$

※由（1）（2）（3）可得結論，只要能確定 $\overline{PA}$ 與 $\overline{PB}$ 的大小，則此條垂線亦可確定為唯一。

研究(一)：如圖(四) $\overline{PA},\overline{PB}$ 分別切圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B，且 $\overline{PA}=\overline{PB}$，則 P 點分佈的軌跡為何？



圖（四）

解：過 P 點作 $\overline{O_1O_2}$ 的垂線 $\overleftrightarrow{XY}$ 垂足為 C

並連接 $\overline{O_1A},\overline{O_1P},\overline{O_2B},\overline{O_2P}$ （可設 $\overline{O_1A}\geq\overline{O_2B}$ ）

$\because$ A、B 為切點 $\therefore \angle PAO_1=\angle PBO_2=90°$

$\because \overline{PO_1}^2-\overline{O_1A}^2=\overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PO_2}^2-\overline{O_2B}^2$

$\Rightarrow \overline{PO_1}^2-\overline{PO_2}^2=\overline{O_1A}^2-\overline{O_2B}^2=$ 定值

（1）$\overline{O_1A}=\overline{O_2B}$ 則 $\overline{PO_1}^2-\overline{PO_2}^2=0\Rightarrow\overline{PO_1}^2=\overline{PO_2}^2\Rightarrow\overline{PO_1}=\overline{PO_2}$

$\therefore$ P 點在 $\overline{O_1O_2}$ 的中垂線。

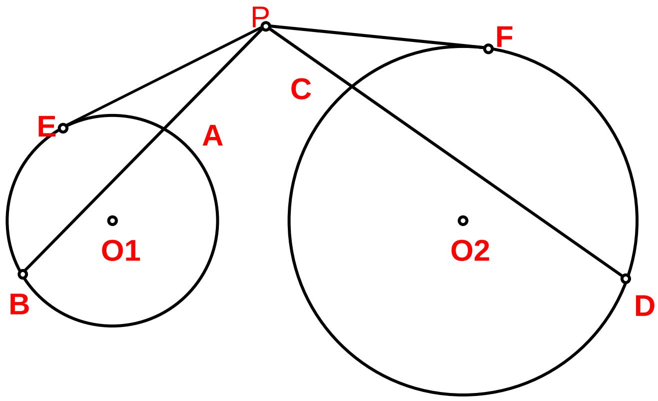
（2）$\overline{O_1A}>\overline{O_2B}$ 則 $\overline{PO_1}^2=\overline{PA}^2+\overline{O_1A}^2>\overline{PB}^2+\overline{O_2B}^2=\overline{PO_2}^2$

$\therefore \overline{PO_1}>\overline{PO_2}$ $\therefore$ P 點在 $\overline{O_1O_2}$ 的中垂線的右側

由【預備定理】可知此種 P 點分佈的軌跡正是過 P 點所作 $\overline{O_1O_2}$ 的垂線 $\overleftrightarrow{XY}$，而此條直線為唯一，我們可稱此條直線為〝姻圓線〞。

討論：相異兩圓若為等圓，則烟圓線明顯為連心線段的中垂線，後續將略去不再討論等圓的情形。

性質一：如圖（五），過 P 點分別作兩直線各交圓 O_1 與圓 O_2 於 A、B、C、D，若 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$ 則 P 點在圓 O_1 與圓 O_2 的烟圓線上。



圖（五）

證明：過 P 點分別作圓 O_1 與圓 O_2 的切線，切點為 E、F

$\Rightarrow \overline{PE}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}, \overline{PF}^2=\overline{PC}\times\overline{PD}$(註1)

又$\because \overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

$\because \overline{PE}^2=\overline{PF}^2$ $\therefore \overline{PE}=\overline{PF}$

$\therefore$P 點在圓 O_1 與圓 O_2 的烟圓線上。

註 1：如圖(六)$\overleftrightarrow{PA}$切圓 O 於 A，割線交圓 O 於 B、C，則 $\overline{PA}^2=\overline{PB}\times\overline{PC}$

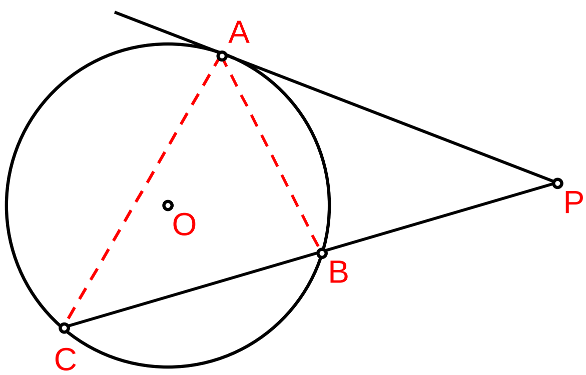
證明：連接 $\overline{AB},\overline{AC}$ $\because \overline{PA}$切圓O於A

$\therefore \angle PAB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\angle C$

又$\angle P=\angle P$

$\therefore \triangle PAB\sim\triangle PCA$(AA)

$\overline{PB}:\overline{PA}=\overline{PA}:\overline{PC}\Rightarrow\overline{PA}^2=\overline{PB}\times\overline{PC}$



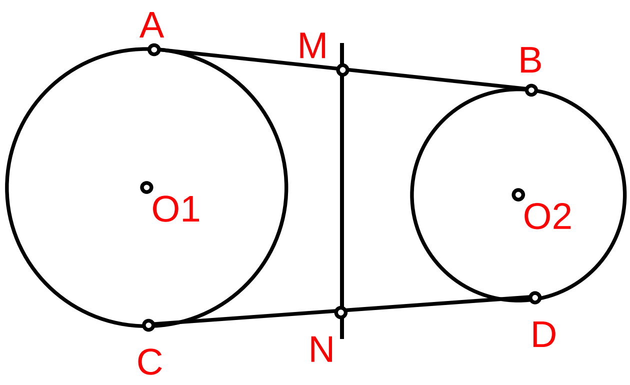
圖（六）

研究（二）： 當兩圓位置改變時（外離、外切、相交兩點、內切、內離），討論此條姻圓線的相關性質，並以尺規作圖畫出此條姻圓線。

一、兩圓外離：

（1）兩圓外離時兩公切線段的中點連線即為姻圓線。

已知：如圖（七）M、N 分別為 $\overline{AB},\overline{CD}$ 的中點且 A、B、C、D 為切點



圖（七）

求證：$\overleftrightarrow{MN}$ 為圓 O_1 與圓 O_2 的姻圓線。

證明：∵M 為 $\overline{AB}$ 中點，∴ $\overline{MA}=\overline{MB}$，

又 A、B 分別為切點

∴M 在兩圓的姻圓線上

同理 N 亦在兩圓的姻圓線上

∵相異兩點決定的直線只有一條

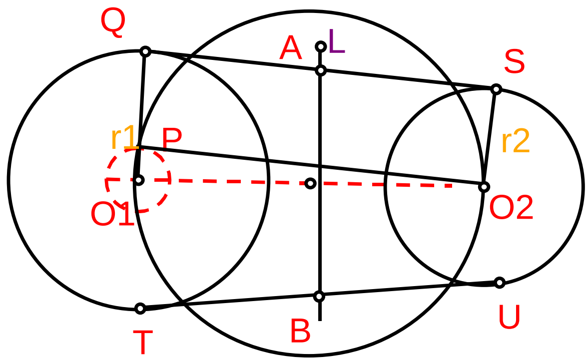
∴ $\overleftrightarrow{MN}$ 為圓 O_1 與圓 O_2 的姻圓線。

（2）已知：圓 O_1與圓 O_2外離且半徑分別為 $r_1, r_2\left(r_1 \rangle r_2\right)$

求作：兩圓的姻圓線。

作法：（1）以 O_1為圓心，$r_1 - r_2$ 為半徑作一圓

（2）以 $\overline{O_1O_2}$ 為直徑作一圓交前圓於點 P



（3）連 $\overleftrightarrow{O_1P}$ 交大圓於點 Q

（4）作 $\overline{O_2S}$ // $\overline{O_1Q}$ 且交圓 O_2於 S

則連接 $\overleftrightarrow{QS}$ 即為外公切線

同理作另一外公切線 $\overleftrightarrow{Tu}$

（5）分別取 $\overline{QS}$ 、$\overline{Tu}$ 的中點 A、B，連接 $\overleftrightarrow{AB}$ 即為所求。

證明：$\because \overline{PQ} // \overline{O_2S}, \overline{PQ} = \overline{O_2S}, \therefore$ 四邊形 $PQSO_2$ 為平行四邊形

$\because \overline{O_1O_2}$ 為直徑 $\therefore \angle O_1PO_2 = 90^0$

$\therefore$ 四邊形 $PQSO_2$ 為矩形 $\therefore \angle O_1QS = \angle O_2SQ = 90^0$

$\therefore \overleftrightarrow{QS}$ 為兩圓的公切線

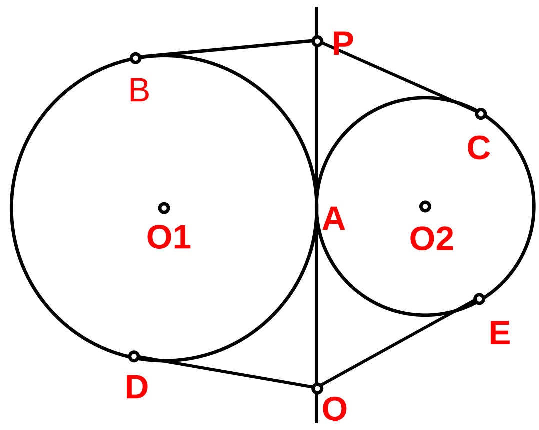
同理 $\overleftrightarrow{TU}$ 亦為兩圓的公切線

又 $\because$ A, B 分別為 $\overline{QS}, \overline{TU}$ 的中點 $\therefore \overleftrightarrow{AB}$ 為兩圓的姻緣線

二、兩圓外切時

（1）兩圓外切時，則內公切線即爲烟圓線。

已知：如圖（八）圓 O_1 與圓 O_2 外切於 A 點，$\overleftrightarrow{PQ}$ 爲兩圓的內公切線。



圖（八）

求證：$\overleftrightarrow{PQ}$ 爲兩圓的烟圓線

證明：（1）過 P、Q 分別作兩圓的切線

B、C、D、E 爲切點

又 $\overleftrightarrow{PQ}$ 爲兩圓的內公切線，A 爲切點，

$\therefore \overline{PB}=\overline{PA}=\overline{PC}$ ，$\overline{QD}=\overline{QA}=\overline{QE} \Rightarrow \overline{PB}=\overline{PC}$ ，$\overline{QD}=\overline{QE}$

∴P、Q 在兩圓的烟圓線上

∴ $\overleftrightarrow{PQ}$ 爲兩圓的烟圓線。

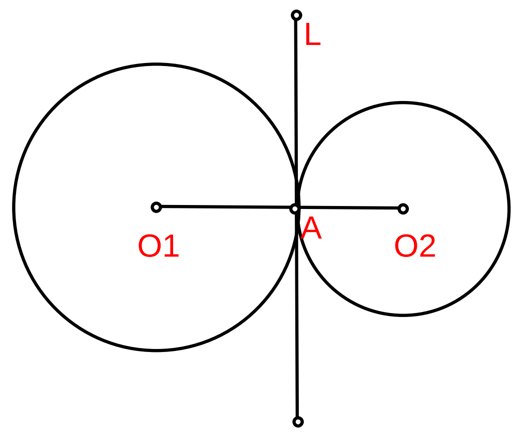
（2）已知：圓 O_1 與圓 O_2 外切於 A 點

求作：兩圓的烟圓線

作法：（1）連接 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$

（2）過 A 作 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 的垂線 L

即爲兩圓的烟圓線



三、兩圓相交兩點時

（1）兩圓相交兩點時，則過此兩點的直線即爲兩圓的烟圓線。

已知：如圖（九）圓 O_1與圓 O_2相交於 A、B 兩點。

求證：$\overleftrightarrow{AB}$ 爲兩圓的烟圓線

證明：在$\overleftrightarrow{AB}$上另取 P、Q 兩點，並

分別過 P、Q 做兩圓的切線

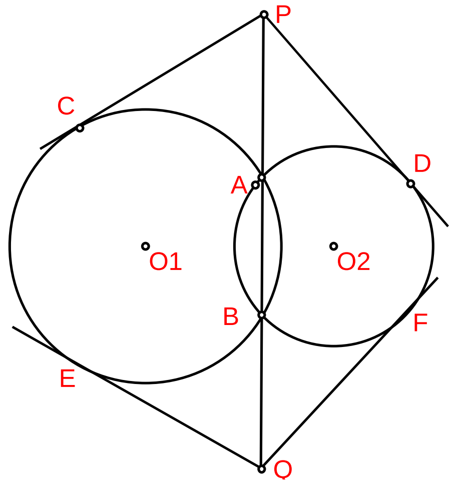
C、D、E、F 爲切點

$\Rightarrow \overline{PC}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PD}^2, \overline{QE}^2 = \overline{QB} \times \overline{QA} = \overline{QF}^2$

$\Rightarrow \overline{PC} = \overline{PD}, \overline{QE} = \overline{QF}$

$\Rightarrow$ P、Q在兩圓的烟圓線上

$\therefore \overleftrightarrow{AB}$ 爲兩圓的烟圓線



圖（九）

討論：在研究到兩圓相交兩點時，而欲找出其烟圓線時事實上遇到了困境，因在公弦上的點並無法做出兩圓的切線，如此，此條烟圓線必有〝間隙〞，正當扼腕時，幸經數學老師指導說：將來升高中時，對這條烟圓線將以解析的方式作另一種表達稱爲「**根軸**」，有如參考書〝幾何學的新探索〞中第 35 頁裡，設 X 軸通過兩圓的圓心，則兩圓的方程式爲

$x^2 + y^2 - 2a_1x + c_1 = 0, x^2 + y^2 - 2a_2x + c_2 = 0$ 其中 $a_2 \neq a_1$

而此條烟圓線即是直線 $x = \dfrac{c_2 - c_1}{2(a_2 - a_1)}$

（2）在（1）當中的結論雖然稍欠完善，幸好我們另外發現一個值得玩味的性質：『此條姻圓線的點若在公弦上，則在兩圓內以此點爲弦中點的兩圓的弦等長；反之，以兩圓內任一點爲弦中點的弦都等長，則此點必在公弦上』。

（a）已知：如圖（十），圓 O_1 交圓 O_2 於 A、B，M 爲 $\overline{AB}$ 上任一點，

且 M 分別爲兩圓中兩弦 $\overline{CD},\overline{EF}$ 的中點

求證：$\overline{CD}=\overline{EF}$

證明：連接 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 交 $\overline{AB}$ 於 N

$\Rightarrow \overleftrightarrow{O_1O_2}$ 爲 $\overline{AB}$ 的中垂線 $\therefore \overleftrightarrow{O_1O_2}\perp\overline{AB}$

連接 $\overline{O_1C}$、$\overline{O_1A}$、$\overline{O_2E}$、$\overline{O_2A}$

$\Rightarrow \overline{O_1C}=\overline{O_1A}$、$\overline{O_2E}=\overline{O_2A}$

$\because$ M 分別爲 $\overline{CD},\overline{EF}$ 的中點

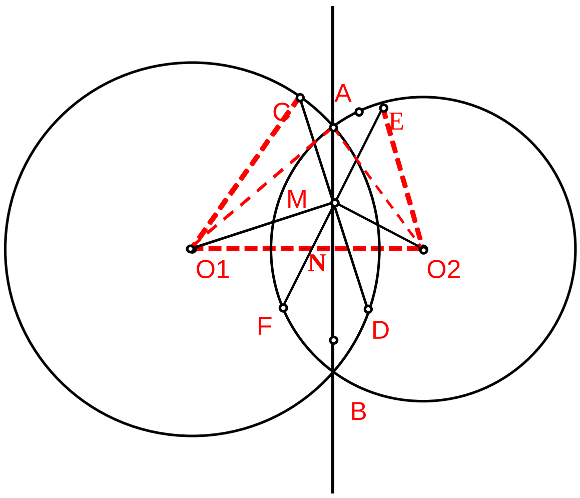
$\therefore \overline{O_1M}\perp\overline{CD},\overline{O_2M}\perp\overline{EF}$

$$\Rightarrow \overline{O_1C}^2-\overline{O_1M}^2=\overline{O_1A}^2-\overline{O_1M}^2$$
$$=\left(\overline{O_1N}^2+\overline{AN}^2\right)-\left(\overline{O_1N}^2+\overline{MN}^2\right)$$
$$=\overline{AN}^2-\overline{MN}^2$$

同理 $\overline{O_2E}^2-\overline{O_2M}^2=\overline{AN}^2-\overline{MN}^2$

$\therefore \overline{O_1C}^2-\overline{O_1M}^2=\overline{O_2E}^2-\overline{O_2M}^2$ 即 $\overline{CM}^2=\overline{EM}^2$

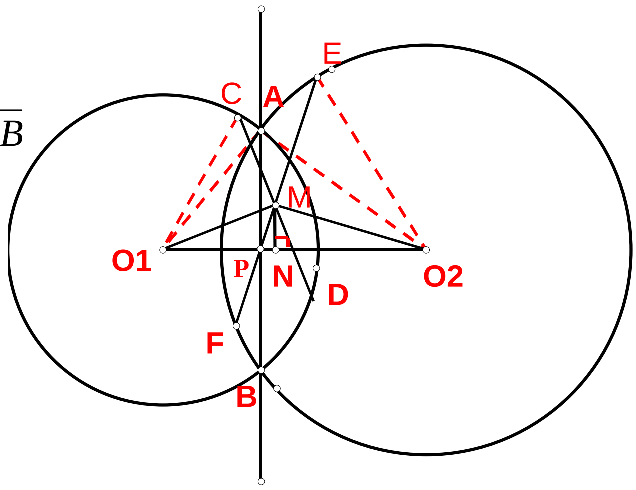
$\therefore \overline{CM}=\overline{EM}$ $\therefore \overline{CD}=\overline{EF}$



圖（十）

（b）已知：如圖（十一），圓 O_1 交圓 O_2 於 A、B，且 M 分別為兩圓中兩弦 $\overline{CD},\overline{EF}$ 的中點，且 $\overline{CD}=\overline{EF}$

求證： M 在 $\overline{AB}$ 上



圖（十一）

證明：連接 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 交 $\overline{AB}$ 於 P

$\Rightarrow \overleftrightarrow{O_1O_2}$ 為 $\overline{AB}$ 的中垂線 $\therefore \overleftrightarrow{O_1O_2}\perp\overline{AB}$

連接 $\overline{O_1C}$、$\overline{O_1A}$、$\overline{O_2E}$、$\overline{O_2A}$

$\Rightarrow \overline{O_1C}=\overline{O_1A}$、$\overline{O_2E}=\overline{O_2A}$

作 $\overline{MN}\perp\overline{O_1O_2}$ 於 N

$\because$ M 分別為 $\overline{CD},\overline{EF}$ 的中點

$\therefore \overline{O_1M}\perp\overline{CD},\overline{O_2M}\perp\overline{EF}$ 、 $\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{CD},\overline{EM}=\frac{1}{2}\overline{EF}$

$\because \overline{CD}=\overline{EF}\ \therefore \overline{CM}=\overline{EM}$

$\Rightarrow \overline{CM}^2=\overline{EM}^2 \Rightarrow \overline{O_1C}^2-\overline{O_1M}^2=\overline{O_2E}^2-\overline{O_2M}^2$

$\therefore \overline{O_1A}^2-\overline{O_1M}^2=\overline{O_2A}^2-\overline{O_2M}^2$

$\Rightarrow \left(\overline{AP}^2+\overline{O_1P}^2\right)-\left(\overline{MN}^2+\overline{O_1N}^2\right)=\left(\overline{AP}^2+\overline{O_2P}^2\right)-\left(\overline{MN}^2+\overline{O_2N}^2\right)$

$\Rightarrow \overline{O_1P}^2-\overline{O_1N}^2=\overline{O_2P}^2-\overline{O_2N}^2 \Rightarrow \overline{O_2N}^2-\overline{O_1N}^2=\overline{O_2P}^2-\overline{O_1P}^2$

$\Rightarrow \left(\overline{O_2N}+\overline{O_1N}\right)\left(\overline{O_2N}-\overline{O_1N}\right)=\left(\overline{O_2P}+\overline{O_1P}\right)\left(\overline{O_2P}-\overline{O_1P}\right)$

$\Rightarrow \overline{O_1O_2}\times\left(\overline{O_2N}-\overline{O_1N}\right)=\overline{O_1O_2}\times\left(\overline{O_2P}-\overline{O_1P}\right)$

$\Rightarrow \overline{O_2N}-\overline{O_1N}=\overline{O_2P}-\overline{O_1P}$

$\Rightarrow \overline{O_1P}-\overline{O_1N}=\overline{O_2P}-\overline{O_2N} \Rightarrow -\overline{PN}=\overline{PN}$

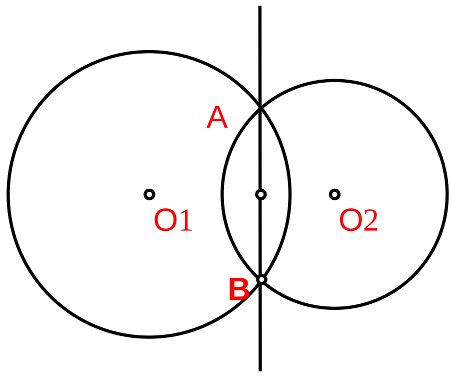
$\Rightarrow 2\overline{PN}=0 \therefore \overline{PN}=0$

即 P 點與 N 點重合 $\therefore$ M 在公弦 $\overline{AB}$ 上

（3）已知：圓 O_1 與圓 O_2 相交於 A、B

求作：兩圓的姻圓線

作法：連接 $\overleftrightarrow{AB}$ 即爲所求



四、兩圓內切時

（1）當兩圓內切時，外公切線即是兩圓的姻圓線

已知：如圖（十二）圓 O_1 與圓 O_2 內切於

A 點，L 爲兩圓的外公切線

求證：L 爲兩圓的姻圓線

證明：在 L 上任取一點 P 分別作兩圓的

切線，切點分別是 B、C

∵L 爲兩圓的外公切線 A 爲切點

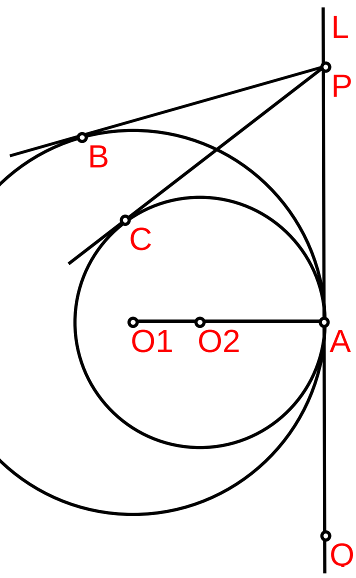
$\Rightarrow \overline{PB}=\overline{PA}, \overline{PC}=\overline{PA} \therefore \overline{PB}=\overline{PC}$

∴P 在兩圓的姻圓線上

同理在 L 上另取一點 Q 亦可得證

Q 在兩圓的姻圓線上

∴L 爲兩圓的姻圓線。



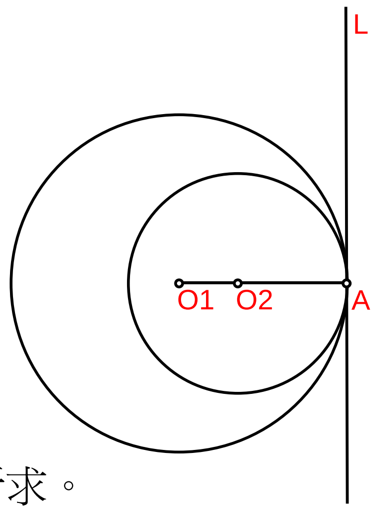
圖（十二）

（2）已知：圓 O_1 與圓 O_2 內切於 A

求作：兩圓的姻圓線

作法：（1）連接 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$

（2）過 A 作 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 的垂線 L 即爲所求。



五、兩圓內離時：

（1）兩圓若是同心圓，則沒有姻圓線。

已知：如圖（十三），P 爲任一點，$\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 分別切兩同心圓於 A、B

求證：$\overline{PA} \neq \overline{PB}$

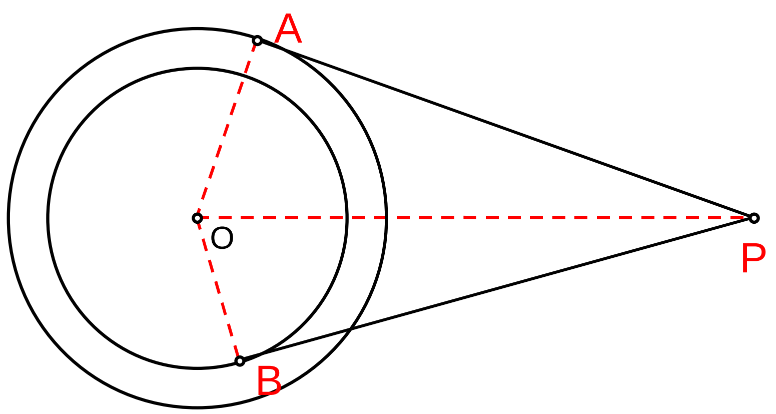
證明：連接 $\overline{OP}$、$\overline{OA}$、$\overline{OB}$

$\because \overline{PA}$、$\overline{PB}$ 分別切兩同心圓於 A、B

$\therefore \overline{OA} \perp \overline{PA}$、$\overline{OB} \perp \overline{PB}$

$\Rightarrow \overline{PA}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2 \neq \overline{OP}^2 - \overline{OB}^2 = \overline{PB}^2$

$\therefore \overline{PA}^2 \neq \overline{PB}^2$ 即 $\overline{PA} \neq \overline{PB}$



圖（十三）

（2）兩非同心圓 O_1與O_2，半徑分別爲 R、r（R>r）；且$\overline{O_1O_2}=a$

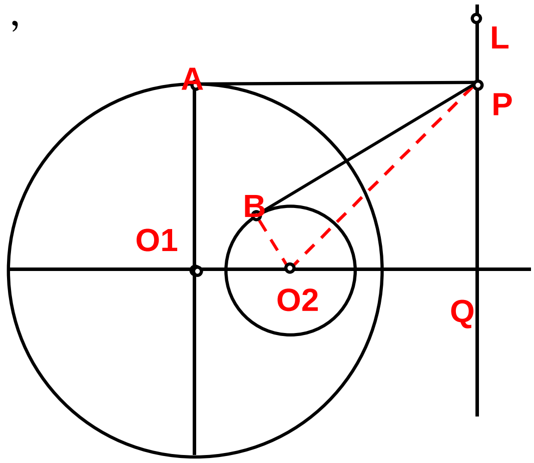
則兩圓的姻圓線與O_1的距離爲$\dfrac{R^2-r^2+a^2}{2a}$（與O_2距離$\dfrac{R^2-r^2-a^2}{2a}$）。

已知：如圖（十四），圓 O_1與圓O_2內離，

半徑分別爲 R、r（R>r）

且$\overline{O_1O_2}=a$，L 爲兩圓的姻圓

線且 L 交$\overleftrightarrow{O_1O_2}$於 Q



圖（十四）

求證：$\overline{O_1Q}=\dfrac{R^2-r^2+a^2}{2a}$

證明：（1）過 O_1作$\overleftrightarrow{O_1O_2}$的垂線交圓 O_1於 A

（2）過 A 作圓 O_1的切線交 L 於 P

$\Rightarrow \overline{PA}\perp\overline{O_1A}$

（3）過 P 作圓O_2的切線，切點爲 B

∵L 爲兩圓的姻圓線 ∴$\overline{PA}=\overline{PB}, L\perp\overleftrightarrow{O_1O_2}$

（4）可得四邊形 O_1APQ 爲矩形

$\therefore \overline{PA}=\overline{PB}=\overline{O_1Q}=d$ 、 $\overline{PQ}=\overline{O_1A}=R$

（5）連接$\overline{O_2B},\overline{O_2P}\because B$爲切點$\therefore \overline{O_2B}\perp\overline{PB}$

$\Rightarrow \overline{PB}^2+\overline{O_2B}^2=\overline{O_2P}^2=\overline{PQ}^2+\overline{O_2Q}^2$

$\Rightarrow d^2+r^2=R^2+(d-a)^2$

$\Rightarrow d^2-(d-a)^2=R^2-r^2$

$\Rightarrow a(2d-a)=R^2-r^2$

$\Rightarrow d=\dfrac{R^2-r^2+a^2}{2a}$

$\therefore \overline{O_1Q}=\dfrac{R^2-r^2+a^2}{2a}$

已知：如圖（十五），兩內離圓

O_1、O_2（非同心圓），半

徑分別爲 R、r（R＞r），$\overline{O_1O_2}=a$

求作：兩圓的烟圓線

作法：（1）連接$\overleftrightarrow{O_1O_2}$交圓 O_1於 P

（2）以 P 爲圓心、R 爲半徑

畫圓 P 交$\overleftrightarrow{O_1O_2}$於 E

（3）在$\overline{O_1P}$上取一點 A 使$\overline{PA}=r$

（4）以 A 爲圓心，2a 爲半徑畫

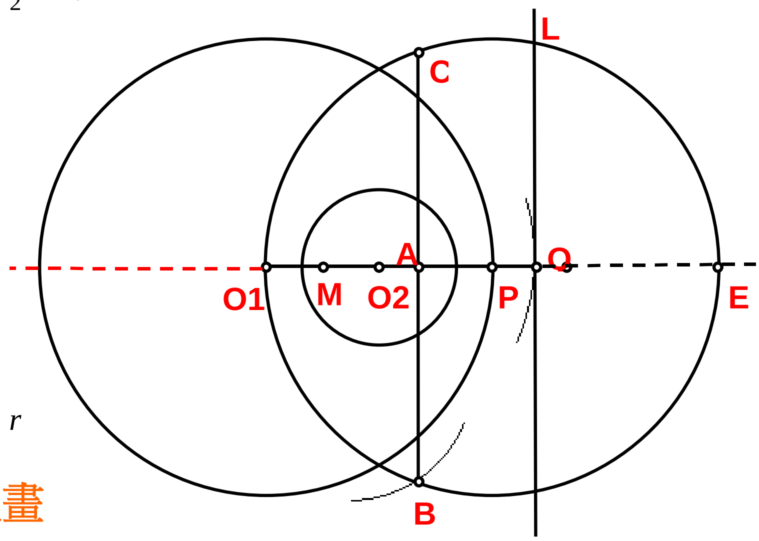
一弧交圓 P 於 B

（5）連$\overleftrightarrow{AB}$交圓 P 於另一點 C

（6）取$\overline{O_1O_2}$的中點 M

（7）以 M 爲圓心、$\overline{AC}$爲半徑畫一弧交$\overleftrightarrow{O_1O_2}$於 Q

（8）過 Q 作$\overleftrightarrow{O_1O_2}$的垂線 L 即爲所求



圖（十五）

證明：在圓 P 中 $\overline{AB}\times\overline{AC}=\overline{O_1A}\times\overline{AE}$（註 2）

$$\Rightarrow 2a\times\overline{AC}=(R-r)(R+r)$$

$$\Rightarrow \overline{AC}=\frac{R^2-r^2}{2a}=\overline{MQ}$$

$$\Rightarrow \overline{O_1Q}=\overline{O_1M}+\overline{MQ}$$

$$=\frac{1}{2}a+\frac{R^2-r^2}{2a}$$

$$=\frac{R^2-r^2+a^2}{2a}$$

∴直線 L 爲兩圓的烟圓線

註 2：如圖（十六），$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 爲圓 O 內交於 E 的兩條弦

則 $\overline{AE}\times\overline{BE}=\overline{CE}\times\overline{DE}$

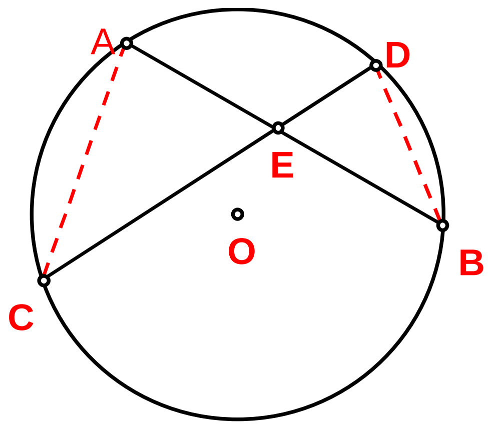
證明：連接 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ $\Rightarrow$

$$\angle C=\angle B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}，\angle A=\angle D=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

$$\therefore \Delta AEC \sim \Delta DEB（AA）$$

$$\therefore \overline{AE}:\overline{DE}=\overline{CE}:\overline{BE}$$

$$\therefore \overline{AE}\times\overline{BE}=\overline{CE}\times\overline{DE}$$



圖（十六）

研究三：研究至此，有種欲罷不能的衝動，試想若是推至三個圓時，所形成三條烟圓線之間有何關係？又會有何奇妙的性質？

（1）相異三個圓所形成的三條烟圓線要麼互相平行；不然就會相交於一點（註 3：若三個圓圓心共線且兩兩相切，則三條烟圓線都是同一條公切線，無須加以討論）。

已知：L、M、N 分別是圓 O_1 與圓 O_2、圓 O_2 與圓 O_3

、圓 O_3 與圓 O_1 的烟圓線

求證：L〃M〃N 或 L、M、N 三直線相交於一點

證明：（1）若三圓心 O_1、O_2、O_3 三點共線時

∵L、M、N 分別是

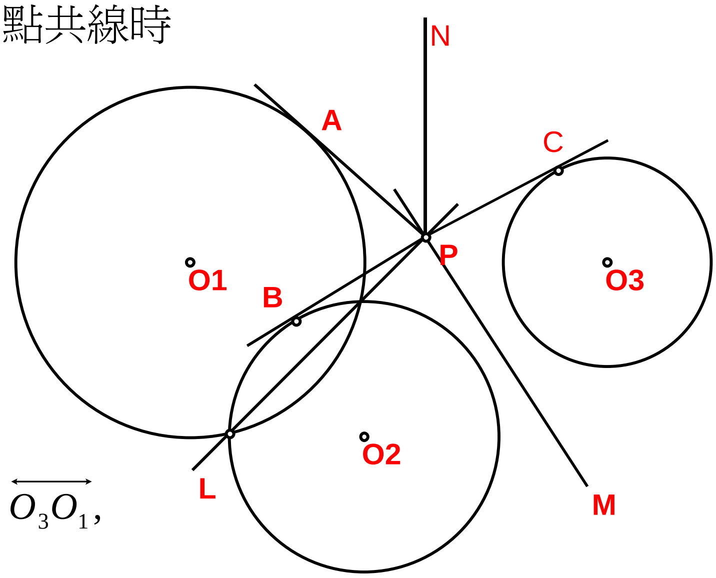
圓 O_1 與圓 O_2、

圓 O_2 與圓 O_3、

圓 O_3 與圓 O_1 的烟圓線

$\therefore L \perp \overleftrightarrow{O_1O_2}, M \perp \overleftrightarrow{O_2O_3}, N \perp \overleftrightarrow{O_3O_1},$

∴L〃M〃N



（2）若三圓心 O_1、O_2、O_3 三點不共線時

設 L 交 M 於一點 P 並過 P 分別作三圓的切線

，切點分別爲 A、B、C

∵L、M 分別爲圓 O_1 與圓 O_2、圓 O_2 與圓 O_3 的烟圓線

$\therefore \overline{PA} = \overline{PB}, \overline{PB} = \overline{PC} \Rightarrow \overline{PA} = \overline{PC}$

∴P 點亦在圓 O_3 與圓 O_1 的烟圓線 N 上

即 L、M、N 三直線相交於一點 P（稱爲烟圓心）

討論：（1）發現上述結果，讓我們感到雀躍萬分，尤其我們更可利用此項結果，在作兩圓的烟圓線時，可先作另一圓（與兩已知圓都相交兩點，最爲簡單）而三個圓的圓心不共線，再由兩烟圓線的交點求出烟圓心，再過此點，作兩已知圓連心線的垂線即爲所求。

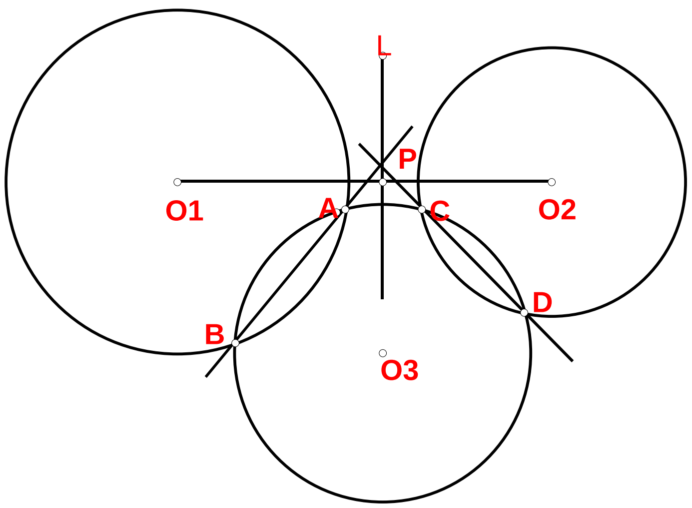
已知：圓 O_1 與圓 O_2

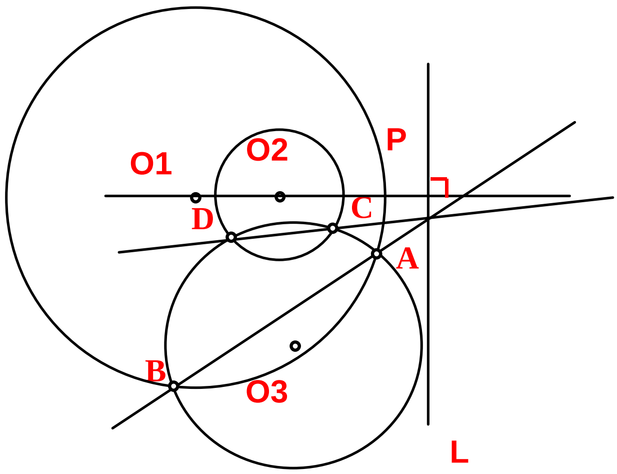
求作：圓 O_1 與圓 O_2 的烟圓線

作法：1.任作一圓 O_3（O_3 不在 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 上）且分別交圓 O_1、圓 O_2 於 A、B、C、D

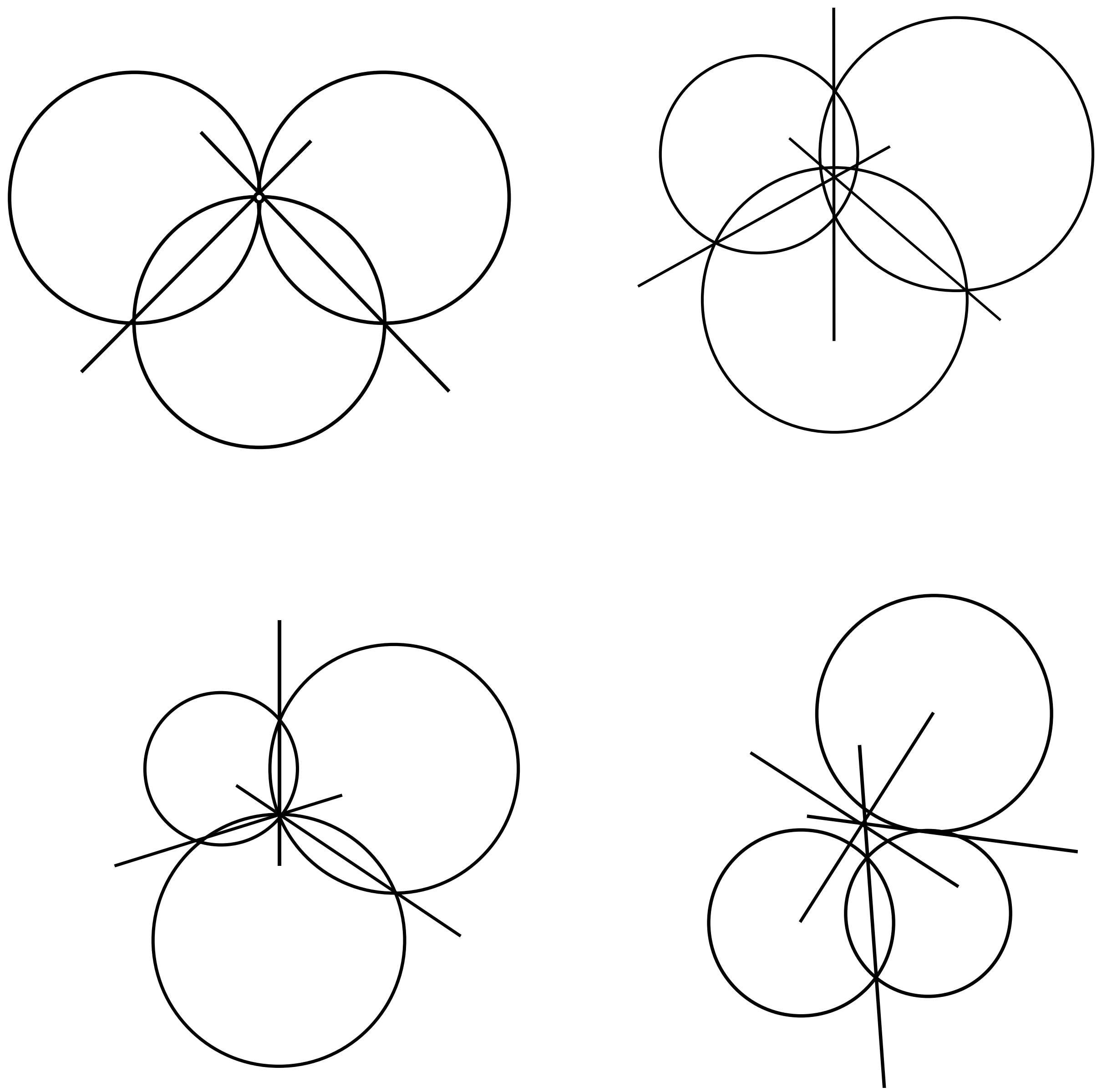
2.連接 $\overleftrightarrow{AB}$、$\overleftrightarrow{CD}$ 且 $\overleftrightarrow{AB}$ 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 相交於一點 P

3.過 P 作 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 的垂線 L 即爲圓 O_1 與圓 O_2 的烟圓線





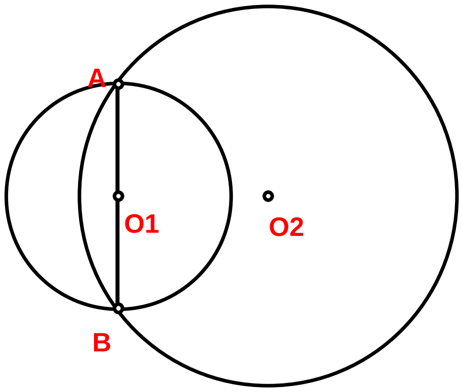
（2）由研究（二）的過程裡可以發現兩圓的姻圓線除了切點或公弦以外，其餘的點都在兩圓的外部。所以姻圓心的位置可能就是切點或公弦的端點或在三圓的內部或在三圓的外部（如下圖所示），但引發我們興趣的是，當姻圓心都在三圓的內部或外部時，以姻圓心為圓心的圓與已知三圓有何特殊的關係？



研究（四）：當姻圓心分別在三圓的內部及外部時，此姻圓心分別為某一個被三圓皆平分及與三圓都直交的圓的圓心。

（1）當姻圓心在三圓內部時，則此三圓都為某一個以三圓的姻圓心為圓心的圓的平分圓（註 4）。

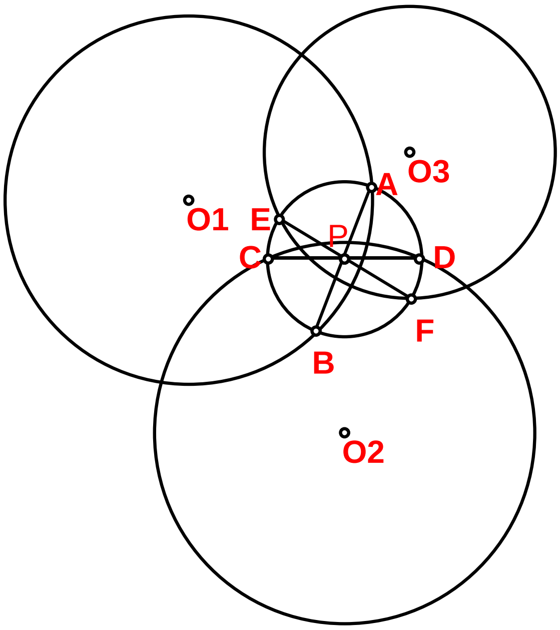
註 4：如圖（十七），圓 O_1 與圓 O_2 交於 A、B 兩點，若公弦 $\overline{AB}$ 恰為圓 O_1 的直徑，則圓 O_2 即為圓 O_1 的平分圓



圖（十七）

已知：如圖（十八），P 為三圓 O_1、O_2、O_3 的姻圓心且 P 點在三圓的內部

求證：此三圓都是某一以 P 為圓心的圓的平分圓



證明：分別以 P 為中點各作三圓的三條弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$

由研究一

∵P 為三圓的姻圓心，

$\therefore \overline{AB}=\overline{CD}=\overline{EF}$

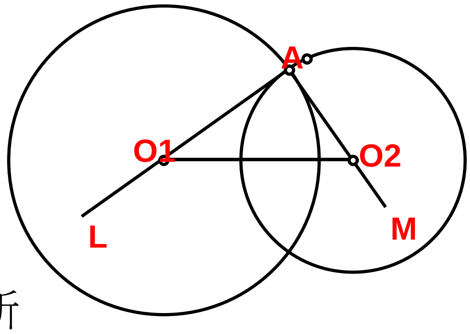
$\Rightarrow \overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PD}=\overline{PE}=\overline{PF}=r$

圖（十八）

∴以 P 為圓心，r 為半徑所作的圓即為三圓所平分

（2）當姻圓心在三圓的外部時，此姻圓心爲與三圓直交（註 5）之圓的圓心

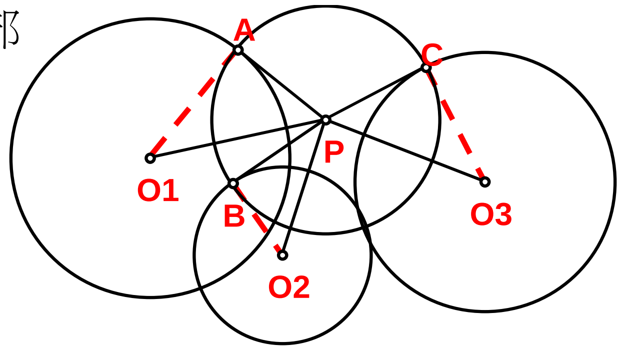
註 5：設 A 爲兩圓 O_1與O_2的交點，而 L、M 爲過 A 點且分別是兩圓的切線，若 L⊥M，則稱圓 O_1與O_2直交。又根據切線的性質可知兩圓心 O_1、O_2分別在 L、M 上，所以當圓 O_1與O_2直交，此時$\overline{O_1O_2}^2 = r_1^2 + r_2^2$（$r_1, r_2$爲圓 O_1與O_2的半徑）



已知：如圖（十九），P 爲三圓 O_1、O_2、O_3（半徑分別爲r_1、r_2、r_3）的姻圓心，且 P 在三圓的外部

求證：P 爲與三圓直交之圓的圓心

證明：過 P 分別作三圓的切線，切點分別是 A、B、C



圖（十九）

∵P 爲三圓的姻圓心∴$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = r$

∴以 P 爲圓心，r 爲半徑所作之圓必通過 A、B、C 三點

連接$\overline{O_1A}$、$\overline{O_2B}$、$\overline{O_3C} \Rightarrow \angle O_1AP = \angle O_2BP = \angle O_3CP = 90°$

$\therefore \overline{O_1P}^2 = \overline{O_1A}^2 + \overline{PA}^2 = r_1^2 + r^2 \Rightarrow$圓P與圓$O_1$直交

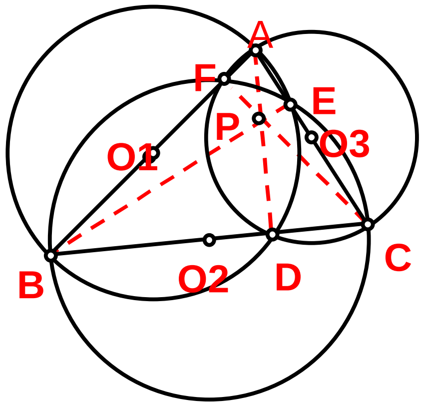
$\overline{O_2P}^2 = \overline{O_2B}^2 + \overline{PB}^2 = r_2^2 + r^2 \Rightarrow$圓P與圓$O_2$直交

$\overline{O_3P}^2 = \overline{O_3C}^2 + \overline{PC}^2 = r_3^2 + r^2 \Rightarrow$圓P與圓$O_3$直交

∴P 爲與三圓 O_1、O_2、O_3直交的圓的圓心

研究五：研究至此，心中充滿了成就感，而數學老師希望我們是否能更進一步的探究，是否能再發現一些其他的性質，研究團隊剎那間又〝武裝〞起來，絞盡腦汁，皇天不負〝有心人〞，果真又讓我們發現了下列一些性質：

(1)以三角形的三個邊爲直徑所作三圓的姻圓心恰爲此三角形的垂心



圖（二十）

已知：如圖（二十）$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$分別爲三圓 O_1、O_2、O_3的直徑，P 爲此三圓的姻圓心

求證：P 爲△ABC 的垂心

證明：設三圓 O_1、O_2、O_3兩兩的另一交點，分別是 D、E、F

則 D、E、F 三點必分別在$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{CA}$、$\overleftrightarrow{AB}$上（註 6）

連接$\overleftrightarrow{AD}$、$\overleftrightarrow{BE}$、$\overleftrightarrow{CF}$必交於姻圓心 P 點上

∵ $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$分別爲三圓的直徑

∴ ∠ADB=∠BEC=∠CFA=90°

∴ $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 分別爲 ΔABC 三邊上的高

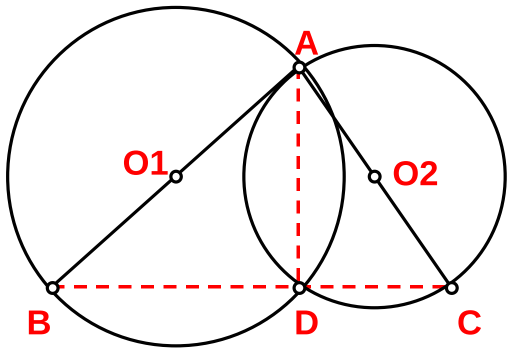
∴P 爲 ΔABC 的垂心

註 6：如圖（二十一），設分別以$\overline{AB}$、$\overline{AC}$爲直徑之兩圓 O_1、O_2的另一交點 D

連接$\overline{AD}$、$\overline{BD}$、$\overline{CD}$ ⇒ ∠ADB=∠ADC=90°

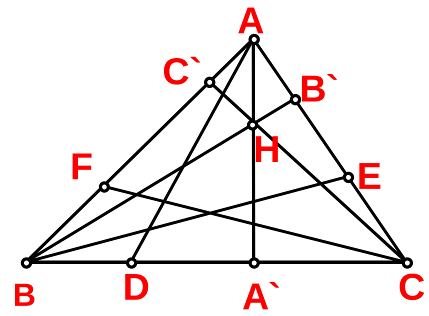
∴ ∠ADB+∠ADC=180°

∴B、D、C 三點共線



圖（二十一）

(2)任一三角形的垂心亦爲分別連接三頂點與對邊任一點的三條線段爲直徑的三個圓的姻圓心。



圖(二十二)

已知:如圖(二十二),H 爲 ΔABC 的垂心,D、E、F 分別爲 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 上任一點

求證:H 爲分別以 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 爲直徑的三圓的姻圓心

證明:連接 $\overleftrightarrow{AH}$、$\overleftrightarrow{BH}$、$\overleftrightarrow{CH}$ 分別交 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 於 A'、B'、C'

∵H 爲 ΔABC 的垂心

∴H 亦爲以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 爲直徑所作三圓 O_1、O_2、O_3 的姻圓心

∴在三圓 O_1、O_2、O_3 中以 H 爲中點的弦等長(設長爲 d)

$$\therefore \overline{AH}\times\overline{A'H}=\overline{BH}\times\overline{B'H}=\overline{CH}\times\overline{C'H}=\frac{1}{4}d^2$$ (註 7)

∵H 爲 ΔABC 的垂心 $\overline{AA'}\perp\overline{BC}$、$\overline{BB'}\perp\overline{AC}$、$\overline{CC'}\perp\overline{AB}$

∴ $\overline{AA'}$、$\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$ 分別爲以 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 爲直徑的三圓 O_4、O_5、O_6 的弦

∴在三圓 O_4、O_5、O_6 中設以 H 爲中點的弦的長分別爲 d_1、d_2、d_3

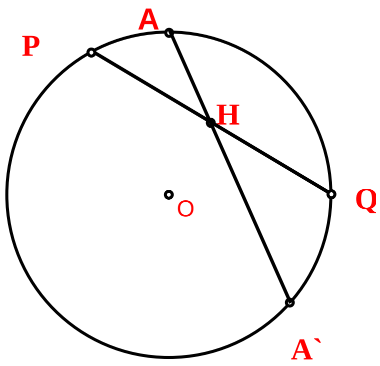
$$\Rightarrow \frac{1}{4}d_1^2=\overline{AH}\times\overline{A'H},\ \frac{1}{4}d_2^2=\overline{BH}\times\overline{B'H},\ \frac{1}{4}d_3^2=\overline{CH}\times\overline{C'H}$$

$$\Rightarrow d_1^2=d_2^2=d_3^2 \qquad \therefore d_1=d_2=d_3$$

由研究二∵在三圓 O_4、O_5、O_6 中,以 H 爲中點的弦等長

∴H 爲分別以 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 爲直徑的三圓的姻圓心

註 7：如圖 H 爲弦 $\overline{PQ}$ 的中點且 $\overline{PQ}$ =d

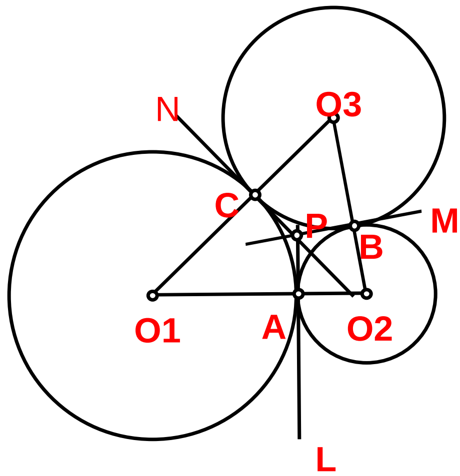


$\Rightarrow \overline{AH} \times \overline{A`H} = \overline{PH} \times \overline{QH}$

$= \frac{1}{2}d \times \frac{1}{2}d = \frac{1}{4}d^2$

（3）當三圓兩兩外切時，則三圓的姻圓心爲以三圓心爲頂點的三角形的內心。

已知：如圖（二十三），三圓 O_1、O_2、O_3 分別兩兩外切於 A、B、C，且 P 爲三圓 O_1、O_2、O_3 的姻圓心



圖（二十三）

求證：P 爲 $\Delta O_1O_2O_3$ 的內心

證明：分別過 A、B、C 三點作三圓 O_1、O_2、O_3 兩兩的內公切線 L、M、N

$\Rightarrow L \perp \overline{O_1O_2}$、$M \perp \overline{O_2O_3}$、$N \perp \overline{O_3O_1}$

∵P 爲三圓的姻圓心

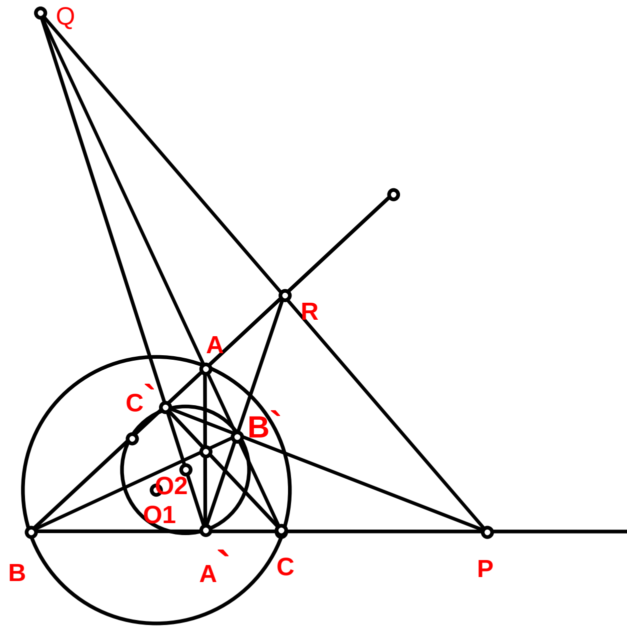
∴L、M、N 三直線交於 P 點，且 $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$

又∵ $\overline{PA} \perp \overline{O_1O_2}$、$\overline{PB} \perp \overline{O_2O_3}$、$\overline{PC} \perp \overline{O_3O_1}$

∴P 爲 $\Delta O_1O_2O_3$ 的內心

（4）作任一三角形的三高，而三垂足之間兩兩連接的三條直線與三邊的延長線分別交於三點，則此三點必在原三角形與以三垂足爲頂點的三角形的兩外接圓的姻圓線上。

已知：如圖（二十四）若從△ABC的各頂點向對邊做垂線，垂足分別爲$A^{`}$、$B^{`}$、$C^{`}$，又$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{B'C'}$、$\overleftrightarrow{AC}$與$\overleftrightarrow{A'C'}$、$\overleftrightarrow{AB}$與$\overleftrightarrow{A'B'}$的三個交點爲 P、Q、R



圖（二十四）

求證：P、Q、R 三點在△ABC 與$\Delta A^{`}B^{`}C^{`}$兩外接圓 O_1、O_2的姻圓線上

證明：$\because \angle AA'B = \angle BB'A = 90°$

$\therefore A$、B、A'、B'四點共圓

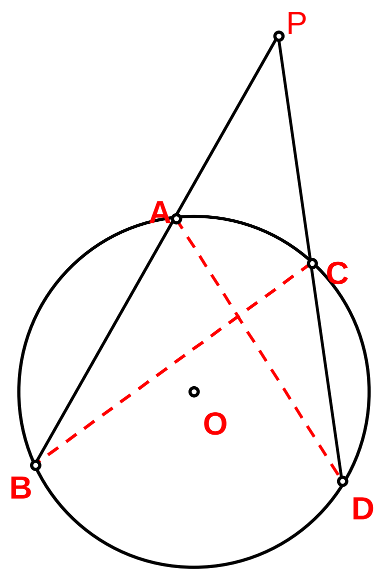
$\therefore \overline{RA} \times \overline{RB} = \overline{RB'} \times \overline{RA'}$ （註 8）

由研究一的性質可知 R 在圓 O_1與圓 O_2的姻圓線上

同理 P、Q 兩點亦在圓 O_1與圓 O_2的姻圓線上

∴P、Q、R 在同一條直線上

註 8：過 P 做圓 O 的兩條割線，交點爲 A、B、C、D，則$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$



證明：連接$\overline{BC}$、$\overline{AD}$

$\Rightarrow \angle B = \angle D = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，$\angle P = \angle P$

$\therefore \Delta PBC \sim \Delta PDA(AA)$

$\overline{PB}:\overline{PD} = \overline{PC}:\overline{PA}$

$\therefore \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

六、結論

一時的〝靈光乍現〞，竟能激出我們那麼大的火花，雖然這麼漫長的研究過程中，是如此的辛苦，但在最後獲得以下的結論卻又是那麼的甘甜及滿足。

1.至兩圓的切線長相等的點，所分佈的軌跡即過此點所做連心線的垂線，稱爲姻圓線。

2.兩圓位置改變時（外離、外切、相交兩點、內切、內離）姻圓線與兩圓的關係如下：

（1）兩圓外離時，則兩公切線段中點的連線即爲姻圓線。

（2）兩圓外切時，則內公切線即爲姻圓線。

（3）兩圓相交兩點時，則此兩點的連線即爲姻圓線。

（4）兩圓內切時，則外公切線即爲姻圓線。

（5）兩圓內離時，若是同心圓則無姻圓線，而若不是同心圓則在連心線上與大圓圓心距離$\frac{R^2-r^2+a^2}{2a}$（與小圓圓心距離$\frac{R^2-r^2-a^2}{2a}$）處作連心線的垂線即爲姻圓線。（其中 R＝大圓半徑、r＝小圓半徑、a＝連心線長）。

3.三圓的圓心若共線時，則三條姻圓線必重合或平行，而三圓的圓心若不共線時，則三條姻圓線相交於一點，（稱爲姻圓心），進而可利用此結論，在畫兩圓的姻圓線時，可先作出另一圓，而三圓的圓心不共線，再由與前兩圓的兩條姻圓線先求出姻圓心，而過此

點作兩已知圓連心線的垂線即爲所求。

4.當奼圓心分別在三圓的內部及外部時，則此奼圓心分別爲某一個被三圓皆平分及與三圓都直交的圓的圓心。

5.任一三角形的垂心亦爲分別連接三頂點與對邊任一點的三線段爲直徑的三個圓的奼圓心。

6.當三圓兩兩外切時，則奼圓心爲以三圓心爲頂點的三角形的內心。

7.作任一三角形的三高，而三垂足之間兩兩連接的三條直線與三邊的延長線分別交於三點，則此三點必在原三角形與以三垂足爲頂點的三角形的兩外接圓的奼圓線上。

七、參考資料

（1）國中數學課本第五冊（國立編譯館）

（2）國中選修數學第五冊（國立編譯館）

（3）國中數學（南一版）第二冊

（4）幾何學的新探索（凡異出版社）

（5）幾何學辭典（九章出版社譯）

評　語

030415 國中組數學科

姻圓一線牽

主題名稱頗富創意，數學深度若再加強，內容將更充實。