

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030414

連江縣立敬恆國民中學

指導老師姓名

李昕平

作者姓名

鄭灼明

鄭灼英

林芷卉

黃詩婷

# 您樂透了嗎？

## 壹、摘要

利用硬幣、骰子、撲克牌、電算器等，經由實驗、操作及推論，驗證了簡單的機率原則，並且求出簡單的規律性，進而利用這些規律求解出撲克牌梭哈遊戲中，同花大順、四梅、葫蘆的組合數及出現機率，最後，激起我們研究動機的題目----「中樂透頭獎的機率是多少？」

## 貳、研究動機

前一陣子的新聞報導，常談論有關樂透的種種，常出現--「中樂透頭獎的機率是多少？」的話題，引起了想要探究出答案的動機，於是我們去請教老師。老師說：「你們先研讀熟第六冊數學課本中有關機率的部份，再利用骰子及撲克牌，即可探究出答案。大家都玩過撲克牌的梭哈遊戲吧！只要能求出梭哈遊戲中各種組合的機率，樂透頭獎的中獎機率也就呼之欲出了。」經過老師的提示，我們決定研究梭哈遊戲中，各種組合的機率，並利用所得的規律，求解出樂透頭獎的中獎機率。

## 參、研究目的

- 一、利用投擲骰子的實驗，證明「一個骰子試驗可能的結果有 6 種，則每一種結果發生的機率是  $1/6$ 。」
- 二、利用投擲骰子的實驗，證明「一個試驗可能的結果有  $n$  種，則每一種結果發生的機率是  $1/n$ 。」
- 三、再利用投擲骰子的實驗，證明「一個試驗可能的結果有  $n$  種，如果一個事件包含  $m$  種可能的結果，則這個事件發生的機率是  $m/n$ 。」
- 四、利用實際操作撲克牌的過程，探究出各種組合的個數及其規律。
- 五、求解出撲克牌梭哈遊戲中，各種情形的出現機率。
- 六、利用上述研究的結果及規律，求解出樂透頭獎的中獎機率。

## 肆、研究設備及器材

硬幣、骰子、撲克牌、計算機

## 伍、研究過程及方法

- 一、研究一事件發生的機率，可以使用的方法有投擲硬幣、投擲骰子、抽撲克牌等多種方法，先評估使用何種方法較佳？
  - (一) 投擲骰子：操作及統計也都非常的方便，結果有六種，拋擲上去之後，隨機落下，具有效力，可以利用。
  - (二) 抽撲克牌：結果有五十二種，數目大，實驗次數要龐大結果才有意義，而且洗牌很難做到徹底，另人為抽取可能影響結果，不是很理想，因此先不予採用。結果：經由評估，投擲骰子的可行性最佳，故加以採用。
- 二、骰子的投擲實驗，分別投擲 200、400、600、800、1000 次，並統計其次數並計算出其機率，列表如下：

	1 點	2 點	3 點	4 點	5 點	6 點
200 次	0.17	0.18	0.17	0.16	0.17	0.15
400 次	0.19	0.16	0.15	0.17	0.15	0.18
600 次	0.17	0.15	0.15	0.19	0.15	0.19
800 次	0.15	0.16	0.19	0.18	0.18	0.15
1000 次	0.18	0.15	0.16	0.18	0.17	0.16

結果：只要投擲次數夠多，其各點數機率都會接近 0.17，相當於分數的  $1/6$ 。

三、由上述兩個實驗結果可知：

(一) 如果一個試驗可能的結果有 6 種，則每一種結果發生的機率是  $1/6$ 。

(二) 我們有理由可以推論出：

結論：「如果一個試驗可能的結果有  $n$  種，則每一種結果發生的機率是  $1/n$ 。」

四、以上述的投擲骰子 1000 次實驗之數據做依據，列出多種結果的出現機率如下：

	1 或 2 點	1 或 4 點	2 或 3 點	2 或 5 點	3 或 4 點	3 或 6 點	5 或 6 點
機率	0.32	0.34	0.34	0.35	0.32	0.32	0.35

	1 或 2 或 3 點	2 或 3 或 4 點	3 或 4 或 5 點	4 或 5 或 6 點	1 或 3 或 5 點	2 或 4 或 6 點
機率	0.48	0.49	0.51	0.52	0.50	

	1 或 2 或 3 或 4 點	2 或 3 或 4 或 5 點	3 或 4 或 5 或 6 點	1 或 2 或 5 或 6 點	1 或 3 或 4 或 6 點
機率	0.67	0.66	0.68	0.65	0.67

	1 或 2 或 3 或 4 或 5 點	2 或 3 或 4 或 5 或 6 點	1 或 2 或 3 或 5 或 6 點	1 或 2 或 4 或 5 或 6 點	1 或 2 或 3 或 4 或 6 點
機率	0.83	0.85	0.84	0.82	0.83

結果：只要投擲次數夠多：

(一) 出現 2 種點數之一的機率會接近  $2/6$ 。

(二) 出現 3 種點數之一的機率會接近  $3/6$ 。

(三) 出現 4 種點數之一的機率會接近  $4/6$ 。

(四) 出現 5 種點數之一的機率會接近  $5/6$ 。

六、投擲兩顆骰子 1000 次實驗之數據做依據

(一)列出多種結果的出現機率如下：

點數和	2 點	3 點	4 點	5 點	6 點	7 點	8 點	9 點	10 點	11 點	12 點
機率	0.028	0.054	0.080	0.110	0.139	0.175	0.157	0.097	0.082	0.048	0.030

結果：

點數和 2 點時，機率接近  $1/36$

點數和 3 點時，機率接近  $2/36$

點數和 4 點時，機率接近  $3/36$

點數和 5 點時，機率接近  $4/36$

點數和 6 點時，機率接近  $5/36$

點數和 7 點時，機率接近  $6/36$

點數和 8 點時，機率接近  $5/36$

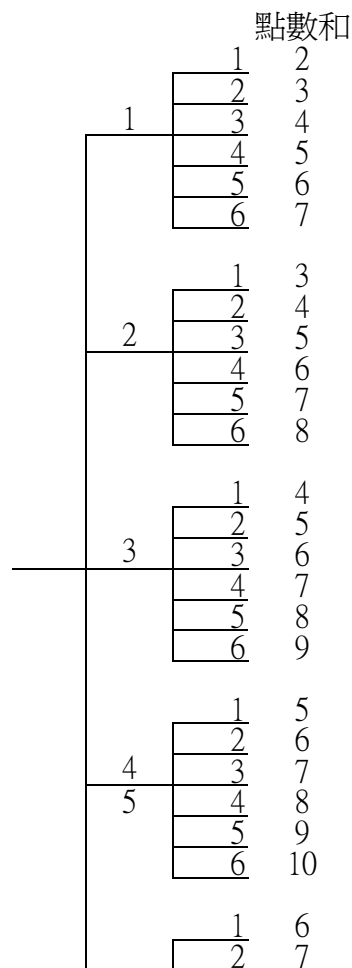
點數和 9 點時，機率接近  $4/36$

點數和 10 點時，機率接近  $3/36$

點數和 11 點時，機率接近  $2/36$

點數和 12 點時，機率接近  $1/36$

以樹狀圖來分析



	3	8
	4	9
	5	10
	6	11
6	1	7
	2	8
	3	9
	4	10
	5	11
	6	12

共有  $6 \times 6 = 36$  種可能，但點數和 2 時有 1 種，機率  $1/36$   
 點數和 3 時有 2 種，機率  $2/36$   
 點數和 4 時有 3 種，機率  $3/36$   
 點數和 5 時有 4 種，機率  $4/36$   
 點數和 6 時有 5 種，機率  $5/36$   
 點數和 7 時有 6 種，機率  $6/36$   
 點數和 8 時有 5 種，機率  $5/36$   
 點數和 9 時有 4 種，機率  $4/36$   
 點數和 10 時有 3 種，機率  $3/36$   
 點數和 11 時有 2 種，機率  $2/36$   
 點數和 12 時有 1 種，機率  $1/36$

推論出：投擲 3 顆骰子共有  $6 \times 6 \times 6 = 216$  種可能；當想要知道點數和為 7 時的機率

(1) 點數和 7 點所有狀況為

$(1,1,5), (1,2,4), (1,3,3), (1,4,2), (1,5,1), (2,1,4), (2,2,3), (2,3,2), (2,4,1), (3,1,3), (3,2,2), (3,3,1), (4,1,2), (4,2,1), (5,1,1)$  共 15 種

(2) 所以投擲 3 顆骰子，出現點數和 7 的機率為  $\frac{15}{216} = \frac{5}{72}$

七、由上述推算結果可知：

- (一)、一個試驗可能的結果有 6 種，如果一個事件包含 2 種可能的結果，則這個事件發生的機率是  $\frac{2}{6}$ 。
- (二)、一個試驗可能的結果有 6 種，如果一個事件包含 3 種可能的結果，則這個事件發生的機率是  $\frac{3}{6}$ 。一個試驗可能的結果有 36 種，如果一個事件包含 4 種可能的結果，則這個事件發生的機率是  $\frac{4}{36}$ 。
- (三)、一個試驗可能的結果有 216 種，如果一個事件包含 15 種可能的結果，則這個事件發生的機率是  $\frac{15}{216}$ 。
- (四)、一個試驗可能的結果有  $n$  種，如果一個事件包含  $m$  種可能的結果，則這個事件發生的機率是  $\frac{m}{n}$ 。

八、撲克牌的排列(排列數)：

(一)、一張紙牌的排列：

1
---

 有 1 種排列方法

(二)、二張紙牌的排列：

1	2
2	1

有 2 種排列方法

(三)、三張紙牌的排列：

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

有 6 種排列方法

(四)、四張紙牌的排列：

1	2	3	4
1	2	4	3
1	3	2	4
1	3	4	2
1	4	2	3
1	4	3	2
2	1	3	4
2	1	4	3
2	3	1	4
2	3	4	1
2	4	1	3
2	4	3	1
3	1	2	4
3	1	4	2
3	2	1	4
3	2	4	1
3	4	1	2
3	4	2	1
4	1	2	3
4	1	3	2
4	2	1	3
4	2	3	1
4	3	1	2
4	3	2	1

有 24 種排列方法

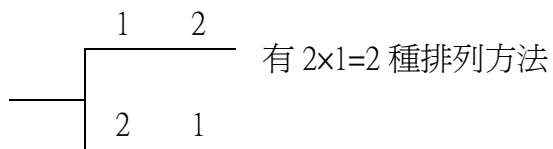
上述方法謹能找出其排列的方法數，但無法找出其規律，故改用樹狀圖來整理，希望能找出其規律。

(一)、 張紙牌的排列：

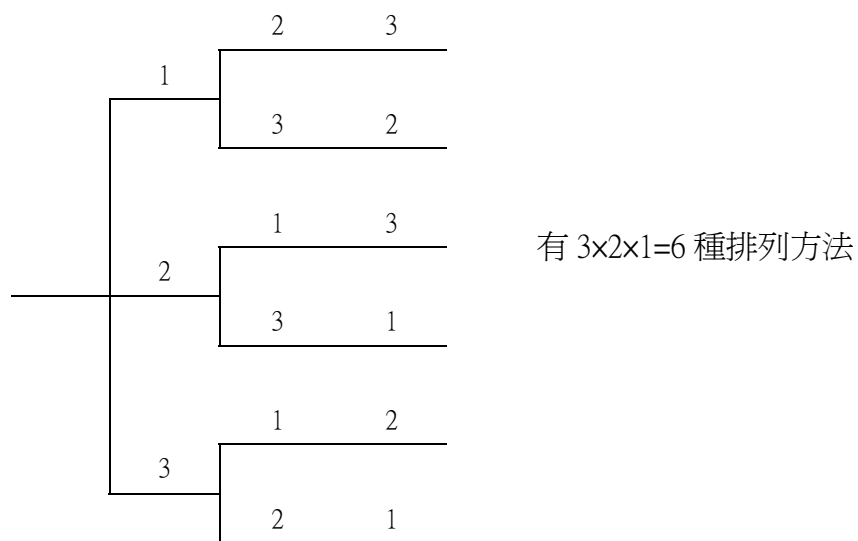
1
---

 有 1 種排列方法

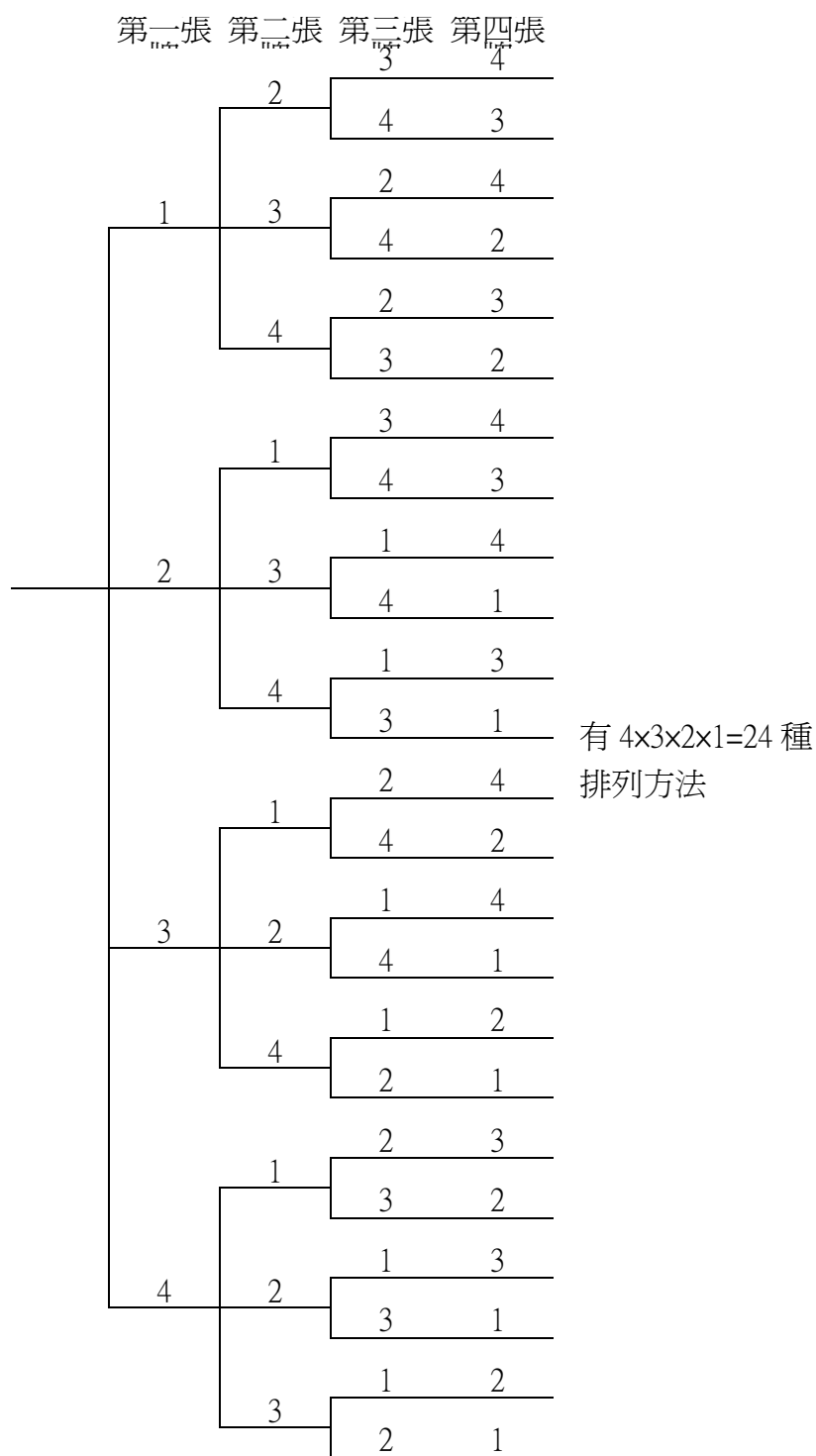
(二)、 二張紙牌的排列：



(三)、 三張紙牌的排列：



(四)、 四張紙牌的排列：



由上面的結果，我們可以推論出：

- (一) 如果有 5 張牌，其排列數為  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  種
- (二) 如果有 6 張牌，其排列數為  $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  種
- (三) 如果有 7 張牌，其排列數為  $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  種
- (四) 如果有 8 張牌，其排列數為  $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  種
- (五) 依此類推

七、撲克牌的組合：

以上的操作可以得知撲克牌的排列數，但玩牌的時候，撲克牌本身並無排列順序，1、



2 和 2、1 雖有兩個排列數，但拿到牌的人會認為兩者並沒什麼差別，現在透過實際的操作，來找出排列數和組合數的關係：

(一)、 一張紙牌的時候：

1	1.有 1 種排列方法
	2.有 1 種組合方法

(二)、 二張紙牌的時候：

1	2	1.有 $2 \times 1 = 2$ 種排列方法
2	1	
		2.都是 1、2 所組成的，所以有 1 種組合方法

(三)、 三張紙牌的時候：

1	2	3	1.有 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 種排列方法 2.都是 1、2、3 所組成的，所以有 1 種組合方法
	3	2	
2	1	3	
	3	1	
3	1	2	
	2	1	

(四)、 四張紙牌的時候：

1	2	3	4	1.有 $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 種排列方法 2.都是 1、2、3、4 所組成的，所以有 1 種組合方法
		4	3	
	3	2	4	
		4	2	
	4	2	3	
		3	2	
2	1	3	4	
		4	3	
	3	1	4	
		4	1	
	4	1	3	
		3	1	
3	1	2	4	
		4	2	
	2	1	4	
		4	1	
	4	1	2	
		2	1	
4	1	2	3	
		3	2	
	2	1	3	
		3	1	
	3	1	2	
		2	1	

(五)、 由以上操作可得知：

1. 當 1 張牌時，排列數及組合數都是 1 種。

2. 當 2 張牌時，組合數是排列數除以  $(2 \times 1)$  種。
3. 當 3 張牌時，組合數是排列數除以  $(3 \times 2 \times 1)$  種。
4. 當 4 張牌時，組合數是排列數除以  $(4 \times 3 \times 2 \times 1)$  種。

八、梭哈遊戲的組合狀況：

梭哈遊戲只採用 A、9、10、J、Q、K 等 6 種點數各 4 張，所以只用了 24 張牌，遊戲過程中，是從 24 張中取 5 張，情況比上述所討論的還複雜，必須再加以探究才可以，我們打算先簡化狀況，找出其規律，再把它推論到較複雜的情況：

(一)、由 5 張牌取出 1 張，出現的狀況可能為：

1
2
3
4
5

有 5 種排列狀況，有 5 種組合狀況。

(二)、由 5 張牌取出 2 張，出現的狀況可能為：

1	2
	3
	4
	5
2	1
	3
	4
	5
3	1
	2
	4
	5
4	1
	2
	3
	5
5	1
	2
	3
	4

1. 有  $5 \times 4 = 20$  種排列狀況，
2. 因為有 2 張牌，所以組合數要除以  $(2 \times 1)$ ，因此組合數等於  $(5 \times 4) \div (2 \times 1) = 10$  種

(三)、由 5 張牌取出 3 張，出現的狀況可能為：

1	2	3
		4
		5
	3	2
		4
		5
	4	2
		3
		5
	5	2
		3
		4

2	1	2
		3
		5
	2	1
		3
		5
	3	1
		2
		5
	4	1
		2
		5
5	1	
	2	
	3	

3	1	2
		4
		5
	2	1
		4
		5
	4	1
		2
		5
	5	1
		2
		4

4	1	2
		3
		5
	2	1
		3
		5
	3	1
		2
		5
	5	1
		2
		3

有  $5 \times 4 \times 3 = 60$  種排列狀況，因有 3 張牌，所以組合數要除以  $(3 \times 2 \times 1)$ ，因此組合數等於  $(5 \times 4 \times 3) \div (3 \times 2 \times 1) = 10$  種

(四)、梭哈遊戲是從 24 張牌中取出 5 張牌，由以上的操作可推論出，其排列數是  $24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 = 5100480$  種，因其共有 5 張，所以組合數必須除以  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$  種，因此組合是： $(24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20) \div (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 42504$  種

(五)、梭哈的組合數及其機率

1. 同花大順：所謂同花大順，是指同一花色，並且其點數為 10、J、Q、K、A。

(1) 組合數：因點數已固定為 10、J、Q、K、A，所以點數方面沒有變化只有一組。

(2) 花色限定為同花，所以只能從黑桃、紅心、鑽石、梅花中四選一，因此，同花大順出現之組合數為 4 組。

(3) 機率： $\frac{4}{42504} = 0.0000941$

2. 四梅（四條、鐵枝）：有四張牌同一點數，加上一張其餘的牌。

(1) 組合數：梭哈中共有 6 種點數，所以點數必須從 6 種中選取 1 種，因此有 6 種可能性。另外，梭哈共用 24 張牌，已經用掉了 4 張同一點數的牌，要從剩下的 20 張中，任意選出一張，又有 20 種可能性。所以，四梅的組合數為  $6 \times 20 = 120$  種。

(2) 機率： $\frac{120}{42504} = 0.0028232$

2. 葫蘆（Full house）：有三張同一點數的牌再加上二張同為另外一點的牌

(1) 組合數：狀況比較複雜，只能先採用列舉法再找出其規律

I. 先討論點數的組合，列表處理：

3 張點數一樣	2 張點數一樣
A	9
	10
	J
	Q
	K
9	A
	10
	J
	Q
	K
10	A
	9
	J
	Q
	K

3 張點數一樣	2 張點數一樣
J	A
	9
	10
	Q
	K
Q	A
	9
	10
	J
	K
K	A
	9
	10
	J
	Q

組合數為  $6 \times 5 = 30$  種

II. 再討論花色的組合，為便於討論，黑桃、紅心、方塊、梅花四種花色

i. 先看三張同一點數這一組：

從四種花色中取三種花色，先表如下：

黑桃	紅心	方塊
		梅花
	方塊	紅心
紅心	方塊	梅花
		黑桃
	梅花	黑桃
方塊	黑桃	紅心
		梅花
	紅心	黑桃
梅花	紅心	梅花
		黑桃
	方塊	黑桃

1. 排列數為  $4 \times 3 \times 2 = 24$  種，

2. 因為有 3 張牌，所以組合數要除以  $(3 \times 2 \times 1)$ ，因此組合數等於  $(4 \times 3 \times 2) \div (3 \times 2 \times 1) = 4$  種

ii. 再看二張同為另外一點這一組：從四種花色中取二種花色，先表如下：

黑桃	紅心
	方塊
	梅花
紅心	黑桃
	方塊
	梅花
方塊	黑桃
	紅心
	梅花
梅花	黑桃
	紅心
	方塊

1. 排列數為  $4 \times 3 = 12$  種，
2. 因為有 2 張牌，所以組合數要除以  $(2 \times 1)$ ，因此組合數等於  $(4 \times 3) \div (2 \times 1) = 6$  種

經由以上的操作，知葫蘆出現之組合數為  $30 \times 6 \times 4 = 720$  種

$$\text{機率} = \frac{720}{42504} = 0.0169395$$

梭哈遊戲中還有其他如同花、大順、中順、小順、三條、Two Pairs、Pair 等，可以用以上的操作方法推論出答案，不再一一加以求解。

## 九、樂透獎

### (一)、中獎獎號與獎項之分配情形

獎別	對中號碼數
頭獎	六個數字全中
貳獎	對中任五個號碼 + 特別號
參獎	對中任五個號碼
肆獎	對中任四個號碼
普獎	對中任三個號碼

(二)、樂透彩獎金的分配：當期總投注金額（銷售收入）乘以 60% 得出『總獎金』。

『總獎金』之 50% 由中普獎者均分。

『總獎金』減除普獎之總額後，依下列比率分配：

獎項	頭獎	貳獎	參獎	肆獎	合計
分配比率	38%	12%	15%	35%	100%

(三)、樂透獎的中獎機率：

1. 樂透頭獎是從 42 個號碼中取出 6 個號碼

(1). 基本排列數： $42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37 = 3776965920$  種。

(2). 因有 6 個數，所以其基本組合數須除以  $(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$ 。

- (3) 樂透頭獎的組合數為  $(42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37) \div (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 5245786$  種。  
 (4) 機率：因組合數為 5245786 種，中獎號碼只有一組，所以機率是

$$P_1 = \frac{1}{5,245,786} \doteq 0.0000001906292$$

2. 貳獎中獎機率：

- (1) 基本排列數： $42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37 = 3776965920$  種。  
 (2) 因有 6 個數，所以基本組合數必須除以  $(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$ ，共 5245786 種。  
 (3) 被特別號取代的位置共有 6 種情形，如：可以是 1、2、3、□、5、6；也可以是 1、□、3、4、5、6。(□表示特別號)。  
 (4) 設貳獎中獎機率為  $p_2$

$$\text{則 } p_2 = \frac{6}{5245786} \doteq \frac{1}{874297.6} \doteq 0.000114\%$$

3. 參獎中獎機率

- (1) 基本排列數： $42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37 = 3776965920$  種。  
 (2) 因有 6 個數，基本組合數須除以  $(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$ ，共 5245786 種。  
 (3) i. 從 6 個中獎號碼中選隨便出 5 個號碼(頭獎 6 個號碼中的 5 個號碼均為參獎)的排列方法為  $(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2)$  種；其 5 個號碼組合需除以  $(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$ 。  
 ii. 假設如果開出的號碼是 1、2、3、4、5、6，那麼 1、2、3、4、5、7 和 1、2、3、4、5、8 都算是中肆獎，剩下沒對中的 1 個號碼祇能從頭獎的 6 個號碼與特別號以外的 35 個號碼中選出 1 個(否則就中頭獎或貳獎)，共 35 種方法。(假設如果開出的號碼是 1、2、3、4、5、6 那麼 1、2、3、4、5、7 和 1、2、3、4、5、8 都算是中參獎，以此類推，有 36 種不同組合，但是要扣掉特別號，因為如果是特別號，就變成貳獎了，所以剩下 35 種)。

$$(4) \text{ 參獎中獎機率 } p_3 = \frac{6 \times 35}{5245786} \doteq \frac{1}{24980} \doteq 0.004\%$$

4. 肆獎中獎機率

- (1) 基本排列數： $42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37 = 3776965920$  種。  
 (2) 因有 6 個數，其基本組合數須除以  $(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$ ，共 5245786 種。  
 (3) i. 從 6 個中獎號碼中選隨便出 4 個號碼(頭獎 6 個號碼中的 4 個號碼均為肆獎)的排列方法為  $(6 \times 5 \times 4 \times 3)$  種；其 4 個號碼組合需除以  $(4 \times 3 \times 2 \times 1)$ 。  
 ii. 假設如果開出的號碼是 1、2、3、4、5、6，那 1、2、3、4、7、8 和 1、2、3、4、9、10 都算是中肆獎，剩下沒對中的 2 個號碼祇能用頭獎以外的 36 個號碼中選出 2 個(否則就中頭獎或參獎)，所以其排列方法為  $(36 \times 35)$ ，因 2 個號碼的組合需除以  $(2 \times 1)$ 。  
 (4) 肆獎中獎機率為

$$p_4 = \frac{[(6 \times 5 \times 4 \times 3) \div (4 \times 3 \times 2 \times 1)] \times [(36 \times 35) \div (2 \times 1)]}{(42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37) \div (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} \doteq \frac{1}{555} \doteq 0.18018\%$$

## 5. 普獎中獎機率

- (1) 基本排列數： $42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37 = 3776965920$  種，
- (2) 因有 6 個數，其基本組合數須除以  $(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$ ，共 5245786 種。
- (3) i. 從 6 個中獎號碼中選隨便出 3 個號碼(頭獎 6 個號碼中的 3 個號碼均為普獎)的排列方法為  $(6 \times 5 \times 4)$  種；其 3 個號碼組合需除以  $(3 \times 2 \times 1)$ 。  
ii. 剩下沒對中的 3 個號碼祇能用頭獎以外的 36 個號碼中選出 3 個，所以其排列方法為  $(36 \times 35 \times 34)$ ，因 3 個號碼的組合需除以  $(3 \times 2 \times 1)$ 。
- (4) 普獎中獎機率為

$$P_5 = \frac{[(6 \times 5 \times 4) \div (3 \times 2 \times 1)] \times [(36 \times 35 \times 34) \div (3 \times 2 \times 1)]}{(42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37) \div (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} \doteq \frac{1}{36.7} \doteq 2.7221\%$$

## 6. 中兩個號碼，一個號碼和六碼都不中的機率是多少？

- (1) 只對中兩個號碼的機率：

從 6 個中獎號碼中選隨便出 2 個號碼的排列方法為  $(6 \times 5)$  種；其 2 個號碼組合需除以  $(2 \times 1)$ 。另沒中的號碼從剩餘的 36 個號碼中選出 4 個其排列數為  $(36 \times 35 \times 34 \times 33)$ ，其組合數需除以  $(4 \times 3 \times 2 \times 1)$ 。故中兩個號碼的機率為

$$P_6 = \frac{[(6 \times 5) \div (2 \times 1)] \times [(36 \times 35 \times 34 \times 33) \div (4 \times 3 \times 2 \times 1)]}{(42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37) \div (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} \doteq 16.843\% \doteq \frac{1}{6}$$

- (2) 只對中一個號碼的機率：

從 6 個中獎號碼中選隨便出 1 個號碼的排列方法為 6 種。沒中的號碼從剩餘的 36 個號碼中選出 5 個其排列數為  $(36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32)$ ，其組合數需除以  $(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$ 。故中兩個號碼的機率為

$$P_7 = \frac{6 \times [(36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32) \div (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)]}{(42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37) \div (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} \doteq 43.119\% \doteq \frac{1}{2.3}$$

- (3) 一個號碼都沒中機率：

從 36 個沒有中獎號碼中選隨便出 6 個號碼的排列方法為  $(36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31)$  種；其 6 個號碼組合需除以  $(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$ 。故中兩個號碼的機率為

$$P_8 = \frac{(36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31) \div (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37) \div (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} \doteq 37.131\% \doteq \frac{1}{2.7}$$

- (4) 這裡看到一個奇妙的現象：六個號碼都沒中的機率比中一個號碼的機率還小，也就是六個號碼都沒中比中一個號碼還難。

## 陸、研究結果

經由實驗及操作，驗證以下幾點：

- 一、一個試驗可能的結果有  $n$  種，則每一種結果發生的機率是  $1/n$ 。
- 二、如果一個試驗可能的結果有  $n$  種，如果一個事件包含  $m$  種可能的結果，則這個事件發生的機率是  $m/n$ 。
- 三、如有 1 張撲克牌，其排列數為 1 種

如有 2 張撲克牌，其排列數為  $2 \times 1 = 2$  種  
如有 3 張撲克牌，其排列數為  $3 \times 2 \times 1 = 6$  種  
如有 4 張撲克牌，其排列數為  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  種  
如有 5 張撲克牌，其排列數為  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$  種  
依此類推

#### 四、撲克牌的組合數：

如有 1 張撲克牌，其組合數為排列數除以 1 種  
如有 2 張撲克牌，其組合數為排列數除以  $2 \times 1$  種  
如有 3 張撲克牌，其組合數為排列數除以  $3 \times 2 \times 1$  種  
如有 4 張撲克牌，其組合數為排列數除以  $4 \times 3 \times 2 \times 1$  種  
如有 5 張撲克牌，其組合數為排列數除以  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  種  
依此類推

#### 五、較複雜的狀況：

由 5 張牌取出 1 張，排列的狀況為 5 種，組合的狀況為  $5 \div 1 = 5$  種  
由 5 張牌取出 2 張，排列的狀況為  $5 \times 4$  種，組合的狀況為  $(5 \times 4) \div (2 \times 1) = 10$  種  
由 5 張牌取出 3 張，排列的狀況為  $5 \times 4 \times 3$  種，組合的狀況為  $(5 \times 4 \times 3) \div (3 \times 2 \times 1) = 10$  種  
依此類推至  
由 24 張牌取出 5 張，  
排列的狀況為  $24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20 = 5100480$  種，  
組合的狀況為  $(24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20) \div (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 42504$  種。

六、花大順的組合數為 4 種， 機率： $4/42504=0.0000941$

四梅的組合數為  $6 \times 20 = 120$  種， 機率： $120/42504=0.0028232$

葫蘆的組合數為  $30 \times 6 \times 4 = 720$  種， 機率： $720/42504=0.0169395$

七、樂透頭獎的組合數為  $(42 \times 41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37) \div (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) = 5245786$  種

$$\text{機率：} \frac{1}{5245786} = 0.0000001906292$$

八、槓龜的機率為  $\frac{883575 + 2261952 + 1947792}{5245786} = 97.094\% = \frac{97}{100}$

#### 柒、結論

經過樂透採中頭彩的機率算法後，發現中獎的機率真的是很小。據說備雷擊中的機率只有 50 萬分之一，中頭彩的機率居然只有 5 百萬分之一。

經過了實驗、操作及老師指導方向，終於解答了原先的疑惑。其實樂透的中獎機率只要上網路查詢就可以知道了，但更令人興奮的是知道如何求出來的。

#### 捌、參考資料

- 一、國小數學第 12 冊第 8 單元（南一）
- 二、國中數學第 6 冊 2—3 國立編譯館
- 三、翁文祥 排列組合 綠天出版社
- 四、機率論：林光賢著 台北市/華泰/民 86
- 五、<http://home.kimo.com.tw/lotto/lotto/2>
- 六、<http://www.bud.org.tw/Winnie/Wshow34.htm>
- 七、<http://www.roclotto.com.tw/>



## 評語

030414 國中組數學科

您樂透了嗎

能將數學與生活產生聯結，立意頗佳，惟數學的內容方面可再予以深化。