

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030413

臺南縣私立城光國民中學

指導老師姓名

鄭銘城

作者姓名

陳建儒

張吉成

高梅雯

陳乃禎

解一元二次方程式的工具

1、摘要：

利用數學課本第五冊第一章相似三角形的基本概念，探討出一元二次方程式的另類解法，並經過金屬加工製作成模型，成為解一元二次方程式的工具。

二、研究動機：

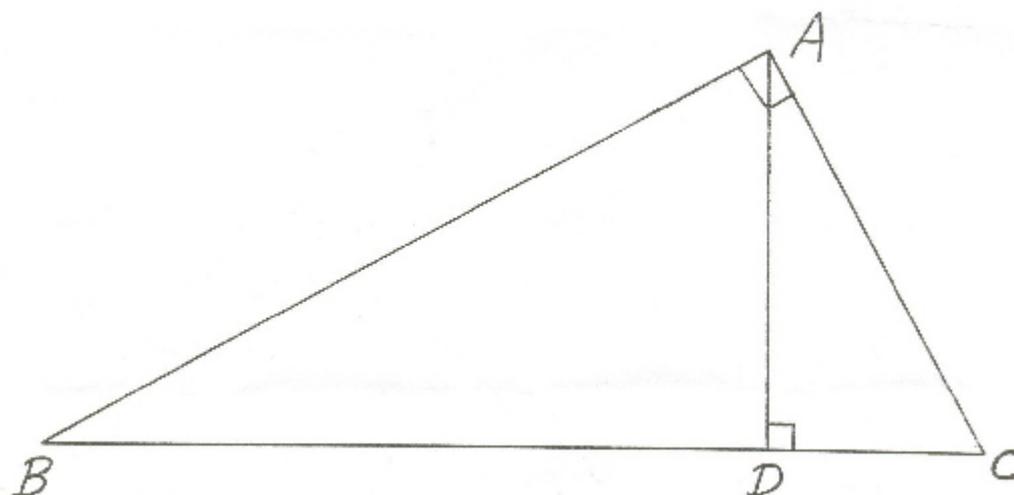
從國中數學課程中我們學到解一元二次方程式有因式分解法、配方法、公式法等三種方法。如今我們已經上到第五冊，我們想配合幾何觀念，研究出解一元二次方程式的第四種方法。

三、研究目的：

融合幾何和代數的基本觀念，研究出另一種一元二次方程式的解法，並製作模型，成為解一元二次方程式的工具。

四、研究過程：

圖（一）



（一）. 1. 直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ 且 AD 為斜邊 BC 上的高，如圖（一）

則 $\triangle ABD \sim \triangle CBA$:

證明： $\because \angle ADB = \angle BAC = 90^\circ$ 且 $\angle BAD = \angle C$
 $\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA$ (A . A相似)

$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$:

即 $AB^2 = BC \cdot BD$:

$\because \angle ADC = \angle BAC = 90^\circ$ $\angle CAD = \angle B$

$$\therefore \triangle CAD \sim \triangle CBA \text{ (A . A相似)}$$

$$: = :$$

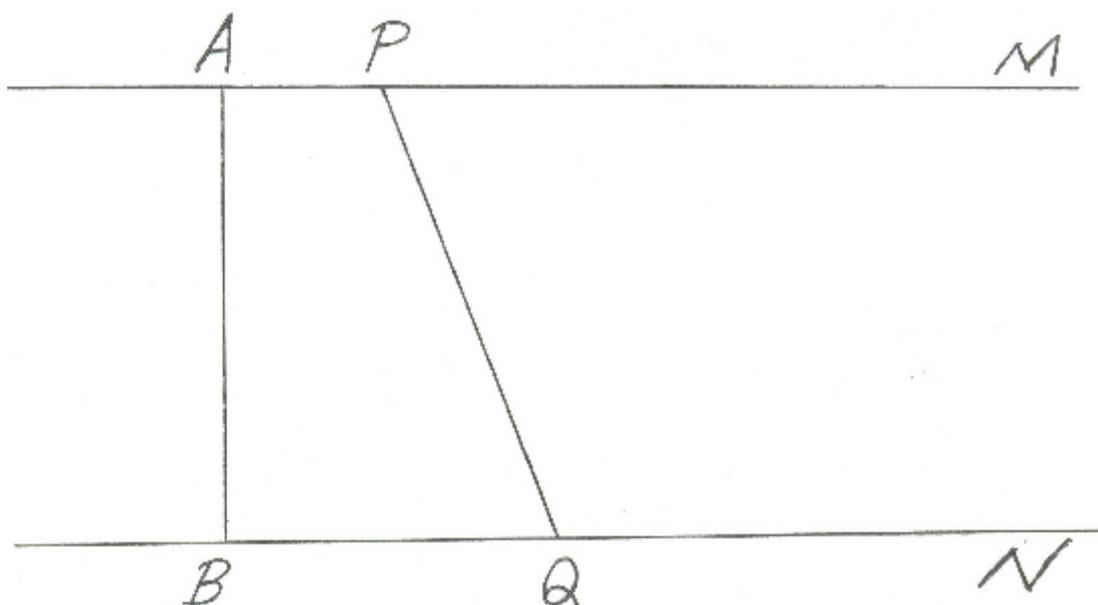
$$\text{即} = \times$$

$$: = (\times) :$$

$$(\times)$$

$$= :$$

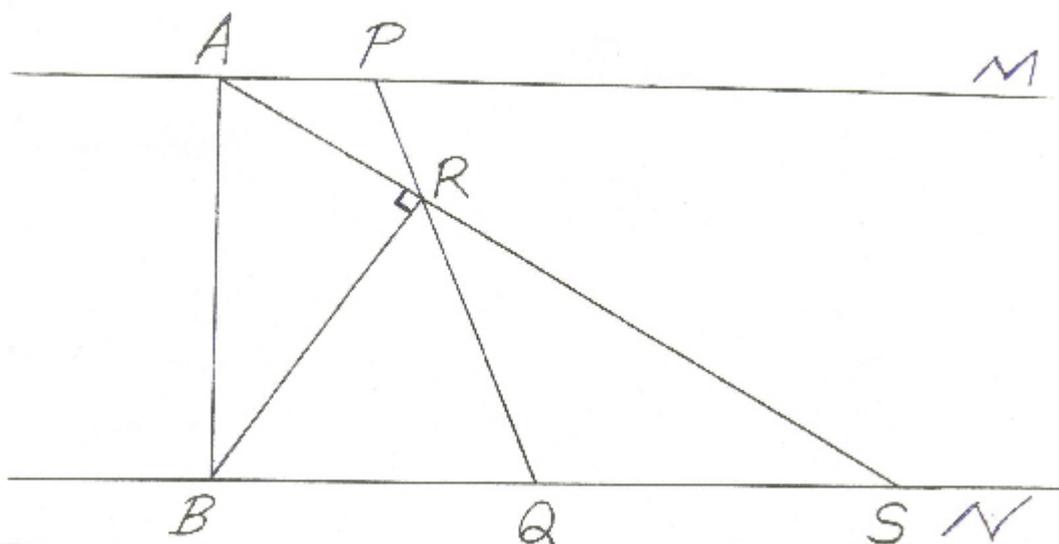
圖 (二)



2. (1) 如圖 (二) , 直線AM \perp , 直線BN \perp , 設 $=1$, 分別在直線AM、直線BN上取P、Q兩點, 使 $=L$ 、 $=m$,

再作

圖 (三)



(2) 在 上取R點，使 $\angle ARB = 90^\circ$ (假設 R點存在) 延長 交直線BN於S點，
 如圖 (三)

(3) 若 $=n$ ，則 $=n-m$
 根據三角形相似性質得知

$$: = :$$

根據以上推論得

$$: = :$$

$$\therefore : = :$$

$$\text{即 } L : (n-m) = 1 : n$$

$$Ln = n-m$$

$$Ln - n + m = 0$$

$$(4) \therefore Ln - n + m = 0$$

$\therefore n$ 為一元二次方程式

$lx - x + m = 0$ 的解

若 $= =$

則 n 為一元二次方程式

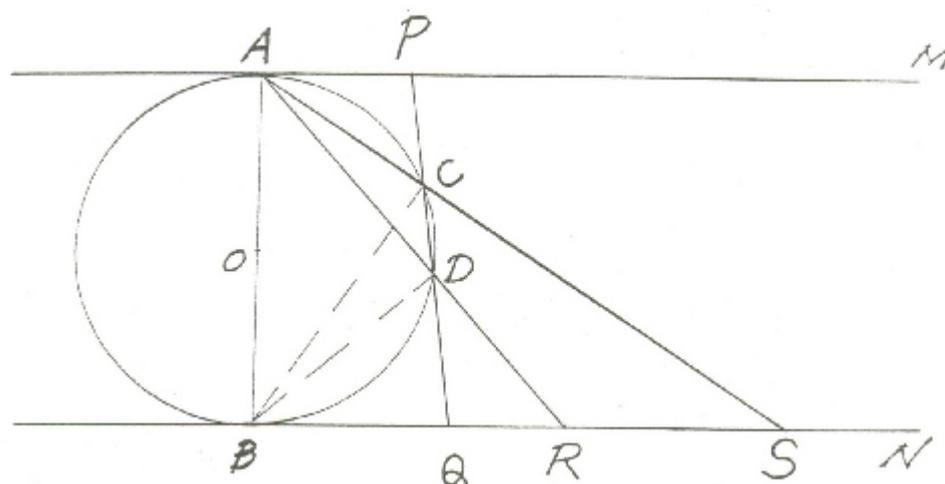
$ax^2 + bx + c = 0$ 的解

即當 $L =$ $m =$

則 n 為一元二次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ 的解

圖 (四)



(二). 1. 如圖 (四) 直線 $AM \perp$, 直線 $BN \perp$

$= 1$, 再 以為直徑作圓 O

2. 分別在直線 AM , 直線 BN 上取 P 、 Q 兩點 , 使

$=$ $=$ (假設 、 均為正數)

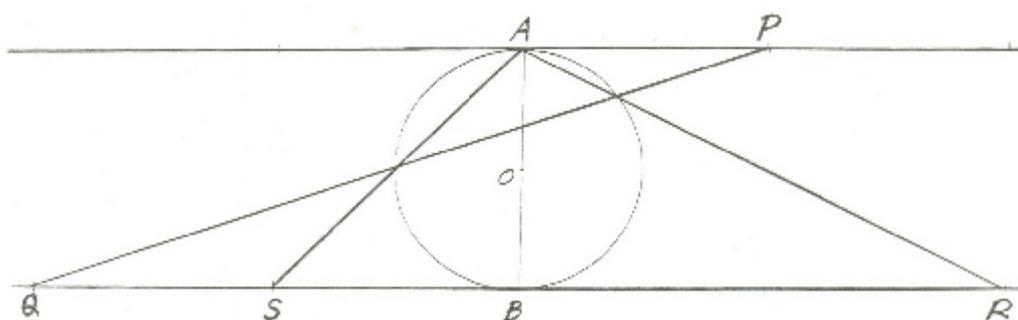
3. 作 交圓 O 於 C 、 D 兩點

4. \because 為圓O直徑 $\therefore \angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$

5. 作直線AC，直線AD分別交直線BN於S、R
 兩點

6. 以直線BN為數線，B為原點， 為單位
 長，則根據以上推論得知R、S兩點的座標
 為一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的兩根

圖 (五)



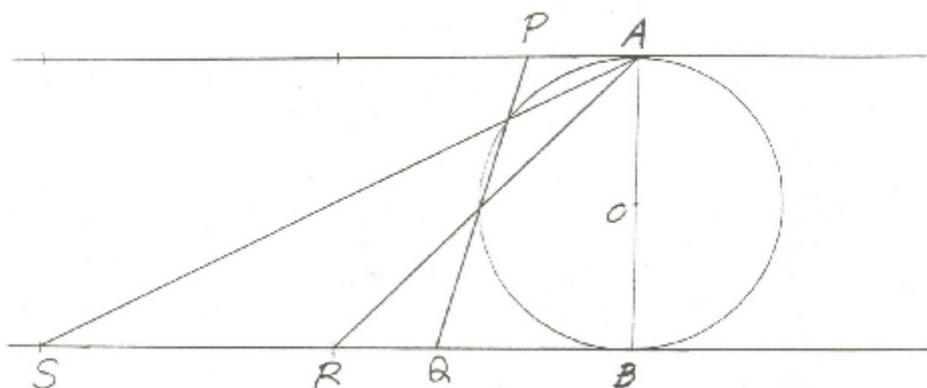
(三).

例1. 解 $x^2 - x - 2 = 0$

設P點座標為 $x = 1$ ，Q點座標為 $x = -2$

如圖 (五) 得R、S兩點座標分別為2、-1

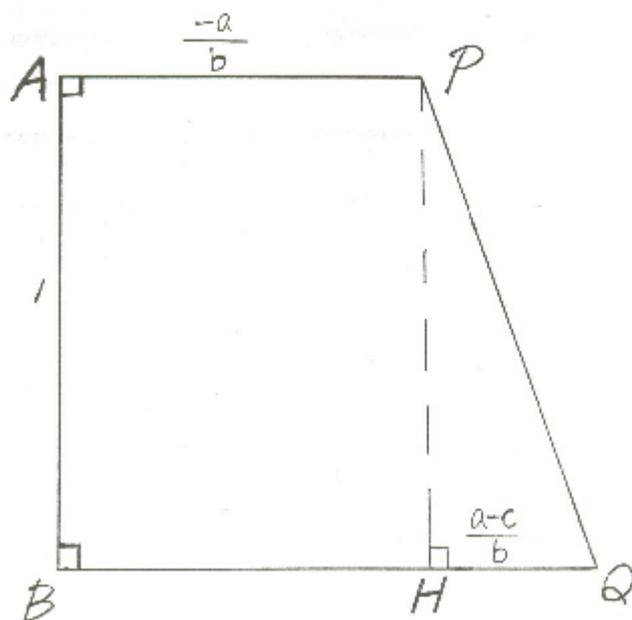
圖 (六)



例2. 解 $x^2 + 3x + 2 = 0$

設P點座標為 $(-1, 1)$ ，Q點座標為 $(-2, -1)$

如圖（六）得R、S兩點座標分別為-1、-2
 圖（七）



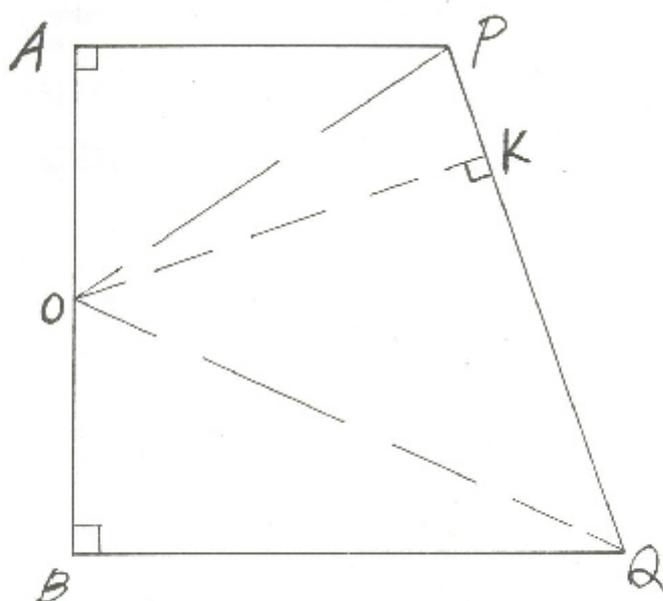
（四）. 1. 如圖（七）梯形ABQP中，
 $\angle A = \angle B = 90^\circ$

$AB = 1$ 作 \perp

則 $PH = \frac{a-c}{b}$

$\therefore \frac{a-c}{b} = 1$

圖（八）



2. 如圖 (八) 過 中點O作 \perp 設

$$= k$$

梯形ABQP面積 = $\triangle AOP$ 面積 + $\triangle BOQ$ 面積
 + $\triangle POQ$ 面積

$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times k + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times k \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times k + \frac{1}{2} \times k +$$

$$\frac{1}{2} \times k$$

$$= \frac{1}{2} \times k + \frac{1}{2} \times k +$$

$$= \frac{1}{2} \times k + \frac{1}{2} \times k +$$

$$=$$

1 $k =$

(1) 當 $k =$ $=$ 時圓 O 與 相
切

$=$

$=$

即 $=$ 時
一元二次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ 有唯一解

(2) 當 $k =$ $>$ 時圓 O 與 沒有
交點

$<$

$<$

即 $<$ 時
一元二次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ 無解

(3) 當 $k =$ $<$ 時圓 O 與 交於
兩點

$>$

$>$

即 $>$ 時
一元二次方程式

$ax^2 + bx + c = 0$ 有兩相異解

五、結論：

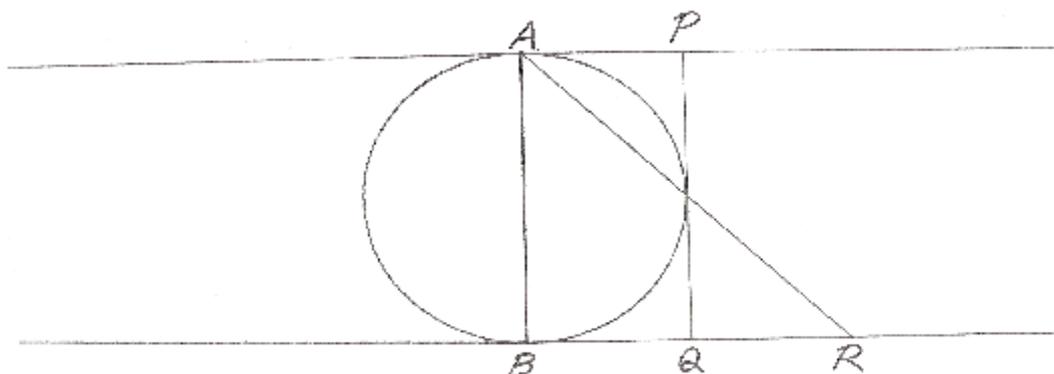
利用本工具解一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 時
有三種結果。

1. 當 $=$ 時，與圓 O 只有一交點，故

$ax^2 + bx + c = 0$ 有唯一實數解，

例： $x^2 - 2x + 1 = 0$ 如圖（九）

圖（九）



2. 當 $>$ 時，與圓 O 交於相異兩點，故

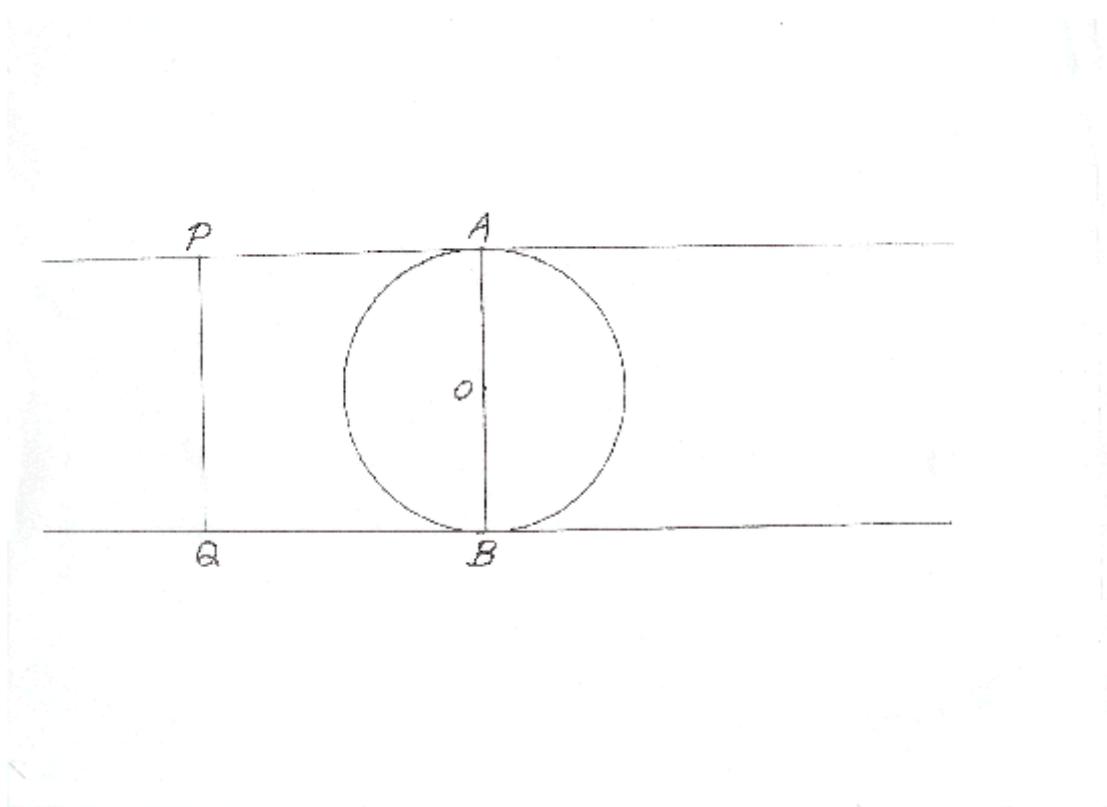
$ax^2 + bx + c = 0$ 有相異兩實數解，

例： $x^2 - x - 2 = 0$ 如圖（六）

3. 當 $<$ 時，與圓 O 沒有交點，故

$ax^2 + bx + c = 0$ 無實數解，

例： $x^2 + x + 1 = 0$ 如圖（十）



圖（十）

六、研究心得：

本工具或許沒有其實用價值，卻是課本定理的實

際應用，研究過程充滿樂趣與成就感，而且從幾何意義來探索一元二次方程式，竟然跟課本第三冊的代數意義有相同的結果，足見科學精神的殊途同歸。

七、參考文獻：

國中數學第三、五冊（國立編譯館）

評語

030413 國中組數學科 最佳創意獎

解一元二次方程式的工具

利用幾何方法解一元二次方程式，有點像早期利用幾何圖像來理解代數內容的方式。想法極具巧思，利用這個概念所製作的解二次方程式的工具也十分有趣。