中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030411

國立臺灣師範大學附屬高級中學

指導老師姓名

施淑芬

作者姓名

朱倍萱

黃仲瑋

陳敬緯

蔡孟桓

中 華 民 國 第 四 十 四 屆 中 小 學 科 學 展 覽 會

作 品 說 明 書

科　　別： 數 學

組　　別： 國 中 組

作品名稱： 選 美 大 會

關 鍵 詞：兩兩比較法、對稱原理、自然數的分散性

編　　號：

選　美　大　會

摘　要

評審想在一群猴子參與的完美競賽活動中，評比出最完美的前三名；由於受到量化問題與環境等因素，不得不採用兩兩比較的方式時，評審們至少需要作幾次的評比工作，才能選出前三名最完美的猴子呢？

壹、研究動機與研究目的 ：

今年是猴年，看到動物園許多可愛的猴子，不禁讓我們心中產生一個疑惑：如果要從牠們長像都一模一樣的外形當中選出一隻最完美的猴子，那可就不容易了。因為就猴子的外型、特徵、活動能力及反應能力等抽象的特質，在客觀上是很難量化的，加上猴子的好動性，讓我們很難將牠們限制在同一個固定的地方作評比。因此，在選美過程中就不得不採取最原始的評比方式：『兩兩比較法』，以確定哪一隻猴子是最完美的。假設有 n 隻猴子參加這次選美大會，如果任意兩隻猴子都要進行一次完美的比較，那麼，一共需要進行 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 次的完美比較；若根據著名的 Redei 理論【5】就可以將這 n 隻猴子逐一排序而選出一些較完美的猴子。然而，一般選美活動的目標是：「如何設計一種好的方法來選出前幾名？」當然後半段的排名就沒那麼重要了。因此，大會僅需要將前幾名作排序，因而有些比較的過程是多餘的；於是，藉由數學課學過關於「樣式與規律」的技巧，我們要探討的問題是：「在一場選美大會中，至少要進行幾次的完美比較，才能完成前幾名的排序工作呢？」這也是本文研究的主要目的。

貳、研究設備與研究過程 ：

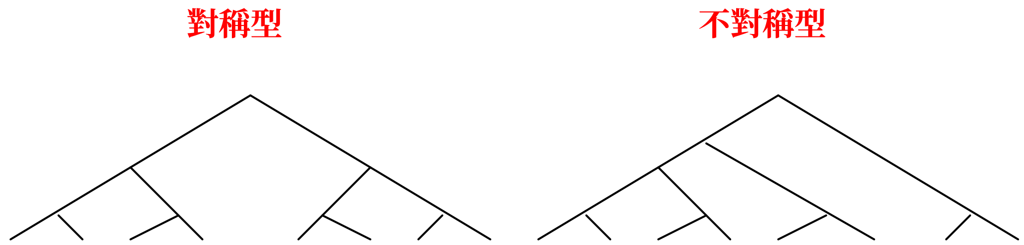
(一) 研究流程：

紙筆操作與電腦模擬 ⇒ 尋找可能的上界 ⇒ 猜測最小的上界 ⇒ 修正與調整 ⇒ 請教老師 ⇒ 歸納與證明 ⇒ 結論

(二) 研究過程中所遭遇的疑惑：

【疑惑一】：在比賽場上，甲勝乙、乙勝丙，但甲未必能勝丙，這該怎麼辦呢？

【疑惑二】：最值得考慮的情況是左下圖的對稱型或者是右下圖的不對稱型？



【疑惑三】：對名次較好者，是否可以重新調整，讓牠有參與較多次的比較次數？

參、符號與基本假設 ：

猴子的完美性是一種抽象的概念，我們將以 $P(A)\succ P(B)$ 表示猴子 A 比猴子 B 完美。為了數理邏輯上的推導，我們需有以下的兩個基本假設：

基本假設 1：任兩隻猴子的完美性都不同，即：

$$P(A)\succ P(B) \quad \text{或} \quad P(B)\succ P(A)\text{。}$$

基本假設 2：猴子的完美性具有遞移性，即：

$$\text{若 } P(A)\succ P(B) \text{ 且 } P(B)\succ P(C)\text{，則 } P(A)\succ P(C)\text{。}$$

為了書寫及運用上的方便起見 ，我們定義一些符號如下：

(1) 設有 n 隻猴子參加選美比賽，若要選出前 k 名完美的猴子，則最少需要進行的比較次數以 $M(n,k)$ 表示；例如：$M(3,1)=2$ 、$M(4,2)=4$、$M(5,3)=8$。

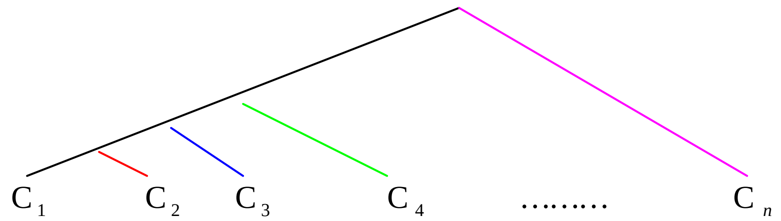
(2) $\lceil x \rceil$ 表示不小於 x 的最小整數；例如：$\lceil 4 \rceil=4$，$\lceil 3.2 \rceil=4$，$\left\lceil \frac{15}{2} \right\rceil=8$。

(3) 指數與對數的互換 ： $2^a=n \quad \Leftrightarrow \quad a=\log_2 n$。

【注意】：對任一正整數 $n \ge 2$，都可以找到一非負的整數 a 滿足：$2^a < n \le 2^{a+1}$。因此，$a < \log_2 n \le a+1$。若以對數來表示 a，則 $a = \lceil \log_2 n \rceil - 1$。

肆、研究方法與結果：

在本件科展作品中，我們將採用 P. Komjath 的對稱原理【4】來研究 $M(n,k)$ 的特性及估計其上界，並循序漸近導出 $M(n,1)$、$M(n,2)$、$M(n,3)$ 的一般式；最後，希望由其規律性也能歸納出 $M(n,4)$ 的一般公式。在其他相關可查尋的文獻中，也有一些趣味的數學問題是類似的，例如：真假錢幣問題【1】、古典秤球問題【2】等，這些問題的共同點是：要達成目標最少需要多少次的操作？更具體一點的理論是 S. Baase 在 1988 年所提出的一些演算法【3】而可看出 $M(n,1) = n-1$ 的一般規律。事實上，在 n 隻猴子參與的選美比賽中，每一次的比較只能淘汰一隻猴子；因此，要選取第一名就得淘汰其餘的 $n-1$ 隻猴子；換言之，至少要 $n-1$ 次的比較才能選出第一名的猴子。於是可得：$M(n,1) \ge n-1$。另一方面，設 n 隻猴子為 $C_1, C_2, \cdots, C_n$，依以下的比較方式，我們可在 $n-1$ 次的比較後選出第一名的猴子：

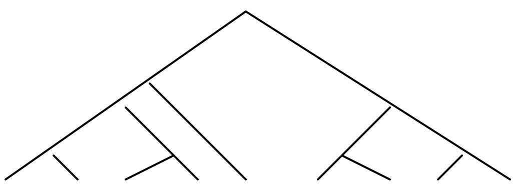


首先，猴子 C_1 與 C_2 作一次比較；較完美者再與 C_3 作一次比較；較完美者再與 C_4 作一次比較；依此下去，直到較完美者與 C_n 作一次比較，總共這 $n-1$ 次的比較後就可確認最完美的猴子；於是可知：$M(n,1) \le n-1$。因此，我們有：

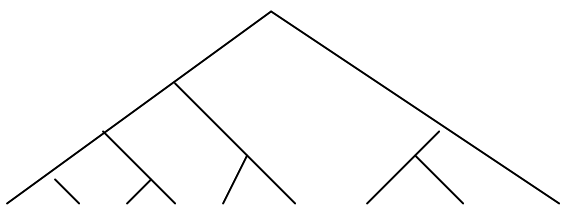
定理 1： 對每一個正整數 n，$M(n,1) = n-1$。

關於 $M(n,2)$ 上界的估計，首先，我們以 $n = 9$、$k = 3$ 為例，說明考慮問題時只要針對「較對稱型態」的狀況來處理即可：

較對稱型

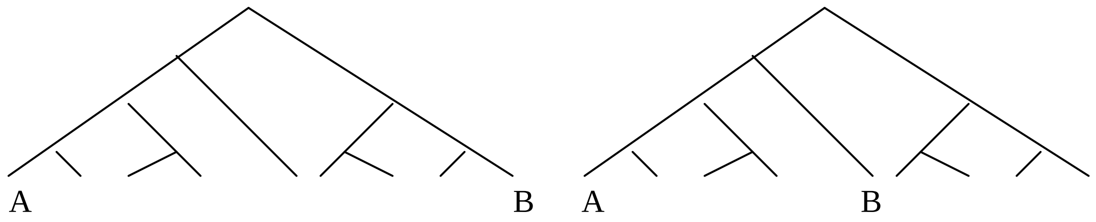


較不對稱型



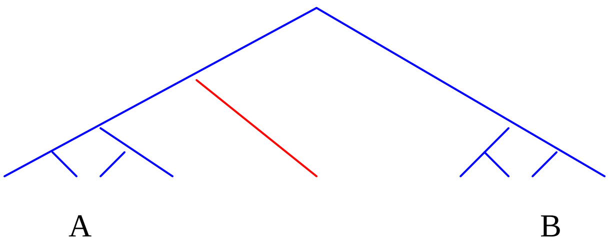
設最完美的前 3 名依序為 A, B, C，兩種型態都要 8 次比較才能選出第一名 A。在較對稱型中，不論 A 在左分枝或右分枝的情況，選 B 和選 C 時所需的比較次數影響不大；但在較不對稱型中，必需先知道 A 在左、右哪一分枝中，且兩者差異極大，其中「較差的情

況所需要的最少次數」比「對稱型所需要的最少次數」多。因此 在尋找 $M(n,k)$ 的上界時，只需考慮較好的方法：「採取較對稱的型態作分析」。若要進一步找出第 3 名 C，則所需考慮的最壞情況是：「C 有很多可能的位置」；即「被 A 或 B 打敗的對象越多」越是我們該考慮的情況。經實際的分類與觀察，較壞的情況是：「A、B 分佈在左、右不同的分枝中」；例如：在下面兩圖中，選出 A,B 各需 8 次與 3 次的比較；左下圖中需 4 次才能選出 C，而右下圖中 3 次就能選出 C：

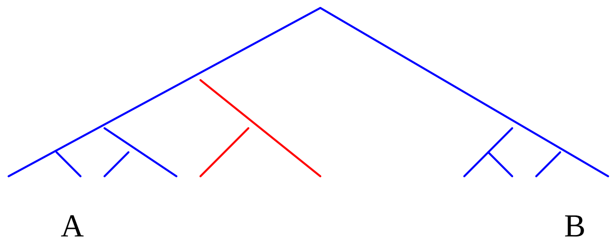


這些訊息提出了處理問題的原則：「用最好的方法、考慮最壞的情況」；同時，這也提供了【疑惑二】的解答：在這樣的原則下，才能事半功倍的找到 $M(n,k)$ 最好的上界。事實上，經由實際的操作，我們發現：對不同的正整數 $n = 2^a+1$、2^a+2、2^a+3、…、2^{a+1}，可歸納出需要處理的型態如下圖所示 (以 $a=3$ 為例)：

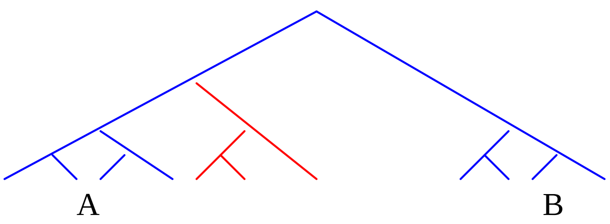
$n = 9 = 2^3 + 1$



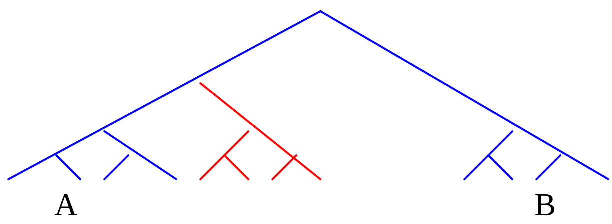
$n = 10 = 2^3 + 2$



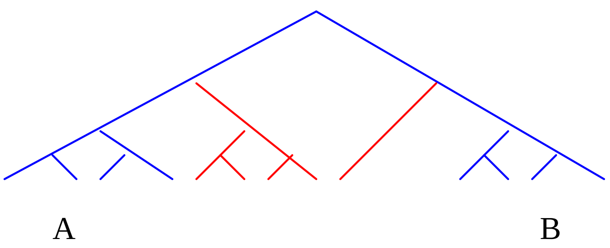
$n = 11 = 2^3 + 3$



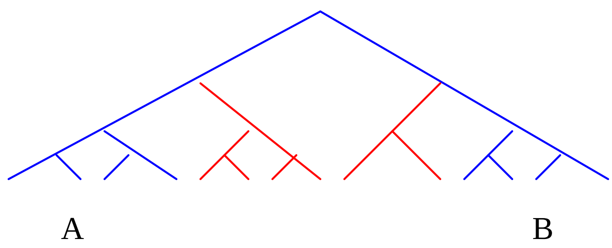
$n = 12 = 2^3 + 4$



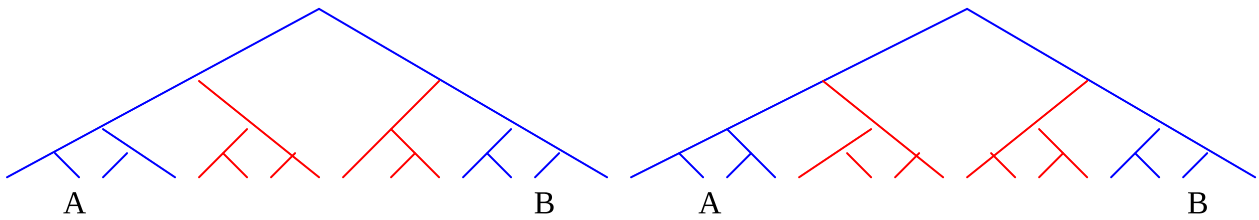
$n = 13 = 2^3 + 5$



$n = 14 = 2^3 + 6$



$n = 15 = 2^3 + 7$ $n = 16 = 2^4$



為了進一步推導 $M(n,2)$、$M(n,3)$ 及 $M(n,4)$ 的一般規律，首先，我們介紹一個重要且有意義的性質，此一性質解決了【疑惑三】的問題。

【性質 1】 在所有由 n 隻猴子選出前二名而次數最少的比較法中，可以有一種方法滿足：第一名在活動中所參與的比較次數不少於 $\lceil \log_2 n \rceil$ 次。

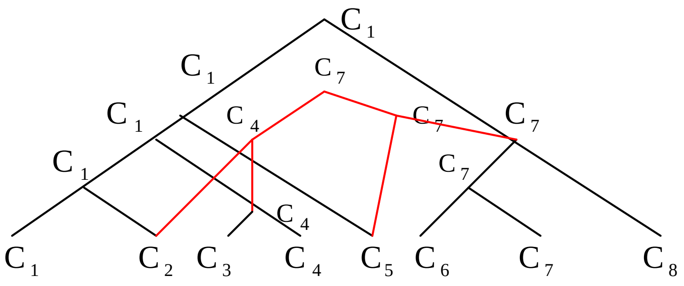
證明：在一種次數最少的比較法中，設每一隻猴子參與比較的次數最大值為 b，則由前面的分析，第一名 A 在活動中所參與的比較次數越多，表示被牠打敗的對手越多；這時要確認第二名 B，所需考慮的對象就越多，這就是之前所歸納的最壞情況。因此，為了處理最壞的情況，我們可將活動中所參與比較次數最多的一隻猴子與第一名 A 之角色互換，使得第一名在活動中所參與的比較次數儘可能的多，且全部的比較次數總和不變。設第一名 A 在活動中所參與的比較次數為 b，且是最大的，則由對稱性可知：最多有 2 隻猴子在活動中至少參與了 b 次的比較；同理，最多有 4 隻猴子至少參與了 $b-1$ 次的比較，最多有 8 隻猴子至少參與了 $b-2$ 次的比較；依此規律，我們可得：最多有 2^b 隻猴子在活動中至少參與了 1 次的比較。由於每一隻猴子至少都比較過一次，因此，$n \le 2^b$。由此可得：$b \ge \lceil \log_2 n \rceil$。

利用上述性質及 P. Komjath 提出的對稱方法【4】，我們可以導出以下 $M(n,2)$ 的一般式。雖然 Komjath 曾提出這項結果，但他的推導過程過於繁雜且有部分的估計數值並不正確；因此，找出一個 簡單又完整的證明是值得的。

定理 2：對每一個正整數 $n \ge 2$，$M(n,2) = n + \lceil \log_2 n \rceil - 2$。

證明：令 $a = \lceil \log_2 n \rceil$。依對稱排法：有一種方法可在 $M(n,1) = n-1$ 次比較後選出第一名 A，而 A 參與比較次數至多為 a。因為第二名的 B 一定是在這 a 場中被 A 打敗，所以，要選出 B 僅需從這 a 隻猴子中選出最完美者，故利用定理 1，只要 $M(a,1) = a-1$ 次比較後，就可選出第二名 B。也就是說，只要利用 $(n-1)+(a-1) = n-2+a$ 次比較後，就可選出前二名。因此，$M(n,2) \le n-2+a$。另一方面，由性質 1，存在一種方法可在 $M(n,1) = n-1$ 次比較後選出第一名 A，而 A 參與的比較次數 $b \ge \lceil \log_2 n \rceil$。以下，我們要計算全部活動中被打敗的次數。注意：在這被 A 打敗的 b 隻猴子中 (例如：下圖中 $n = 8, a = 3, b = 4,$

$A=C_1, B=C_7$）要選出第二名的 B，表示 B 以外的 $b-1$ 隻猴子（如圖：C_2, C_4, C_5）在與 B 比較時或比較之前已被評過至少一次較不完美；換句話說，這 $b-1$ 隻猴子被評過至少兩次較不完美，才能選出 B。



又在原來的 $n-1$ 次比較中，有 $(n-1)-b=n-1-b$ 隻猴子（如圖：C_3, C_6, C_8）在第一次比較時就被評為較不完美。因此，加計 B 被 A 打敗一次，全部活動中被打敗的次數至少有 $2(b-1)+(n-1-b)+1=n-2+b$ 次。故，可知：全部活動比較的總次數至少有 $n-2+b$ 次。因為 $b \ge a$，所以，比較的總次數至少需 $n-2+a$ 次才行。於是，得 $M(n,2) \ge n-2+a$。綜合以上所述，可知 $M(n,2)=n-2+a=n-2+\lceil \log_2 n \rceil$。

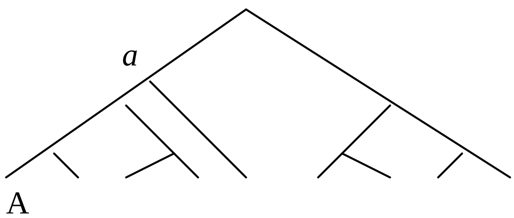
以下基本性質指出 $M(n,k)$ 具嚴格遞增性，而且也提供了一種遞迴的關係：

【性質 2】 對正整數 $n \ge k \ge 1$，$M(n,k)+1 \le M(n+1,k) \le M(n,k)+k$。

由上面的遞迴關係，我們可以導出一個 $M(n,k)$ 的遞迴不等式：

【性質 3】 對正整數 $n > k \ge 1$，$M(n,k+1) \le M(n,k)+k\lceil \log_2 n \rceil - \dfrac{k(k+1)}{2}$。

證明：依對稱的排法，存在一種方法可在 $M(n,1)=n-1$ 次比較後，選出第一名的猴子 A，而 A 所參與的比較次數至多為 $a=\lceil \log_2 n \rceil$。以 $n=9$，$a=4$ 為例：

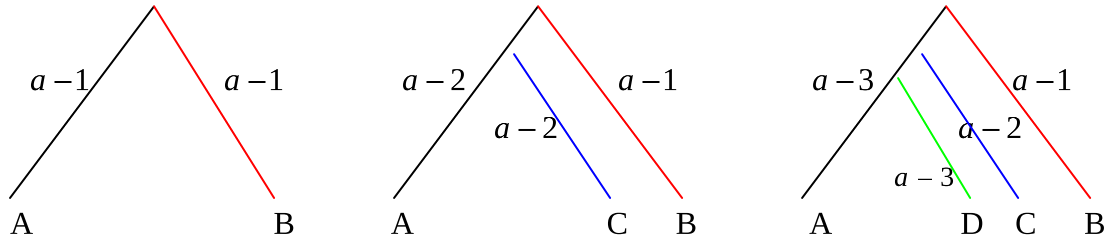


則從被 A 打敗的 a 隻猴子中，再 $a-1$ 次的比較可選出第二名的猴子 B。因此，

$$M(n,2) \le M(n,1)+(a-1)。$$

進一步分析，最多再 $2(a-1)-1$ 次比較後，就可選出第 3 名的 C （下圖左），故

$$M(n,3) \le M(n,2)+2(a-1)-1 = M(n,2)+2a-3。$$



同樣，最多再 $(a-1)+2(a-2)-1$ 次的比較後，可選出第 4 名猴子 D (上圖中)，再 $(a-1)+(a-2)+2(a-3)-1$ 次比較後，可選出第 5 名 (上圖右)。依此規律，可推得一般情形：對正整數 $k \geq 3$，

$$M(n,k+1) \leq M(n,k)+(a-1)+(a-2)+\cdots+(a-k+2)+2(a-k+1)-1。$$

再利用公式 $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$，可將上式簡化成

$$M(n,k+1) \leq M(n,k)+ka-\frac{k(k+1)}{2}。$$

由上面的遞迴關係，我們可導出一個 $M(n,k)$ 很好的上界：

定理 3：對正整數 $n \geq k \geq 1$，$M(n,k) \leq n-1+\dfrac{k(k-1)}{2}\lceil \log_2 n \rceil-\dfrac{(k-1)k(k+1)}{6}$。

證明：對 $k=1$，不等式顯然成立。對 $k \geq 2$；令 $a=\lceil \log_2 n \rceil$，在性質 3 中，k 分別以 $1,2,3,\cdots,k-1$ 代入，並將各式相加，可得

$$M(n,k) \leq M(n,1)+(1+2+3+\cdots+(k-1))a-(1+3+6+\cdots+\frac{k(k-1)}{2})。$$

再利用以下公式化簡即可得證：

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2} \quad 與 \quad 1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}。$$

特別地，當 $k=3$ 時，我們終於獲得一個 $M(n,3)$ 令人滿意的上界：

定理 4：對正整數 $n \geq 3$，$M(n,3) \leq n+3\lceil \log_2 n \rceil-5$。

事實上，此一上界已經是很接近 $M(n,3)$；為了確認 $M(n,3)$ 的一般式，我們先對特別的 $n=2^a$ 作確定工作。很幸運地，我們有：

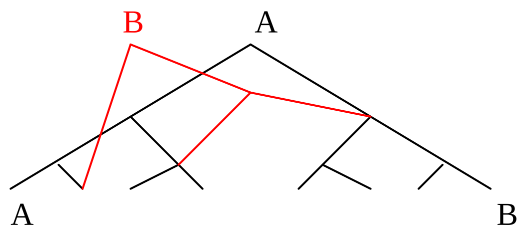
定理 5：若 $n=2^a$，其中 a 為正整數，則 $M(n,3)=2^a+2a+\lceil \log_2 a \rceil-4$。

證明：考慮對稱型態：第一輪用 $M(n,1)=n-1=2^a-1$ 次比較可確定第一名 A，此時，被

A打敗的對象有a隻猴子。第二輪當我們要從這a隻猴子選出第二名B時，依對稱排法，再比較$M(a,1)=a-1$次可選出B，其中B最多比較$\lceil \log_2 a \rceil$次。又第一輪中被B打敗的猴子最多有$a-1$隻，故從這兩輪被B打敗的$a-1+\lceil \log_2 a \rceil$隻猴子中可選出第三名$C$，此步驟需要$a-2+\lceil \log_2 a \rceil$次的比較。因此，

$$M(n,3) \le (2^a-1)+(a-1)+(a-2+\lceil \log_2 a \rceil)=2^a+2a+\lceil \log_2 a \rceil-4。$$

$a=3$



反之，由 $a=\lceil \log_2 n \rceil$及性質1、定理1、定理2，一種好方法都可假設在$n-1$次比較後才可選出第一名A(否則與定理1矛盾)，再$b-1$次比較後才可選出第二名，其中 b表示A參與的比較次數，而$b \ge a$(若$b<a$，則只要$n+b-2$次比較就可選出前二名，此與定理2矛盾)。當我們要再選出第二名與第三名時， 由於第二名B一定是要從被A打敗的b隻猴子中選出，故再依性質1，存在一種好方法可在$b-1$次比較後選出B，而B參與的比較次數$c \ge \lceil \log_2 b \rceil$。由於選$A$過程中最多有$b-1$猴子被$B$打敗，因此，前後被$B$打敗的對象最多有$b-1+c$隻猴子相互未比較過，故最壞的情況就是從這$b-1+c$隻猴子中選出第三名$C$，此步驟最少需要$b-2+c$次的比較。因此，

$$M(n,3) \ge (n-1)+(b-1)+(b-2+c) \ge 2^a+2a+\lceil \log_2 a \rceil-4。$$

特別地， 當$n=2^{a+1}$時，我們有：$M(2^{a+1},3)=2^{a+1}+2a+\lceil \log_2(a+1) \rceil-2$。因此，

對每一正整數 a，可得：

$$[\ M(2^{a+1},3)-M(2^a,3)\ ]-[\ 2^{a+1}-2^a\ ]=2+\lceil \log_2(a+1) \rceil-\lceil \log_2 a \rceil= \ 2 \ 或 \ 3。$$

由此可知：當 n 從 2^a 到 2^{a+1} 時，$M(n,3)$ 的值從 $M(2^a,3)$ 到 $M(2^{a+1},3)$ 中就多出了 2個 (當$a \ne 2^p$)或 3個 (當$a=2^p$) 自然數。 於是，我們將利用挾擠性以確定出區間$(2^a,2^{a+1}]$內哪些對應的數應該被排除。為達此目標，我們彷定理5的討論可進一步獲得以下幾個性質：

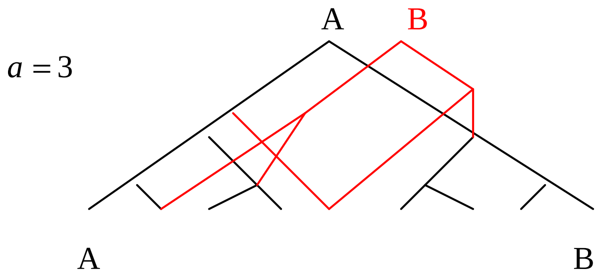
【性質 4】 對每一個正整數 a，$M(2^a+1,3)=2^a+2a+\lceil \log_2(a+1) \rceil-2$。

證明 ：令 $n=2^a+1$，則 $\lceil \log_2 n \rceil=a+1$。彷前面的分析，僅需考慮下圖型態：第一輪

比較$M(n,1)=n-1=2^a$次可確定第一名A，此時，被A打敗的對象有$a+1$隻猴子。第二輪我們從這 $a+1$ 隻猴子中再比較 a 次可選出第二名B，其中B至少比較$\lceil \log_2(a+1) \rceil$次。又第一輪中被 B 打敗的猴子最多有 $a-1$ 隻，故這兩輪被B打敗的猴子中最多有

$a-1+\lceil \log_2(a+1)\rceil$隻相互未比較過，且從這些猴子中可選出第三名$C$，此步驟最少需要$a-2+\lceil \log_2(a+1)\rceil$次的比較。因此，

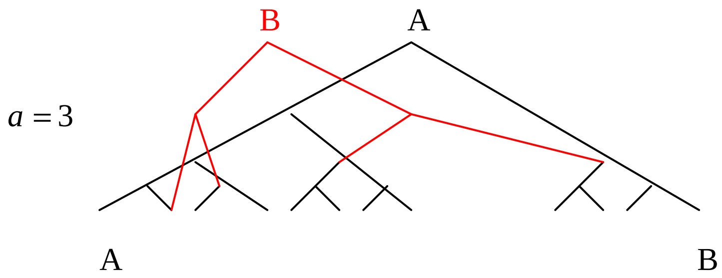
$$M(n,3)=2^a+a+(a-2+\lceil \log_2(a+1)\rceil)=2^a+2a+\lceil \log_2(a+1)\rceil-2\text{。}$$



【性質 5】 對每一個正整數 a， $M(2^a+2^{a-1},3)=2^a+2^{a-1}+2a+\lceil \log_2(a+1)\rceil-3$。

證明 ：令 $n=2^a+2^{a-1}$，則 $\lceil \log_2 n\rceil=a+1$。彷前面的分析，僅需考慮下圖型態：第一輪用$M(n,1)=n-1=2^a+2^{a-1}-1$次比較可確定第一名$A$，此時，被$A$打敗的對象有$a+1$隻猴子。第二輪從這$a+1$隻猴子中再比 a次可選出第二名B，其中B至少比較$\lceil \log_2(a+1)\rceil$次。又第一輪中被B打敗的猴子最多有$a-1$隻，故這兩輪被B打敗的猴子中，最多會有$a-1+\lceil \log_2(a+1)\rceil$隻相互未比較過，且從這些猴子中可選出第三名$C$，此步驟最少需要$a-2+\lceil \log_2(a+1)\rceil$次的比較。因此，

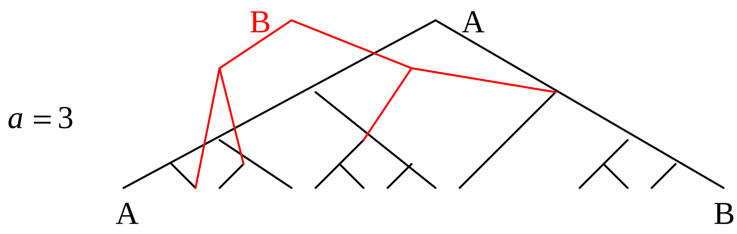
$$M(n,3)=(2^a+2^{a-1}-1)+a+(a-2+\lceil \log_2(a+1)\rceil)=2^a+2^{a-1}+2a+\lceil \log_2(a+1)\rceil-3\text{。}$$



【性質 6】 對每一個正整數 a， $M(2^a+2^{a-1}+1,3)=2^a+2^{a-1}+2a+\lceil \log_2(a+1)\rceil-1$。

證明 ：令 $n=2^a+2^{a-1}+1$，則 $\lceil \log_2 n\rceil=a+1$。彷前面的分析，僅需考慮下圖型態：第一輪比較 $M(n,1)=n-1=2^a+2^{a-1}$ 次可確定第一名A，此時，被A打敗的對象有$a+1$隻猴子。第二輪我們從這 $a+1$ 隻猴子中，再比較 a次可選出第二名B，其中B至少比較$\lceil \log_2(a+1)\rceil$次。又第一輪中被B打敗的猴子最多有a隻，故這兩輪被B打敗的猴子中最多有$a+\lceil \log_2(a+1)\rceil$隻相互未比較過，且從這些猴子中可選出第三名$C$，此步驟最少需要$a-1+\lceil \log_2(a+1)\rceil$次的比較。因此，

$$M(n,3)=(2^a+2^{a-1})+a+(a-1+\lceil \log_2(a+1)\rceil)=2^a+2^{a-1}+2a+\lceil \log_2(a+1)\rceil-1\text{。}$$



以下，我們將利用挾擠性質、$M(n,3)$ 的嚴格遞增性及上面的幾個性質，以確定出 $M(n,3)$ 的一般公式。

定理 6：對每一個正整數 $n \geq 3$，$M(n,3)=n+2\lceil \log_2 n\rceil+\lceil \log_2\lceil \log_2 n\rceil\rceil-5+e_n$，其中調整誤差 e_n 滿足：若 $2^a<n\leq 2^{a+1}$，則

當 $2^a<n\leq 2^a+2^{a-1}$ 時，$e_n=0$；當 $2^a+2^{a-1}<n\leq 2^{a+1}$ 時，$e_n=1$。

證明：對每一個正整數 $n\geq 3$，都可以找到正整數 a，滿足：$2^a<n\leq 2^{a+1}$。若以對數來表示 a，則 $a=\lceil \log_2 n\rceil-1$。

(i) 當 $n=2^a+1$ 時，由性質 4 知：

$M(n,3)=2^a+2a+\lceil \log_2(a+1)\rceil-2=n+2\lceil \log_2 n\rceil+\lceil \log_2\lceil \log_2 n\rceil\rceil-5+e_n$，其中 $e_n=0$。

(ii) 當 $n=2^a+2^{a-1}$ 時，由性質 5 知：

$M(n,3)=2^a+2^{a-1}+2a+\lceil \log_2(a+1)\rceil-3=n+2\lceil \log_2 n\rceil+\lceil \log_2\lceil \log_2 n\rceil\rceil-5+e_n$，而 $e_n=0$。

(iii) 當 n 從 2^a+1 到 2^a+2^{a-1} 時，共有 2^{a-1} 個自然數，由 (i) 及 (ii) 知：對應的 $M(n,3)$ 值也共有 2^{a-1} 個自然數。因為 $M(n,3)$ 是嚴格遞增的正整數數列，所以，當 $n=2^a+1,2^a+2,\cdots,2^a+2^{a-1}$ 時，$M(n,3)$ 值恰好一一對應到 $M(2^a+1,3)$ 與 $M(2^a+2^{a-1},3)$ 之間的自然數；此情況下：$M(n,3)=n+2\lceil \log_2 n\rceil+\lceil \log_2\lceil \log_2 n\rceil\rceil-5+e_n$，其中 $e_n=0$。

(iv) 當 $n=2^a+2^{a-1}+1$ 時，由性質 6 知：

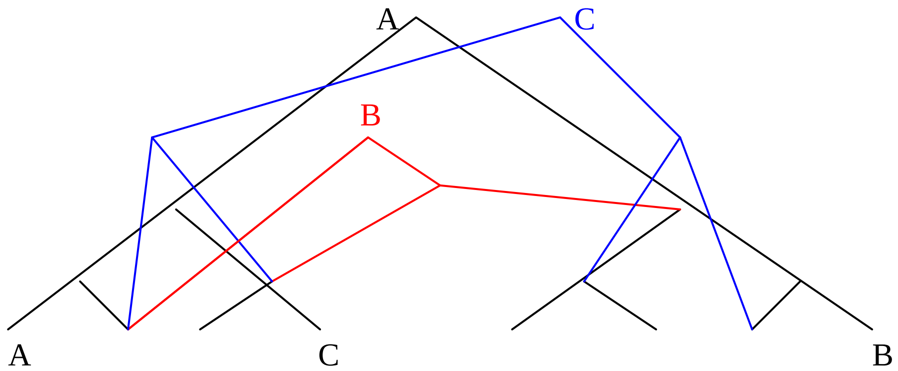
$M(n,3)=2^a+2^{a-1}+2a+\lceil \log_2(a+1)\rceil-1=n+2\lceil \log_2 n\rceil+\lceil \log_2\lceil \log_2 n\rceil\rceil-5+e_n$，而 $e_n=1$。

(v) 當 n 從 $2^a+2^{a-1}+1$ 到 2^{a+1} 時，共 2^{a-1} 個自然數，由(iv)及定理 5 知：對應的 $M(n,3)$ 值也共有 2^{a-1} 個自然數。因為 $M(n,3)$ 是嚴格遞增的正整數數列，所以，當 $n=2^a+2^{a-1}+1,2^a+2^{a-1}+2,\cdots,2^{a+1}$ 時，$M(n,3)$ 值恰好分別一一對應到 $M(2^a+2^{a-1}+1,3)$ 與 $M(2^{a+1},3)$ 之間的自然數；此情況下：$M(n,3)=n+2\lceil \log_2 n\rceil+\lceil \log_2\lceil \log_2 n\rceil\rceil-5+e_n$，其中 $e_n=1$；本定理得證。

由上面的研究過程中，我們可確定出 $M(n,3)$ 的數值所分佈出來的數，在自然數系中缺少了 1、2、4、6、7、10、13、18、23、24、 …。這些「缺席數」在尋找 $M(n,3)$ 一般式的過程中，扮演了相當重要的角色。利用「缺席數」的特性，我們將進一步研究 $M(n,4)$ 的規律；彷定理5，我們先處理 $n=2^a$ 的情形。考慮對稱型態：第一輪比較 $M(n,1)=n-1=2^a-1$ 次可確定第一名 A，此時，被 A 打敗的對象有 a 隻猴子。第二輪從這 a 隻猴子選出第二名 B，依對稱排法，再比較 $M(a,1)=a-1$ 次可選出 B，其中 B 最多比了 $\lceil\log_2 a\rceil$ 次。又第一輪中被 B 打敗的猴子最多有 $a-1$ 隻，故從這兩輪被 B 打敗的 $a-1+\lceil\log_2 a\rceil$ 隻猴子中可選出第三名 C，再依對稱排法，只要比較 $a-2+\lceil\log_2 a\rceil$ 次就可選出第三名 C，而 C 最多比了 $\lceil\log_2(a-1+\lceil\log_2 a\rceil)\rceil$ 次。又第一輪中被 C 打敗的猴子最多有 $a-2$ 隻，故前後被 C 打敗的猴子最多有 $a-2+\lceil\log_2(a-1+\lceil\log_2 a\rceil)\rceil$ 隻，從中可選出第四名 D，此步驟需要 $a-3+\lceil\log_2(a-1+\lceil\log_2 a\rceil)\rceil$ 次比較可完成。因此，

$$M(n,4)\le(2^a-1)+(a-1)+(a-2+\lceil\log_2 a\rceil)+(a-3+\lceil\log_2(a-1+\lceil\log_2 a\rceil)\rceil)$$

$$=2^a+3a+\lceil\log_2 a\rceil+\lceil\log_2(a-1+\lceil\log_2 a\rceil)\rceil-7。$$



上面的不等式顯示出 $M(2^a,4)$ 的一個上界，事實上，它也是最小的上界：

定理 7：若 $n=2^a$，其中 a 為正整數，且 $a\ge 2$，則

$$M(n,4)=2^a+3a+\lceil\log_2 a\rceil+\lceil\log_2(a-1+\lceil\log_2 a\rceil)\rceil-7。$$

證明：僅需證明 $M(n,4)\ge 2^a+3a+\lceil\log_2 a\rceil+\lceil\log_2(a-1+\lceil\log_2 a\rceil)\rceil-7$。由性質1、定理1及定理2，一種好方法都可假設在 $n-1$ 次比較後才可選出第一名 A，再 $b-1$ 次比較後才可選出第二名，其中 b 表示 A 所參與的比較次數，而 $b\ge a$。同理，當我們從被 A 打敗的 b 隻猴子中要選出第二名 B 時，依性質1，存在一種好方法可在 $b-1$ 次比較後選出 B，而 B 所參與的比較次數 $c\ge\lceil\log_2 b\rceil$。由於選 A 的過程中最多有 $b-1$ 隻猴子被 B 打敗，因此，前後被 B 打敗的對象最多有 $b-1+c$ 隻猴子相互未比較過，故最壞的情況就是從這 $b-1+c$ 隻猴子中選出第三名 C，此步驟最少需要 $b-2+c$ 次的比較，而 C 所參與的比較

次數$d \ge \lceil \log_2(b-1+c) \rceil$。又在選$A$的過程中最多有$b-2$隻猴子被$C$打敗，故前後被$C$打敗的對象最多有$b-2+d$隻猴子相互未比較過，故最壞的情況就是從這$b-2+d$隻猴子中選出第四名$D$，此步驟最少需要$b-3+d$次的比較。因此，

$$M(n,4) \ge (n-1)+(b-1)+(b-2+c)+(b-3+d) = 2^a + 3b + c + d - 7$$
$$\ge 2^a + 3a + \lceil \log_2 a \rceil + \lceil \log_2(a-1+\lceil \log_2 a \rceil) \rceil - 7。$$

特別地，　當 $n = 2^{a+1}$ 時，可得：

$$M(n,4) = 2^{a+1} + 3a + \lceil \log_2(a+1) \rceil + \lceil \log_2(a+\lceil \log_2(a+1) \rceil) \rceil - 4。$$

注意：　$\lceil \log_2(a+\lceil \log_2(a+1) \rceil) \rceil - \lceil \log_2(a-1+\lceil \log_2 a \rceil) \rceil$
　　＝ 0 (當$a = 2^p \ge 4$，或$a \ne 2^p$且$a \notin X$) 或 1 (當$a=2$，或$a \ne 2^p$且$a \in X$)。

其中集合 $X = \{3,6,13,28,59,122,249,\ldots..\}$，即 X 的元素可以數列$\langle a_n \rangle$表示 ：$a_1 = 3$，且滿足遞迴式 $a_n = 2a_{n-1} + n - 2$。由這些關係式，我們發現：

$$[\ M(2^{a+1},4) - M(2^a,4)\ ] - [\ 2^{a+1} - 2^a\ ]$$

$= 5$(當$a=2$)或 4(當$a = 2^p \ge 4$)或 4(當$a \ne 2^p$且$a \in X$)或 3(當$a \ne 2^p$且$a \notin X$)。

因此，當 n 從 2^a 到 2^{a+1} 時，$M(n,4)$的值從 $M(2^a,4)$ 到$M(2^{a+1},4)$中就有5或4或3個自然數是必須要被排除掉的。於是，彷照前面的推導方式，我們進一步獲得以下類似的性質：

【性質 7】若 $n = 2^a + 1$，則

$$M(n,4) = 2^a + 3a + \lceil \log_2(a+1) \rceil + \lceil \log_2(a-1+\lceil \log_2(a+1) \rceil) \rceil - 5。$$

【性質 8】若 $n = 2^a + 2^{a-2}$，則

$$M(n,4) = 2^a + 2^{a-2} + 3a + \lceil \log_2(a+1) \rceil + \lceil \log_2(a-1+\lceil \log_2(a+1) \rceil) \rceil - 6。$$

【性質 9】若 $n = 2^a + 2^{a-2} + 1$，則

$$M(n,4) = 2^a + 2^{a-2} + 3a + \lceil \log_2(a+1) \rceil + \lceil \log_2(a-1+\lceil \log_2(a+1) \rceil) \rceil - 4。$$

【性質 10】若 $n = 2^a + 2^{a-1}$，則

$$M(n,4) = 2^a + 2^{a-1} + 3a + \lceil \log_2(a+1) \rceil + \lceil \log_2(a-1+\lceil \log_2(a+1) \rceil) \rceil - 5。$$

【性質 11】若 $n = 2^a + 2^{a-1} + 1$，則

$$M(n,4) = 2^a + 2^{a-1} + 3a + \lceil \log_2(a+1) \rceil + \lceil \log_2(a+\lceil \log_2(a+1) \rceil) \rceil - 3。$$

於是，彷定理 6 的推導方式，我們可以完全確定出 n 在每一區間 $\left(2^a, 2^{a+1}\right]$ 中對應的 $M(n,4)$ 之值。綜合以上分析，可得：

定理 8：對每一個正整數 $n \geq 4$，

$$M(n,4) = n + 3\lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 \lceil \log_2 n \rceil \rceil + \lceil \log_2 (\lceil \log_2 n \rceil + \lceil \log_2 \lceil \log_2 n \rceil \rceil - 2) \rceil - 9 + d_n,$$

其中調整誤差 d_n 滿足：$d_4 = 3$；且若 $2^a < n \leq 2^{a+1}$，其中 $a \geq 2$，則

當 $2^a < n \leq 2^a + 2^{a-2}$ 時，$d_n = 0$；

當 $2^a + 2^{a-2} < n \leq 2^a + 2^{a-1}$ 時，$d_n = 1$；

當 $2^a + 2^{a-1} < n \leq 2^{a+1}$ 且 $a \notin X$ 時，$d_n = 2$；

當 $2^a + 2^{a-1} < n \leq 2^{a+1}$ 且 $a \in X$ 時，$d_n = 3$；

而集合 $X = \{3,6,13,28,59,122,\ldots\} = \langle a_n \rangle$ 滿足：$a_1 = 3$ 且 $a_n = 2a_{n-1} + n - 2$。

伍、演算法與實例說明：

除了運用前面推導出來的公式外，為了便於計算，我們也可依以下的演算法來找出 $M(n,k)$ 的值：

【演算法】 給定正整數 n，找出整數 a 滿足：$2^a < n \leq 2^{a+1}$，即 $a = \lceil \log_2 n \rceil - 1$。

【步驟一】 依對稱排法先將 2^a 隻猴子平均分配在左右兩分枝，而第一名 A 與第二名 B 各據一方；其餘 $n - 2^a$ 隻猴子依下列情況分配：

情況 1：若 $2^a < n \leq 2^a + 2^{a-1}$，則將其餘 $n - 2^a$ 隻猴子全部分到與 A 同側的分枝。

情況 2：若 $2^a + 2^{a-1} < n \leq 2^{a+1}$，則將其中 2^{a-1} 隻猴子分到與 A 同側的分枝，而其餘 $n - 2^a - 2^{a-1}$ 隻猴子分到與 B 同側的分枝。

※ 不論哪一種情況，第一輪 $n-1$ 次比較後可選出 A，而 A 比了 $\lceil \log_2 n \rceil = a+1$ 次；同時，B 比了 a 次(情況 1)或 $a+1$ 次(情況 2)，其中一次是 B 被 A 打敗。

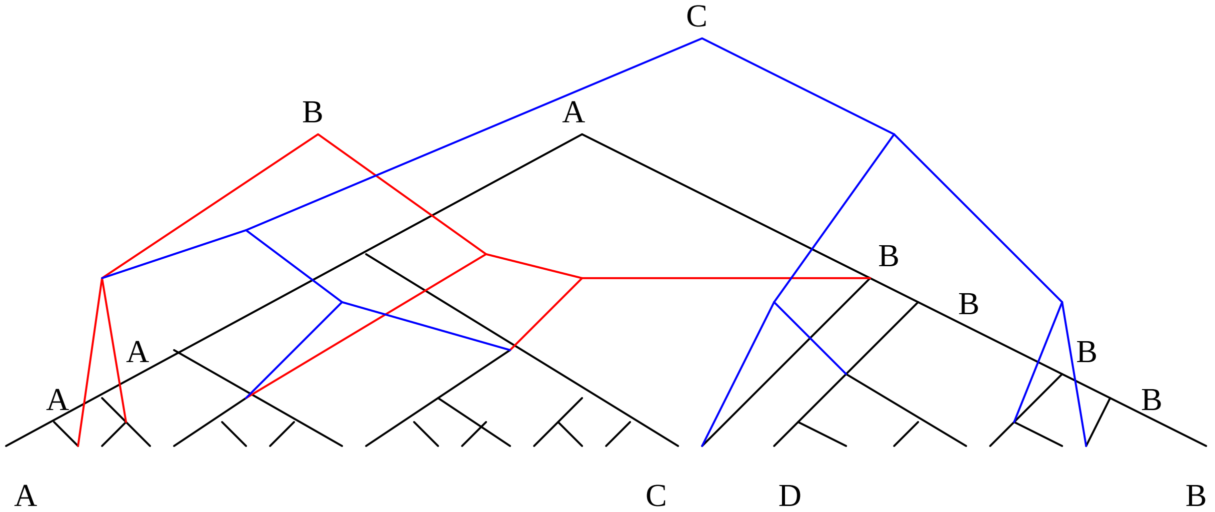
【步驟二】 將被 A 打敗的 $a+1$ 隻猴子再依對稱排法進行第二輪的比較，經 a 次比較後可選出 B，而 B 比了 $\lceil \log_2 (a+1) \rceil$ 次。

【步驟三】將第一輪與第二輪被 B 打敗的 $b+\lceil \log_2(a+1)\rceil$ 隻猴子再依對稱排法進行第三輪的比較，經 $b+\lceil \log_2(a+1)\rceil-1$ 次比較後可選出第三名 C， 而 C 比了 $\lceil \log_2(b+\lceil \log_2(a+1)\rceil)\rceil$ 次，其中 $b=a-1$ (情況1)或 $b=a$ (情況2)。

【步驟四】將第一輪與第三輪被 C 打敗的 $a-1+\lceil \log_2(b+\lceil \log_2(a+1)\rceil)\rceil$ 隻猴子再依對稱排法進行第四輪比較，經 $a-2+\lceil \log_2(b+\lceil \log_2(a+1)\rceil)\rceil$ 次比較後可選出第四名 D。

【實例說明】 若想從 25 隻猴子中，採用兩兩比較的方式選出前三名(優等)及第四名(佳作)，則最少需要進行幾次的比較才能完成呢？

注意： $n=25=2^a+2^{a-1}+1$，其中 $a=4$，而 $\lceil \log_2 n\rceil=5$， $b=a=4$ (情況2)。



(1) 第一輪 $n-1=24$ 次後可選出第一名 A，故 $M(25,1)=24$。若直接由定理1，則 $M(25,1)=25-1=24$。

(2) 第二輪再比 $a=4$ 次後就可選出第二名 B；因此， $M(25,2)=24+4=28$。若直接由定理2，則 $M(25,2)=25-2+5=28$。

(3) 第三輪比 $b+\lceil \log_2(a+1)\rceil-1=6$ 次可選出第三名 C；故 $M(25,3)=28+6=34$。若直接由定理6，則 $e_n=1$，且 $M(25,3)=25+2\times5+3-5+1=34$。

(4) 第四輪再比 $a-2+\lceil \log_2(b+\lceil \log_2(a+1)\rceil)\rceil=5$ 次後就可選出第四名 D；因此， $M(25,4)=34+5=39$。 若直接由定理8，則 $d_n=2$，且

$$M(25,4)=25+3\times5+3+3-9+2=39。$$

陸、結論與研究心得　：

(一) 本作品中利用對稱性原理來處理 $M(n,k)$ 的估計問題，並循序漸近而導出 $M(n,1)$、$M(n,2)$、$M(n,3)$、$M(n,4)$ 的一般公式；同時，我們也提出一種便於直接計算的演算法。事實上，在研究過程中我們發現：「缺席數」的存在性；並經由每一區間 $\left(2^a, 2^{a+1}\right]$ 內確認出「缺席數」的落腳處而導出 $M(n,3)$ 的一般式。在推導的過程中，「缺席數」確實扮演了相當重要的角色；這種有趣的「缺席數」對進一步研究 $M(n,4)$，乃至於 $M(n,k)$ 的一般式，都有其重要的參考價值，也是值得將來繼續探討與研究的課題。

(二) 如果從 n 隻猴子中，除了要選出前 k 名完美的猴子之外，評審們還想要選出最需要安慰的最後一名猴子，設最少需要比較的次數以 $N(n,k)$ 表示，則可先選出前 k 名後，再從其餘的 $n-k$ 隻猴子中選出最後一名，由此可得出規律： 對正整數 $n > k \geq 1$，$N(n,k) \leq M(n,k) + n - k - 1$。在 1994 年，P. Komjath【4】證明了：$N(n,1) = n - 1 + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$，其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示不大於 x 的最大整數。實際上，在處理 $N(n,k)$ 的上界時，對稱性原理不再適用了，因此，要導出 $N(n,k)$ 的一般式仍有待將來進一步去克服它。

柒、參考資料及書籍　：

【1】趙文敏，寓數學於遊戲第一輯，九章出版社 1981。

【2】倪進與朱明書，遊戲中的數學方法，江蘇教育出版社 1986。

【3】S. Baase， Computer algorithms， Addision-Wesley 1988。

【4】 P. Komjath， How to find the largest element by comparisions， KoMaL 1994， Hungary， 31-33。

【5】R. Balakrishnan & K. Ranganathan， A textbook of graph theory， Springer 1999。

相關操作次數對照表

總 數 n	$M(n,1)$	$M(n,2)$	$M(n,3)$	e_n	$M(n,4)$	d_n	對 數 $\lceil \log_2 n \rceil$
1	0	x	x	x	x	x	0
2	1	1	x	x	x	x	1
3	2	3	3	0	x	x	2
4	3	4	5	1	5	3	2
5	4	6	8	0	9	0	3
6	5	7	9	0	11	1	3
7	6	8	11	1	13	2	3
8	7	9	12	1	14	2	3
9	8	11	14	0	16	0	4
10	9	12	15	0	17	0	4
11	10	13	16	0	19	1	4
12	11	14	17	0	20	1	4
13	12	15	19	1	23	3	4
14	13	16	20	1	24	3	4
15	14	17	21	1	25	3	4
16	15	18	22	1	26	3	4
17	16	20	25	0	29	0	5
18	17	21	26	0	30	0	5
19	18	22	27	0	31	0	5
20	19	23	28	0	32	0	5
21	20	24	29	0	34	1	5
22	21	25	30	0	35	1	5
23	22	26	31	0	36	1	5
24	23	27	32	0	37	1	5
25	24	28	34	1	39	2	5
26	25	29	35	1	40	2	5
27	26	30	36	1	41	2	5
28	27	31	37	1	42	2	5
29	28	32	38	1	43	2	5
30	29	33	39	1	44	2	5
31	30	34	40	1	45	2	5
32	31	35	41	1	46	2	5
64	63	68	75	1	81	2	6

相關缺席數對應表

n	$M(n,1)$	$M(n,2)$	$M(n,3)$ $a=2^p$	$M(n,3)$ $a\neq 2^p$
2^a $\downarrow$ 2^a+1		缺 1 數	缺 2 數	缺 1 數
$\vdots$				
2^a+2^{a-2} $\downarrow$ $2^a+2^{a-2}+1$				
$\vdots$				
2^a+2^{a-1} $\downarrow$ $2^a+2^{a-1}+1$			缺 1 數	缺 1 數
$\vdots$				
2^{a+1}				
缺 席 數 總 數	0	1	3	2

n	$M(n,4)$ $a=2$	$M(n,4)$ $a=2^p\geq 4$	$M(n,4)$ $a\neq 2^p, a\in X$	$M(n,4)$ $a\neq 2^p, a\notin X$
2^a $\downarrow$ 2^a+1	缺 3 數	缺 2 數	缺 1 數	缺 1 數
$\vdots$				
2^a+2^{a-2} $\downarrow$ $2^a+2^{a-2}+1$	缺 1 數	缺 1 數	缺 1 數	缺 1 數
$\vdots$				
2^a+2^{a-1} $\downarrow$ $2^a+2^{a-1}+1$	缺 1 數	缺 1 數	缺 2 數	缺 1 數
$\vdots$				
2^{a+1}				
缺 席 數 總 數	5	4	4	3

評　語

030411 國中組數學科　佳作

選美大會

作品運用演算法則探討 n 個對象評比的方法，作者藉由教材中「樣式與規律」學到技巧尋找可能的上界並猜測最小上界，過程具邏輯程序，頗能表達理論與實用的相關性。