中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030409

金門縣立金城國民中學

指導老師姓名

楊玉星

作者姓名

俞政杉

李惲岳

歐陽巧

李國瑀

三足鼎立－－定點與兩圖形上動點可否形成正三角形的探討

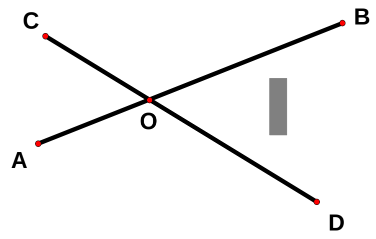
壹、摘要

由一道數學習題的啓發，讓我們聯想到由一定點與兩圖形上動點作正三角形的問題。爲了方便問題的解決，不妨就定點與兩圖形的位置關係逐一討論，我們發現了過定點作正三角形的各種可能，其解包括四解、三解、二解、一解或無解。而從這一系列問題所研究出來作正三角形的方法，並利用判別「直線與圓、圓與圓」交點數的式子，正可以解決「定點落在哪些區域可作的正三角形會有多少解」的問題。

貳、研究動機

在第五冊數學 3-2 綜合證題法的習題中，有如下的問題：

如圖，$\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 爲兩條登山步道，套色部分爲長方形空地；爲了旅客休憩的方便，希望在這塊空地上興建涼亭；此涼亭要與 $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 兩道路的垂直距離相等，請你畫出涼亭的大概位置，並說明爲什麼？



由這個問題的啓發，讓我們聯想到另一個問題：如果涼亭已經蓋好了，可否在 $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 兩條登山步道上各找一個地點，使得涼亭與這兩個地點恰好形成一正三角形？又若將這兩條步道改變相交位置，或者將步道其一或兩者改成圓形，那麼，可否同樣地在兩步道上各找一個地點和涼亭構成一正三角形呢？

參、研究目的

利用尺規及 GSP 軟體來探討定點與兩圖形上動點可否形成正三角形的問題，並研究其解的可能狀況。

肆、研究器材

紙、直尺、圓規、電腦軟體：Geometer’s Sketchpad 4.0（GSP）

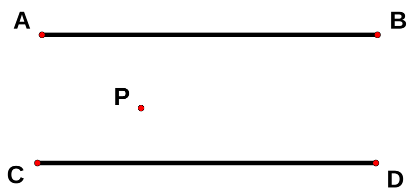
伍、研究過程

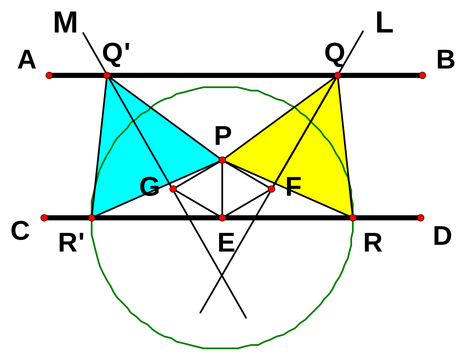
爲了探討這一系列問題，我們不妨就定點與兩圖形的位置關係逐一討論如下：

一、$\overleftrightarrow{AB}$和$\overleftrightarrow{CD}$平行

求作正△PQR，使它的頂點 Q、R 分別在$\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$上。

（一）如圖， 假設 P 點在$\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$的內側。





【作圖】1.過 P 作$\overline{PE}\perp\overleftrightarrow{CD}$於 E，以$\overline{PE}$爲邊，在$\overline{PE}$的一側作正△PEF。

2.過 F 作直線$L\perp\overline{PF}$於 F，交$\overleftrightarrow{AB}$於 Q 點，以$\overline{FQ}$爲半徑，以 E 爲圓心畫圓，交$\overleftrightarrow{CD}$於 R 和 R'，連接$\overline{PQ}$ 、$\overline{QR}$ 、$\overline{RP}$ ，則△PQR 即爲所求。

3.同理，可在$\overline{PE}$的另一側作出△ PQ'R'。

【證明】1.在△PER 和△PFQ 中，∵ $\overline{PE}=\overline{PF}$ ，

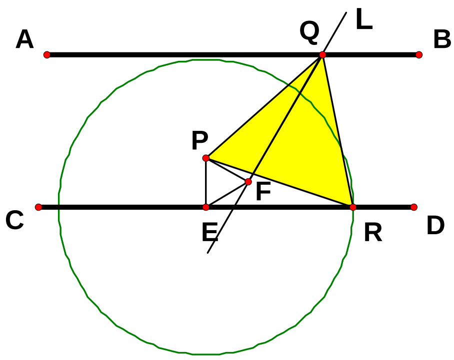
∠PER＝∠PFQ＝90°，$\overline{ER}=\overline{FQ}$ ，

∴△PER≅△PFQ（SAS）。

2.∵△PER≅△PFQ，∴$\overline{PR}=\overline{PQ}$ ，

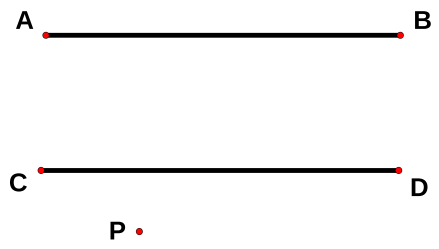
∠EPR＝∠ FPQ，推得∠EPR－∠FPR＝∠FPQ－∠FPR，即∠RPQ＝∠EPF＝60°。

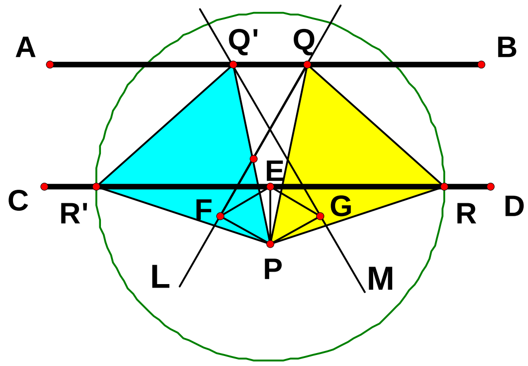
3.∵ $\overline{PR}=\overline{PQ}$ 且∠RPQ＝60°，∴△PQR 爲正三角形。



【討論】正△PEF 可能在$\overline{PE}$的兩側作出，而$\overline{PF}$ 的垂線 L 和$\overleftrightarrow{CD}$ 、$\overleftrightarrow{AB}$都成 60°交角，必同時和$\overleftrightarrow{CD}$ 、$\overleftrightarrow{AB}$相交，故本題必有兩解且必全等。

（二）如圖，假設 P 點在 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 的外側。





【作圖】同上題作法。

【證明】1.同上題可利用 SAS 證明△PER≅△PFQ。

2.∵△PER≅△PFQ，∴ $\overline{PR}=\overline{PQ}$ ，∠EPR＝∠FPQ，

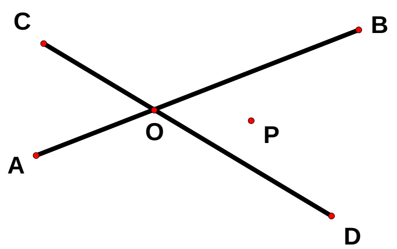
推得∠EPR－∠EPQ＝∠FPQ－∠EPQ，即∠RPQ＝∠EPF＝60°。

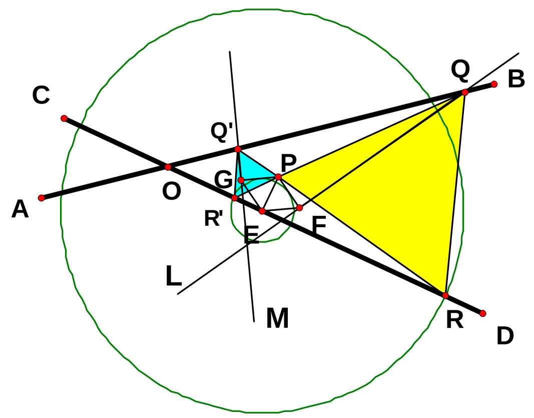
3.在△PQR 中，∵ $\overline{PR}=\overline{PQ}$ 且∠RPQ＝60°，∴△PQR 為正三角形。

【討論】同上題討論，本題可作的正三角形必有兩解且全等。

二、$\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 相交

如圖， 假設 P 點在 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 之間，求作正△PQR，使它的頂點 Q、R 分別在 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 上。

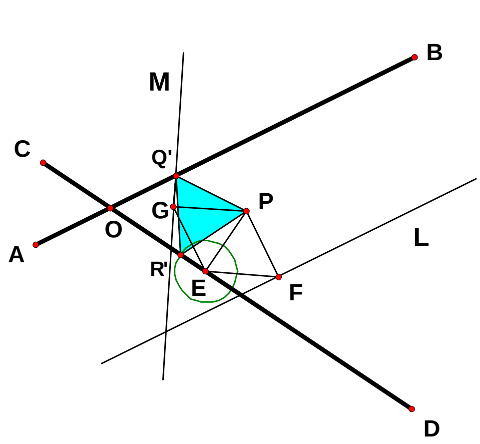




【作圖】同一（一）的作法。
【證明】同一（一）的證明。

【討論】同一（一）的討論，（1）若 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 的交角不是 60°，則直線 L、M 必與 $\overline{AB}$ 相交，所以可作的正三角形必有兩解，但不全等；（2）若 $\overleftrightarrow{AB}$ 、$\overleftrightarrow{CD}$ 的交角

是 60°，則直線 L、M 恰有一直線與 $\overleftrightarrow{AB}$ 平行，所以可作的正三角形只有一解。

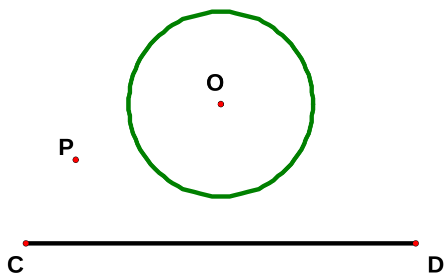


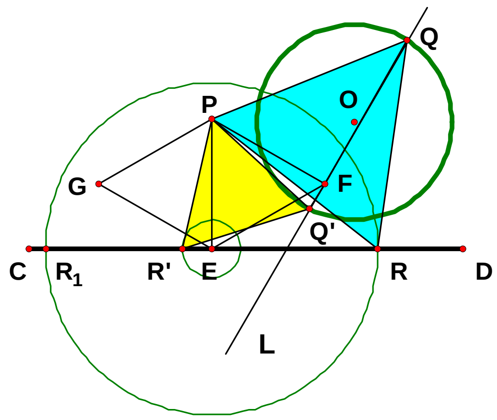
若將 $\overleftrightarrow{AB}$ 改成圓 O，我們可以考慮圓 O 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 的相交狀況如下：

三、圓 O 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 不相交

求作正△PQR，使它的頂點 Q、R 分別在圓 O 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 上。

（一）如圖，假設 P 點在圓 O 外且和圓 O 在 $\overleftrightarrow{CD}$ 同側。





【作圖】1.過 P 作 $\overline{PE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ 於 E，以 $\overline{PE}$ 爲邊長，在 $\overline{PE}$ 的一側作正△PEF。

2.過F作直線 $L \perp \overline{PF}$ 於F，交圓O於Q和Q'兩點，以 $\overline{FQ}$ 爲半徑，以E爲圓心畫圓，交 $\overleftrightarrow{CD}$ 於R和R_1，連接 $\overline{PQ}$ 、 $\overline{QR}$ 、 $\overline{RP}$ ，則△PQR即爲所求。

3.同理，可以作出△PQ'R'。

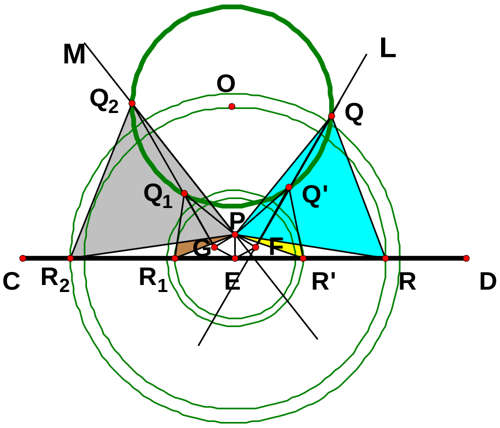
【證明】1.在△PER 和△PFQ 中，∵ $\overline{PE} = \overline{PF}$ ，∠PER＝∠PFQ＝90°， $\overline{ER} = \overline{FQ}$ ，

∴△PER≅△PFQ（SAS）。

2.∵△PER≅△PFQ，∴ $\overline{PR} = \overline{PQ}$ ，∠EPR＝∠FPQ，推得∠EPR＋∠FPR＝∠FPQ＋∠FPR，即∠RPQ＝∠EPF＝60°。

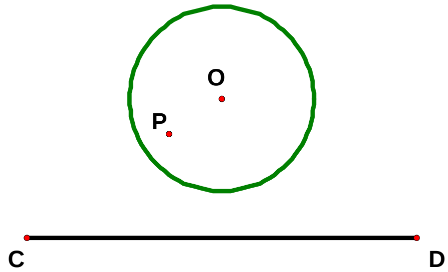
3.∵ $\overline{PR}=\overline{PQ}$ 且∠RPQ＝60°，∴△PQR

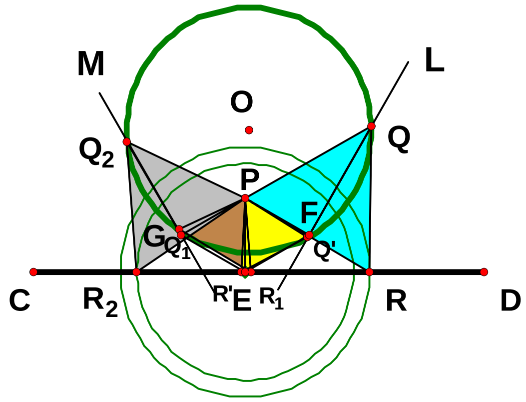
爲正三角形。



【討論】正三角形 PEF 可能在 $\overline{PE}$ 的兩側作出，而 $\overline{PF}$ 的垂線和圓 O 相交狀況可能有不相交、相切和相交兩點三種，因此本題可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

（二）如圖，假設 P 點在圓 O 內。



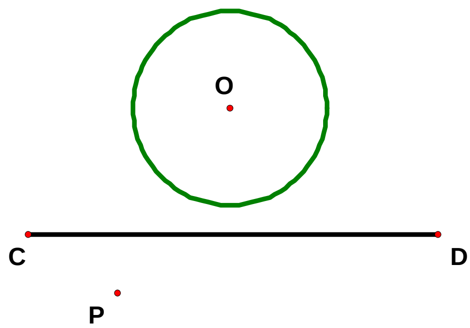


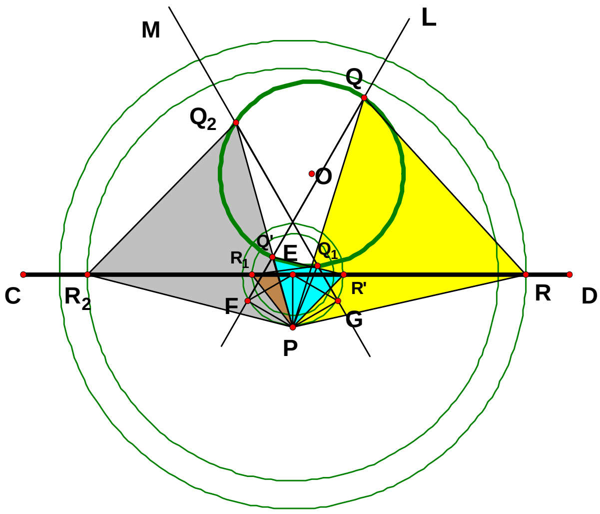
【作圖】同上題作法。

【證明】同上題證明。

【討論】同上題的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

（三）如圖，假設 P 點在圓 O 外且和圓 O 在 $\overleftrightarrow{CD}$ 異側。





【作圖】同三（一）的作法。

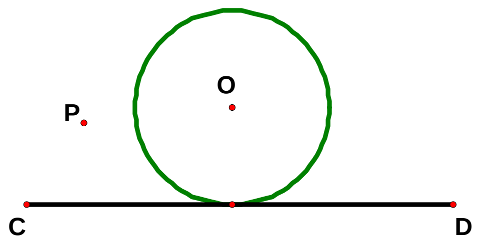
【證明】同三（一）的證明。

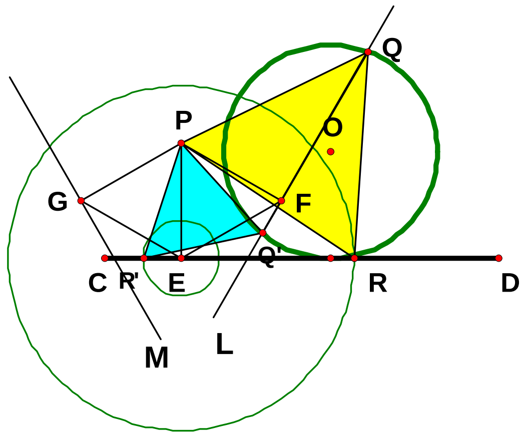
【討論】同三（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

四、圓 O 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 相切

求作正△PQR，使它的頂點 Q、R 分別在圓 O 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 上。

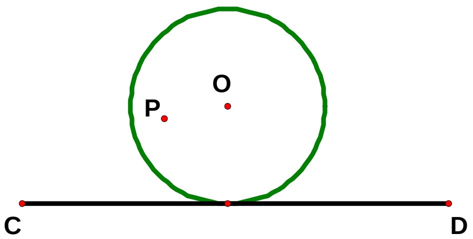
（一）如圖，假設 P 點在圓 O 外且和圓 O 在 $\overleftrightarrow{CD}$ 同側。

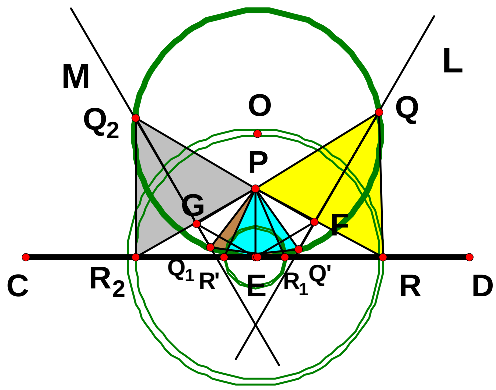




【作圖】同三（一）的作法。
【證明】同三（一）的證明。
【討論】同三（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。特別一提的，四解、三解的狀況只出現在點 P 很靠近圓 O 與 $\overleftrightarrow{CD}$ 的切點時。

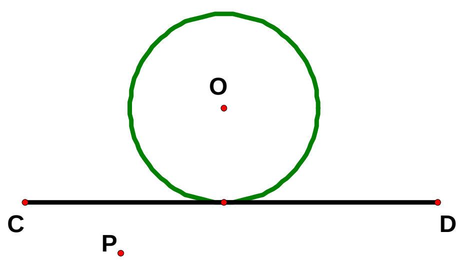
（二）如圖，假設 P 點在圓 O 內。

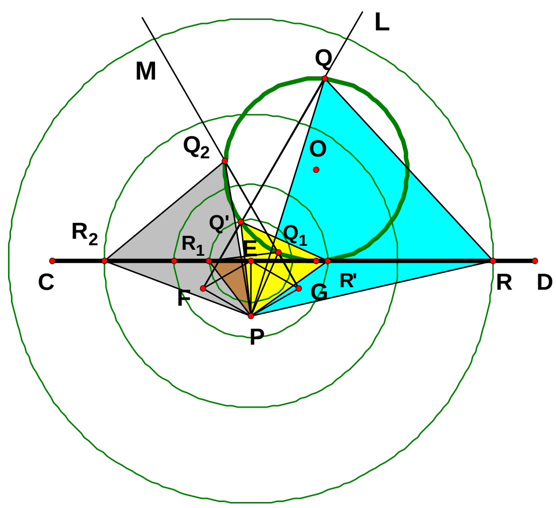




【作圖】同三（一）的作法。
【證明】同三（一）的證明。
【討論】同三（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

（三）如圖，假設 P 點在圓 O 外且和圓 O 在 $\overleftrightarrow{CD}$ 異側。



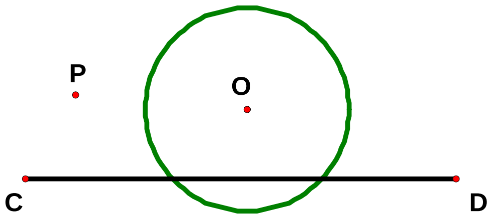


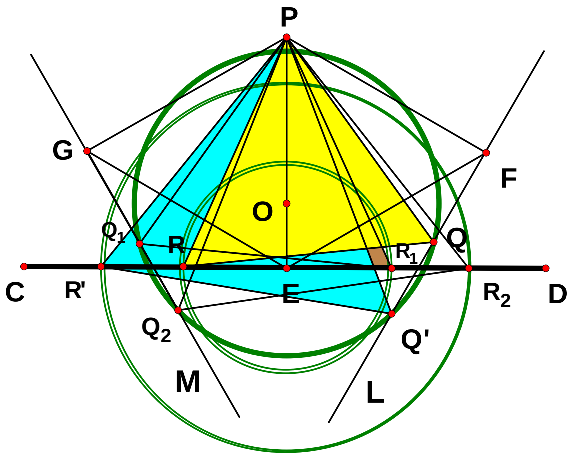
【作圖】同三（一）的作法。
【證明】同三（一）的證明。
【討論】同三（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

五、圓 O 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 相交兩點

求作正△PQR，使它的頂點 Q、R 分別在圓 O 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 上。

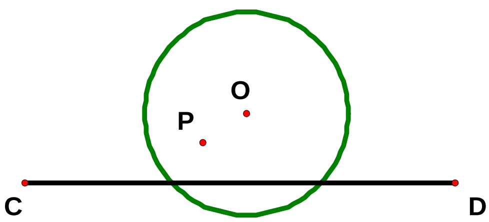
（一）如圖，假設 P 點在圓 O 外且和圓 O 大部分在 $\overleftrightarrow{CD}$ 同側。

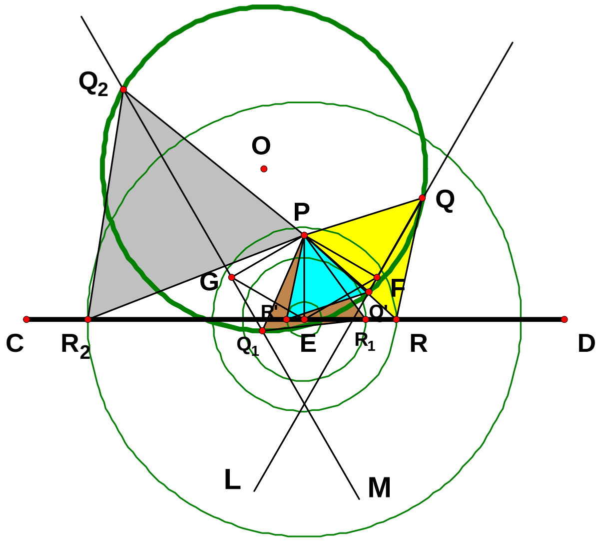




【作圖】同三（一）的作法。
【證明】同三（一）的證明。
【討論】同三（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

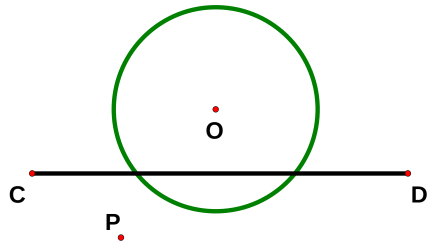
（二）如圖，假設 P 點在圓 O 內且和圓 O 大部分在 $\overleftrightarrow{CD}$ 同側。

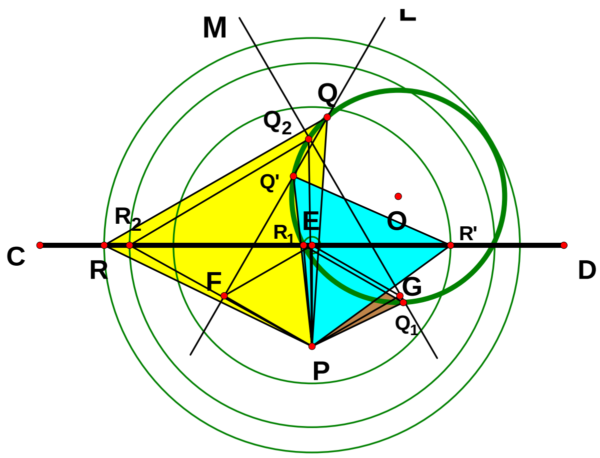




【作圖】同三（一）的作法。
【證明】同三（一）的證明。
【討論】同三（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

（三）如圖，假設 P 點在圓 O 外且和圓 O 大部分在$\overleftrightarrow{CD}$異側。



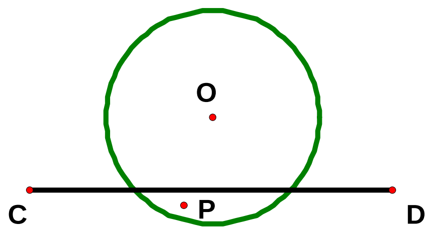


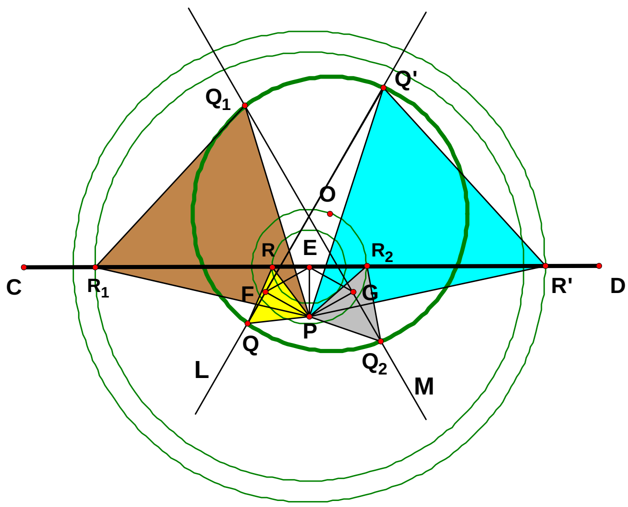
【作圖】同三（一）的作法

【證明】同三（一）的證明。

【討論】同三（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

（四）如圖，假設 P 點在圓 O 內且和圓 O 大部分在$\overleftrightarrow{CD}$異側。



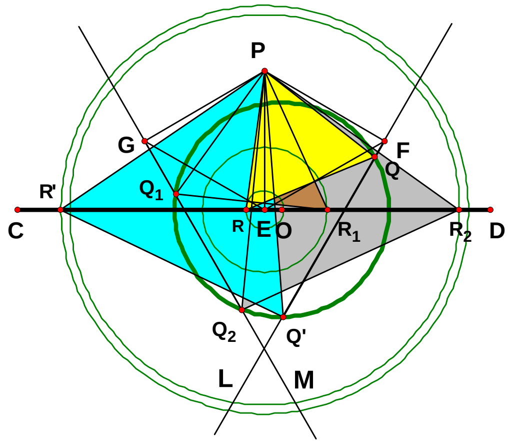


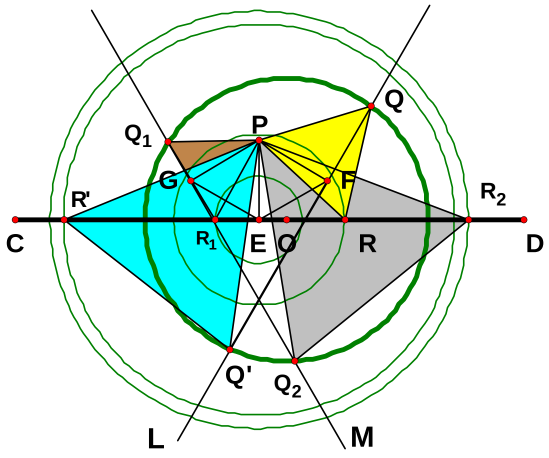
【作圖】同三（一）的作法

【證明】同三（一）的證明。

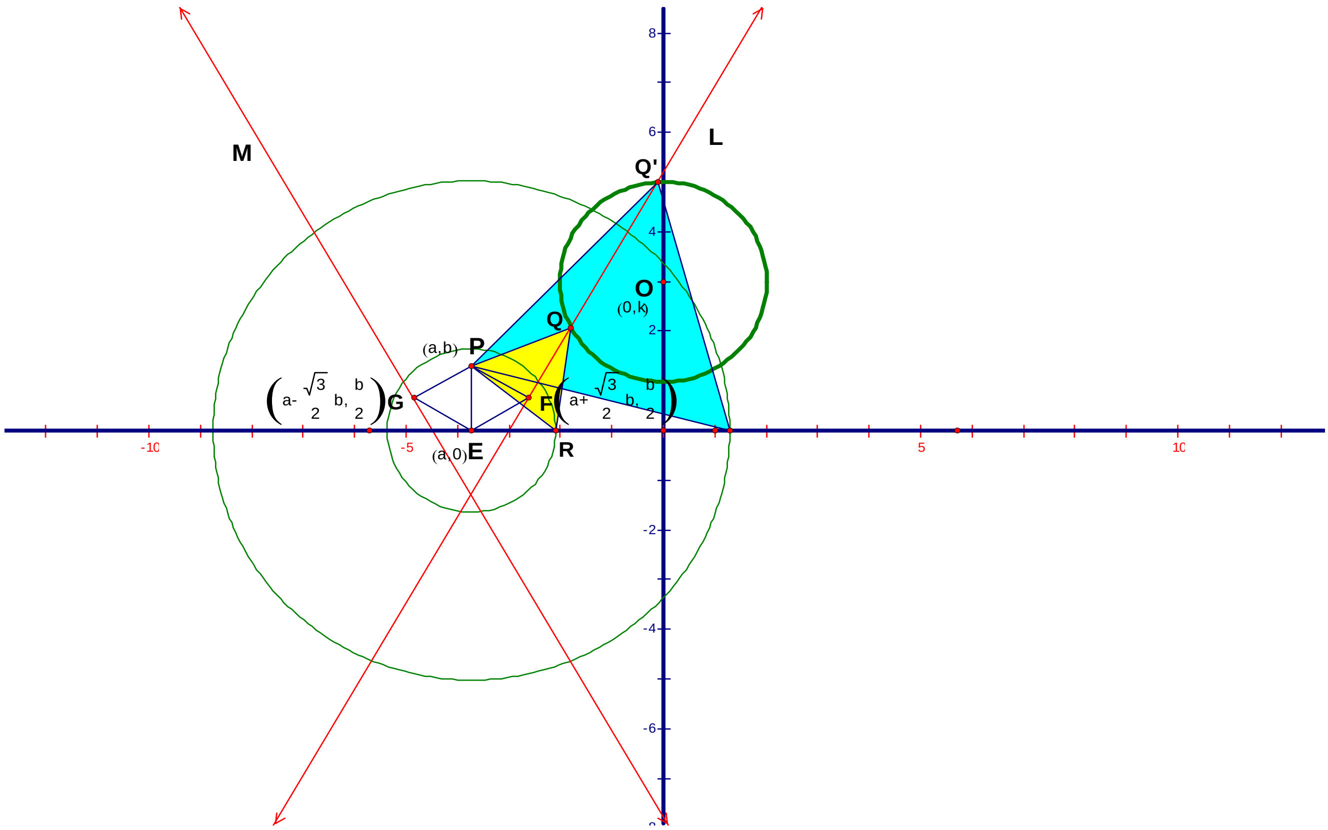
【討論】同三（一）的討論，本題可作的正三角形必有四解。

（五）特別地，若$\overleftrightarrow{CD}$正好通過圓心 O，如左圖， P 點在圓 O 外，本題可作的正三角形也可能有四解、三解、兩解、一解或無解；如右圖， P 點在圓 O 內，本題可作的正三角形必有四解。





綜合以上圓與直線的位置關係，可作的正三角形有四解、三解、兩解、一解或無解。爲了進一步了解定點 P 的位置與正三角形解的關係，我們不妨將圓 O、$\overleftrightarrow{CD}$和定點 P 畫在直角坐標平面上，如下圖：



設圓 O 的圓心爲（0，k），圓 O 的半徑爲 r，$\overleftrightarrow{CD}$爲 x 軸，定點 P 爲（a，b），則

$\overrightarrow{PE}$＝（0，－b）

$\because \overrightarrow{PF}=\begin{pmatrix}\cos 60^o & -\sin 60^o\\ \sin 60^o & \cos 60^o\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}b\\ -\frac{b}{2}\end{pmatrix}$，

$\therefore$F 點爲（a，b）＋（$\frac{\sqrt{3}}{2}b$，$-\frac{b}{2}$）＝（a＋$\frac{\sqrt{3}}{2}b$，$\frac{b}{2}$），

故直線 L 的方程式爲$\dfrac{y-\frac{b}{2}}{x-(a+\frac{\sqrt{3}}{2}b)}=\sqrt{3}$，整理得 $y=\sqrt{3}(x-a)-b$

要了解直線 L 和圓 O 的相交狀況

須考慮$\begin{cases}x^2+(y-k)^2=r^2\\ y=\sqrt{3}(x-a)-b\end{cases}$，得 $x^2+[\sqrt{3}(x-a)-b-k]^2=r^2$，即

$x^2+[\sqrt{3}(x-a)-(b+k)]^2=r^2$，整理得

$4x^2-2\sqrt{3}(\sqrt{3}a+b+k)x+(\sqrt{3}a+b+k)^2-r^2=0$，

判別式 D＝$12(\sqrt{3}a+b+k)^2-16[(\sqrt{3}a+b+k)^2-r^2]$

$=-4(\sqrt{3}a+b+k+2r)(\sqrt{3}a+b+k-2r)$

若設直線L_1爲$\sqrt{3}x+y+k+2r=0$， L_2爲$\sqrt{3}x+y+k-2r=0$，則L_1// L_2，並與x軸正向夾 120°。

同理可以求得直線 M 的方程式爲 $y=-\sqrt{3}(x-a)-b$

要了解直線 M 和圓 O 的相交狀況，須考慮$\begin{cases}x^2+(y-k)^2=r^2\\ y=-\sqrt{3}(x-a)-b\end{cases}$，整理得

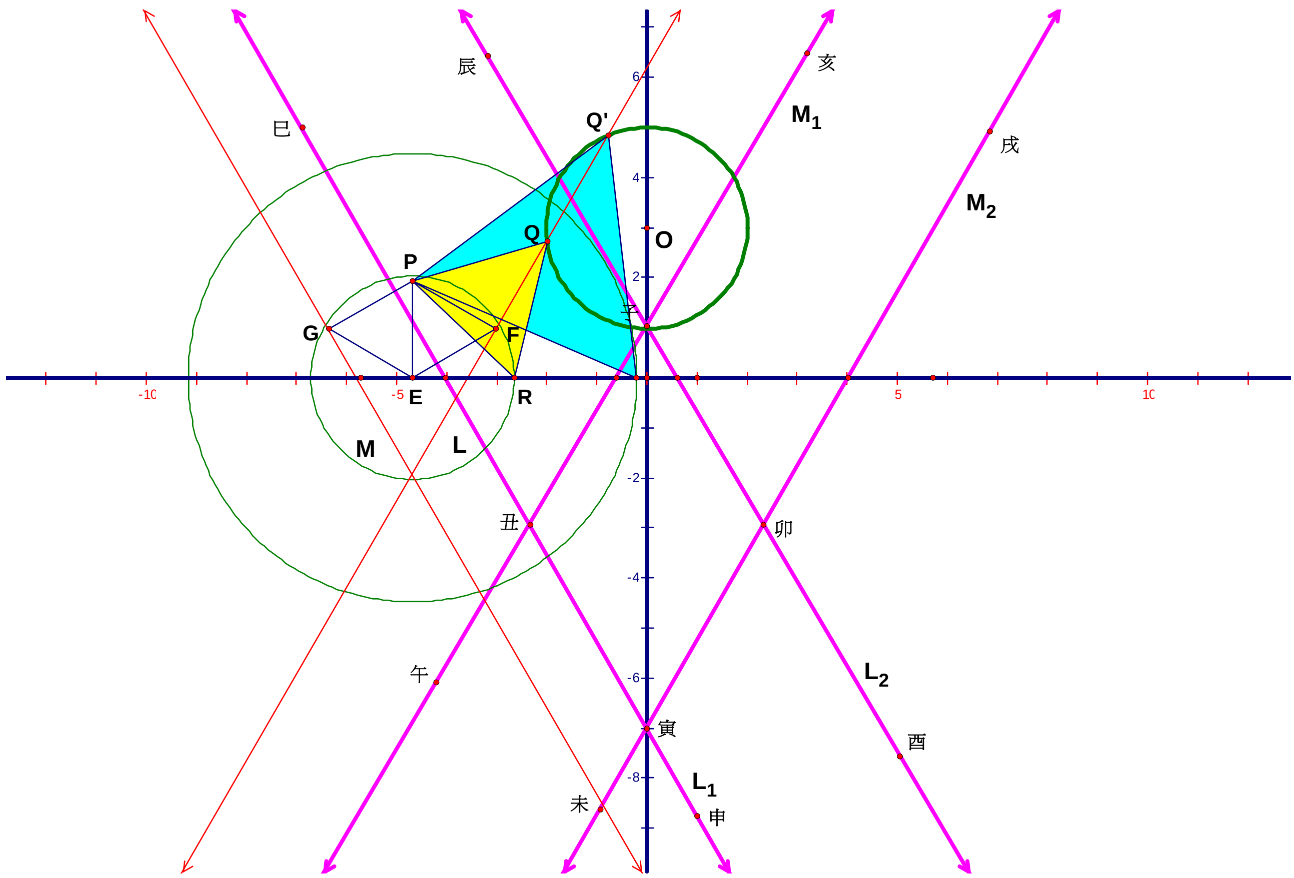
$4x^2-2\sqrt{3}(\sqrt{3}a-b-k)x+(\sqrt{3}a-b-k)^2-r^2=0$，

判別式 D＝$12(\sqrt{3}a-b-k)^2-16[(\sqrt{3}a-b-k)^2-r^2]$

$=-4(\sqrt{3}a-b-k+2r)(\sqrt{3}a-b-k-2r)$

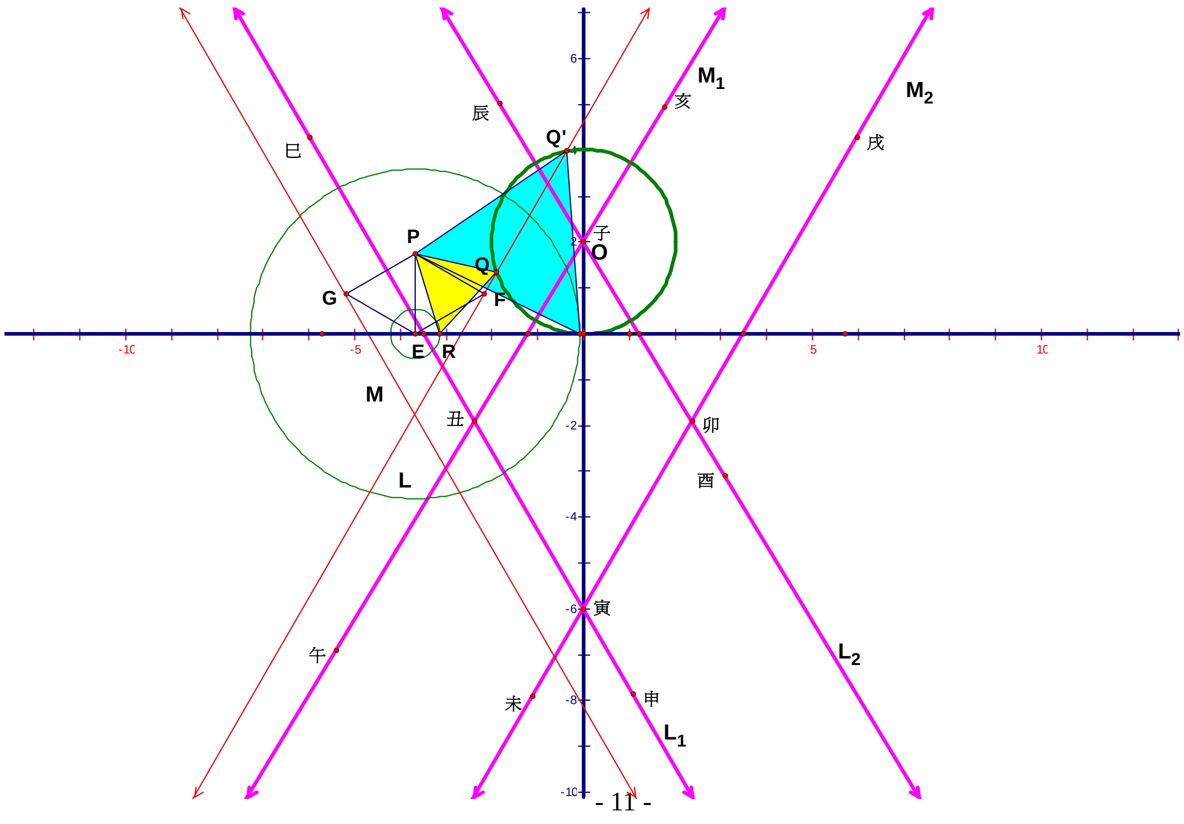
若設直線M_1爲$\sqrt{3}x-y-k+2r=0$， M_2爲$\sqrt{3}x-y-k-2r=0$，則M_1// M_2，並與x軸正向夾 60°。

將直線L_1、L_2、M_1、M_2畫在坐標平面上，如下圖：

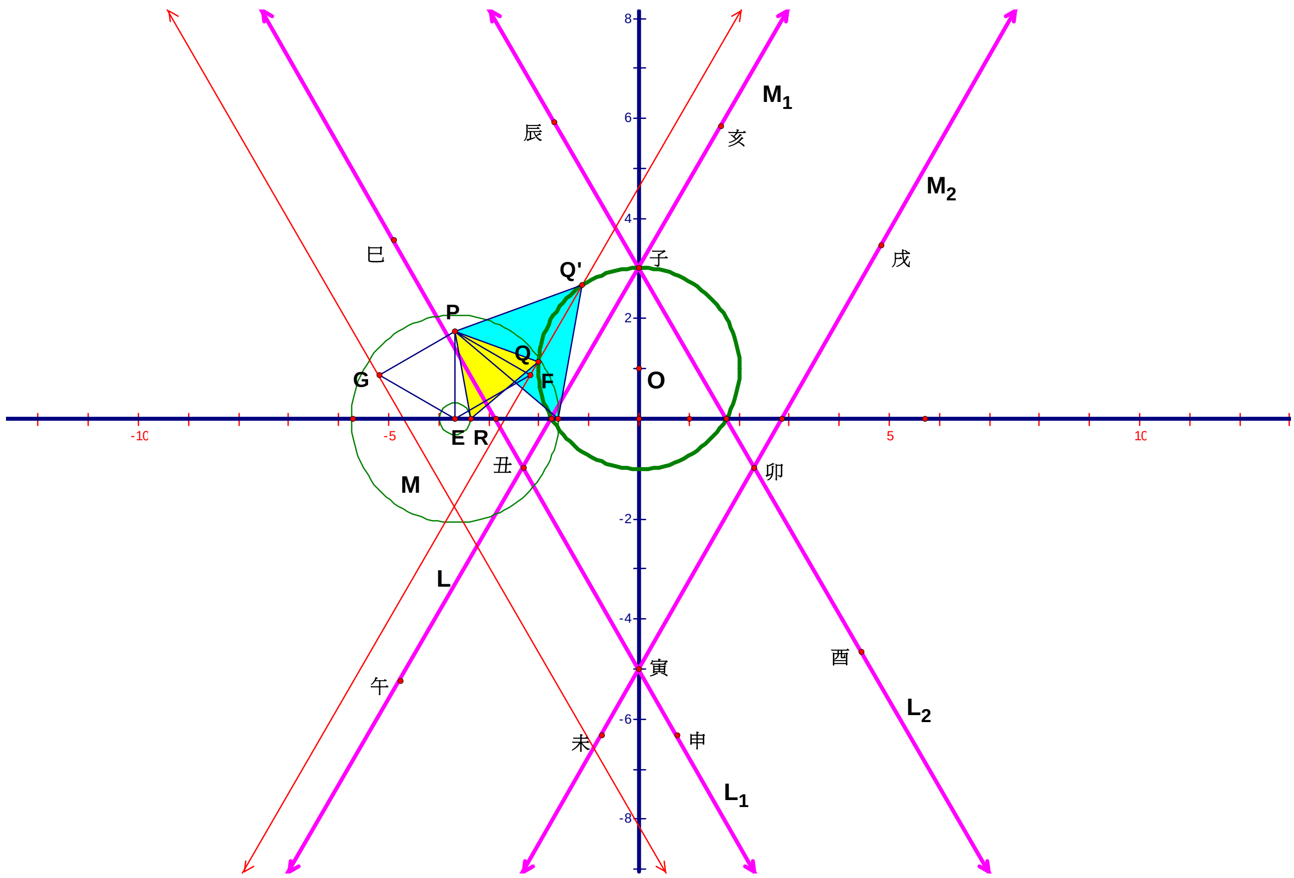


仿照上述的方法，我們也可以畫出其它相交狀況的「正三角形解分布圖」。

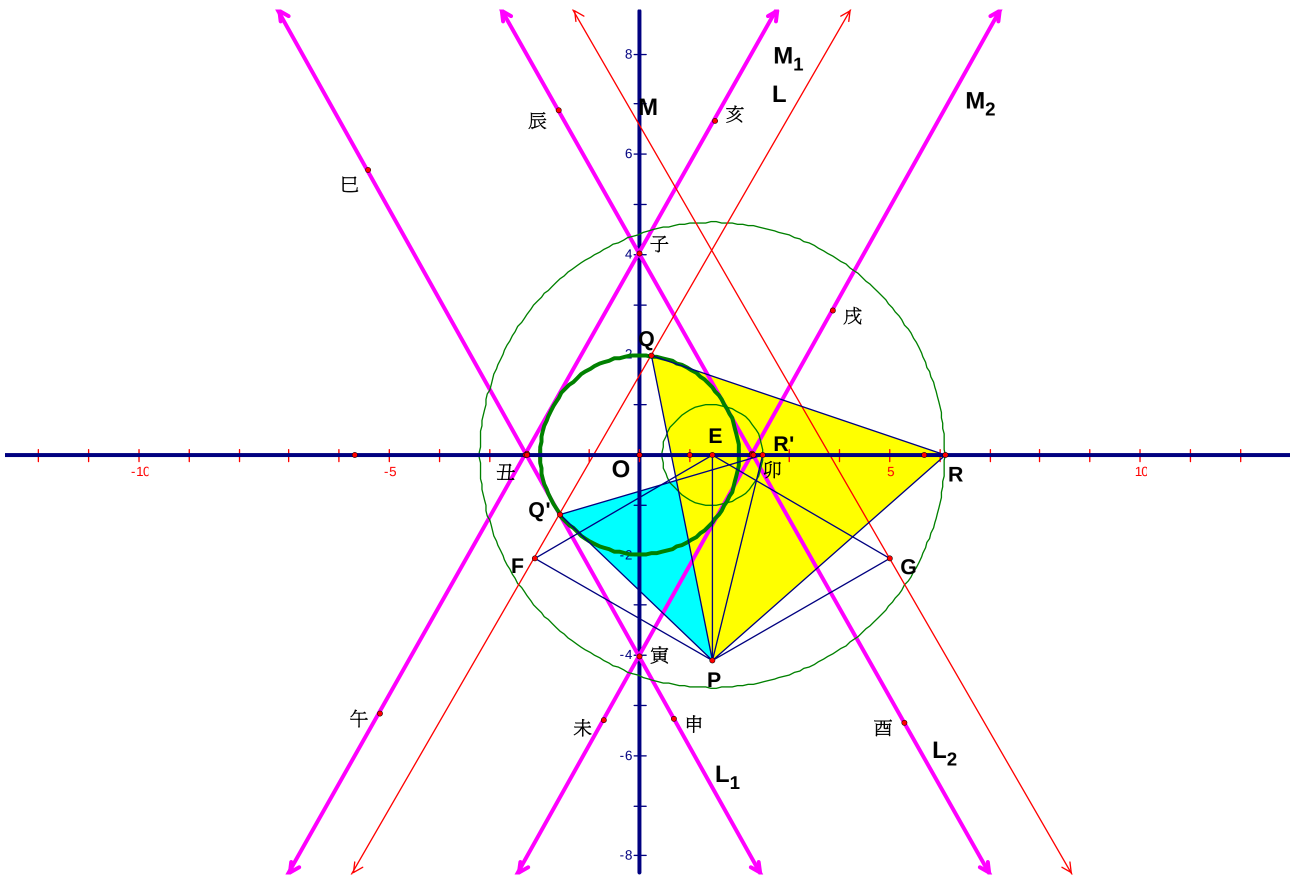
【直線與圓相切時的正三角形解分布圖】



【直線與圓相交兩點時的正三角形解分布圖】



【直線與圓相交兩點且通過圓心時的正三角形解分布圖】

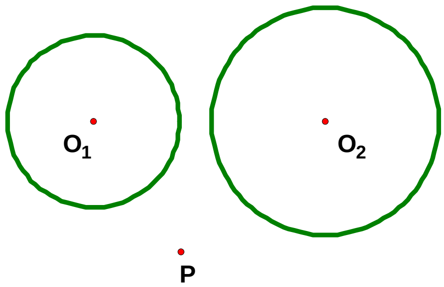


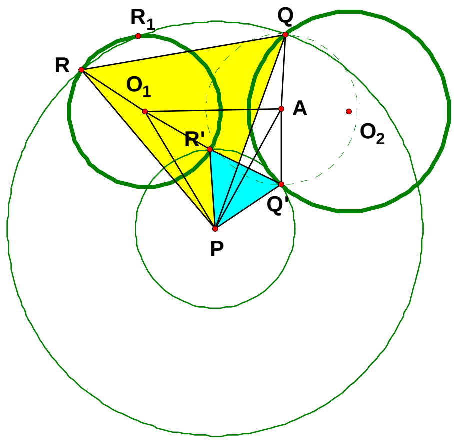
若將登山步道$\overleftrightarrow{AB}$改成圓O_1，$\overleftrightarrow{CD}$改成圓O_2，我們可以考慮圓O_1與圓O_2的相交狀況如下：

六、兩圓O_1和O_2外離

求作正△PQR，使它的頂點Q、R分別在圓O_2和O_1上。

（一）如圖，假設P點同時在兩圓O_1和O_2外。





【作圖】1.連接$\overline{O_1P}$，以$\overline{O_1P}$爲邊長，在$\overline{O_1P}$的一側作正△O_1AP。

2.以A爲圓心，以圓O_1的半徑爲半徑畫圓， 交圓O_2於Q和Q'點，再以P爲圓心，$\overline{PQ}$爲半徑，交圓O_1於R和R_1，連接$\overline{PQ}$、$\overline{QR}$、$\overline{RP}$，則△PQR即爲所求。

3.同理也可以作出△PQ'R'。

【證明】1.連接$\overline{AQ}$、$\overline{O_1R}$。

2.在△PAQ和△PO_1R中，∵$\overline{AQ}=\overline{O_1R}$，$\overline{PA}=\overline{PO_1}$，$\overline{PQ}=\overline{PR}$，

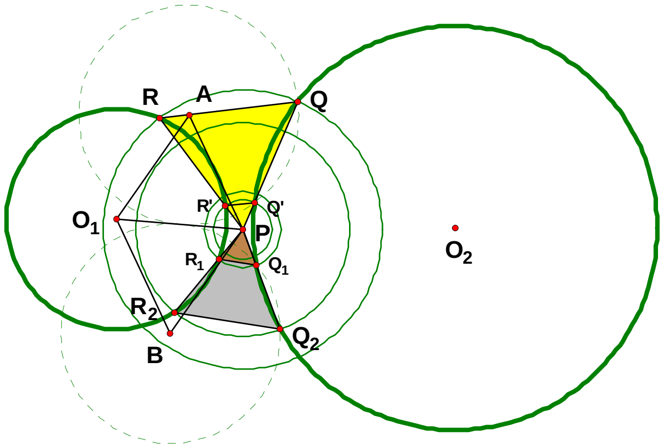
∴△PAQ≅△PO_1R（SSS）。

3.∵△PAQ≅△PO_1R，∴∠APQ＝∠O_1PR，推得

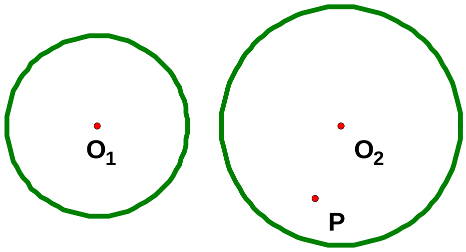
∠APQ＋∠O_1PQ＝∠O_1PR＋∠O_1PQ，即∠RPQ＝∠O_1PA＝60°。

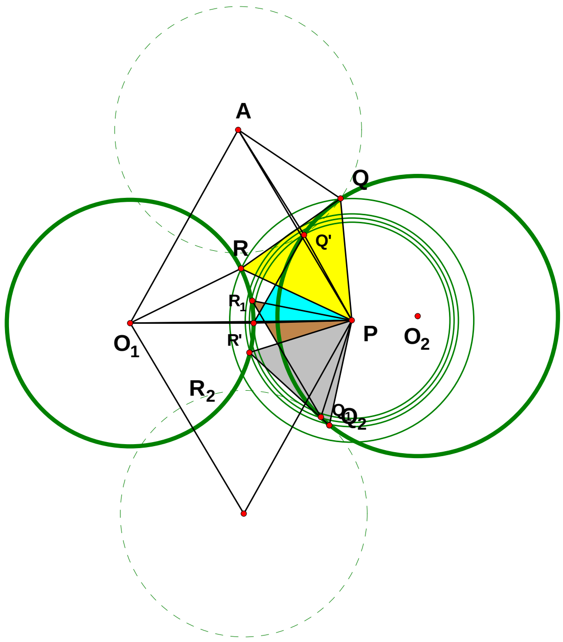
4.∵$\overline{PQ}=\overline{PR}$且∠RPQ＝60°，∴△PQR 爲正三角形。

【討論】正△O_1AP可能在$\overline{O_1P}$的兩側作出，而以A爲圓心，以圓O_1的半徑爲半徑畫圓，和圓O_2的相交狀況可能有不相交、相切和相交兩點三種，因此本題可能有四解、三解、兩解、一解或無解。



（二）如圖，假設P點在兩圓O_1和O_2其中一圓內。



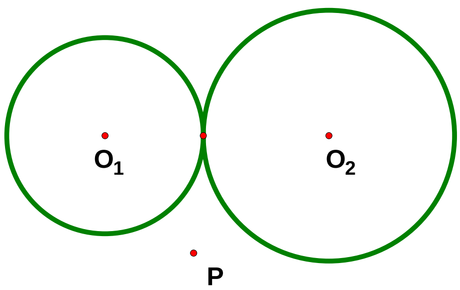


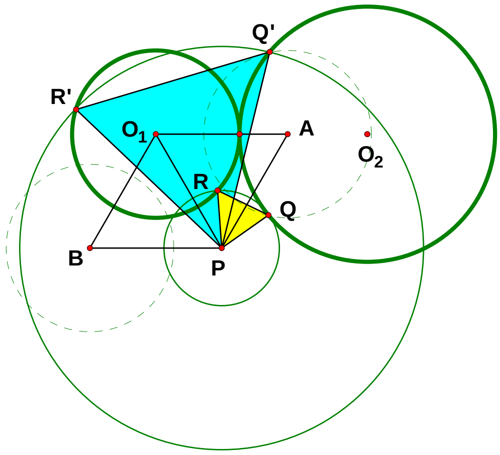
【作圖】同上題作法。
【證明】同上題證明。
【討論】同上題的討論，本題也可能有四解、
三解、兩解、一解或無解。

七、兩圓O_1和O_2外切

求作正△PQR，使它的頂點Q、R分別在圓O_2和O_1上。

（一）如圖，假設P點同時在兩圓O_1和O_2外。

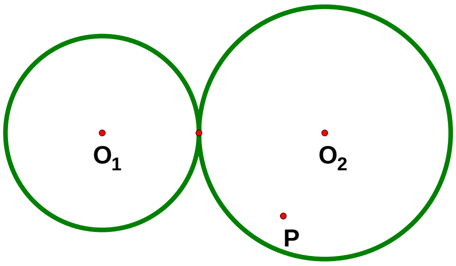


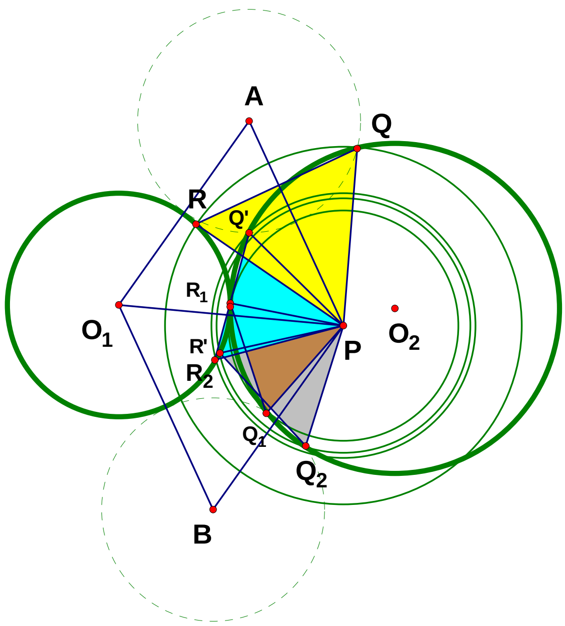


【作圖】同六（一）的作法。
【證明】同六（一）的證明。

【討論】同六（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。特別一提的，四解、三解的狀況只出現在點 P 很靠近兩圓切點時。

（二）如圖，假設P點在兩圓O_1和O_2其中一圓內。



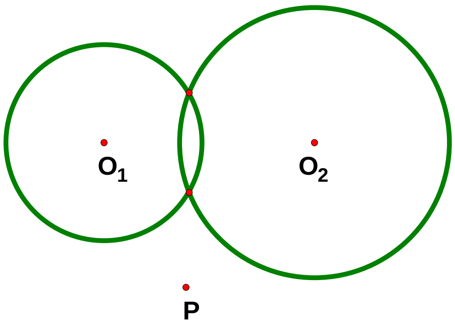


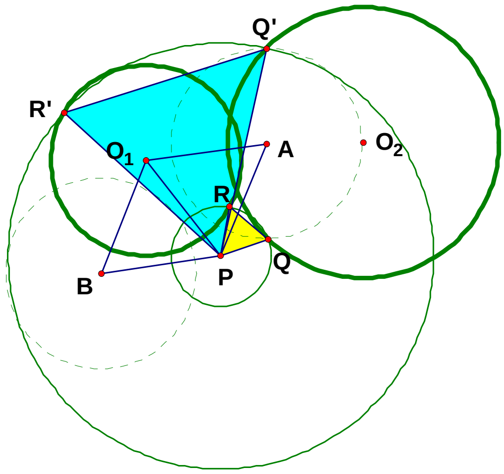
【作圖】同六（一）的作法。
【證明】同六（一）的證明。
【討論】同六（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

八、兩圓O_1和O_2相交兩點

求作正△PQR，使它的頂點Q、R分別在圓O_2和O_1上。

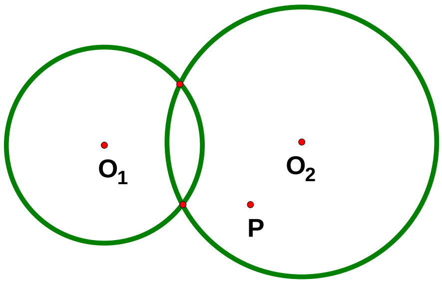
（一）如圖，假設P點同時在兩圓O_1和O_2外。

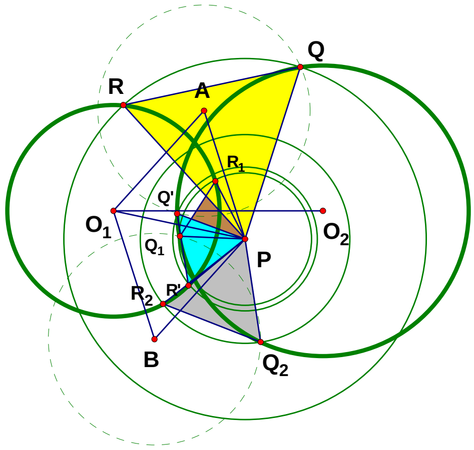




【作圖】同六（一）的作法。
【證明】同六（一）的證明。
【討論】同六（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。特別一提的，四解、三解的狀況只可能出現在點 P 很靠近兩圓交點時。

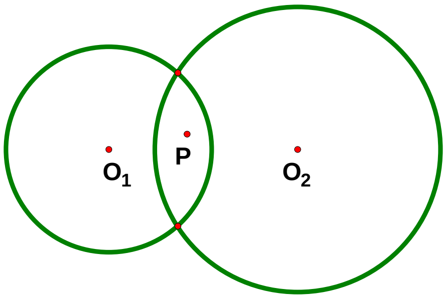
（二）如圖，假設P點在兩圓O_1和O_2其中一圓內。

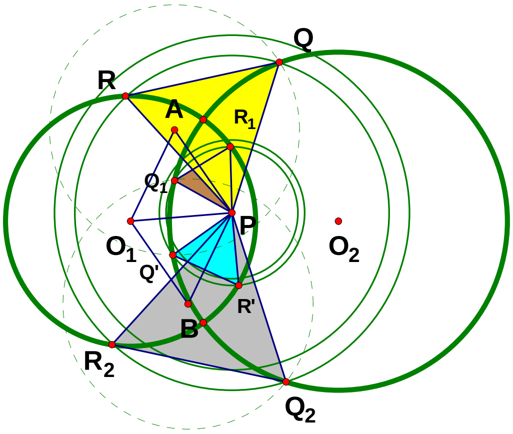




【作圖】同六（一）的作法。
【證明】同六（一）的證明。
【討論】同六（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

（三）如圖，假設P點同時在兩圓O_1和O_2內。



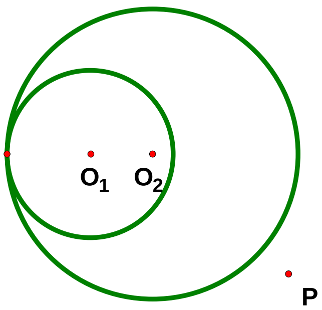


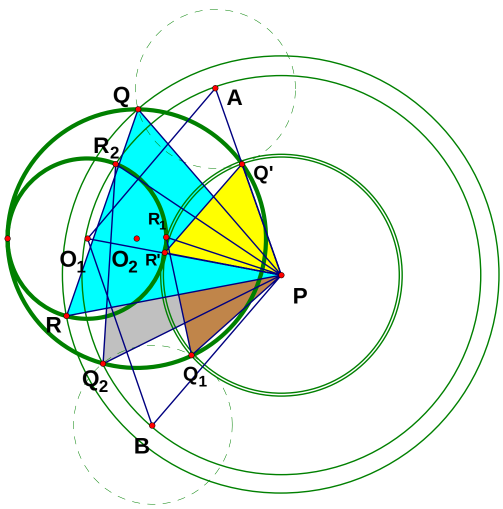
【作圖】同六（一）的作法。
【證明】同六（一）的證明。
【討論】同六（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

九、兩圓O_1和O_2內切

求作正△PQR，使它的頂點Q、R分別在圓O_2和O_1上。

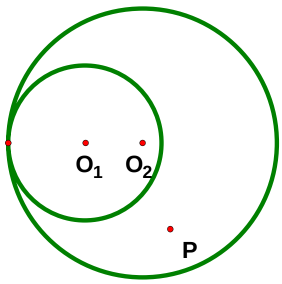
（一）如圖，假設P點同時在兩圓O_1和O_2外。

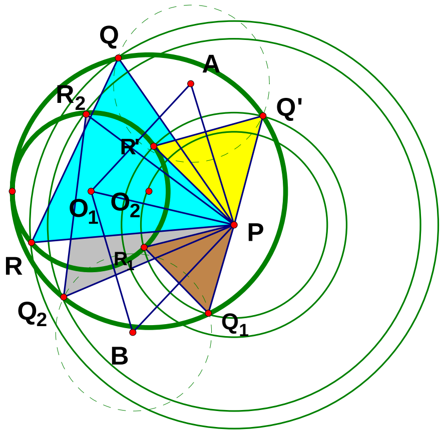




【作圖】同六（一）的作法。
【證明】同六（一）的證明。
【討論】同六（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

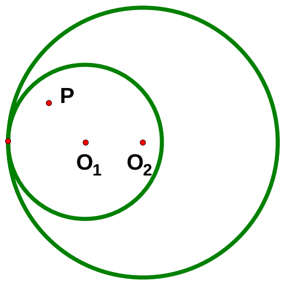
（二）如圖，假設P點在兩圓O_1和O_2之間。

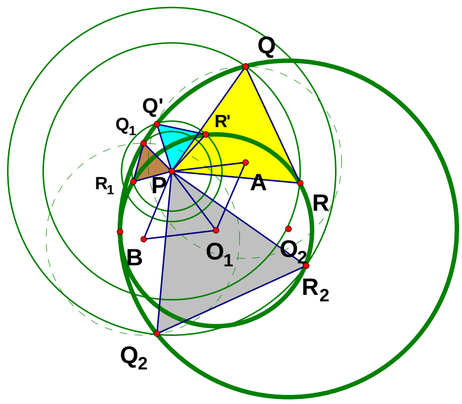




【作圖】同六（一）的作法。
【證明】同六（一）的證明。
【討論】同六（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

（三）如圖，假設P點同時在兩圓O_1和O_2內。



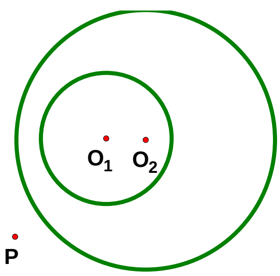


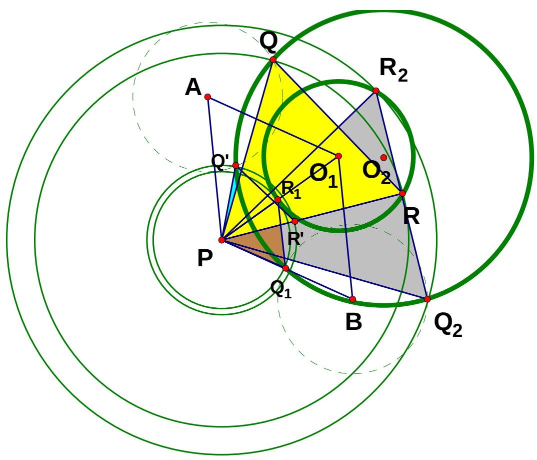
【作圖】同六（一）的作法。
【證明】同六（一）的證明。
【討論】同六（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

十、兩圓O_1和O_2內離

求作正△PQR，使它的頂點Q、R分別在圓O_2和O_1上。

（一）如圖，假設P點同時在兩圓O_1和O_2外。





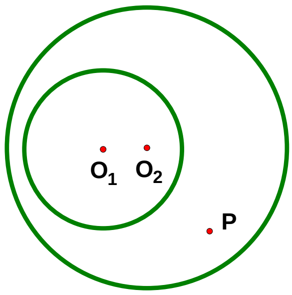
【作圖】同六

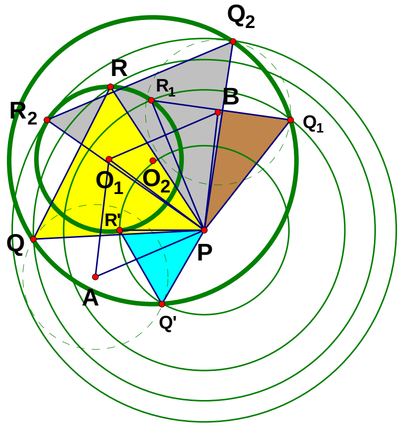
（一）的作法。

【證明】同六（一）的證明。

【討論】同六（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

（二）如圖，假設P點在兩圓O_1和O_2之間。



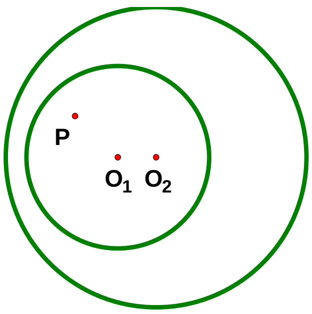


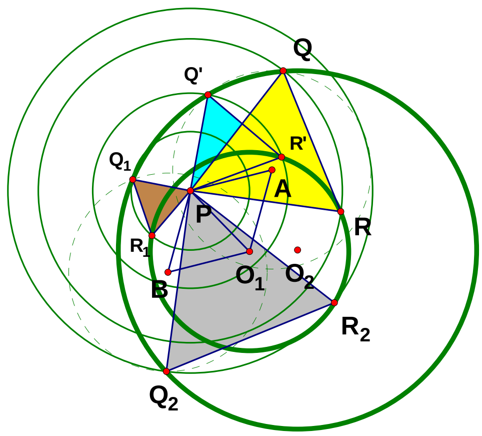
【作圖】同六（一）的作法。

【證明】同六（一）的證明。

【討論】同六（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

（三）如圖，假設P點同時在兩圓O_1和O_2內。





【作圖】同六（一）的作法。

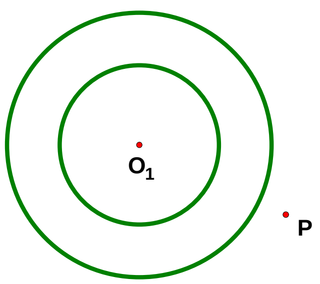
【證明】同六（一）的證明。

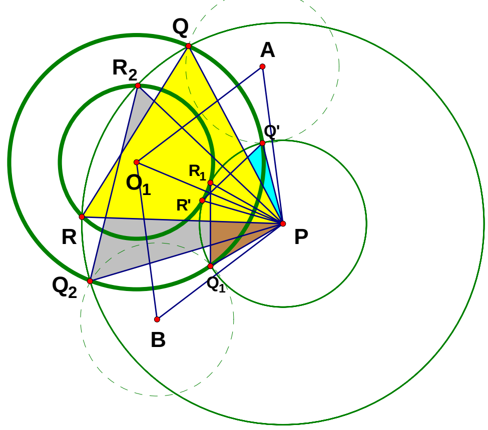
【討論】同六（一）的討論，本題也可能有四解、三解、兩解、一解或無解。

十一、兩圓O_1和O_2為同心圓

求作正△PQR，使它的頂點Q、R分別在圓O_2和O_1上。

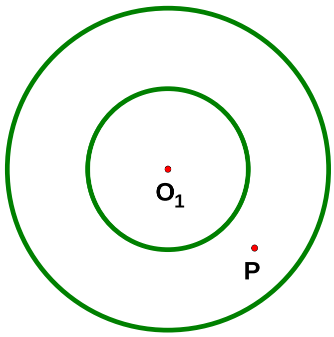
（一）如圖，假設P點同時在兩圓O_1和O_2外。

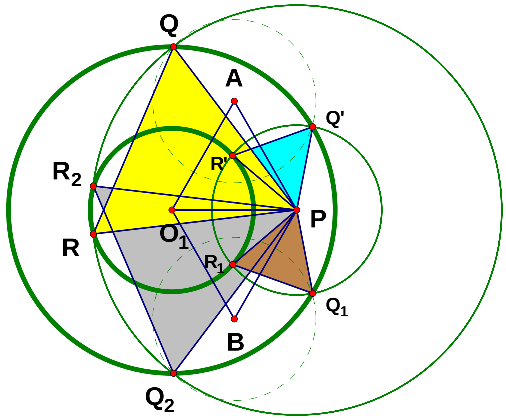




【作圖】同六（一）的作法。
【證明】同六（一）的證明。
【討論】正△O_1AP可能在$\overline{O_1P}$的兩側作出，而以A為圓心，以圓O_1的半徑為半徑畫圓，和圓O_2的相交狀況可能有不相交、相切和相交兩點三種，而本題$\overline{O_1P}$兩側所作的圓與圓O_2的相交狀況剛好一致，因此本題可能有四解、兩解或無解。

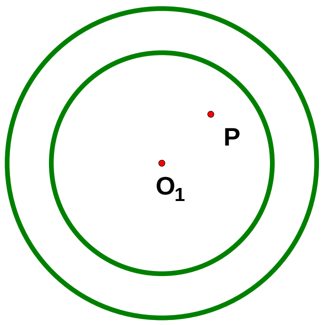
（二）如圖，假設P點在兩圓O_1和O_2之間。

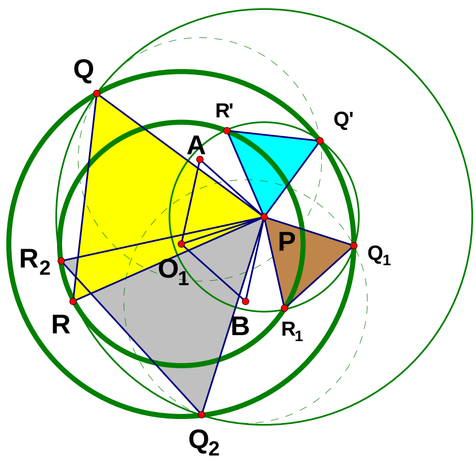




【作圖】同六（一）的作法。
【證明】同六（一）的證明。
【討論】同上題的討論，本題也可能有四解、兩解或無解。

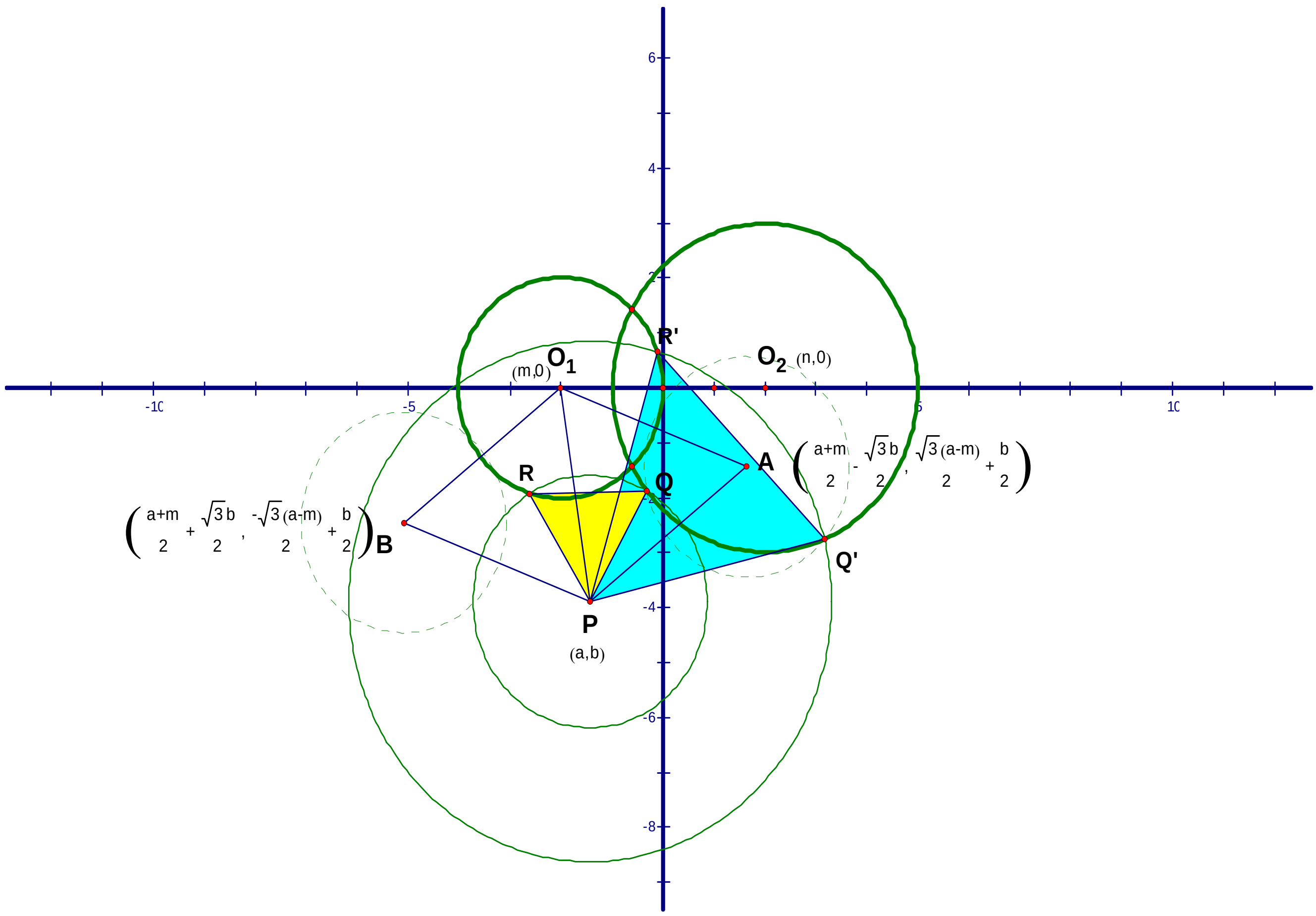
（三）如圖，假設P點同時在兩圓O_1和O_2內。





【作圖】同六（一）的作法。
【證明】同六（一）的證明。
【討論】同前一題的討論，本題也可能有四解、兩解或無解。

綜合以上兩圓的位置關係，可作的正三角形有四解、三解、兩解、一解或無解。為了進一步了解定點P的位置與正三角形解的關係，我們不妨將圓O_1、圓O_2和定點P畫在直角坐標平面上，如下圖：



設圓O_1、圓O_2的圓心分別為（m，0）、（n，0），圓O_1、圓O_2的半徑分別為r_1、r_2，

定點P為（a，b），則$\overrightarrow{O_1P}$＝（a-m，b），

$$\because \overrightarrow{O_1A}=\begin{pmatrix}\cos 60^o & -\sin 60^o\\ \sin 60^o & \cos 60^o\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-m\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-m\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{a-m}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}b\\ \frac{\sqrt{3}}{2}(a-m)+\frac{b}{2}\end{pmatrix},$$

$\therefore$A 點為（m，0）＋（$\frac{a-m}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}b$，$\frac{\sqrt{3}}{2}(a-m)+\frac{b}{2}$）

＝（$\frac{a+m}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}b$，$\frac{\sqrt{3}}{2}(a-m)+\frac{b}{2}$），

同理 B 點為（$\frac{a+m}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}b$，$\frac{-\sqrt{3}}{2}(a-m)+\frac{b}{2}$）

要了解圓A和圓O_2的相交狀況須考慮$\overline{AO_2}$的長度，

$$\overline{AO_2}=\sqrt{[\frac{1}{2}(a+m-2n)-\frac{\sqrt{3}}{2}b]^2+[\frac{\sqrt{3}}{2}(a-m)+\frac{b}{2}]^2}$$ ，整理得

$$\overline{AO_2}=\sqrt{[a-\frac{m+n}{2}]^2+[b-\frac{\sqrt{3}(m-n)}{2}]^2}$$ ，

若 $\overline{AO_2}=|r_1-r_2|$ ，可得圓 O_3 的方程式為 $[x-\frac{m+n}{2}]^2+[y-\frac{\sqrt{3}(m-n)}{2}]^2=(r_1-r_2)^2$

若 $\overline{AO_2}=|r_1+r_2|$ ，可得圓 O_4 的方程式為 $[x-\frac{m+n}{2}]^2+[y-\frac{\sqrt{3}(m-n)}{2}]^2=(r_1+r_2)^2$

則圓 O_3 和圓 O_4 正好是以 $(\frac{m+n}{2},\frac{\sqrt{3}(m-n)}{2})$ 為圓心的同心圓。

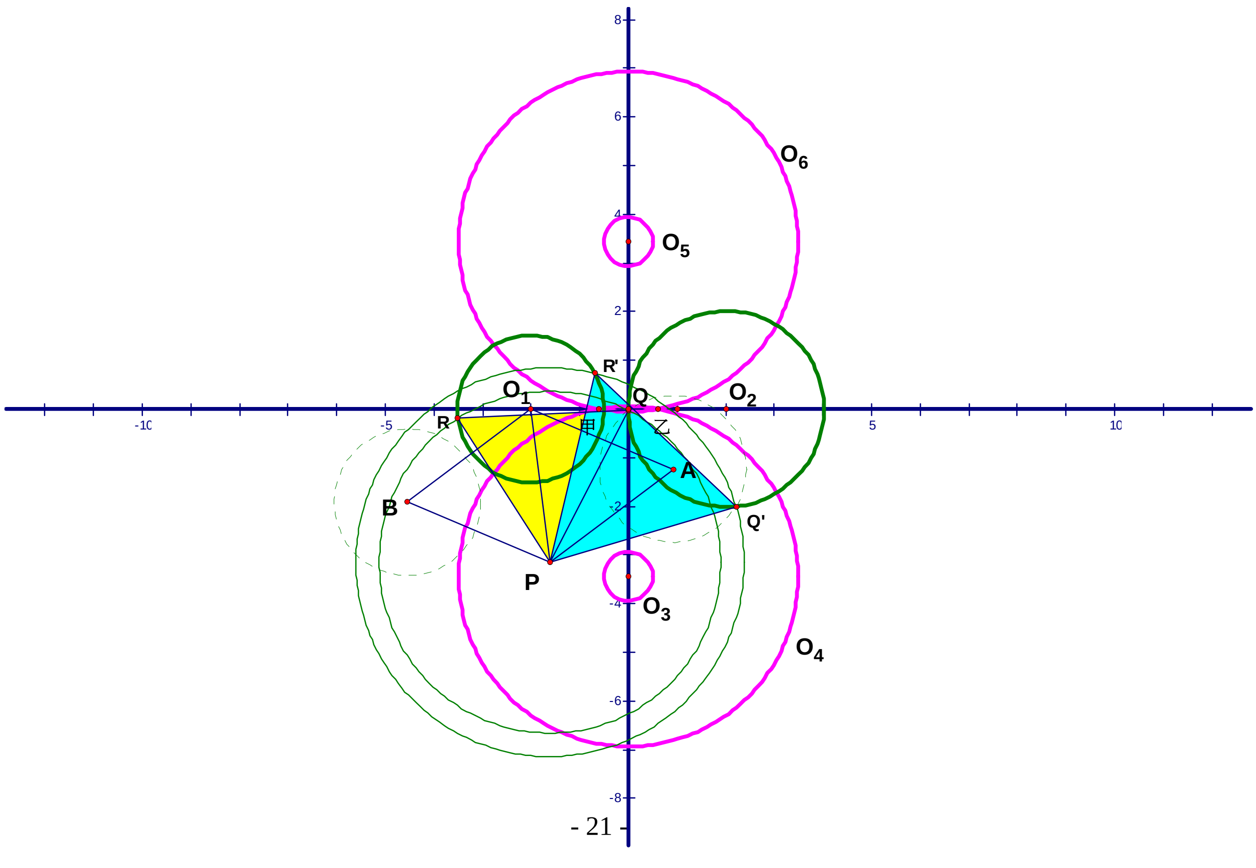
同理可得 $\overline{BO_2}=\sqrt{[a-\frac{m+n}{2}]^2+[b+\frac{\sqrt{3}(m-n)}{2}]^2}$

若 $\overline{BO_2}=|r_1-r_2|$ ，可得圓 O_5 的方程式為 $[x-\frac{m+n}{2}]^2+[y+\frac{\sqrt{3}(m-n)}{2}]^2=(r_1-r_2)^2$

若 $\overline{BO_2}=|r_1+r_2|$ ，可得圓 O_6 的方程式為 $[x-\frac{m+n}{2}]^2+[y+\frac{\sqrt{3}(m-n)}{2}]^2=(r_1+r_2)^2$

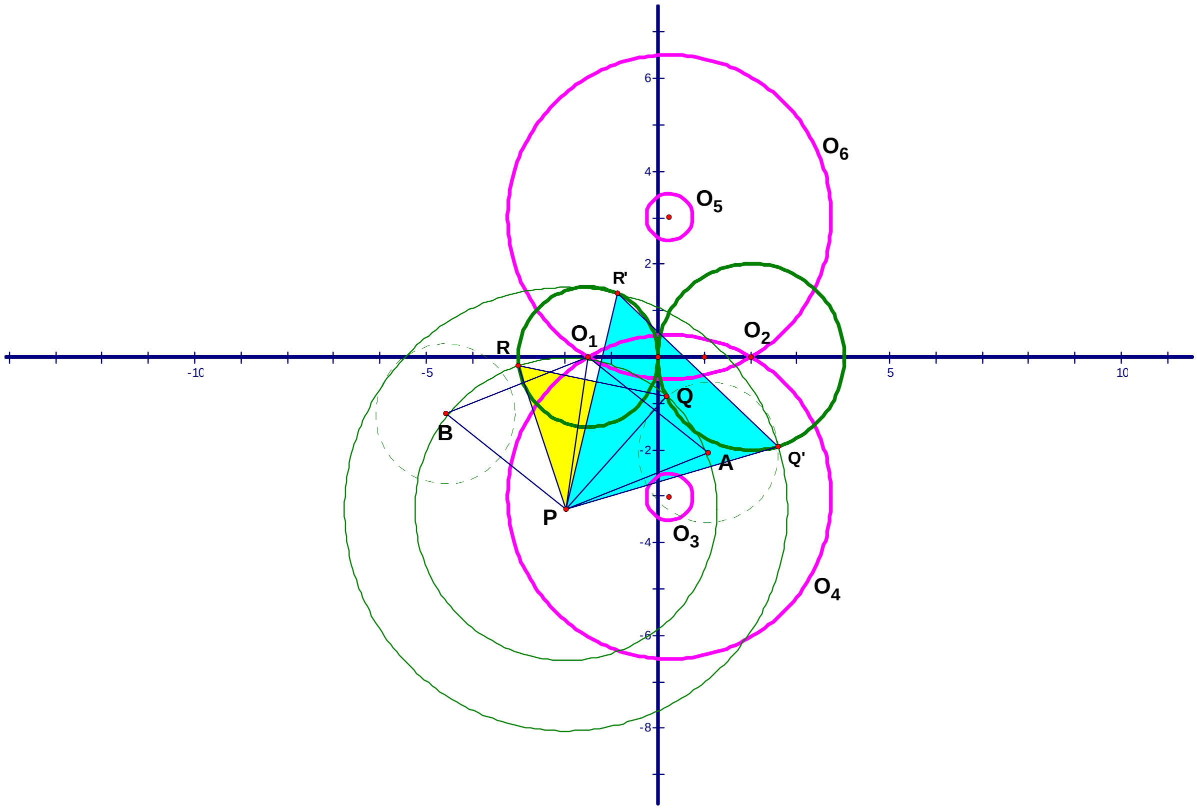
則圓 O_5 和圓 O_6 正好是以 $(\frac{m+n}{2},\frac{-\sqrt{3}(m-n)}{2})$ 為圓心的同心圓。

將圓 O_3、O_4、O_5、O_6 畫在坐標平面上，如下圖：

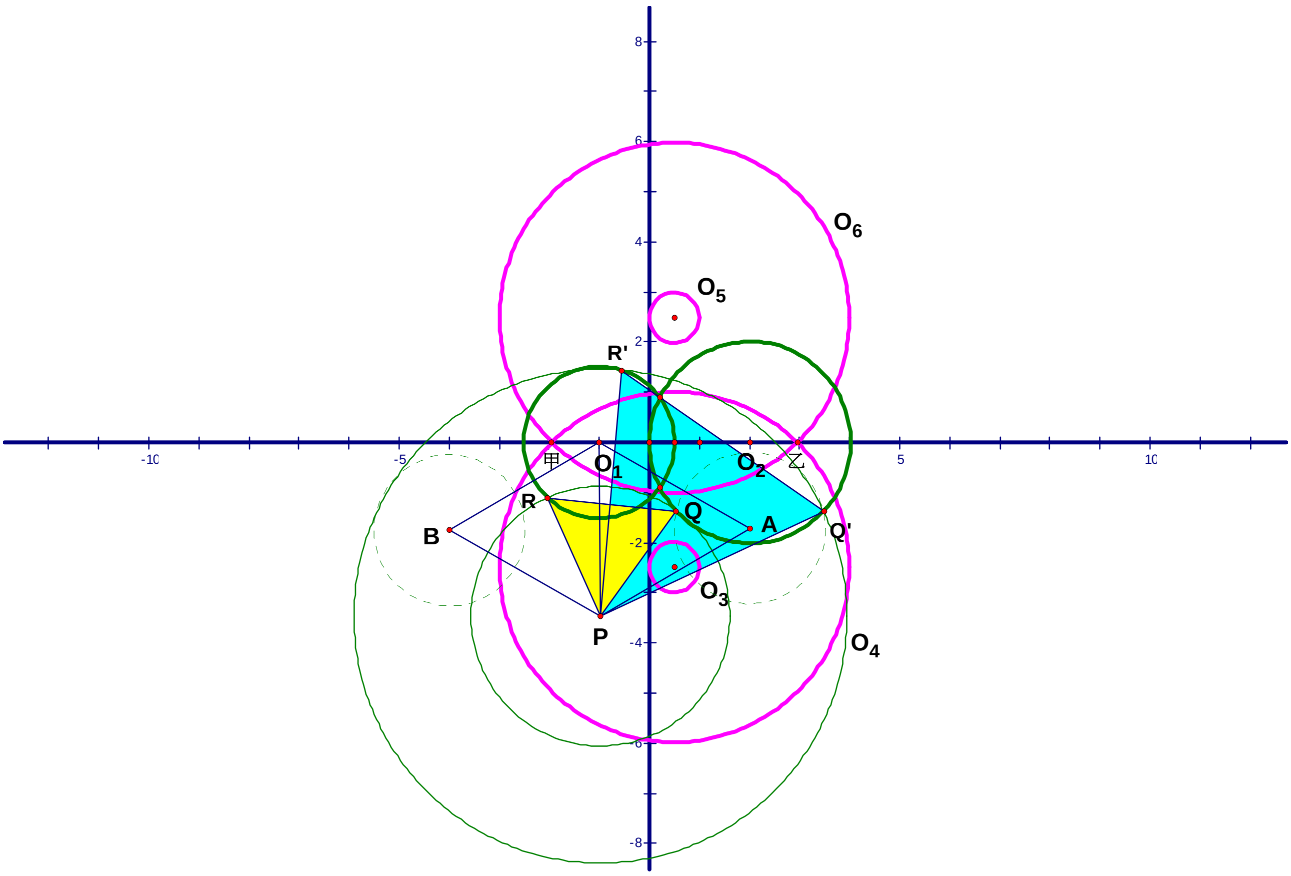


仿照上述的方法，我們也可以畫出其它相交狀況的「正三角形解分布圖」

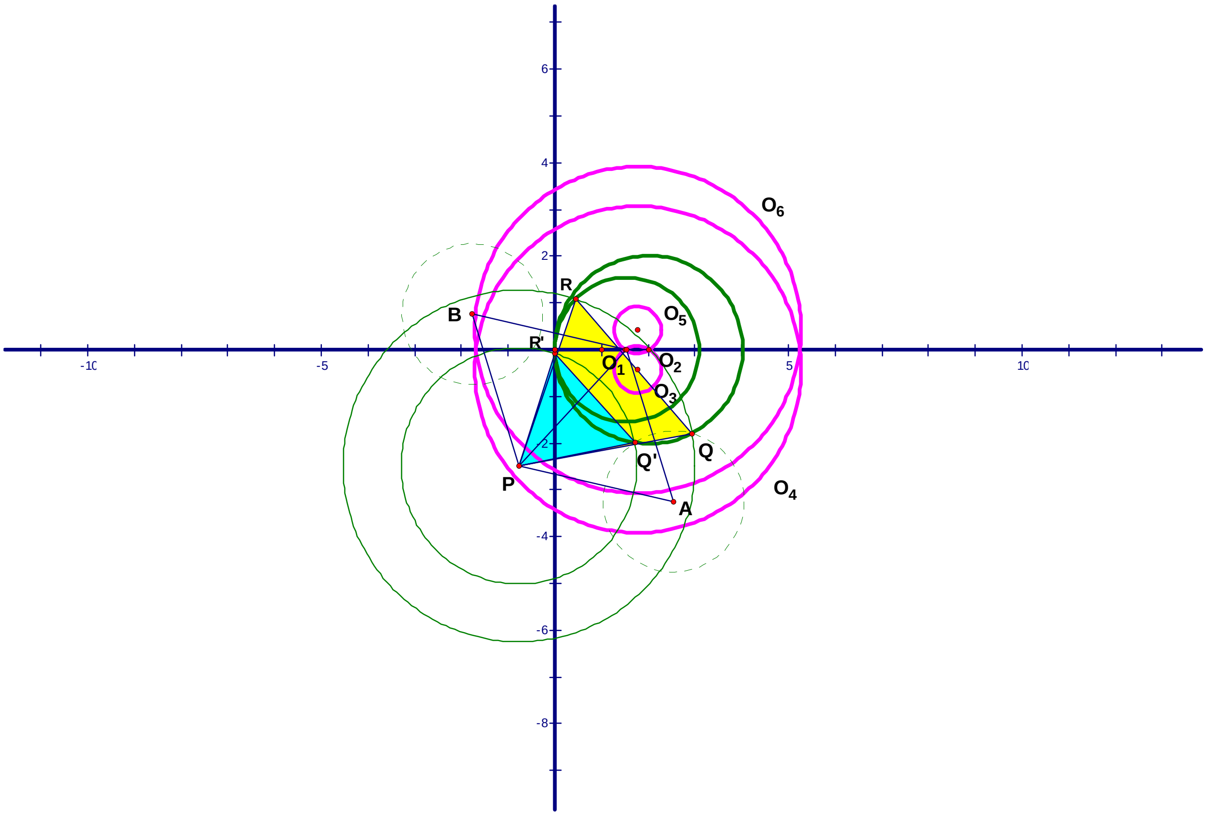
【兩圓外切時的正三角形解分布圖】



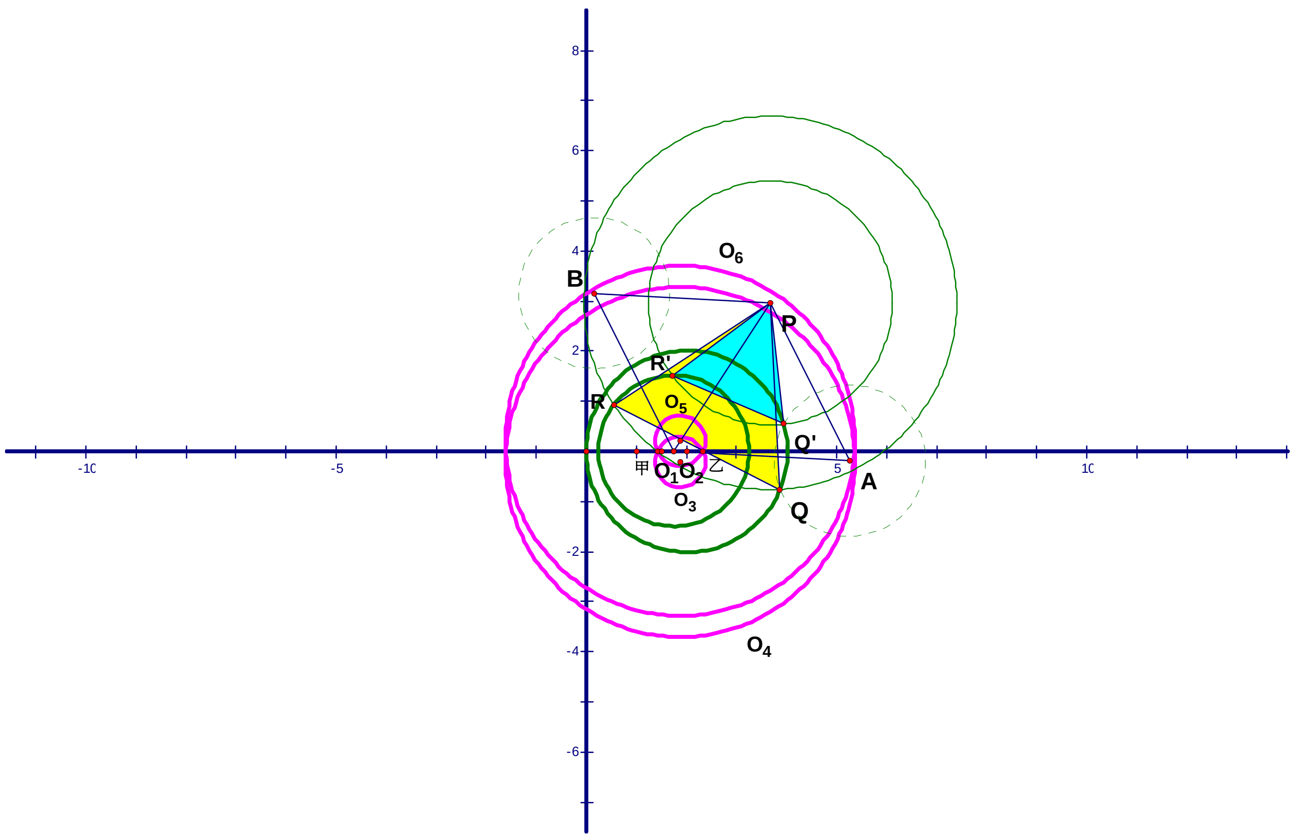
【兩圓相交兩點時的正三角形解分布圖】



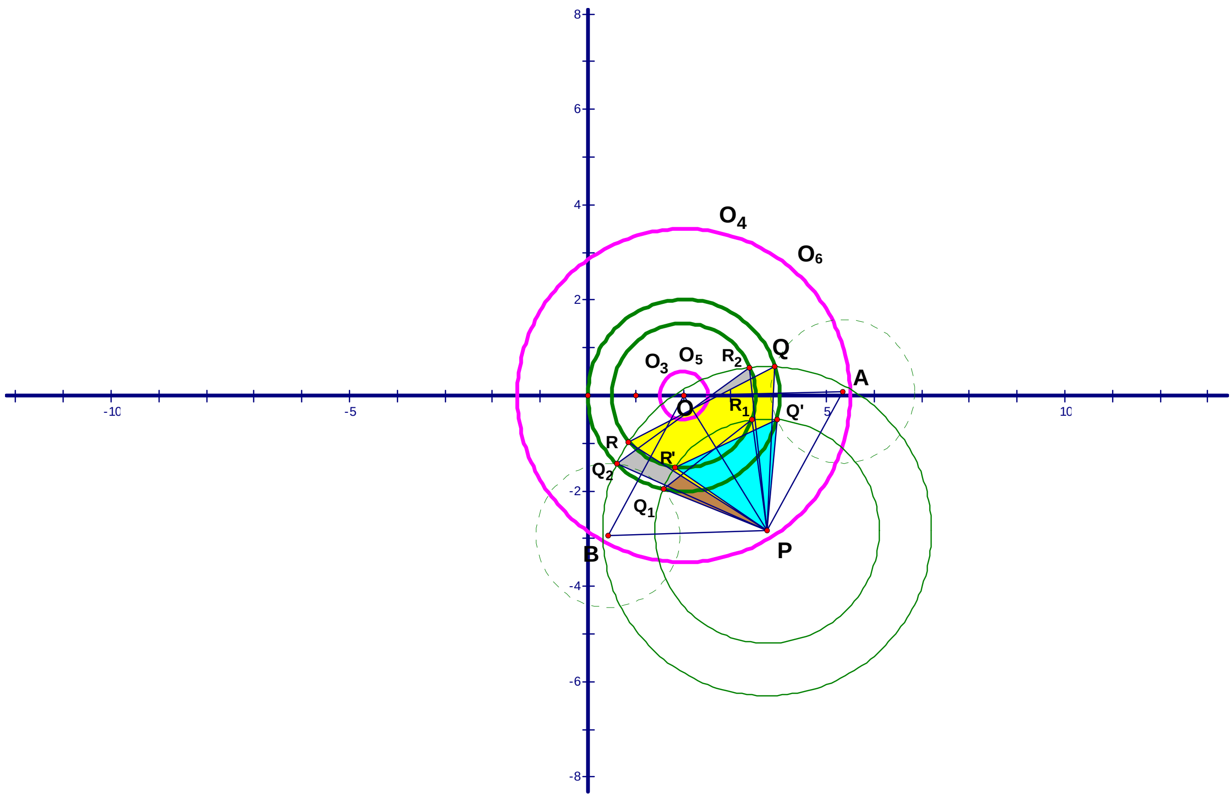
【兩圓內切時的正三角形解分布圖】



【兩圓內離時的正三角形解分布圖】



【兩圓為同心圓時的正三角形解分布圖】



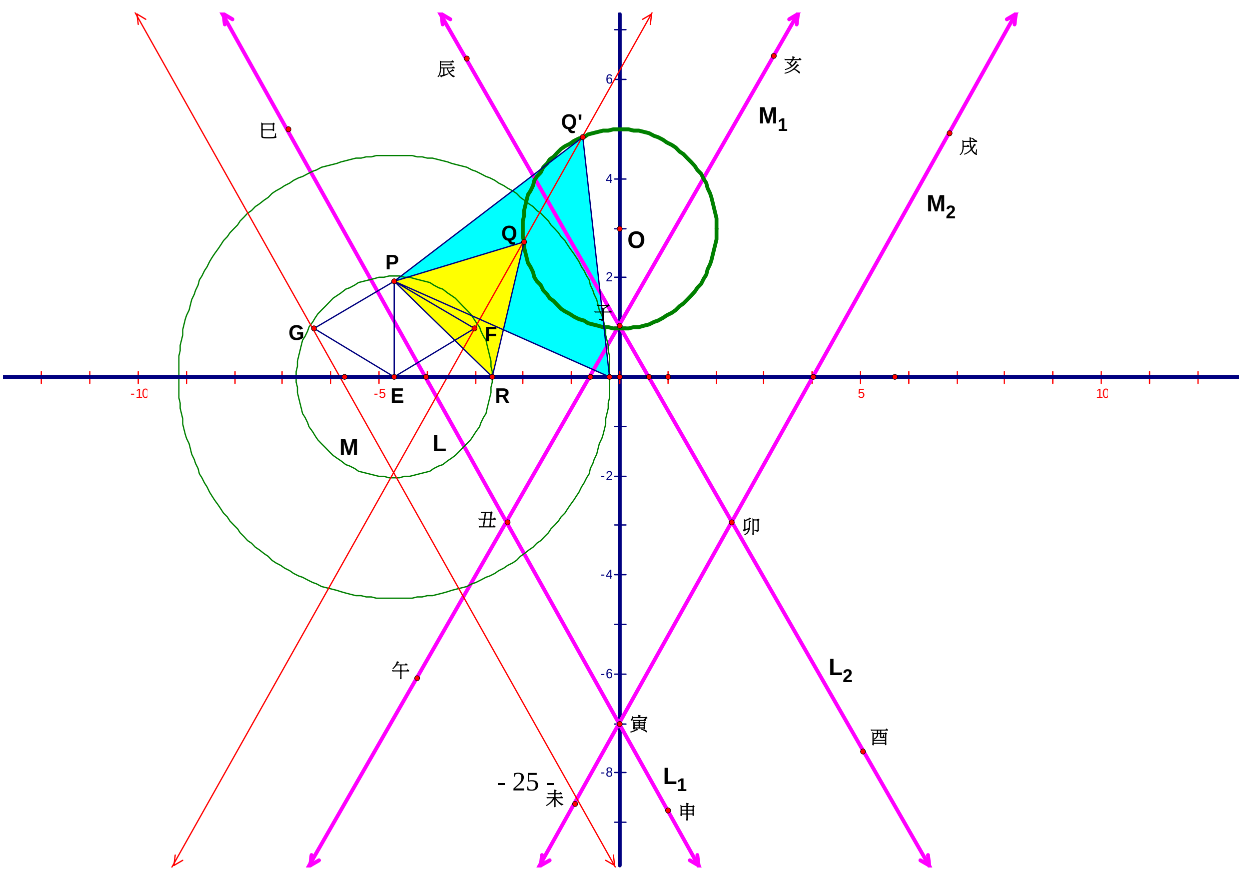
陸、結論

1. 綜合上述三種情況，我們可以整理如下表：（註：符號「●」表示可能）

<table>
<tr><td colspan="5">可作出的正三角形情形
兩圖形的相交狀況及定點位置</td><td>無解</td><td>一解</td><td>二解</td><td>三解</td><td>四解</td></tr>
<tr><td rowspan="3">兩直線</td><td colspan="2" rowspan="2">平行</td><td colspan="2">定點在兩直線內側</td><td></td><td></td><td>●</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">定點在兩直線外側</td><td></td><td></td><td>●</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">相交</td><td colspan="2">定點在兩直線間</td><td></td><td>●</td><td>●</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="11">一直線和一圓</td><td colspan="2" rowspan="3">不相交</td><td rowspan="2">定點在圓外</td><td>和圓同側</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td></tr>
<tr><td>和圓異側</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td></tr>
<tr><td colspan="2">定點在圓內</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="3">相切</td><td rowspan="2">定點在圓外</td><td>和圓同側</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td></tr>
<tr><td>和圓異側</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td></tr>
<tr><td colspan="2">定點在圓內</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td></tr>
<tr><td rowspan="5">相交兩點</td><td rowspan="4">不過圓心</td><td rowspan="2">定點在圓外</td><td>和圓大部分同側</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td></tr>
<tr><td>和圓大部分異側</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td></tr>
<tr><td rowspan="2">定點在圓內</td><td>和圓大部分同側</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td></tr>
<tr><td>和圓大部分異側</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>●</td></tr>
<tr><td>過圓心</td><td colspan="2">定點在圓外</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td><td>●</td></tr>
</table>

		定點在圓內					●
兩圓	外離	定點在圓外	●	●	●	●	●
		定點在一圓內	●	●	●	●	●
	外切	定點在圓外	●	●	●	●	●
		定點在一圓內	●	●	●	●	●
	相交兩點	定點在圓外	●	●	●	●	●
		定點在一圓內	●	●	●	●	●
		定點在兩圓內	●	●	●	●	●
	內切	定點在圓外	●	●	●	●	●
		定點在兩圓間	●	●	●	●	●
		定點在兩圓內	●	●	●	●	●
	內離	定點在圓外	●	●	●	●	●
		定點在兩圓間	●	●	●	●	●
		定點在兩圓內	●	●	●	●	●
	同心圓	定點在圓外	●		●		●
		定點在兩圓間	●		●		●
		定點在兩圓內	●		●		●

2. 兩直線平行時，不論定點 P 在線外何處可以作的正三角形必有兩解，且全等。
3. 兩直線相交時，若夾角不為 60°時，不論定點 P 在線外何處可以作的正三角形必有兩解，但不全等；若夾角為 60°時，不論定點 P 在線外何處都可以作一正三角形只有一解。
4. 如下圖，一直線和一圓不論相交狀況如何，定點 P 解的分布圖都是由兩組夾 60°的平行線所構成，不同的只是直線、圓與兩組平行線的相對位置。



就　　以下就 P 點落在各區塊位置來說明正三角形解的情形：

當 P 點落在

（1）菱形子丑寅卯內部時，可作的正三角形有四解。

（2）子丑、丑寅、寅卯、卯子四線段上，但不在子、丑、寅、卯四點時，可作的正三角形有三解。

（3）子、丑、寅、卯四點時，可作的正三角形有二解。

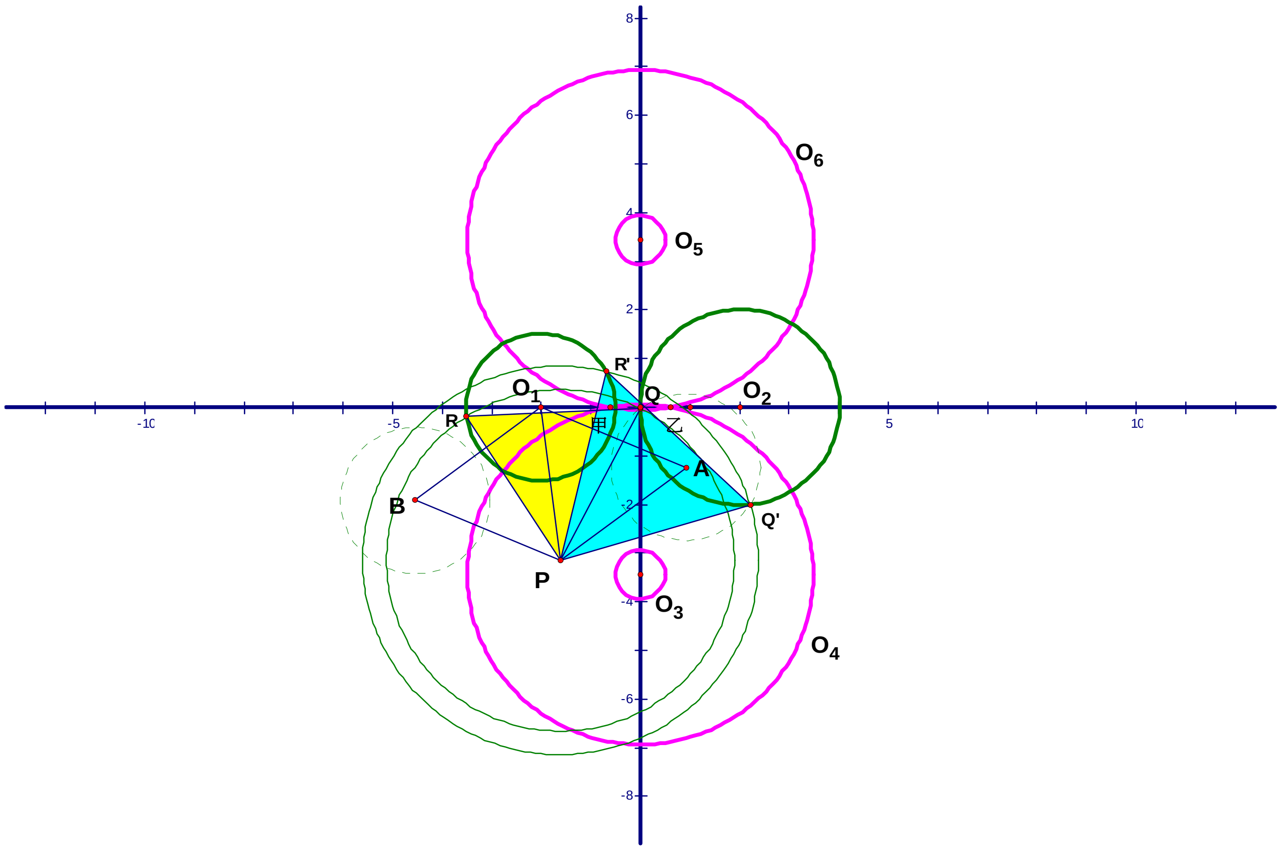
（4）辰子丑巳、午丑寅未、申寅卯酉、戌卯子亥四區塊內部時，可作的正三角形有二解。

（5）子亥、子辰、丑巳、丑午、寅未、寅申、卯酉、卯戌八條射線上，但不在子、丑、寅、卯四點時，可作的正三角形有一解。

（6）亥子辰、巳丑午、未寅申、酉卯戌四區塊內部時，可作的正三角形無解。

此外，我們發現：若圓 O 半徑維持不變，當圓 O 向 $\overleftrightarrow{CD}$ 移動 n 單位長時，解的區塊也向圓 O 移動 n 單位長，且區塊的形狀維持不變。

5. 如下圖，兩圓不論相交狀況如何，定點 P 解的分布圖都是由兩組以 x 軸爲對稱軸的同心圓所構成，不同的只是兩圓與兩組同心圓的相對位置。



以下就 P 點落在各區塊位置來說明正三角形解的情形：

當 P 點落在

（1）圓O_4和圓O_6兩交弧內部時，可作的正三角形有四解。

（2）圓O_4和圓O_6兩交弧上但不在甲、乙兩點時，可作的正三角形有三解。

（3）甲、乙兩點時，可作的正三角形有二解。

（4）同心圓O_3和O_4或同心圓O_5和O_6之間，但不在交集部分時，可作的正三角形有二解。

（5）圓O_3、圓O_5上或在圓O_4、圓O_6上，但各不在彼此的內部及交點時，可作的正三角形有一解。

（6）圓O_3、圓O_5內部或在圓O_4、圓O_6外部，但不在交集部分時，可作的正三角形無解。

此外，我們發現：若兩圓O_1和O_2一左一右且半徑維持不變，當圓O_1向圓O_2移動一直到變成同心圓爲止，兩組同心圓也一上一下逐漸靠近一直到重合爲止，且兩組同心圓的大小維持不變。

柒、參考資料

1. 國立編譯館主編，國中數學課本第五冊，第 3 版，台北，國立編譯館，P60~86，P110~170，88 年初版
2. 國立編譯館主編，國中數學習作第五冊，第 3 版，台北，國立編譯館，P36，88 年初版
3. 笥部貞市郎原著、九章編譯部譯，幾何學辭典，第 3 版，台北，九章出版社， P494~497，80 年
4. 吳森原、許乃紅編著，高中數學 3，第 1 版，台北，正中書局， P208~223，89 年
5. 吳森原、許乃紅編著，高中數學甲（上），第 3 版，台北，正中書局， P122~220，91 年
6. 吳森原、許乃紅編著，高中數學甲（下），第 3 版，台北，正中書局， P45~53，92 年

評　語

030409 國中組數學科

三足鼎立—定點與兩圖形上動點可否形成正三角形的探討

由一個簡單的作圖問題出發，做了一些有趣的推廣。充份活用了旋轉的概念，對問題做了仔細的分析。如果能考慮其它的面向，結果將會更為豐富。