中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030408

宜蘭縣立復興國民中學

指導老師姓名

楊東萍

鄭文輝

作者姓名

張鈞皓

張齡云

曾立揚

鄒寧

中華民國第　四十四　屆中小學科學展覽會

作品說明書

【作品名稱】

亂石堆

科　　別：數學科

組　　別：國中組

關 鍵 詞：級數、排石頭、堆垛

編　　號：

亂石堆

壹、研究動機：

生活中的各種小東西中都隱藏著一些規律的數型關係。有一天，我們在偶然的巧合下看到小學 MPM 上的一個九九乘法表，仔細一看，發覺裡面各數字間的排列有規律性，和我們之前學的數型關係及現在學的等差等比數列很有關係，於是激發了我們的好奇心，在數學老師的指引下，開始研究有關「級數」的東西。

貳、研究目的：

我們希望能夠利用堆石頭的方式來找出一些規律級數有限項之和，

如：　$1+2+3+\cdots\cdots+n$

$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$

$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3$

$1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4$

及推廣至將這些級數堆垛之後的和，

如：　$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$

$1+[1+(1+2)]+\cdots\cdots+[1+(1+2)+(1+2+\cdots\cdots+n)]$

$\vdots$

$1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots\cdots+(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$

並以堆石頭的方式找出商高定理的整數解。

參、研究過程：

一、 無意中在弟弟的數學書本上看到了九九乘法表，仔細觀察後覺得很有趣。因爲這個表是對稱的，從左上角到右下角的數都是完全平方數，以它爲對稱軸，其左右是相互對稱的，故覺得相當值得我探討。

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

1. 我們想算一算每一列的和？

第一列 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45

第二列 2+4+6+8+10+12+14+16+18=2(1+2+3+……+9)= 90

⋮

第九列 9+18+27+36+45+54+63+72+81=9(1+2+……+9)=405

因此，我們對於下列的式子感到興趣：

$$1+2+3+4+\cdots\cdots+n=?$$

(在第六頁，我們有較深入的探討)

2. 因其右上角與左下角互相對稱，所以我們想算一算它對角線的和？

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2=285$$

當然，我們也對下列的式子產生興趣：

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=？$$

(在第七頁，我們有較深入的探討)

3. 我們也對下列的式子產生興趣：

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=？$$

(在第九頁，我們有較深入的探討)

二、 我們用不同的切割方式來觀察：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

第一層 $1=1$

第二層 $2+4+2 = 2(1+2+1)$

⋮

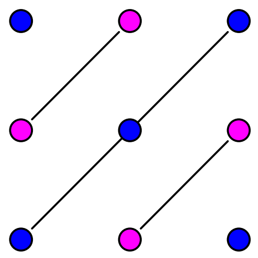
第九層 $9+18+27+\cdots\cdots+81+72+\cdots\cdots+9=9(1+2+3+\cdots+8+9+8+\cdots+2+1)$

所以我們對下列式子有興趣

$$1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots\cdots+2+1$$

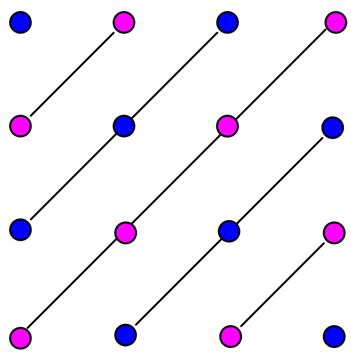
1. 我們試著分析

(1) $1+2+3+2+1=$？



$\therefore 1+2+3+2+1=3^2$

(2) $1+2+3+4+3+2+1=$？



$\therefore 1+2+3+4+3+2+1=4^2$

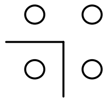
(3) 我們可以推斷出下列的式子：

$1+2+\cdots\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots\cdots+2+1=n^2$

我們稱此爲結論（Ａ）

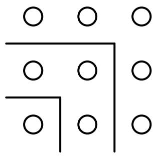
2. 我們再換一種角度來觀察 n^2

(1) 2^2



$1+3=2^2$

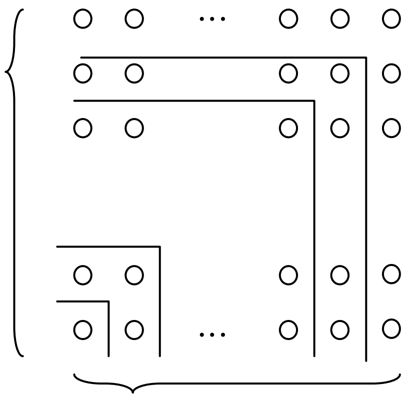
(2) 3^2



$1+3+5=3^2$

(3) n^2

n



n 行

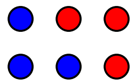
(4) $\therefore 1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$

我們稱此爲結論（ B ）

三、 我們試著探討 1+2+3+4+5+……+n = ?

1. 我們分析

$1+2=？$

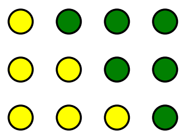


用兩個(1+2)可拼成一個矩形，所以(1+2)的個數為$\frac{2(2+1)}{2}$

$$\therefore 1+2=\frac{2(2+1)}{2}$$

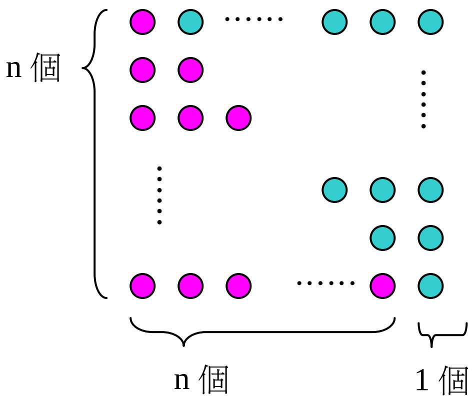
2. 依同樣方式分析

$1+2+3=？$



$$\therefore 1+2+3=\frac{3(3+1)}{2}$$

3. $1+2+3+4+5+\cdots\cdots+n=？$



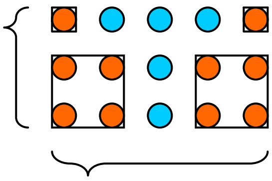
用兩個(1+2+3+……+n)可拼成一矩形，其個數為 n(n+1)

$$\therefore 1+2+3+4+5+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

四、 我們再探討 $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+......+n^2=?$

1． $1^2+2^2=$？

寬



長

我們用兩組　1^2+2^2　排成橘球的形狀

我們再用一組　$1^2+2^2=1+(1+3)$　(此用結論（B）)

$=2\times1+1\times3$　(此即爲藍色球個數)

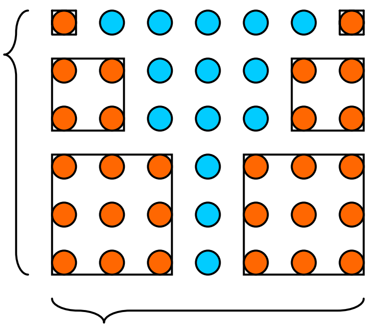
∴我們用了三組的 1^2+2^2　拼成一矩形　其長爲　$(2\times2+1)$

其寬爲　$(1+2)$

$$\therefore 1^2+2^2=\frac{(1+2)(2\times2+1)}{3}=\left(\frac{2\times3}{2}\right)\times\left(\frac{2\times2+1}{3}\right)$$

2． $1^2+2^2+3^2=$？

寬



長

我們用兩組　$1^2+2^2+3^2$　排成橘球的形狀

我們再用一組　$1^2+2^2+3^2=1+(1+3)+(1+3+5)$　(此用結論（B）)

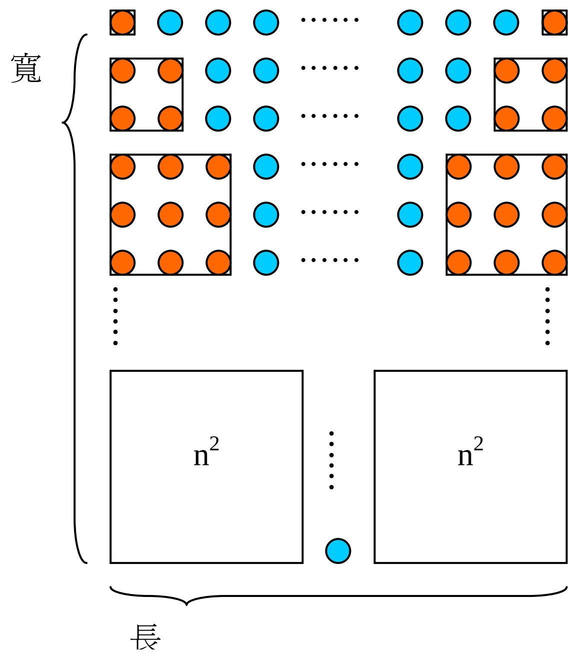
$=3\times1+2\times3+1\times5$　(此即爲藍色球個數)

∴我們用了三組的 $1^2+2^2+3^2$　拼成一矩形　其長爲　$(2\times3+1)$

其寬爲　$(1+2+3)$

$$\therefore 1^2+2^2+3^2=\frac{(1+2+3)(2\times3+1)}{3}=\left(\frac{3\times4}{2}\right)\times\left(\frac{2\times3+1}{3}\right)$$

3． $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2=$？



我們用兩組　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$　排成橘球的形狀

我們再用一組　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$

$=1+(1+3)+\cdots\cdots+〔1+3+\cdots\cdots+(2n-1)〕$　(此用結論(Ｂ))

$=n\times1+(n-1)\times3+\cdots\cdots+1\times(2n-1)$　(此即為藍色球個數)

∴我們用了三組的 $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ 拼成一矩形 其長為 $(2n+1)$

其寬為 $(1+2+\cdots\cdots+n)$

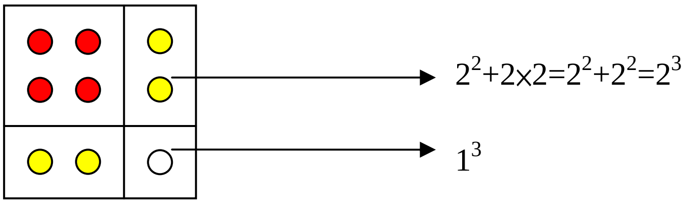
$$\therefore 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{(1+2+\cdots\cdots+n)(2n+1)}{3}$$

$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\times\left(\frac{2n+1}{3}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

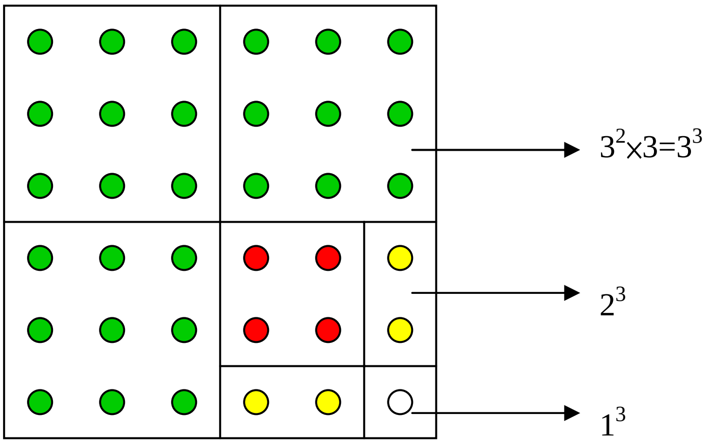
五、 $\mathbf{1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=?}$

1. $1^3+2^3=?$



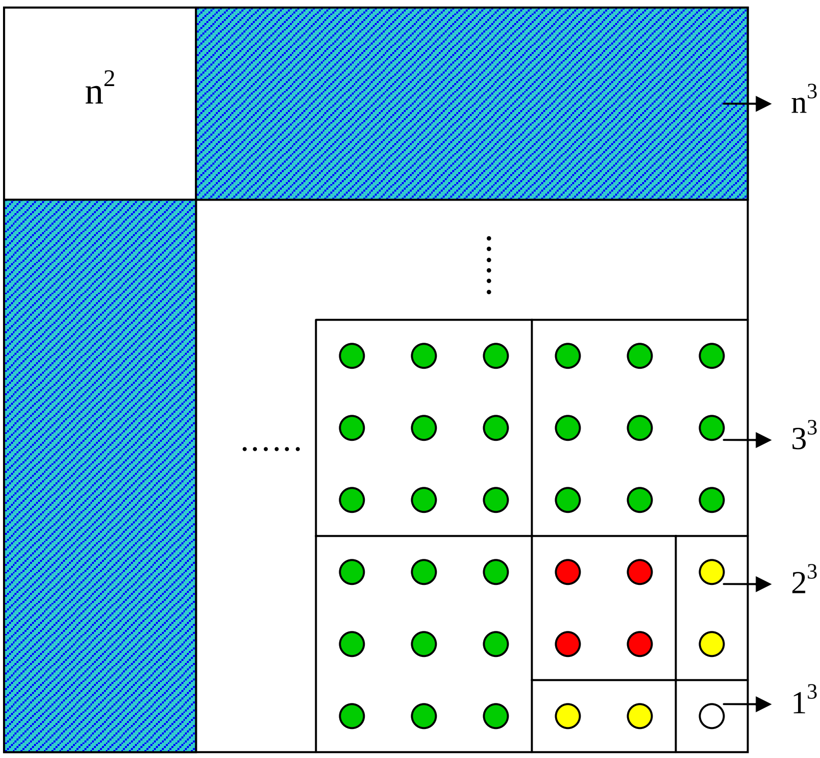
$\therefore 1^3+2^3=(1+2)^2$

2. $1^3+2^3+3^3=?$



$\therefore 1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2$

3. $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=?$



由上圖可知，斜線部分爲

$$2\times n\times(1+2+\cdots\cdots+n-1)$$

$$=2\times n\times\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$$

$$=(n-1)n^2$$

再加上一個正方形n^2

$$(n-1)\ n^2+n^2$$

$$=(n-1+1)n^2$$

$$=n^3$$

$$\therefore 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2$$

$$\therefore 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$$

4. 我們也可以把這一項規律用在九九乘法表上，

我們想算全部的和，於是我們將每一列加起來。

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

$$(1+2+3+\cdots\cdots+9)+2(1+2+3+\cdots\cdots+9)+\cdots\cdots+9(1+2+3+\cdots\cdots+9)$$

$$=(1+2+3+\cdots\cdots+9)(1+2+3+\cdots\cdots+9)$$

$$=(1+2+3+\cdots\cdots+9)^2$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

用另一種切割方法看，每一個區域都是該區域最上方數字的三次方;

即如：

$$2+4+2=2(1+2+1)$$

$$=2\times 2^2$$

$$=2^3$$

$$3+6+9+6+3=3(1+2+3+2+1)$$

$$=3\times 3^2$$

$$=3^3$$

全部的和爲：

$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+9^3$ (此用結論（Ｂ）)

用不同的切割方式計算全部的和，可得到以下結論：

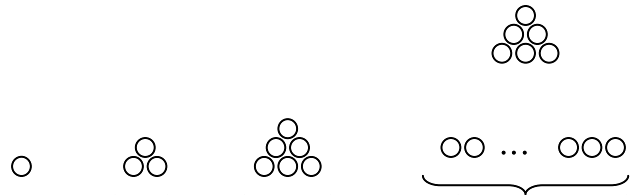
$$\therefore 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+9^3=(1+2+3+\cdots\cdots+9)^2$$

六、我們試著探討　**$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)=$？**

此即　$$\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=?$$

我們先前有討論過 $1+2+3+4+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

我們現在想利用上面這個級數來進行一次堆垛，層層堆砌起來：



$$1\ +\ (1+2)\ +\ (1+2+3)\ +\cdots\cdots+(1+2+\cdots\cdots+n)$$

我們假設：

$$A=1+(1+2)+(1+2+3)+\ \cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$

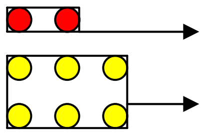
亦即　$$A=\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$$

1.　當 $A=1+(1+2)$

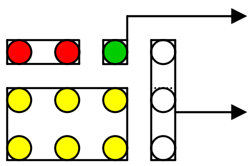
即 $A=\dfrac{1\times2}{2}+\dfrac{2\times3}{2}$

∴考慮用兩組 A ，即

$2A=1\times2+2\times3$



再用一組 $A=1+(1+2)$補成一個矩形



∴我們用了三組 A

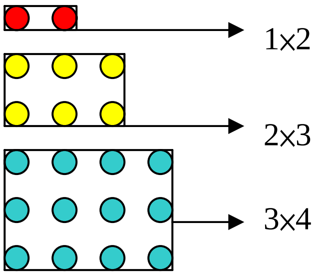
$$\therefore A=\frac{1}{3}(1+2)(3+1)=\frac{1}{3}\times\frac{2(2+1)}{2}\times(2+1+1)=\frac{2(2+1)(2+2)}{6}$$

2. 當 A=1+(1+2)+(1+2+3)

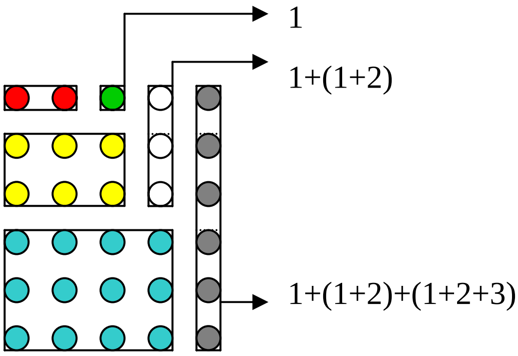
即 $A=\frac{1\times 2}{2}+\frac{2\times 3}{2}+\frac{3\times 4}{2}$

∴考慮用兩組 A ，即

$2A=1\times 2+2\times 3+3\times 4$



再用一組 A=1+(1+2)+(1+2+3)補成一個矩形



∴我們用了三組 A

$$\therefore A=\frac{1}{3}(1+2+3)(4+1)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3(3+1)}{2}\times(3+1+1)$$

$$=\frac{3(3+1)(3+2)}{6}$$

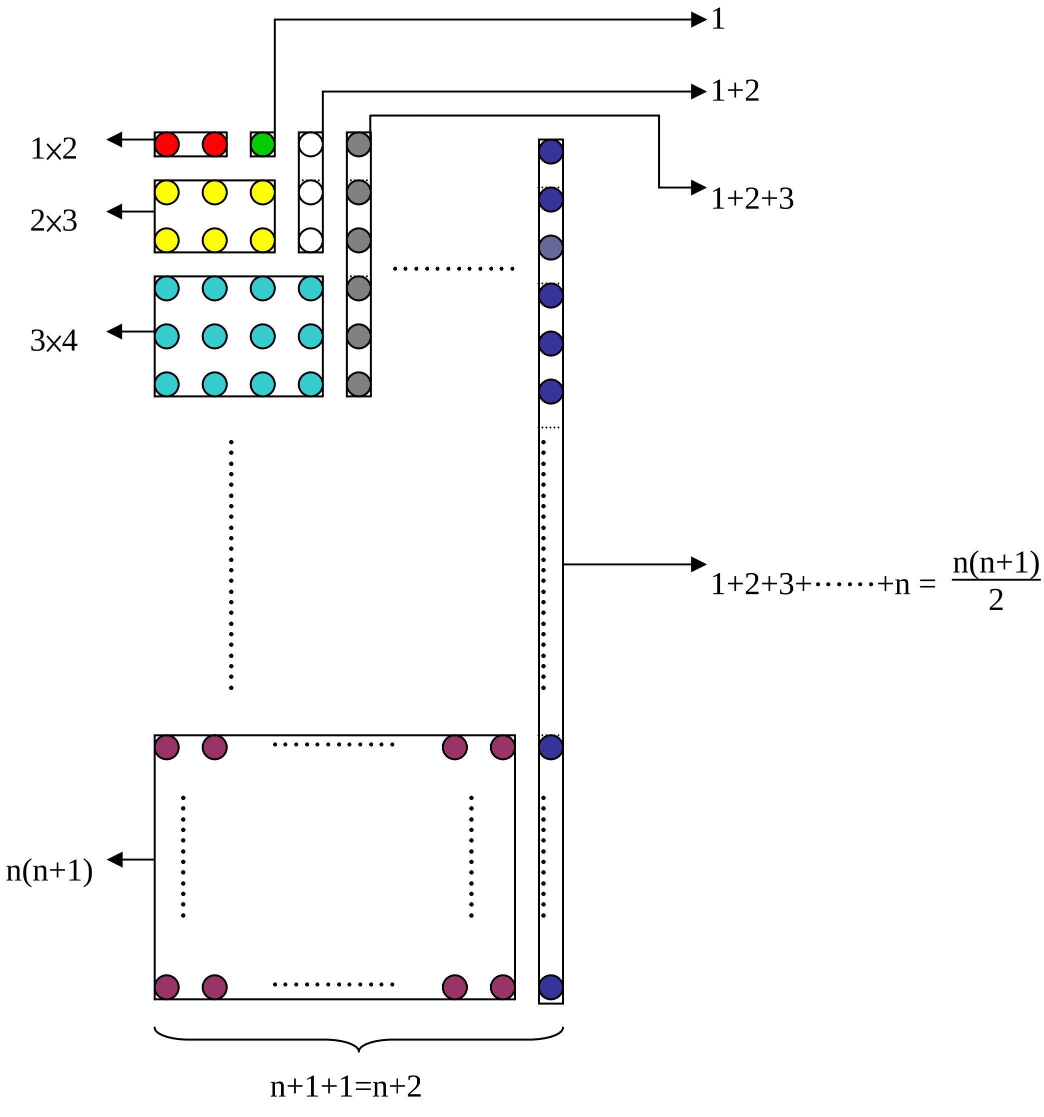
3. 當 $A=1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$

即 $A=\frac{1\times 2}{2}+\frac{2\times 3}{2}+\frac{3\times 4}{2}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$

∴考慮用三組 A ，即

$3A=[1\times 2+2\times 3+3\times 4+\cdots\cdots+n(n+1)]$

$+[1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)]$



此長方形長爲 $\frac{n(n+1)}{2}$ ；寬爲 n+2，即

$3[1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)]=\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$

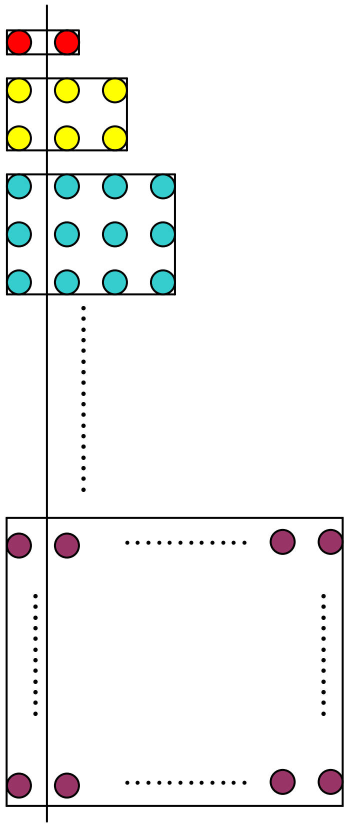
$\therefore 1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 我們稱此爲結論六

4. 我們發現 A=1+(1+2)+(1+2+3)+ ……+(1+2+3+……+n)

也可以用切割的方法求得

$$A=\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\frac{3\times4}{2}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$$

我們先用兩組 A 排成下面的形狀



拆成兩組

$$2A=(1+2+3+\cdots\cdots+n)+(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left[1+\frac{2n+1}{3}\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+4}{3}\right]$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\therefore\quad A=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

5. 我們發現此級數可堆成一三角錐，所以也找到用立體的方式得到 A 之答案。

七、我們試著將上述之級數再做一次堆垛，即

B=1+[1+(1+2)]+[1+(1+2) +(1+2+3)]+⋯+[1+(1+2)⋯+(1+2+⋯+n)]=?

此即

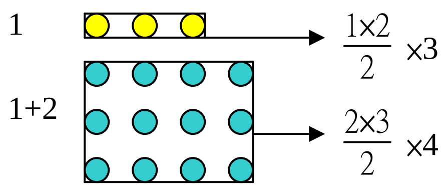
$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{1\times2\times3}}{\mathbf{6}}+\frac{\mathbf{2\times3\times4}}{\mathbf{6}}+\frac{\mathbf{3\times4\times5}}{\mathbf{6}}+\cdots\cdots+\frac{\mathbf{n(n+1)(n+2)}}{\mathbf{6}}=?$$

1. 當 B= 1+[1+(1+2)]

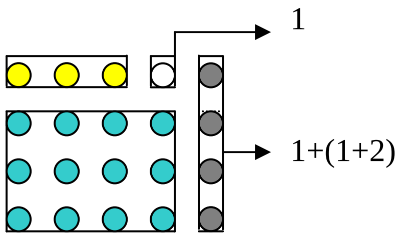
即 $B=\frac{1\times2\times3}{6}+\frac{2\times3\times4}{6}$

我們先用 3 組 B， 即

$$3B=\frac{1\times2}{2}\times3+\frac{2\times3}{2}\times4$$



再用一組 B= 1+[1+(1+2)]補成一矩形



∴我們用了 4 組 B 排成矩形

$$4B=[1+(1+2)]\times(4+1)=\frac{2\times3\times4}{6}\times5$$

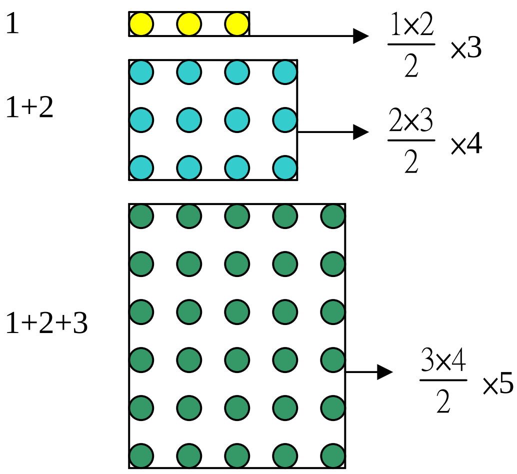
$$=\frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{6}$$

$$\therefore\ B=\frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{2\times3\times4}$$

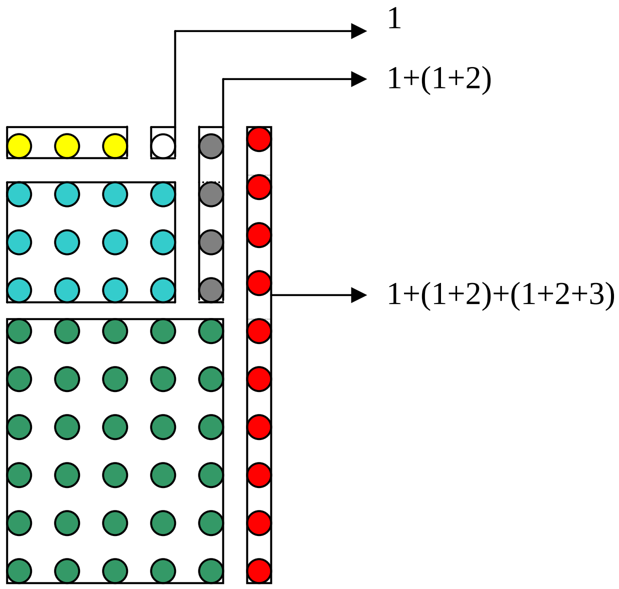
2．當 B=1+[1+(1+2)]+[1+(1+2) +(1+2+3)]

即 $B=\dfrac{1\times2\times3}{6}+\dfrac{2\times3\times4}{6}+\dfrac{3\times4\times5}{6}$

我們先用 3 組 B，即 $3B=(\dfrac{1\times2}{2})\times3+(\dfrac{2\times3}{2})\times4+(\dfrac{3\times4}{2})\times5$



再用一組 B=1+[1+(1+2)]+[1+(1+2) +(1+2+3)]補成一矩形



∴我們用了 4 組 B 排列成一矩形

$$4B=[1+(1+2)+(1+2+3)]\times(5+1)=\frac{3(3+1)(3+2)}{6}\times(3+3)$$

$$\therefore\ B=\frac{3(3+1)(3+2)(3+3)}{2\times3\times4}$$

3. 當 B=1+[1+(1+2)]+⋯⋯+[1+(1+2)+⋯⋯+(1+2+⋯⋯+n)]

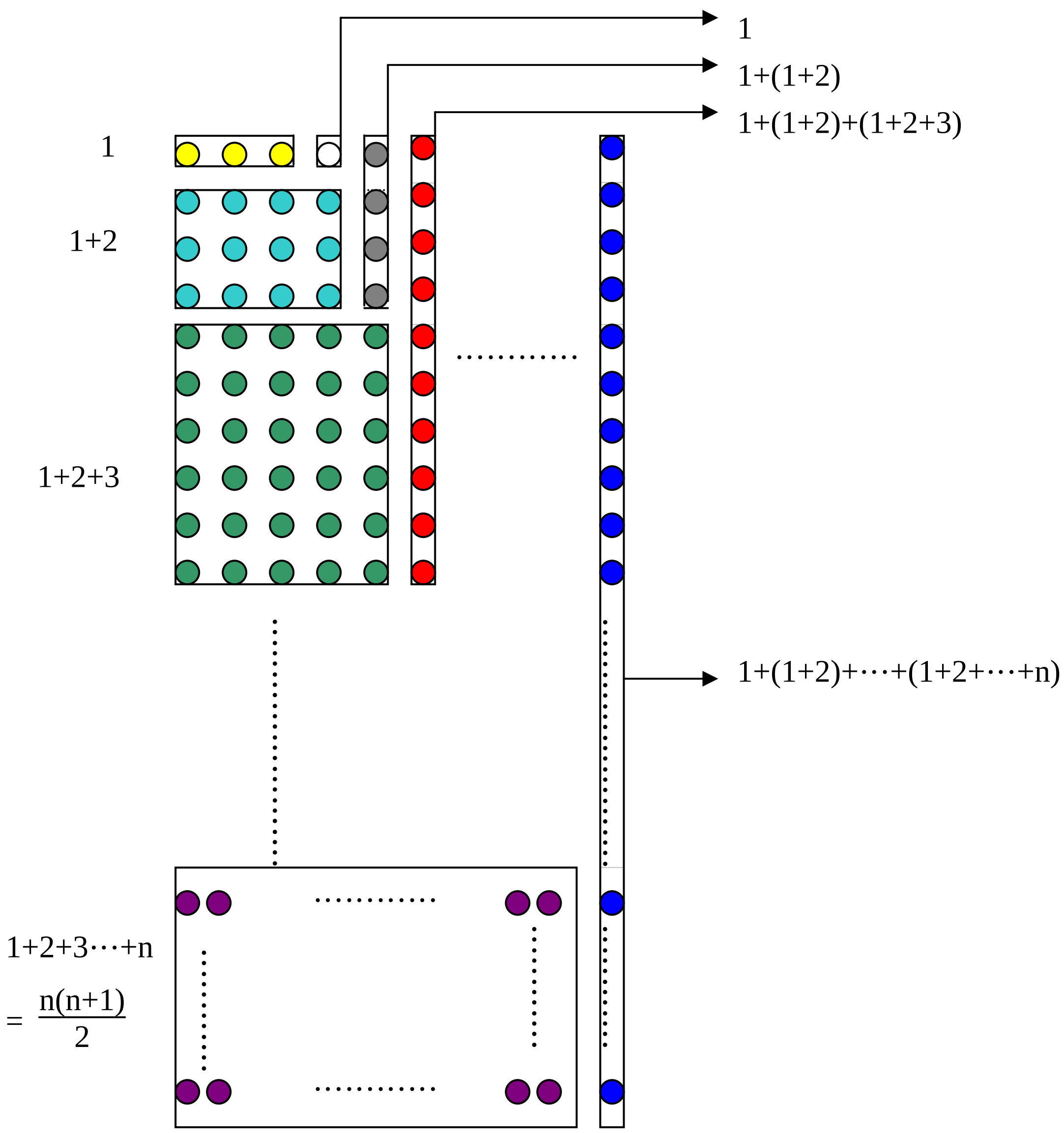
即 B= $\frac{1\times2\times3}{6}+\frac{2\times3\times4}{6}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

我們用 4 組 B 拼成一矩形

4B=3B+B

即 3B=($\frac{1\times2}{2}$)×3+($\frac{2\times3}{2}$)×4+⋯⋯+ ($\frac{n\times(n+1)}{2}$)×(n+2)

B=1+[1+(1+2)]+⋯⋯+[1+(1+2)+⋯⋯+(1+2+⋯⋯+n)]



$4B=[1+(1+2)+\cdots\cdots+(1+2+\cdots\cdots+n)]\times(n+2+1)$

$= \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}\times(n+3)$　　　　　　　(用結論六)

$\therefore B = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4}$

所以我們得到

$1+[1+(1+2)]+\cdots\cdots+[1+(1+2)+\cdots\cdots+(1+2+\cdots\cdots+n)] = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4}$

$\dfrac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\dfrac{2\times3\times4}{1\times2\times3}+\cdots\cdots+\dfrac{n(n+1)(n+2)}{1\times2\times3}=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4}$　我們稱此爲結論七.

4.　我們發現此級數也可以用其他方法求得

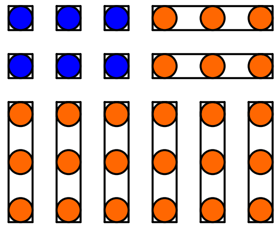
$B = 1+[1+(1+2)]+\cdots\cdots+[1+(1+2)+\cdots\cdots+(1+2+\cdots\cdots+n)]$

即

$B = \dfrac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\dfrac{2\times3\times4}{1\times2\times3}+\cdots\cdots+\dfrac{n(n+1)(n+2)}{1\times2\times3}$

(1)　當 $B=\dfrac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\dfrac{2\times3\times4}{1\times2\times3}$

$6B= 1\times2\times3+2\times3\times4$



$6B= (1+2+3)(2+3)$

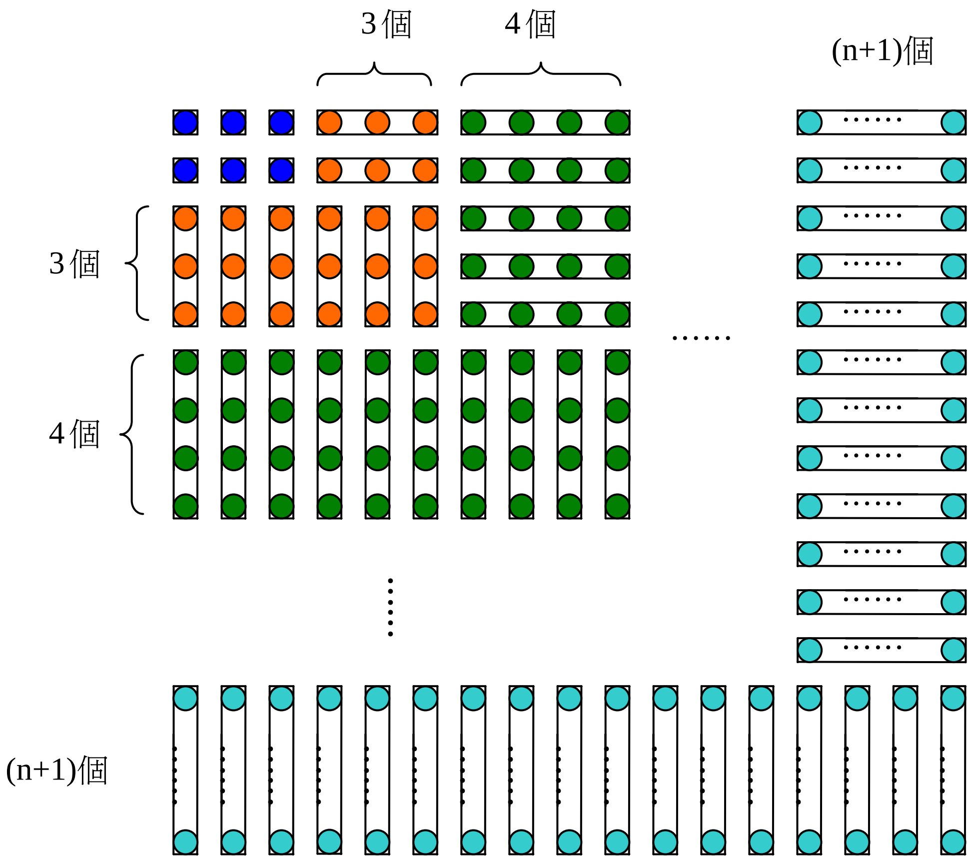
$= \dfrac{3\times4}{2}\times\dfrac{2\times5}{2}$

$= \dfrac{2\times3\times4\times5}{4}$

$\therefore B=\dfrac{2\times3\times4\times5}{24}$

(2)　當 $B=\dfrac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\dfrac{2\times3\times4}{1\times2\times3}+\cdots\cdots+\dfrac{n(n+1)(n+2)}{1\times2\times3}$

$6B= 1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$



(n+1) 個有 $[1+2+\cdots\cdots+n+(n+1)]+[2+3+4+\cdots\cdots+n]$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

$$= (n+2)\left(\frac{(n+1)}{2} + \frac{(n-1)}{2}\right)$$

$$= n(n+2)$$

∴ (n+1) 個有 $n(n+2)$ 排

∴ $1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2) = [2+\cdots\cdots+n+(n+1)]\times[1+2+3+4+\cdots\cdots+n+(n+1)]$

$$= \frac{(n)(n+3)}{2} \times \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

∴ $B = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{6\times4} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4}$

八、我們發現上述之級數似乎有某種規律性，所以我們用討論七之級數再堆垛一次，即

$$\mathbf{C=\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}\right)+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}+\frac{3\times4\times5}{1\times2\times3}\right)+\cdots\cdots+}$$

$$\mathbf{\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}+\frac{3\times4\times5}{1\times2\times3}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\times2\times3}\right)=?}$$

此即 **C= 1+{1+[1+(1+2)]}+……+{1+[1+(1+2)]+……+[1+(1+2)+……+(1+2+……+n)]}**

因為不容易用此種方式表達，故我們往後皆以下列方式來表示

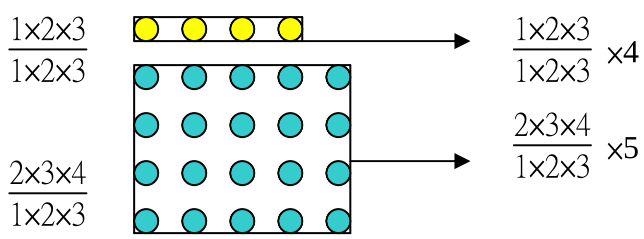
$$\mathbf{C=\frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3\times4}+\frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4}+\frac{3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4}=?}$$

1. 當 $C=\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}\right)$

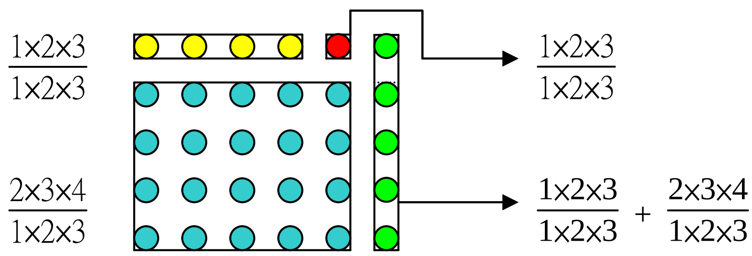
   即 $C=\frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3\times4}+\frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4}$

   我們先用四組 C

   即 $4C=\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}\times4\right)+\left(\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}\times5\right)$



   再用一組 $C=\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}\right)$補成一矩形



$$5C=\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}\right)\times(5+1)$$ （此用結論七.)

$$=\left(\frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{1\times2\times3\times4}\right)\times(2+4)$$

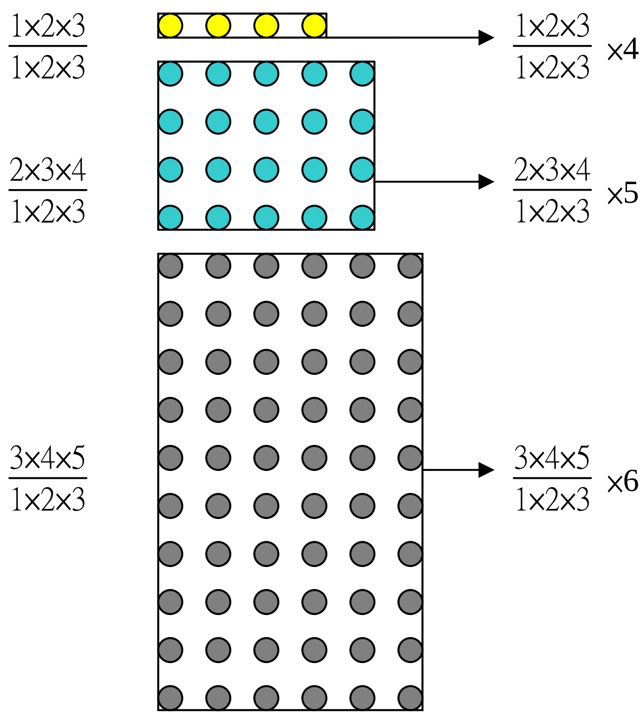
$$\therefore C=\frac{2(2+1)(2+2)(2+3)(2+4)}{1\times2\times3\times4\times5}$$

2. 當 $C=\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}\right)+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}+\frac{3\times4\times5}{1\times2\times3}\right)$

即 $C=\frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3\times4}+\frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4}+\frac{3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4}$

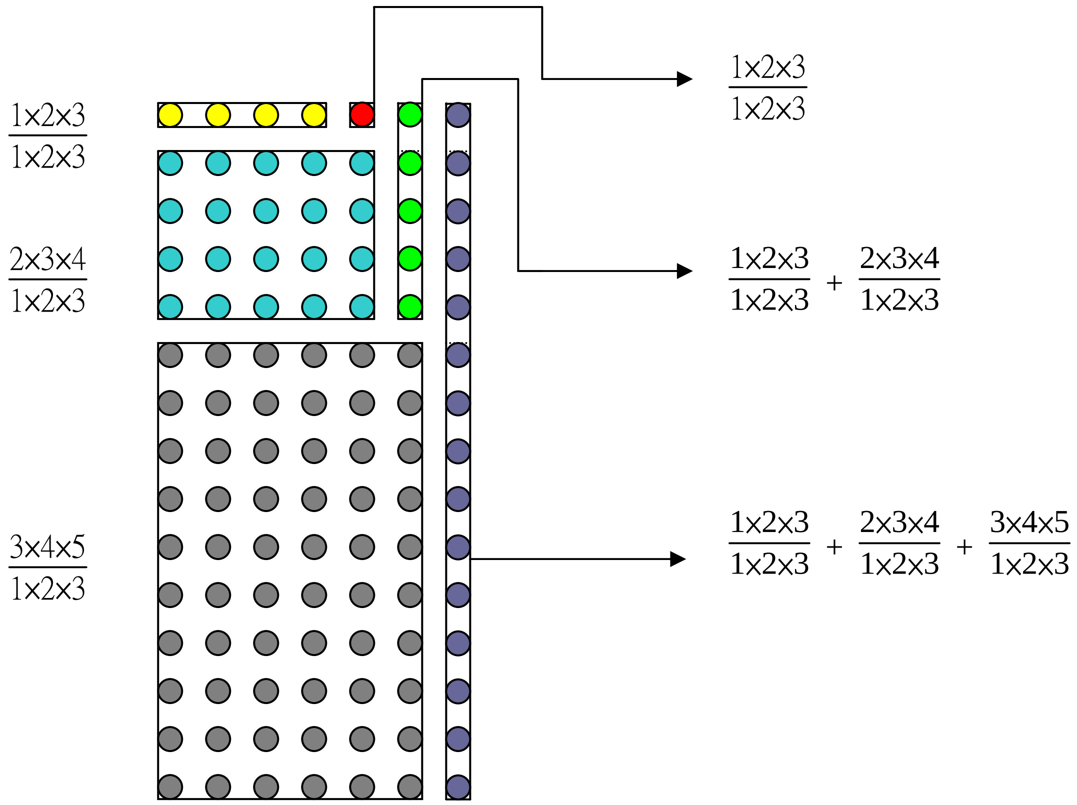
我們先用四組 C

即 $4C=\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}\times4\right)+\left(\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}\times5\right)+\left(\frac{3\times4\times5}{1\times2\times3}\times6\right)$



再用一組 $C=\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}\right)+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}+\frac{3\times4\times5}{1\times2\times3}\right)$

補成一矩形



$$5C=\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}+\frac{3\times4\times5}{1\times2\times3}\right)\times(6+1)$$

$$=\left(\frac{3(3+1)(3+2)(3+3)}{1\times2\times3\times4}\right)\times(3+4)$$

$$\therefore C=\frac{3(3+1)(3+2)(3+3)(3+4)}{1\times2\times3\times4\times5}$$

3. 當 $C=\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}\right)+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}+\frac{3\times4\times5}{1\times2\times3}\right)+\cdots\cdots+$

$\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}+\frac{3\times4\times5}{1\times2\times3}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\times2\times3}\right)$

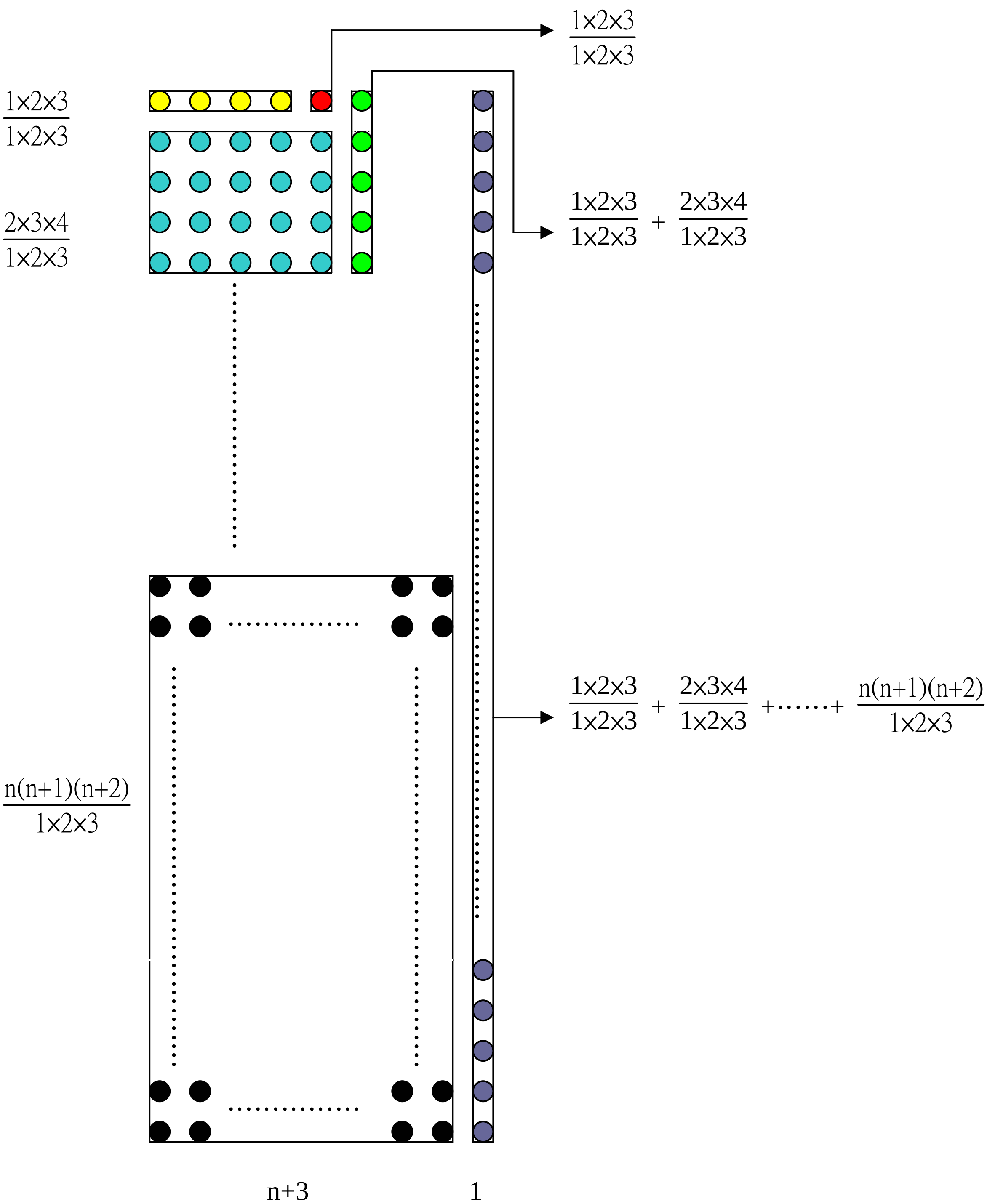
即 $C=\frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3\times4}+\frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4}+\frac{3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4}$

我們用五組 C 拼成一矩形，5C=4C+C

即 $4C=\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}\times4\right)+\left(\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}\times5\right)+\cdots\cdots+\left[\frac{n(n+1)(n+2)}{1\times2\times3}\times(n+3)\right]$

$C=\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}\right)+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}+\frac{3\times4\times5}{1\times2\times3}\right)+\cdots\cdots+$

$\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}+\frac{3\times4\times5}{1\times2\times3}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\times2\times3}\right)$



$$\therefore 5C = \left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3} + \frac{2\times3\times4}{1\times2\times3} + \cdots\cdots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1\times2\times3}\right)(n+3+1) \quad \text{(此用結論七.)}$$

$$= \left(\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4}\right)(n+4)$$

$$\therefore\ C = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\times2\times3\times4\times5}$$

我們稱此爲結論八.

九、我們用討論七之級數再堆垛一次，即

$$D=\frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3\times4}+\left(\frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3\times4}+\frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3\times4}+\frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4}+\frac{3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4}\right)=?$$

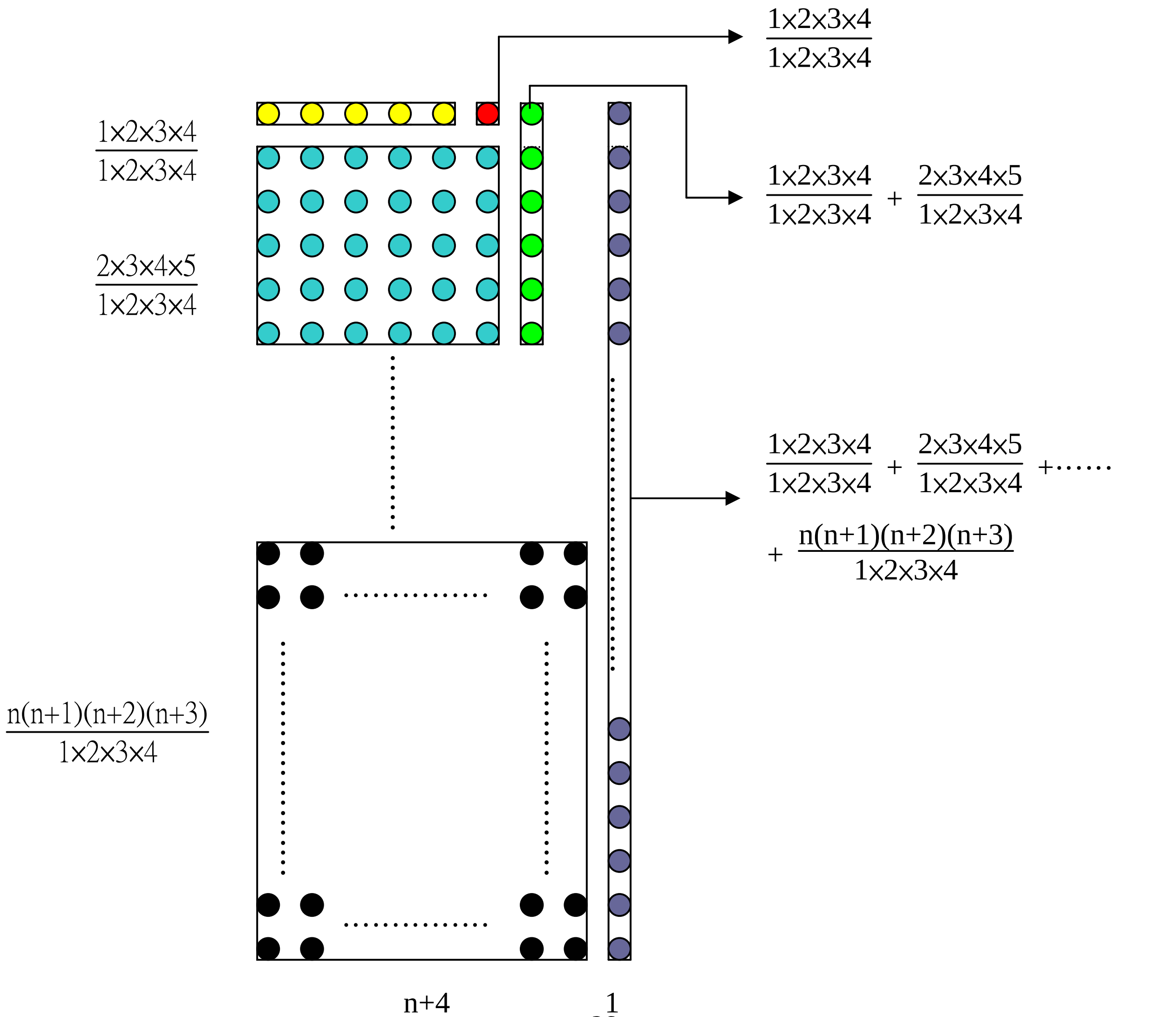
又可將 D 表爲

$$D=\frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{3\times4\times5\times6\times7}{1\times2\times3\times4\times5}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\times2\times3\times4\times5}=?$$

我們用六組 D 拼成一矩形，6D=5D+D

$$\text{即 } 5D=\left(\frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3\times4}\times5\right)+\left(\frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4}\times6\right)+\cdots\cdots+\left[\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4}\times(n+4)\right]$$

$$D=\frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{3\times4\times5\times6\times7}{1\times2\times3\times4\times5}+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\times2\times3\times4\times5}$$



$$6D = \left(\frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3\times4} + \frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4} + \cdots\cdots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4}\right)\times(n+4+1)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\times2\times3\times4\times5}\times(n+5) \qquad \text{(此用結論八)}$$

$$\therefore \quad D = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{1\times2\times3\times4\times5\times6}$$

$$\therefore \quad \frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4\times5} + \frac{2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4\times5} + \cdots\cdots + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\times2\times3\times4\times5} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{1\times2\times3\times4\times5\times6}$$

十、我們利用上列六–九中所得的堆垛的方法，亦可推得下列一般的結果：

$$\mathbf{S_{K-1} = \frac{1\times2\times\cdots\times k}{1\times2\times3\times\cdots\times k} + \frac{2\times3\times\cdots(k+1)}{1\times2\times\cdots\times k} + \cdots\cdots + \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{1\times2\times\cdots\times k}}$$

$$\mathbf{= \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)(n+k)}{1\times2\times\cdots\times k(k+1)}}$$

此結果是由 **S=1+2+3+……+n** 作**(k–1)**次堆垛所得

換言之

$$\mathbf{1\times2\times\cdots\times k+2\times3\times\cdots\times(k+1)+\cdots\cdots+n(n+1)\cdots(n+k+1)}$$

$$\mathbf{= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)(n+k)}{(k+1)}}$$

十一、我們將楊輝三角形稍微變化一下，仿照九九乘法表排成下圖

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	**4**	5	6	7	8	9
1	3	6	10	15	21	28	36	45
1	4	10	20	35	56	84	120	165
1	5	15	35	70	126	210	330	495
1	6	21	56	126	252	462	792	1287
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003

每一個數字是上面的數字加左邊的數字而得，如：　4+6=10

我們發現第三、四、五行即是我們在前面六–九討論之堆垛數列。

1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6
1	3	6	10	15	21
1	4	10	20	35	56
1	5	15	35	70	126
1	6	21	56	126	252
1	7	28	84	210	462

並發現　　1+2+3+4+5+6=21　　1+5+15+35=56

其實只要想一想就能知道它的神奇之處，絕對不是湊巧的喔！

$$\because \quad 21 = 6+15$$
$$= 6+5+10$$
$$= 6+5+4+6$$
$$= 6+5+4+3+3$$
$$= 6+5+4+3+2+1$$
$$\therefore \quad 1+2+3+4+5+6 = 21$$

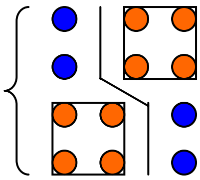
沒想到竟是這麼簡單的道理吧！數學就是那麼有趣那麼好玩。

十二、$1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\ldots\ldots+(1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+n^2)=?$

1. $1^2+(1^2+2^2)=?$

$\because 1^2+(1^2+2^2)=1^2(2)+2^2(2-1)$

$1\times2+2\times1=4$



$\therefore$我們可以用兩塊 $1^2+(1^2+2^2)$的圖形來拼成一塊矩形，

其長為：　$1\times2+2\times1=1+(1+2)=4$

其寬為：　$2+1=3$

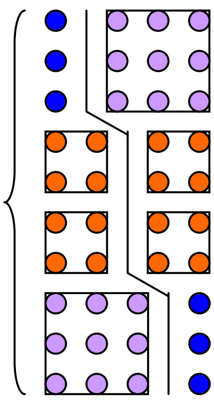
其個數為：　$(1\times2+2\times1)(2+1)=4\times3=12$

$\therefore 1^2+(1^2+2^2)=\dfrac{(1+(1+2))\times(2+1)}{2}=\dfrac{4\times3}{2}=6$

2. $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)=?$

$\because 1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)=1^2(3)+2^2(3-1)+3^2(3-2)$

$1\times3+2\times2+3\times1$



$\therefore$同樣的，我們也可以用兩塊 $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)$的圖形拼成一塊矩形，

其長為：　$1\times3+2\times2\times3\times1=1+(1+2)+(1+2+3)=10$

其寬為：　$3+1=4$

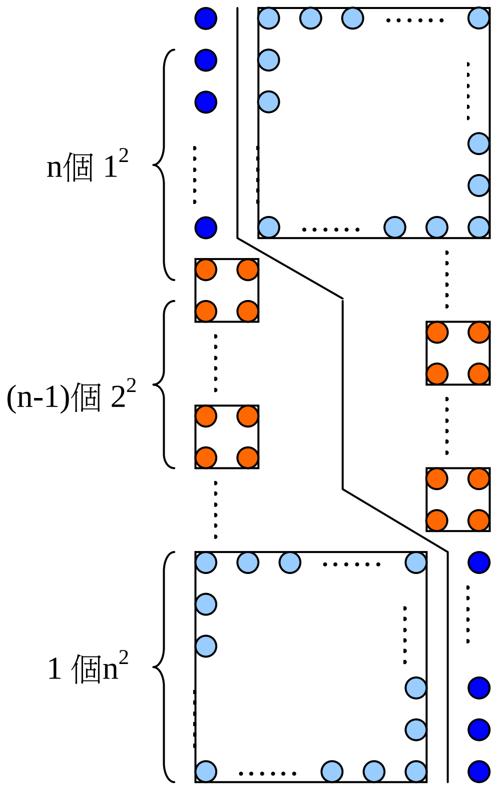
其個數為：　$(1\times3+2\times2\times3\times1)\ (3+1)=4\times10=40$

$\therefore 1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)=\dfrac{(1+(1+2)+(1+2+3))(3+1)}{2}=\dfrac{10\times4}{2}=20$

3. $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots\cdots+(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)=$ ？

$\because 1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots\cdots+(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)=1^2(n)+2^2(n-1)+\cdots\cdots+n^2(1)$

$\therefore$我們用兩塊 $1^2+(1^2+2^2)+\cdots\cdots+(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)$的圖形拼成一塊矩形，



其長爲： $n\times1+(n-1)\times2+(n-2)\times3+\cdots\cdots1\times n$

$=1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+\cdots\cdots+n)$

$=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

其寬爲： $n+1$

其個數爲： $\dfrac{n(n+1)(n+1)(n+2)}{6}$

$\therefore 1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots\cdots+(1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2)$

$=\dfrac{n(n+1)(n+1)(n+2)}{2\times6}$

$=\dfrac{n(n+1)(n+1)(n+2)}{12}$

十三、我們利用堆垛之結果來尋求 $\mathbf{1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+n^4=}$？

利用上述七之結論

$$\frac{\mathbf{1\times2\times3}}{\mathbf{1\times2\times3}}+\frac{\mathbf{2\times3\times4}}{\mathbf{1\times2\times3}}+\frac{\mathbf{3\times4\times5}}{\mathbf{1\times2\times3}}+\cdots\cdots+\frac{\mathbf{n(n+1)(n+2)}}{\mathbf{1\times2\times3}}=\frac{\mathbf{n(n+1)(n+2)(n+3)}}{\mathbf{1\times2\times3\times4}}$$

$$\frac{\mathbf{1\times2\times3}}{\mathbf{1\times2\times3}}+\frac{\mathbf{2\times3\times4}}{\mathbf{1\times2\times3}}+\frac{\mathbf{3\times4\times5}}{\mathbf{1\times2\times3}}+\cdots\cdots+\frac{\mathbf{n(n+1)(n+2)}}{\mathbf{1\times2\times3}}=\frac{\mathbf{n^4+6n^3+11n^2+6n}}{\mathbf{1\times2\times3\times4}}$$

當 n=1 時 $\quad\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}=\frac{1^4+6\times1^3+11\times1^2+6\times1}{1\times2\times3\times4}$ ……………………………(1)

當 n=2 時 $\quad\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}=\frac{2^4+6\times2^3+11\times2^2+6\times2}{1\times2\times3\times4}$ …………………(2)

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

當 n=k 時 $\quad\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\cdots\cdots+\frac{k(k+1)(k+2)}{1\times2\times3}=\frac{k^4+6k^3+11k^2+6k}{1\times2\times3\times4}$ …………(k)

將(1)+(2)+……+(k)式

則左式 $=\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1\times2\times3}{1\times2\times3}+\frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}+\cdots\cdots+\frac{k(k+1)(k+2)}{1\times2\times3}\right)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{1\times2\times3\times4\times5}$ (此為結論八)

$$\therefore\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{1\times2\times3\times4\times5}=\frac{(1^4+2^4+\cdots+k^4)+6(1^3+2^3+\cdots+k^3)+11(1^2+2^2+\cdots+k^2)+6(1+2+\cdots+k)}{1\times2\times3\times4}$$

$$\therefore\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5}=(1^4+2^4+\cdots+k^4)+6\left(\frac{k^2(k+1)^2}{4}\right)+11\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right)+6\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)$$

$$\therefore 1^4+2^4+\cdots+k^4=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{5}-6\left(\frac{k^2(k+1)^2}{4}\right)-11\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right)-6\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)$$

$$=k(k+1)\left[\frac{6k^3+9k^2+k-1}{30}\right]$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)(3k^2+3k-1)}{30}$$

$$\therefore\mathbf{1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\cdots\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}}$$

十四、我們發現這排石頭的方法用在尋找商高定理的整數解$\mathbf{a^2+b^2=c^2}$

如在第五頁我們所討論的

$$\mathbf{1+3+5+7+\cdots\cdots+(2n-1)=n^2}$$

1. 假設 $n \geqq 2$

$\because$〔$1+3+5+7+\cdots\cdots(2n-3)$〕$+(2n-1) = n^2$

$\therefore \quad (n-1)^2+(2n-1) = n^2$

若令 $2n-1 = k^2$，則$n = \dfrac{k^2+1}{2}$

(1) $\therefore$當$k=3$ 則$n= \dfrac{3^2+1}{2} =5$ 此時即得 $4^2+3^2=5^2$

(2) $\therefore$當$k=5$ 則$n= \dfrac{5^2+1}{2} =7$ 此時即得 $12^2+5^2=13^2$

(3) $\therefore$當$k=7$ 則$n= \dfrac{7^2+1}{2} =25$ 此時即得 $24^2+7^2=25^2$

(4) $\therefore$當$k=9$ 則$n= \dfrac{9^2+1}{2} =41$ 此時即得 $40^2+9^2=41^2$

(5) $\therefore$當$k=2p+1$ 則$n=2p^2+2p+1$ 此時即得$(2p^2+2p)^2+(2p+1)^2=(2p^2+2p+1)^2$

由此可找出一群$(a,b,c)=(4,3,5)(12,5,13)(24,7,25)(40,9,41)\cdots\cdots\cdots\cdots$

$(2p^2+2p,\ 2p+1,\ 2p^2+2p+1)$商高解，

它們的特性是 a 與 c 差 1，且 b 為大於 1 之所有奇數

2. 假設 $n \geqq 3$

$\because$〔$1+3+5+7+\cdots\cdots(2n-5)$〕$+(2n-3)+(2n-1)=n^2$

$\therefore (n-2)^2+(4n-4)=n^2$

若令 $4n-4 = k^2$，則$n = \dfrac{k^2+4}{4}$

(1) $\therefore$當$k=4$ 則$n=\dfrac{4^2+4}{4} =5$ 此時即得 $3^2+4^2=5^2$

(2) $\therefore$當$k=6$ 則$n=\dfrac{6^2+4}{4} =10$ 此時即得 $8^2+6^2=10^2$

(3) ∴當$k=8$ 則$n=\frac{8^2+4}{4}=17$　此時即得 $15^2+8^2=17^2$

(4) ∴當$k=10$ 則$n=\frac{10^2+4}{4}=26$　此時即得 $24^2+10^2=26^{2(}$

(5) ∴當$k=2q$ 則$n=q^2+1$　此時即得$(q^2-1)^2+(2q)^2=(q^2+1)^2$

由此可找出一群(a,b,c)=(3,4,5)(8,6,12)(15,8,17)(24,10,26) …………

$(q^2-1, 2q, q^2+1)$畜高解，

它們的特性是 a 與 c 差 2，且 b 爲大於 2 之所有偶數

3. 假設 $n\geqq 4$

$\because$〔$1+3+5+7+\cdots\cdots(2n-7)$〕$+(2n-5)+(2n-3)+(2n-1)=n^2$

$\therefore (n-3)^2+(6n-9)=n^2$

若令 $6n-9=k^2$，則$n=\frac{k^2+9}{6}$

(1) ∴當$k=9$ 則$n=\frac{9^2+9}{6}=15$　此時即得 $12^2+9^2=15^2$

(2) ∴當$k=15$ 則$n=\frac{15^2+9}{6}=39$　此時即得 $36^2+15^2=39^2$

(3) ∴當$k=21$ 則$n=\frac{21^2+9}{6}=90$　此時即得 $87^2+21^2=90^2$

(4) ∴當$k=27$ 則$n=\frac{27^2+9}{6}=123$　此時即得 $120^2+27^2=123^2$

由此可找出一群

(a,b,c)=(12,9,15)(36,15,39)(87,21,90)(120,27,123) ……畜高解，

它們的特性是 a 與 c 差 3，且 b 爲大於 3 之 6 的倍數加 3

我們可利用此種方法找出畜高定理之整數解。

肆、研究結果：

經過多次討論及思考後，我們發現了許多有關於數列的圖形展開方式，我們也從中找到某些數列延伸所產生的規律性，茲列於下：

一、　數列的次方提高時：

1. $1+2+3+4+5+\cdots\cdots+n = \dfrac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}}$

2. $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2 = \dfrac{\mathbf{n(n+1)(2n+1)}}{\mathbf{6}}$

3. $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots\cdots+n^3 =\left(\dfrac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}}\right)^2$

4. $1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\cdots\cdots+n^4 = \dfrac{\mathbf{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}}{\mathbf{30}}$

二、　數列的堆垛增加時：堆垛 n 次以 Sn 表示

1. $S = 1+2+3+4+5+\cdots\cdots+n = \dfrac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}}$

2. $S_1= \dfrac{1\times2}{2} + \dfrac{2\times3}{2} + \dfrac{3\times4}{2} +\cdots\cdots+ \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{\mathbf{n(n+1)(n+2)}}{\mathbf{2\times3}}$

3. $S_2= \dfrac{1\times2\times3}{1\times2\times3} + \dfrac{2\times3\times4}{1\times2\times3} +\cdots\cdots+ \dfrac{n(n+1)(n+2)}{1\times2\times3} = \dfrac{\mathbf{n(n+1)(n+2)(n+3)}}{\mathbf{2\times3\times4}}$

4. $S_3= \dfrac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3\times4} + \dfrac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4} +\cdots\cdots+ \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4} = \dfrac{\mathbf{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}}{\mathbf{1\times2\times3\times4\times5}}$

5. $S_4= \dfrac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4\times5} +\cdots\cdots+ \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1\times2\times3\times4\times5} = \dfrac{\mathbf{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}}{\mathbf{1\times2\times3\times4\times5\times6}}$

6. $S_k= \dfrac{1\times2\times\cdots\times k(k+1)}{1\times2\times3\times\cdots\times k(k+1)} + \dfrac{2\times3\times\cdots\times(k+1)\,(k+2)}{1\times2\times\cdots\times k(k+1)} +\cdots\cdots+$

$$\dfrac{n(n+1)\cdots(n+k-1)\,(n+k)}{1\times2\times\cdots\times k(k+1)} = \dfrac{\mathbf{n(n+1)\cdots(n+k-1)(n+k)(n+k+1)}}{\mathbf{1\times2\times\cdots\times k(k+1)(k+2)}}$$

三、　平方級數的堆垛增加時：

1. $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2 = \dfrac{\mathbf{n(n+1)(2n+1)}}{\mathbf{6}}$

2. $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots\cdots+(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)= \dfrac{\mathbf{n(n+1)(n+1)(n+2)}}{\mathbf{12}}$

四、　商高定理之整數解：

給定一大於 2 之整數，至少可以此爲一股，找出一組以上之商高整數解。

伍、參考書目：

1. 蔡聰明 ： 數學拾貝…………………………………三民書局 , 2003.

評　語

030408 國中組數學科

亂石堆

用另一種不同的觀點導出一些級數和的公式，構想獨特而新穎。如能利用這樣的概念，推演出全新的一些級數和的結果，會是更完美的作品。