中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030407

苗栗縣立苗栗國民中學

指導老師姓名

葉佐欽

作者姓名

李芳賢

傅文亨

世紀爭霸大點兵

壹、摘要

在一款「世紀爭霸」的電玩遊戲裏，我們常常為了要派多少士兵傷腦筋。我們利用 Excel 模擬戰鬥的過程，整理最少士兵數的數型，本來想藉著數型的研究，找出最少士兵數的規律，沒想到最少士兵數卻極不規律。在最初的觀察例中，雖然似乎有一些週期性，但是模擬更多的觀察例後，週期性卻總有例外，挫折之餘，一度放棄這個研究。

後來在學校數理資優實驗的課程中，老師替我們介紹許多的遞迴數列的例子和相關的知識，我們發現我們的問題和遞迴數列有些關聯，便重新研究這個問題。我們從最簡單的情形（即敵我雙方的攻擊力和生命值皆為 1）開始，推導各回合敵我所剩士兵數的遞迴關係式，竟意外的發現這些遞迴關係式的係數形成費氏（Fibonacci）數列，透過費氏數列的性質，我們找到了這個最簡單情形的解答。我們將問題一般化，也成功的找出一些性質，並替我們的問題完整的解答，並且找到戰鬥所需回合與敵我士兵數的關係。

最後，在老師的協助下，我們完成了我們所研究結果之證明。

貳、研究動機

在電玩遊戲攻城掠地的過程中，通常要經過戰鬥才能獲得勝利，佔領據點。而面對不同的敵軍，他們擁有不同的攻擊力、生命力和士兵個數。我方派遣的士兵數太少會被敵方殲滅，無法獲勝；而派遣的士兵太多，則浪費兵力，無法做最佳的攻擊。為此常傷透腦筋，因此興起研究的念頭，希望能找到最少士兵個數的數型關係。

參、研究目的

1. 了解不同的攻擊力、生命力和士兵個數的敵方軍隊與我方所需派遣的最少士兵數是否存在數型關係。
2. 如果存在數型關係，找尋最少士兵數的公式 。

肆、研究設備及器材

1. 紙、筆、電子計算機。
2. 個人電腦、MicroSoft Excel 軟體。

伍、研究過程與方法

一、 遊戲規則與遊戲範例

我們先假設兩方士兵的生命值皆等於 1，我方的攻擊力為 a，敵方的攻擊力為 b，我方的士兵數為 u_0，敵方的士兵數為 v_0。若敵方先攻，則我方剩餘的士兵數為 $u_0 - bv_0$，接下來換我方攻擊，則敵方所剩士兵數為 $v_0 - a(u_0 - bv_0)$，依此循環戰鬥，直到一方為對方殲滅（即士兵數小於或等於 0）。

我們以下表之資料爲例：

	攻擊力	生命值	士兵數
我方	3	1	5373
敵方	2	1	2345

敵我各攻擊一次爲一回合，其戰鬥過程如下：

	我方士兵數	敵方士兵數
第 0 回合	5373	2345
第 1 回合	91	296
第 2 回合	45	23
第 3 回合	-112	269

戰鬥在第 3 回合結束，我方獲勝，剩餘士兵數爲 23。
下面，我們定義了最少獲勝士兵數。
最少獲勝士兵數 $u_{\min}$：如果派遣 $u_{\min}$ 個士兵獲勝，派遣 $u_{\min}-1$ 個士兵失敗，則稱 $u_{\min}$ 爲最少獲勝士兵數。

二、 敵我雙方的攻擊爲 1 的情形（*a*=1，*b*=1）

爲了了解士兵數變化的情形，我們利用 Excel 模擬電玩戰鬥的細部過程，並記錄不同的 a、b 之值和敵方士兵數時，我方所需派遣的最少士兵數，但是並沒有發現明顯的規則，於是我們決定從最簡單的情形：雙方的攻擊力和生命值皆爲 1 的情形著手推導（即 ***a*=1，*b*=1**）。

敵方先攻擊後，$\begin{cases} u_{\frac{1}{2}} = u_0 - v_0 \\ v_{\frac{1}{2}} = v_0 \end{cases}$，

我方反擊後，得 $\begin{cases} u_1 = u_{\frac{1}{2}} = u_0 - v_0 \\ v_1 = v_{\frac{1}{2}} - u_{\frac{1}{2}} = v_0 - (u_0 - v_0) = -u_0 + 2v_0 \end{cases}$

若 u_n，v_n 分別代表第 n 回合結束時，我方和敵方剩餘之士兵數，則可得

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

遞迴代入可得

$$\begin{cases} u_2 = 2u_0 - 3v_0 \\ v_2 = -3u_0 + 5v_0 \end{cases}, \begin{cases} u_3 = 5u_0 - 8v_0 \\ v_3 = -8u_0 + 13v_0 \end{cases}, \begin{cases} u_4 = 13u_0 - 21v_0 \\ v_4 = -21u_0 + 34v_0 \end{cases}, \begin{cases} u_5 = 34u_0 - 55v_0 \\ v_5 = -55u_0 + 89v_0 \end{cases}$$

我們意外的發現 u_0、v_0 的係數形成費氏(Fibonacci)數列，即 $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$。

假設 F_1，F_2，F_3，⋯爲費氏(Fibonacci)數列，且 $F_1=1$，$F_2=1$，

則可得 u_n、v_n 的一般式 $\begin{cases} u_n = F_{2n-1}\cdot u_0 - F_{2n}\cdot v_0 \\ v_n = -F_{2n}\cdot u_0 + F_{2n+1}\cdot v_0 \end{cases}$

如果我方想要獲勝，則必須滿足下列兩個不等式，

$u_n > 0$，且 $v_n \le 0$；即

$F_{2n-1}\cdot u_0 - F_{2n}\cdot v_0 > 0$，且 $-F_{2n}\cdot u_0 + F_{2n+1}\cdot v_0 \le 0$

$F_{2n-1}\cdot u_0 > F_{2n}\cdot v_0$，且 $F_{2n}\cdot u_0 \ge F_{2n+1}\cdot v_0$

$u_0 > \dfrac{F_{2n}}{F_{2n-1}}\cdot v_0$，且 $u_0 \ge \dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n}} v_0$

由上式得知，如果只要在第 n 回合中存活，我們只要滿足 $u_0 > \dfrac{F_{2n}}{F_{2n-1}} v_0$ 即可，即 $u_0 = [\dfrac{F_{2n}}{F_{2n-1}} v_0]+1$，$[x]$爲高斯函數。實際計算後，$\dfrac{F_2}{F_1}=1$，$\dfrac{F_4}{F_2}=1.5$，而且當 n 愈來愈大的時候，$\dfrac{F_{2n}}{F_{2n-1}}$ 愈來愈大。如果要在第 n 回合中打敗敵方，則需要滿足 $u_0 \ge \dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n}} v_0$，$\dfrac{F_3}{F_2}=2$，$\dfrac{F_5}{F_4}=1.66667$，而且當 n 愈來愈大的時候，$\dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$ 愈來愈小。而且由於 $\dfrac{F_{2n}}{F_{2n-1}} \le \dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$，$n=1$，2，3，⋯我們知道當 n 很大的時候，$\dfrac{F_{2n}}{F_{2n-1}}$ 和 $\dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$ 都和接近 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618034$，所以 $u_{\min} = [1.618034 v_0]+1$。

三、 敵我雙方的攻擊力爲任意整數時

敵方先攻擊後，$\begin{cases} u_{\frac{1}{2}} = u_0 - bv_0 \\ v_{\frac{1}{2}} = v_0 \end{cases}$，

我方反擊後，得 $\begin{cases} u_1 = u_{\frac{1}{2}} = u_0 - bv_0 \\ v_1 = v_{\frac{1}{2}} - au_{\frac{1}{2}} = v_0 - a(u_0 - bv_0) = -au_0 + (1+ab)v_0 \end{cases}$

若 u_n，v_n 代表第 n 回合結束時，我方和敵方剩餘之士兵數，則可得

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - bv_n \\ v_{n+1} = -au_n + (1+ab)v_n \end{cases}，n = 0,1,2,\cdots$$

假設 $\begin{cases} u_n = p_n u_0 - q_n v_0 \\ v_n = -r_n u_0 + s_n v_0 \end{cases}$，則

$$u_{n+1}=(p_n u_0-q_n v_0)-b(-r_n u_0+s_n v_0)$$
$$=(p_n+br_n)u_0-(q_n+bs_n)v_0$$

$$v_{n+1}=-a(p_n u_0-q_n v_0)+(1+ab)(-r_n u_0+s_n v_0)$$
$$=-[ap_n+(1+ab)r_n]u_0+[aq_n+(1+ab)s_n]v_0$$

所以 $p_{n+1}=p_n+br_n$ ， $q_{n+1}=q_n+bs_n$

$r_{n+1}=ap_n+(1+ab)r_n$ ， $s_{n+1}=aq_n+(1+ab)s_n$

利用這四個遞迴關係式及 Excel 的複製功能，我們能輕易的計算

p_n 、 q_n 、 r_n 及 s_n ，n=2，3，4，⋯

透過 Excel 的計算，我們發現以下四個重要特性：

(1)當 n 夠大的時候， $\frac{q_n}{p_n}$ 和 $\frac{s_n}{r_n}$ 會愈來愈接近同一數 f 。

(2) r_n ： q_n ＝a：b，n=1，2，3，⋯

(3) $s_n=p_{n+1}$ ，n=1，2，3，⋯

(4) $\frac{q_n}{p_n}\le\frac{s_n}{r_n}$ ， $\frac{q_n}{p_n}\le\frac{q_{n+1}}{p_{n+1}}$ ， $\frac{s_n}{r_n}\ge\frac{s_{n+1}}{r_{n+1}}$ n=1，2，3，⋯

由於 $\begin{cases}u_n=p_n u_0-q_n v_0\\ v_n=-r_n u_0+s_n v_0\end{cases}$ ，我們進行和 a=1，b=1 相同的推導過程得到

當 $u_{\min}=[fv_0]+1$ 爲獲勝最少士兵數，我們稱 f 爲勝利指數。

四、 勝利指數 *f* 的計算

我們記錄一些 a、b 的勝利指數 f 的值和一些我們觀察及測試的結果在下表中

a	b	$f(a,b)$	k	$\frac{\sqrt{k}}{2a}$	$f(a,b)-\frac{\sqrt{k}}{2a}$
1	1	1.618034	5	1.118034	0.5
1	2	2.732051	12	1.732051	1
1	3	3.791288	21	2.291288	1.5
1	4	4.828427	32	2.828427	2
2	1	1.366025	12	1.866025	0.5
2	2	2.414214	32	3.414214	1
2	3	3.436492	60	1.936492	1.5
2	4	4.449490	96	2.449490	2
3	1	1.263763	21	0.763763	0.5

3	2	2.290994	60	1.290994	1
3	3	3.302776	117	1.802776	1.5
3	4	4.309401	192	2.309401	2
4	1	1.207107	32	0.707107	0.5
4	2	2.224745	96	1.224745	1
4	3	3.232051	192	1.732051	1.5
4	4	4.236068	320	2.236068	2

由於我們已知 $f(1,1)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，我們大膽的猜測這些小數點是由根號所產生的無理數。從上表我們發現了以下兩個規則：

(1) $k=ab(ab+4)$

(2) $f(a,b)-\frac{\sqrt{k}}{2a}=\frac{b}{2}$

綜合整理後，我們得到下面的公式：

$$f(a,b)=\frac{\sqrt{ab(ab+4)}}{2a}+\frac{b}{2}$$

令 $x=f(a,b)$ 我們進而推導以此爲根的有理係數方程式

$$x=\frac{\sqrt{ab(ab+4)}}{2a}+\frac{b}{2}$$

$$2x-b=\frac{\sqrt{ab(ab+4)}}{a}$$

$4x^2-4bx+b^2=\frac{b(ab+4)}{a}$，整理化簡得

$ax^2-abx-b=0$，我們稱此方程式爲特徵方程式。

五、 幾個附屬問題

(1)生命值不爲 1 的時候

以上所討論的情形皆爲生命值等於 1 的時候。當生命值不爲 1 時，假設敵我雙方的生命值分別爲 d、c，敵我雙方的攻擊力分別爲 b、a 時，我們可以視爲兩方的生命值仍然爲 1，而敵我雙方的攻擊力分別爲 $\frac{b}{c}$ 和 $\frac{a}{d}$。由勝利指數公式的計算和實際電腦戰鬥模擬的比較，僅有極少部分的情形，兩者不相同。例如 $a=2$，$b=1$，$c=3$，$d=2$，$v_0=4$ 時，$[fv_0]+1=4$，而實際所需的最少士兵數爲 3。經過討論，我們認爲這是每回合戰鬥結束時，可能有一個士兵雖然生命值雖然減損，但其攻擊力卻是保存的緣故，因而造成一些四捨五入上的誤差。

以下我們整理一些勝利指數公式的計算和實際電腦戰鬥模擬誤差的資料：

a	b	c	d	v_0	$[f\cdot v_0]+1$	實際所需最少士兵
1	2	1	4	7	12	13
1	2	1	4	10	17	18
1	2	1	4	13	22	23
1	2	1	4	16	27	28
1	4	1	2	3	3	2
1	4	1	2	7	7	6
1	4	1	2	11	10	9
1	4	1	2	18	16	5

我們從這些資料可以發現實際所需最少士兵與我們所計算的結果誤差爲 1，當 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$ 時（即我方攻擊力較強時），可能比所計算的士兵數少一個，反之；當 $\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$ 時（即我方攻擊力較弱時），可能比所計算的士兵數多一個。

另外，我們發現當勝利指數 f 爲正整數時，我們的公式必須修正，即 $u_0 = fv_0$；例如：$\frac{a}{d}=0.5$，$\frac{b}{c}=\frac{1}{3}$。

(2)我方先攻時

當我方先攻時，我們可以重新推導 p_n、q_n、r_n 及 s_n 的遞迴關係式，進而計算勝利指數 f。我們採取另一種做法，即將我方與敵方的角色交換處理。由於***獲勝最少士兵數*** $u_{\min}$ 爲後攻方，所以 $fu_0>v_0$，所以最少士兵數的計算公式可改爲 $u_0=[\frac{v_0}{f}]+1$。

(3)敵我雙方戰鬥回合數

當雙方的攻擊力和生命值皆爲 1 時　我們記錄了不同的敵我士兵數，戰鬥所需的回合數如下表：

v_0	u_0	回合	v_0	u_0	回合	v_0	u_0	回合
1	2	1	8	13	3	21	34	4
2	4	1	9	15	2	55	89	5
3	5	2	10	17	2	144	233	6
4	7	2	11	18	3	377	610	7
5	9	2	12	20	2	987	1597	8
6	10	2	13	22	2	2584	4181	9
7	12	2	14	23	3	6765	10946	10

我們發現當 $v_0 = F_{2n}$，$u_0 = F_{2n+1}$，F_1，F_2，F_3，⋯爲費氏(Fibonacci)數列，且 $F_1 = 1$，$F_2 = 1$；則戰鬥需要 n 回合，而且如果 $v_0 < F_{2n}$ 時，所需的戰鬥回合小於 n。同樣的情形也發生在敵我雙方的生命值均爲 1 的情形，當 $v_0 = r_n$，$u_0 = s_n$ 時，戰鬥需要 n 回合，如果 $v_0 < r_n$ 時，所需的戰鬥回合小於 n。另外，觀察發現，當 u_0 和 v_0 不互質時，所需的戰鬥回合數似乎比較少。

六、特徵方程式的證明

最後我們將證明幾個觀察的性質和特徵方程式。

首先我們利用數學歸納法證明下個性質

(1) $r_n : q_n = a : b$，n=1，2，3，⋯

(2) $s_n = p_{n+1}$，n=1，2，3，⋯

證明：當 n=1 時，$q_1 = b$，$r_1 = a$，$s_1 = 1 + ab$，第(1)式成立。

$$p_2 = p_1 + br_1 = 1 + ba = s_1$$，第(2)式成立。

設當 $n = k$，第(1)(2)式都成立，即

$r_k : q_k = a : b$，且 $s_k = p_{k+1}$

則當 $n = k+1$ 時，

$$\begin{aligned}
r_{k+1} : q_{k+1} &= ap_k + (1+ab)r_k : q_k + bs_k \\
&= ap_k + (1+ab)r_k : \frac{b}{a}r_k + bp_{k+1} \\
&= ap_k + (1+ab)r_k : \frac{b}{a}r_k + b(p_k + br_k) \\
&= ap_k + (1+ab)r_k : bp_k + (\frac{b}{a} + b^2)r_k \\
&= a\left[p_k + \left(\frac{1}{a} + b\right)r_k\right] : b\left[p_k + \left(\frac{1}{a} + b\right)r_k\right] \\
&= a : b
\end{aligned}$$

$$p_{k+2} = p_{k+1} + br_{k+1} = s_k + aq_{k+1} = s_k + a(q_k + bs_k) = aq_k + (1+ab)s_k = s_{k+1}$$

接下來，我們將證明$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$爲特徵方程式$ax^2-abx-b=0$的一根。

證明：$$\frac{q_{n+1}}{p_{n+1}}=\frac{q_n+bs_n}{p_n+br_n}=\frac{\frac{q_n}{p_n}+b\frac{p_{n+1}}{p_n}}{1+b\frac{r_n}{pr_n}}=\frac{\frac{q_n}{p_n}+b(\frac{p_n+br_n}{p_n})}{1+b\frac{a}{b}\frac{q_n}{p_n}}=\frac{\frac{q_n}{p_n}+b(1+a\frac{q_n}{p_n})}{1+a\frac{q_n}{p_n}}$$

假設$\lim_{n\to\infty}\frac{q_{n+1}}{p_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}=x$，由上式得

$$x=\frac{x+b(1+ax)}{1+ax}$$

$$x(1+ax)=x+b(1+ax)$$

$$ax^2+x=x+abx+b$$

$$ax^2-abx-b=0$$

得證。

陸、研究結果

1. 不論是我方先攻，或是敵方先攻；任何敵我雙方的生命值與攻擊力，都存在一個勝利指數 f。
2. 勝利指數 f 爲特徵方程式 $ax^2-abx-b=0$ 的正根。其中 $a=\frac{\text{我方攻擊力}}{\text{敵方生命值}}$，$b=\frac{\text{敵方攻擊力}}{\text{我方生命值}}$
3. 當$v_0<r_n$時，其戰鬥回合數小於 n；$v_0=r_n$，其戰鬥回合數等於 n。

柒、後續研究

第 4 頁的性質(4)的不等式$\frac{q_n}{p_n}\le\frac{s_n}{r_n}$，$\frac{q_n}{p_n}\le\frac{q_{n+1}}{p_{n+1}}$，$\frac{s_n}{r_n}\ge\frac{s_{n+1}}{r_{n+1}}$ n=1，2，3，…，我們尚未完成證明，希望能完成這幾個不等式的證明。

另外，我們試圖以同樣的方式研究三方輪流攻擊戰鬥的模式，由於係數過於複雜和時間因素而作罷，如果能夠簡化符號，或許能繼續研究。是否如本研究的題目得到如此好的性質，還是具有其它的數學模式和性質是值得發展的方向。

捌、參考資料

國立編譯館，國民中學數學第三冊

翰林出版社，國民中學數學第二冊

大同資訊出版社，高級中學教科用書第一冊

評　語

030407 國中組數學科

世紀爭霸大點兵

利用簡單的遞迴概念對一個遊戲做了分析，方法適宜。若能對問題的一些變形狀況做出討論，內容將更為豐富。