中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030406

新竹市立光華國民中學

指導老師姓名

高東獻

作者姓名

楊涵傑

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會
作品說明書

科別：　數學科

組別：　國中組

作品名稱：　球滿爲患

關鍵字：　球體、裝箱、利用率

球滿為患

壹、摘要：

探討球體裝箱的奧秘。例如各種規則裝法的差異及在何種情況時，哪種裝法最為適用。

貳、研究動機：

如果把一大堆的乒乓球倒進一個箱內，倒至最後還剩下幾個，但看來箱子也滿了，你會怎樣做呢？用力把乒乓球壓下去嗎？當然不會，聰明的你會嘗試把箱子抖幾下，使球與球之間的空隙減少，好讓你可以把剩餘的幾個放進箱子內。這個經驗可能很多人也有過，但你又可想到這個乒乓球裝箱的問題，其實是一個數學上的難題呢？而之前研究過球體，感到十分有意思，因此這次便繼續研究球體裝箱。球體裝箱在生活中的運用相信也是夠多了，濯髮難數。日常生活隨便的裝箱，隨手搖一搖所蘊含得學問，恐怕想不到有那麼多，那麼深吧！

參、研究目的：

一、探討平面裝箱時對於正方形裝法及三角形裝法的差異。

二、探討對於正方體箱子球體裝箱各種裝法的差異及優劣。

三、探討對於長方體箱子球體裝箱各種裝法的差異及優劣。

四、對於裝箱基本單位及利用率的探討。

五、對於Ａ排法、Ｅ排法中，球體之間距離對利用率之影響。

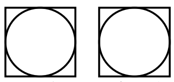
肆、研究材料：

紙、筆、電腦、計算機。

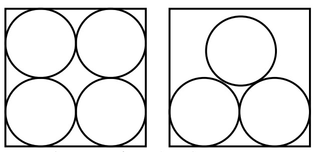
伍、研究過程：

研究一：探討平面裝箱時對於正方形裝法及三角形裝法的差異

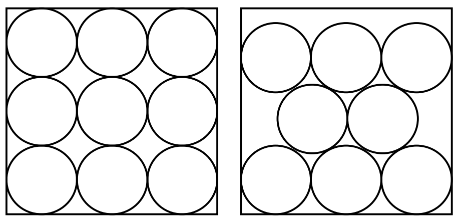
要做立體裝箱之前，為了先熟悉算法以及對裝箱方法有初步認識，我們就來探討平面裝箱的奧妙。其實，這之中的奧妙就在於如何放置乒乓球。我們先看看平面疊放乒乓球時各種情形。平面裝箱會最省空間的有兩種情形 ——以相鄰四個圓的圓心會連成正方形的方式堆疊，以及相鄰三個圓的圓心會連成正三角形的方式來堆疊，當然，也有兩種混合使用，但是在此便不討論。



正方形邊長為 2r 時的情形



正方形邊長為 4r 時的情形



正方形邊長為 6r 時的情形

圖一

一個圓的半徑為ｒ，正方形排列時，乒乓球高度就為２ｒ，總高就為行數×２ｒ；三角形排列時就沒那麼簡單了。以三角形排列時，我們可以以三個連接在一起的圓得三個圓心作為一個三角形的三個頂點，於此正三角形的高切一刀，讓它變成兩個直角三角形。此時，一個直角三角形的斜邊為２ｒ，底邊為ｒ，根據畢氏定理，得其高為：

$$\sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = \sqrt{3}\,r$$

因此，若三角形排列時，乒乓球排數未超過正方形排列法的排數，所有乒乓球的總高就為［(行數) × $\sqrt{3}$ +２］ｒ。

由此可知，因為三角形排法每行的球數都不大於正方形排法，故若使用三角形排列法要節省，則乒乓球勢必要比正方行排列法多排一行（此只為必要條件，在三角形排法能多排一行的情況下，仍有可能裝的圓形比正方形排法少） 亦即： 設用正方形排法可排行數為Ｘ）

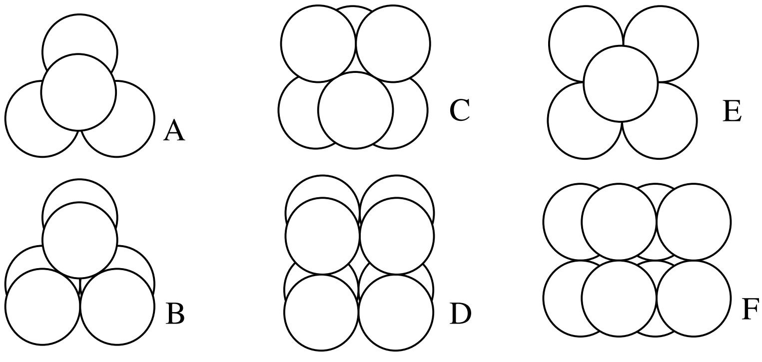
$[(X-1)\times\sqrt{3}+2+\sqrt{3}]r \le X\times 2r$

$\Rightarrow X \ge \dfrac{2}{2-\sqrt{3}} \approx 7.464$

我們可以計算求證，並列出表格（參見附錄 1）予以比較，求出兩種排列方式可容納乒乓球數目的變化。列出後可發現三角形排列的確必須一直到箱子單邊能容納 8 個乒乓球時，才能容納比正方形排列法更多的圓形。

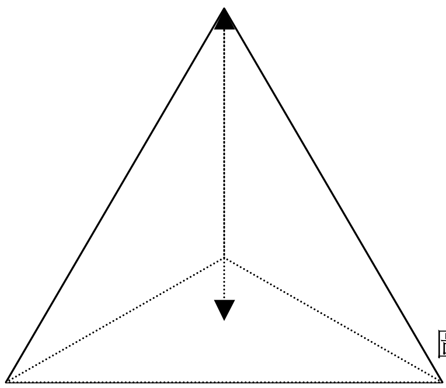
研究二：探討對於正方體球體裝箱各種裝法的差異及優劣

可惜的是，問題並沒有那麼簡單，我們還必須考慮立體時的情況。若先以最基本、最規則立體排法來討論，立體排法可分爲六：三種是以三角形爲基底（圖 A、B、C）另外三種是以正方形爲基底（圖 D、E、F）。

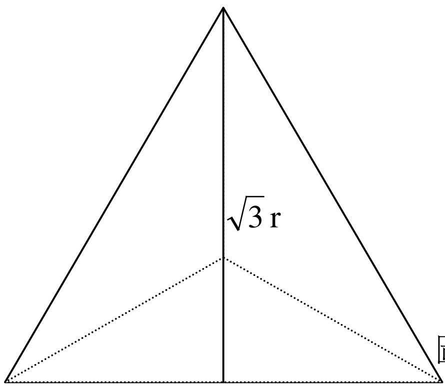


P.S　圖 A、B、C、D、E、F

等等！我畫完這些圖後定睛一看：圖 B 和圖 F 似乎一樣！沒錯，當箱子爲正方體時，兩者是相同的，當箱子爲長方體或其他不同的立體圖形時，兩者便會有所不同了。因此，圖 B 和圖 F 中必須要有一者留下，一者排除。我選擇排除圖 F，留下圖 B。



圖二

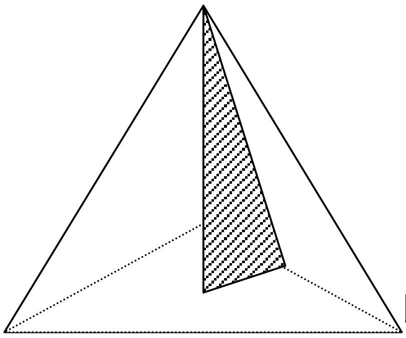


圖三

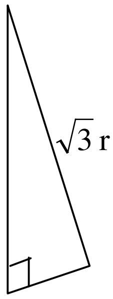
圖 F 排除後，剩下圖 A、B、C、D、E。先看圖 A 吧。圖 A 是四個球體之球心相連會形成正四面體的一個圖形。我們將圖 A 看爲一個正四面體，我們要求的即是它的高（圖二）要求它的高，首先我們必須先求它其中一面正三角形的高。一個直角三角形的斜邊爲 2r，底邊爲 r，則根據畢氏定理，得其高爲（圖三）：

$$\sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3r^2} = \sqrt{3}\, r$$

得到它的高後，我們再用一次畢氏定理。我們以剛才計算出來的正三角形的高 $\sqrt{3}\,r$ 當作現在要計算之直角三角形的斜邊（圖四、圖五）而底邊長度就運用三角形的重心（也就是底正三角形的中心）距離底爲高的 $\frac{1}{3}$ 。



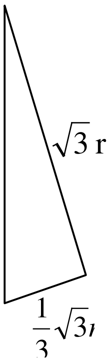
圖四



圖五

很明顯的，我們要求的就是圖八中斜線三角形的高。我們已算出這個三角的斜邊了，因此只要知道它的底，就能用畢氏定理算出它的高。我們知道，底部三角形重心到一邊的垂線就是我們現在要求的底，而斜邊則是已知的 $\sqrt{3}$ r（圖四）。我們可以看出我們要求的底就等於：

$$\frac{1}{3}\sqrt{(2r)^2-r^2}=\frac{1}{3}\sqrt{3}r$$



圖六

如圖六般，此即爲用來求高的三角形。正四面體的高即爲：

$$\sqrt{(\sqrt{3}r)^2-(\frac{1}{3}\sqrt{3}r)^2}$$
$$=\sqrt{3r^2-\frac{1}{3}r^2}$$
$$=\sqrt{\frac{8}{3}r^2}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}}{3}r$$

由此可知，在以此種排列法——正四面體排列法——爲排列方式時，箱高可容納的乒乓球數若未超過正方形排列法時，則其總高爲就爲：

$[\frac{2\sqrt{6}}{3}$（箱高可容納乒乓球數−1）+2］r

$=(\frac{2\sqrt{6}}{3}\times$箱高可容納乒乓球數$+2-\frac{2\sqrt{6}}{3}$）r

圖Ｂ的計算方法十分簡單，和平面時正方形排列法一樣。圖Ｂ乒乓球總高的計算方法是：

2×箱高可容納乒乓球數×r

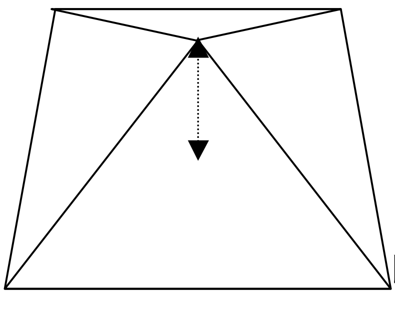
至於圖Ｃ，算法和平面時的三角形排列法相同。我們知道要先算有幾個 $\sqrt{3}$ r，再加上兩邊的各一個 r（共 2r）。在高以三角形排列法時箱高可容納乒乓球數未超過以正方形排列法時的情況下，總高度爲：

［$\sqrt{3}$×（箱高可容納乒乓球數−1）+2］r

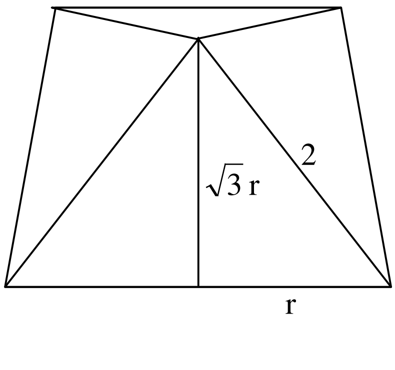
=（$\sqrt{3}$×箱高可容納乒乓球數−$\sqrt{3}$+2）r

接下來的圖Ｄ是最基本、最簡單的圖形，和圖Ｂ相同，總高的計算方法是：

2×箱高可容納乒乓球數×r



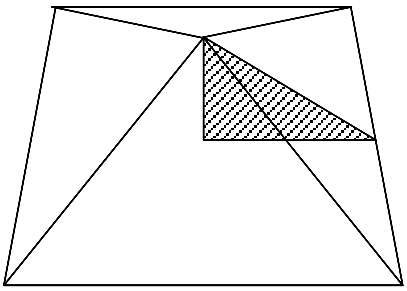
圖七



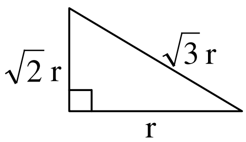
圖八

至於圖 E，基本上求法便和圖 A 大致相同。首先，我們一樣把圖 E 視為一個四角錐（圖七）。根據畢氏定理，求得其中一面正三角形高是（圖八）：

$$\sqrt{(2r)^2-r^2}$$
$$=\sqrt{4r^2-r^2}$$
$$=\sqrt{3r^2}$$
$$=\sqrt{3}\ r$$



圖九



圖十

之後，一樣以剛剛求出的 $\sqrt{3}$ r 為一個直角三角形的斜邊，而四角錐的高就當作這一個直角三角形的高邊（圖九）。我們知道：直角三角形的斜邊為 $\sqrt{3}$ r，底邊正好為圓的半徑，也就是 r。一樣使用畢氏定理，算出高邊長（十）：

$$\sqrt{(\sqrt{3}r)^2-r^2}$$
$$=\sqrt{3r^2-r^2}$$
$$=\sqrt{2}\ r$$

在以此種排列法—我稱之為四角錐排列法—為排列方式時，箱高可容納的乒乓球數若未超過正方形排列法時，則其總高為就為：

[$\sqrt{2}$ (箱高可容納乒乓球數−1)+2]r

=($\sqrt{2}$ ×箱高可容納乒乓球數− $\sqrt{2}$ +2)r

至於圖 F，我先前也提過他和圖 B 是一樣的。因此，就不需要考慮啦！

好啦！現在，每種排列方式高的求法都算出來了。在以某種排列法時，箱高可容納的乒乓球數未超過正方形排列法的狀況下：（設箱高可容納乒乓球數為 X）

各排法的總高之計算方法如下，X 是總層數。

圖 A 高的計算方法是：[$\frac{2\sqrt{6}}{3}$ (X−1)+2]r ≈ (1.633X+0.367)r

圖 B 高的計算方法是：2Xr

圖 C 高的計算方法是：($\sqrt{3}$ (X−1)+2)r ≈ (1.732X+0.268)r

圖 D 高的計算方法是：2Xr

圖 E 高的計算方法是：($\sqrt{2}$ (X−1)+2)r ≈ (1.414X+0.586)r

圖 B 和圖 D 由於是使用正方形排列法，在單一平面上，有可能可以排最多的乒乓球。但是當箱高漸漸較高時，使用 A、C、E 三種便可能增加許多層，故只要箱高夠高，圖 B 和圖 D 一定是最不節省空間的。而其他各種排法要能夠節省空間，必定要能比使用正方形排列法時多排一層。設 D 排法可排層數為 X，可以得知以圖 B 為圖 A、C、E 的節省條件：

圖 A 的節省條件：

$$\left[\frac{2\sqrt{6}}{3}X+2\right]r \le 2Xr$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{3}X+1 \le X$$
$$\Rightarrow X-\frac{\sqrt{6}}{3}X \ge 1$$
$$\Rightarrow 0.183503X \ge 1$$
$$\Rightarrow X \ge 5.449490$$

圖 C 的節省條件：

$$(\sqrt{3}X+2)r \le 2Xr$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}X+2 \le 2X$$
$$\Rightarrow 2 \le 2X-\sqrt{3}X$$
$$\Rightarrow 2X-1.732051X \ge 2$$
$$\Rightarrow 0.267949X \ge 2$$
$$\Rightarrow X \ge 7.464107$$

圖 E 的節省條件：

$$(\sqrt{2}X+2)r \le 2Xr$$
$$\Rightarrow \sqrt{2}X+2 \le 2X$$
$$\Rightarrow 2 \le 2X-\sqrt{2}X$$
$$\Rightarrow 2X-1.414214X \ge 2$$
$$\Rightarrow 0.585786X \ge 2$$
$$\Rightarrow X \ge 3.414216$$

以上只能求得各種排法最小需節省的條件，卻無從看出在箱子 D 排法可排層數為 X 層時，某排法一定會較好，也無法知道高不同箱子大小時各種排法可容納的乒乓球數，故得另外計算。我們可以先算出各排法中每層的排數，再算每層的球數，最後則算總共可裝的球數。詳細算法以及各種排法可容納球數比較，請參見附錄 2。

由附錄 2 表格，我們可看出 A 和 E 排法是最省空間的，箱子夠大後，利用率平均都在約 74%左右。原因是因為 A 和 E 二排法，立體上各球心相連所構成的圖形為正四面體與正四角錐，兩者的高較其他排法的基本單位之高短，因此箱子夠大時，能夠排較多層。

研究三：探討對於長方體球體裝箱各種裝法的差異及優劣

探討了箱子是正方體時的情形，若箱子換成長方體，有什麼不同呢？基本上，大部分的排法並不會有差異，但如之前提及的，在此 B 排法和 F 排法便不同了。

先設箱子的長可容納 L 顆球並排，寬則可容納 W 顆球，高能容納 H 顆球。以 W 邊為「底」，亦即第一排所靠的邊。一樣循序漸進地由每排的球數開始求起，最後即可用電腦算出任意大小、形狀的立體盒子可裝球數。詳細算法與各種排法比較請參見附錄 3。

由這個表中，我們能看出當箱子夠大時，A 排法和 E 排法仍是可以裝最多球的，D 排法仍然是利用率最差，裝最少球的。而若長寬高三個值是依序是 20、25、30，當這三個長度代表的部分不同時（如長、寬、高改為依序是 30、20、25），可容納的球數並不會相同。

研究四：對於裝箱基本單位及利用率的探討 。

做到這裡，便結束了嗎？若仔細觀察一下之前的表格，不難發現下面二個現象。左下表中，是 D 排法的利用率對照表。很容易發現 D 排法無論箱子大小為多少，只要箱子各邊可裝的球數為整數，其利用率都是 52.36%。另一個現象，便是如右下圖般，各排法利用率的變化速度，都隨著箱子各邊可容納球數的增多，大幅減小，箱子各邊可容納球數越多，邊長增加後利用率的改變就越少。

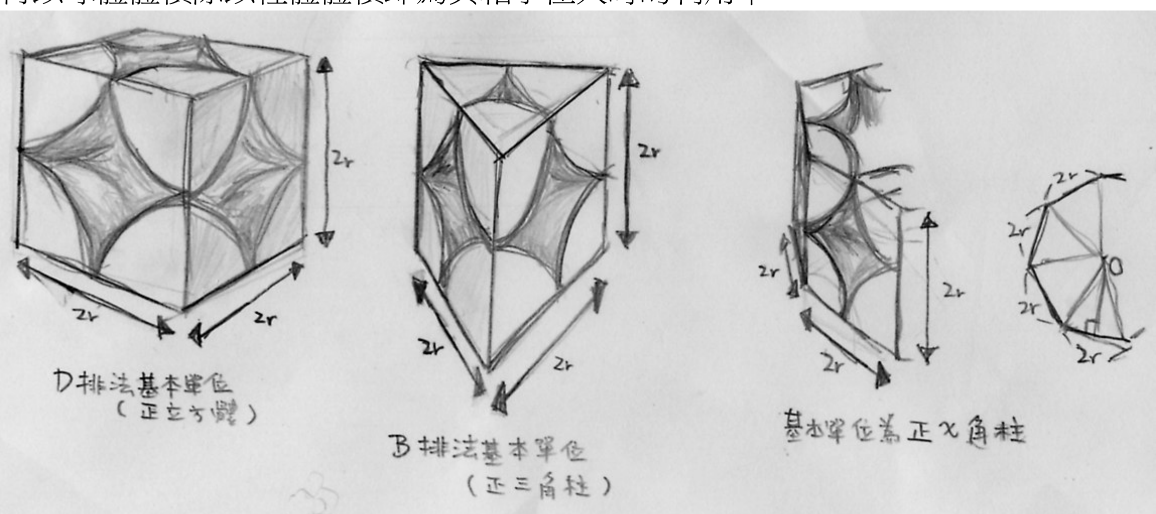
長方形大小			排法
L	W	H	D
1	1	2	52.36%
2	3	3	52.36%
6	8	10	52.36%
10	15	20	52.36%
20	25	30	52.36%
20	30	25	52.36%
25	20	30	52.36%
25	30	20	52.36%
30	20	25	52.36%
30	25	20	52.36%
800	900	1000	52.36%

正方形單邊可容納球數	A 排法利用率
1	52.36%
2	32.72%
3	40.72%
4	40.91%
5	43.98%
6	56.00%
7	56.18%
8	59.31%
9	58.18%
10	62.83%
100	72.78%
1000	73.89%

觀察第二個現象，隨著箱子不斷增大，利用率變化的速率亦不斷減緩，最後是否利用率會停在一個值，即他是否有個極限，且箱子很大（無限大？）時，利用率總大約是那個值？

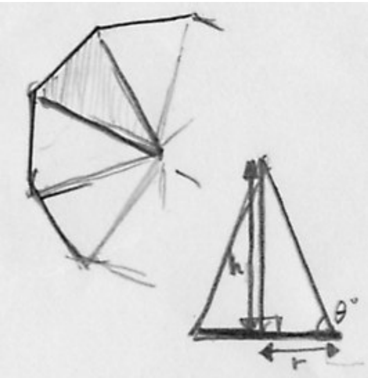
各種排法中，若我們現在把每個排法拼湊的基本元件（如 B 排法中是正三角柱）稱為基本單位，且每個基本單位的形狀體積皆完全相同，其內的球體排列方式亦同。只要以基本單位中球所佔的體積除以總體積，即為空間利用率。在上述的方法中，在那個基本單位內是沒有一個完整的球，但當考慮一個大的箱子中由極多的基本單位拼湊而成，基本單位相接處便是完整的球體。而以這些基本單位來填滿箱子時，箱子最外層會有一部份的球體不屬於再任何一基本單位內。但只要球數夠多、箱子夠大，箱子最外層不完整的球的體積跟中間完整球的體積相比是微乎其微的。同樣道理，箱子的形狀也不影響密度。為了使基本單位能夠重複地緊密堆疊，我皆以柱體為單位。

以正 X 角柱為基本單位時的利用率了，可以分別算出柱體體積，以及在其中的球體體積，再以球體體積除以柱體體積即為其箱子極大時的利用率。



圖十一

若要考慮各種不同角柱爲基本單位時的空間利用率，我們可以設這個基本單位爲 X 角柱體，而底部正 X 邊形邊長就是 2r（如圖十一右）。要算出這個基本單位的利用率，便要算出所有球體在其中所佔的體積與整個基本單位角柱的體積。要算出基本單位角柱的體積，首先要算出底面正 X 邊形的面積。



參考圖

要算出底面正多邊形面積，可以把正 X 邊形分爲 X 個等腰三角形，每個等腰三角形再分爲二個相同的直角三角形。則：

$$\theta = 180-90-360\div X\div 2 = 90-\frac{180}{X}$$

求出θ角後，便可以利用三角函數得到 h 的長度。

$$h = r\times h\div r = r \times \tan\theta° = r\times\tan(90-\frac{180}{X})°$$

底部正 X 邊形面積 A 即爲：

$$A = \frac{2rh}{2}\times X = X\times\tan(90-\frac{180}{X})°\times r^2$$

此正多角柱的高因爲由兩個緊鄰球體球心相連，因此長度就是 2r，故正多角柱體積 V_P 爲：

$$V_P = A\times 2r = 2X\times\tan(90-\frac{180}{X})°\times r^3$$

再來，便要算球體在基本單位中的體積。若將基本單位分爲上下兩層看，上層便是 X 個 $\frac{2\theta}{360}$ 半球，下層亦是 X 個 $\frac{2\theta}{360}$ 半球。因此總共球體體積 V_S 便爲：

$$V_S = \frac{4}{3}\pi r^3\times\frac{1}{2}\times\frac{2\theta}{360}\times X\times 2$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 X\times\frac{90-\frac{180}{X}}{180}$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3\times(\frac{1}{2}X-1)$$

於是便可以求得以正 X 角柱爲基本單位時的利用率了。

利用率 $= V_S \div V_P$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\times(\frac{1}{2}X-1)}{2X\times\tan(90-\frac{180}{X})°\times r^3}$$

$$= \frac{\pi\times(1-\frac{2}{X})}{3\times cot(\frac{180}{X})°}$$

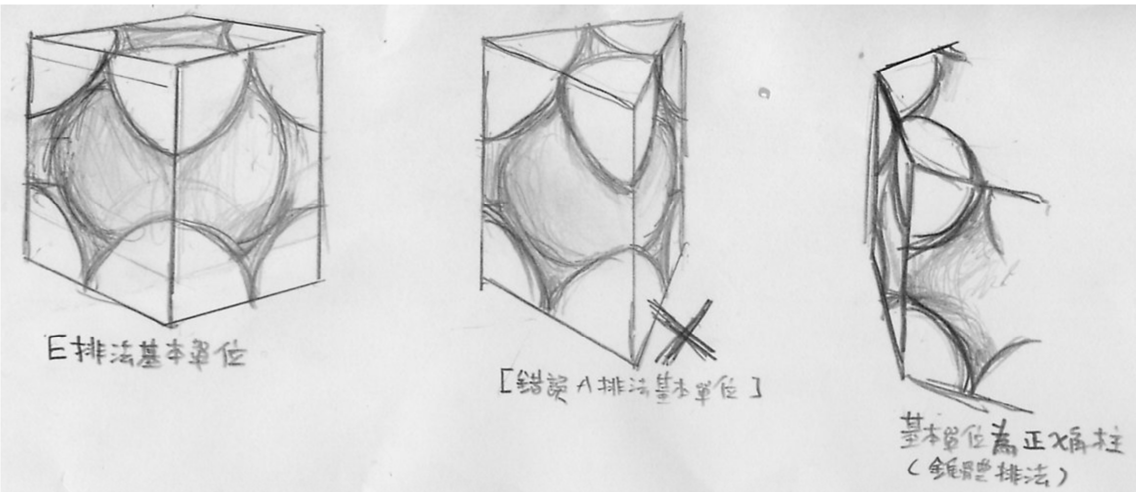
知道了這個對於基本單位爲柱體排列時的利用率通式，便可用 Excel 列出下表：

正幾角柱	利用率	正幾角柱	利用率
3	60.46%	8	32.53%
4	52.36%	9	29.64%
5	45.65%	10	27.22%
6	40.31%	100	3.23%
7	36.02%	1000	0.33%

由此，我們可以推測當以正 N 角柱爲基本單位時，這 N 越大，其空間利用率便越小，主因是因爲多邊形中間空位大，浪費了許多空間。

但如果是以錐體爲基本單位時的情形呢？以錐體爲情形時，若光以上述方法解釋是行不通的，因爲正 N 角錐時，N 愈大，雖然每層的球數愈少，但基本單位的高度長也小，亦即可以疊比較多層。因此，我們便算算看各種排法的利用率吧。

首先，要先考慮要以何種圖形作爲基本單位？就還是以柱體吧。如圖十二般，我們取上下相鄰的兩個錐體單位並分別將二錐體構成底的各個球心相連，形成內部恰好包含一個完整球體的柱體單位，即是我們所要的基本單位。但三角錐排法（A 排法）則不能用此單位，稍後會提及。

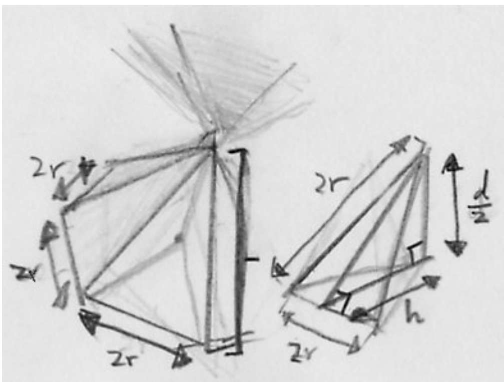


圖十二

同樣，我們設基本單位爲正 X 角柱，而底面的正 X 邊形邊長爲 2r，將底部正 X 邊形分爲 2X 個全等的直角三角形後，直角三角形的底、高爲 r 和 h。則相同的，根據剛剛所提及，我們知道：

$$h = r\times h\div r = r \times \tan\theta^\circ = r\times\tan(90-\frac{180}{X})^\circ$$

$$A = \frac{2rh}{2}\times X = X\times\tan(90-\frac{180}{X})^\circ\times r^2$$

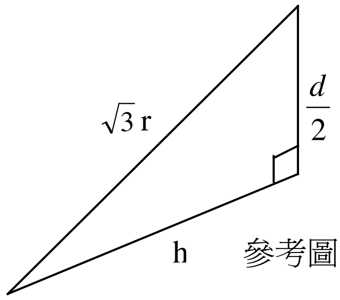


圖十三

要求得柱體體積，我們所要算的，是柱體的高 d。我們把基本單位分成上下兩部分看，成為兩個相反的錐體。再把其中一個錐體如圖十三左般分割，便可利用畢氏定理求三角錐高 d。首先先算出角錐上側邊正三角形的高為：

$$\sqrt{2r^2+r^2} = \sqrt{3}\,r$$

於是便可得到如參考圖般的直角三角形。因此，d 便是：



參考圖

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(\sqrt{3}r)^2-h^2}\times 2 \\ &= \sqrt{3r^2-(r\times\tan(90-\frac{180}{X})°)^2}\times 2 \\ &= 2\sqrt{3-\tan^2(90-\frac{180}{X})°}\,r \end{aligned}$$

再來便可算出基本單位之總體積 V_P：

$$\begin{aligned} V_P &= A\times d \\ &= X\times\tan(90-\frac{180}{X})°\times r^2\times 2\sqrt{3-\tan^2(90-\frac{180}{X})°}\,r \\ &= 2X\times\tan(90-\frac{180}{X})°\times\sqrt{3-\tan^2(90-\frac{180}{X})°}\,r^3 \end{aligned}$$

而球體在錐體排法時的基本單位正 X 角柱中所佔體積，正好比柱體排法時球體在基本單位正 X 角柱所佔體積多出中間的一顆球體，因此在此球體總體積 V_S 為：

$$\begin{aligned} V_S &= \frac{4}{3}\pi r^3\times(\frac{1}{2}X-1+1) \\ &= \frac{2}{3}X\pi r^3 \end{aligned}$$

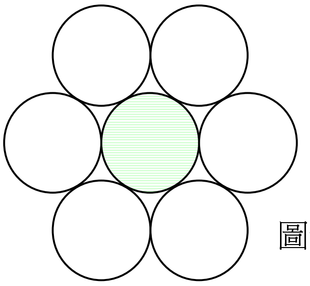
到此便可算出利用率為：

$$\begin{aligned} 利用率 &= V_S \div V_P \\ &= \frac{\frac{2}{3}X\pi r^3}{2X\times\tan(90-\frac{180}{X})°\times\sqrt{3-\tan^2(90-\frac{180}{X})°}\,r^3} \\ &= \frac{\pi}{3\times\cot(\frac{180}{X})°\times\sqrt{3-\cot^2(\frac{180}{X})°}} \end{aligned}$$

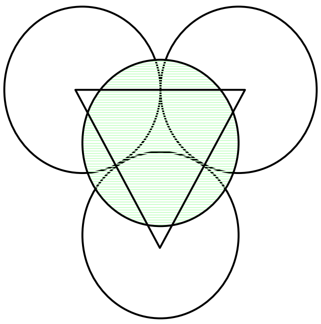
於是便可利用 Excel 列出下表：

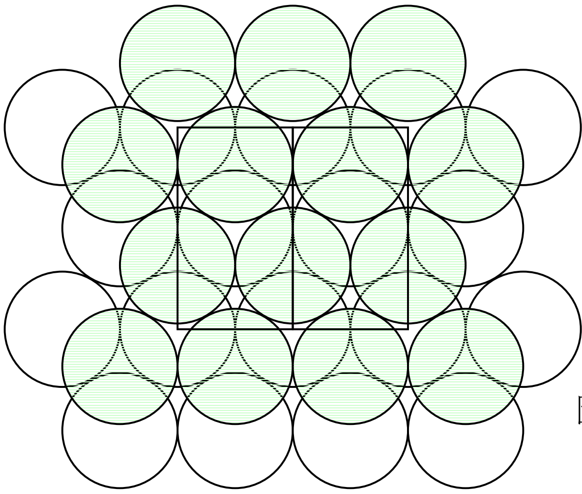
正 X 角柱	利用率
3	111.07209%
4	74.04805%
5	72.35958%
6	1434507860.26972%

經查證後，正四角柱及五角柱的利用率是正確的。但正六角柱時的利用率顯然錯誤，是爲何呢？因爲這種錐體排法到以正六角柱爲基本單位時，如圖十四般，底層中間的空位正好容下一顆球體，原來球心應爲錐體頂點之球體便會下降至最底層，使錐體單位退化成平面單位。

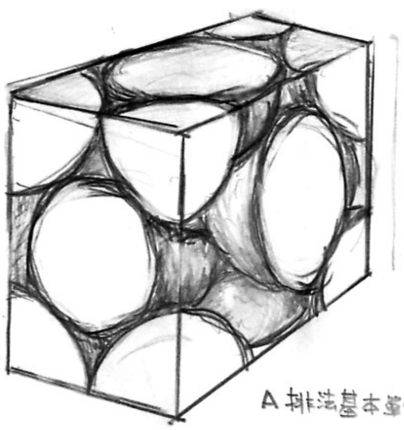

圖十四

那麼三角柱體爲基本單位時，又是何處錯了呢？利用率怎會大於 100%呢？

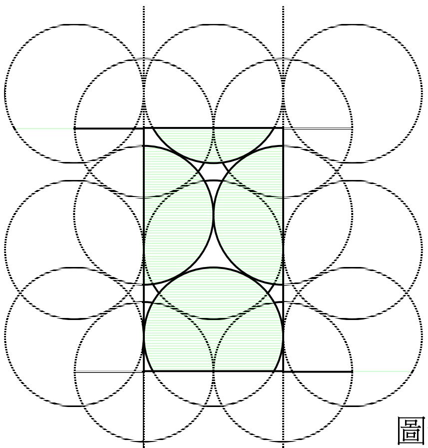

圖十五


圖十六

若我們把圖形畫出來，這個錯誤就顯而易見了。顯然的，如十五圖所示，中間的球體無法容入基本單位中。因此，我們要使用另一個基本單位來計算 A 排法的利用率，於是我使用如十六圖般的方法，將最底層之四球體球心相連爲長方形，並與其上上一層之相對的長方形四角相接，形成一長方體。



圖十七


圖十八

圖十七是 A 排法基本單位的立體模樣；圖十八則是其俯視圖，長方形框起處即爲其基本單位，綠色半透明部分爲基本單位內第二層球體之排列情形，而其底下則是第一、三層的排列情形（一、三層球體排列方式相同，只是半球體的弧面朝向相反）。

於是，便來算算這個長方體的體積吧。我們知道其底面積 A 爲：

$$A = 2r\times 2\sqrt{3}r = 4\sqrt{3}r^2$$

而高的部分，正好是兩個正三角錐單位的高，因此高 d 爲：

$$d = \frac{2\sqrt{6}}{3}r\times 2 = \frac{4\sqrt{6}}{3}r$$

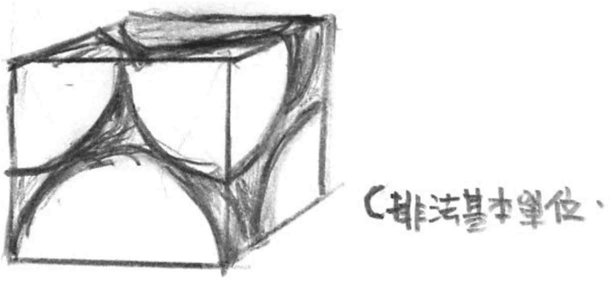
長方體體積 V_P 是：

$$\begin{aligned} V_P &= A\times d \\ &= 4\sqrt{3}r^2\times\frac{4\sqrt{6}}{3}r \\ &= 16\sqrt{2}r^3 \end{aligned}$$

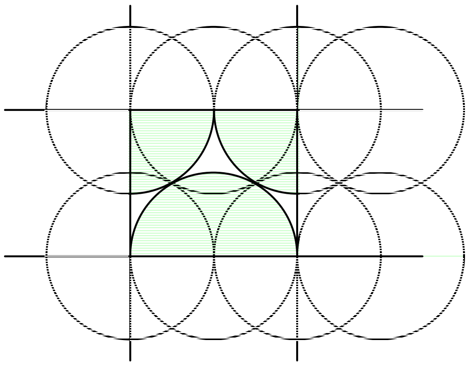
如圖十六般，基本單位中的球體，第一層與第三層球體合併看，體積正好是兩個球體的體積，而第二層頭尾二球相接，便是一顆完整的球體，中間還有一顆完整的球體，因此總共共有四顆球體的體積在基本單位中。故球體體積 V_S 爲：

$$\begin{aligned} V_S &= \frac{4}{3}\pi r^3\times 4 \\ &= \frac{16}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{利用率} &= V_S \div V_P \\ &= \frac{16}{3}\pi r^3 \div 16\sqrt{2}r^3 \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \\ &\approx 74.04805\% \end{aligned}$$



圖十九


圖二十

算出以上柱體排法與錐體排法後， C 排法、F 排法並不包含在其中。那他們的利用率是多少呢？先看 C 排法吧。我們可以設他的基本單位是如圖十九、二十所示般的長方體，可看出其底部長方形一邊長 2r，另一邊長 $\sqrt{3}r$，長方體的高則是 $\sqrt{3}r$，因此長方體體積 V_P 爲：

$$V_P = 2r\times\sqrt{3}r\times\sqrt{3}r = 6r^3$$

而可看出長方體基本單位內球體總體積，恰爲一個球體的體積，因此球體在基本單位中所佔體積 V_S 爲：

$V_S = \frac{4}{3}\pi r^3 \times 1 = \frac{4}{3}\pi r^3$

利用率 $= V_S \div V_P$

$= \frac{4}{3}\pi r^3 \div 6r^3$

$= \frac{2\pi}{9}$

$\approx 69.81317\%$

剩下 F 排法了，正如之前提及，由於 F 排法基本單位與 B 排法相同，F 排法利用率在箱子夠大時，便和 B 排法相同，因此其利用率亦約爲 60.46%。

到此，便算出 A、B、C、D、E、F 六種不同排法的利用率了。

A、B、C、D、E、F 排法之利用率分別爲：

$$A = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \approx 74.05\%$$

$$B = \frac{\pi \times (1-\frac{2}{3})}{3 \times cot(\frac{180}{3})^\circ} = \frac{\pi}{9 \times cot(60)^\circ} = \frac{\pi}{9 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9} \approx 60.46\%$$

$$C = \frac{2\pi}{9} \approx 69.81317\%$$

$$D = \frac{\pi \times (1-\frac{2}{4})}{3 \times cot(\frac{180}{4})^\circ} = \frac{\pi}{6 \times cot(45)^\circ} = \frac{\pi}{6 \times cot(45)^\circ} = \frac{\pi}{6} \approx 52.36\%$$

$$E = \frac{\pi}{3 \times \cot(\frac{180}{4})^\circ \times \sqrt{3-\cot^2(\frac{180}{4})^\circ}} = \frac{\pi}{3 \times \cot(\frac{180}{4})^\circ \times \sqrt{3-\cot^2(\frac{180}{4})^\circ}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \approx 74.05\%$$

$$F = B = \frac{\sqrt{3}\pi}{9} \approx 60.46\%$$

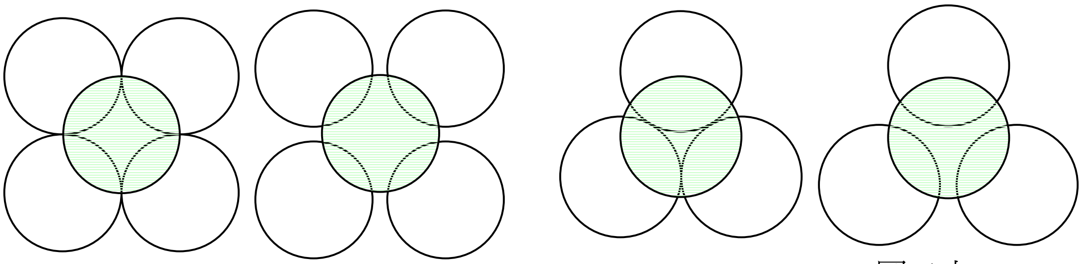
利用率：A = E > C > B = F > D

可得知在 A 到 F 六種排法中，屬 A 排法和 E 排法最有效率，其利用率皆爲 $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ 。

接著，便探討以 A、F 排法爲基礎時，對球體間距稍作改變對利用率的影響。

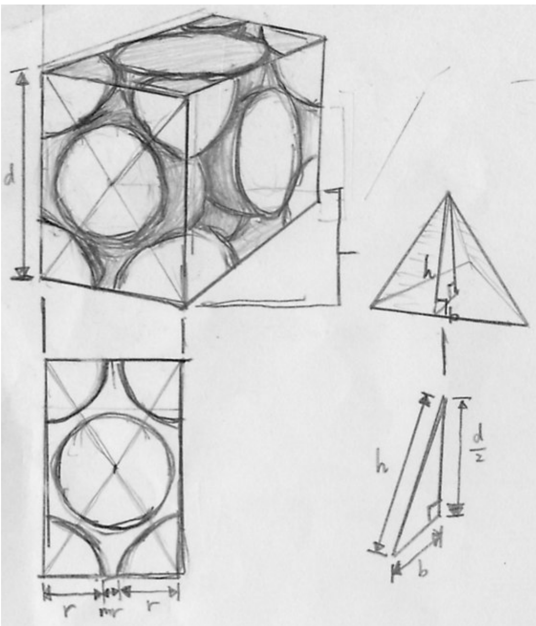
研究五：對於 A 排法、E 排法中，球體之間距離對利用率之影響 。

這樣就結束了嗎？當然還沒。如圖二十一般，可看到左方二圖爲 A 排法，右方二圖爲 E 排法。而兩種排法中左方的底球體間距較小（沒有間距），右方的則較大。因此可判斷右方的排法再同一層上能排的球數較少，但是基本單位的高亦較小，即可以排的層數較多。

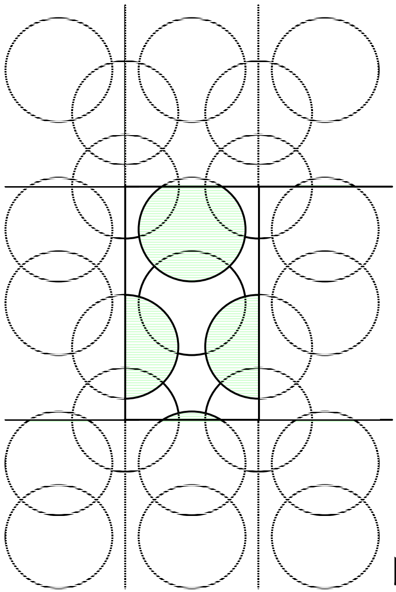


圖二十一

究竟何者會比較有效率呢？我們先看看當我們以三角錐排法時的情形。圖二十二是三角錐排法的基本單位立體模樣，圖二十三則是其俯視圖，綠色部分爲第二層，非綠色部分則爲第一層及第三層。設基本單位中，球體彼此間距離爲 m×r，因此各球體球心間距離爲 2r+m×r；而中間球體球心與下方四球體球心相連形成之四角錐單位，其側方的等腰三角形高爲 h；並以三角錐的高爲一直角三角形的一邊，以 h 爲直角三角形的斜邊，設這直角三角形的底爲 b；基本單位長方體高爲 d。



圖二十二


圖二十三

四角錐單位側方等腰三角形兩腰爲 2r，底的一半爲$(\frac{m}{2}+1)$r，用畢氏定理可得 h 爲：

$$h = \sqrt{(2r)^2-[(\frac{m}{2}+1)r]^2}$$

$$= \frac{\sqrt{-(m^2+4m-12)}}{2}\,r$$

$$= \frac{\sqrt{-(m-2)(m+6)}}{2}\,r$$

而 b 正好是底部三球心連成的正三角形，其高的$\frac{1}{3}$。因此，b 便爲：

$$b = \frac{1}{3}\sqrt{[(m+2)r]^2-[(\frac{m}{2}+1)r]^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}(m+2)\,r$$

利用畢氏定理，我們可用 h 和 b 求出 d：

$$d = 2\sqrt{h^2-b^2}$$

$$= 2\sqrt{\frac{-(m-2)(m+6)}{4}r^2-\frac{1}{12}(m+2)^2r^2}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{-(3m^2+12m-24)}\,r$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{-3(m+2)^2+36}\,r$$

基本單位長方體的底面爲一長方形，其中一邊爲(2+m)r，另一邊則是兩個三球心連成之正三角形的高，故可得基本單位的底面積 A 爲：

$$A = (m+2)r\times\sqrt{[(m+2)r]^2-[(\frac{m}{2}+1)r]^2}\times 2$$
$$= (m+2)r\times\frac{\sqrt{3}}{2}(m+2)r\times 2$$
$$= \sqrt{3}(m+2)^2r^2$$

基本爲總體積 V_P 爲：

$$V_P = A\times d$$
$$= \sqrt{3}(m+2)^2r^2\times\frac{2}{3}\sqrt{-3(m+2)^2+36}\,r$$
$$= 2(m+2)^2\sqrt{-(m+2)^2+12}\,r^3$$

而如圖二十三般，基本單位中的球體，第一層與第三層球體合起來，體積正好是兩個球體的體積，而第二層頭尾二球相接，便是一顆完整的球體，中間還有一顆完整的球體，因此總共共有四顆球體的體積在基本單位中。球體體積 V_S 爲：

$$V_S = \frac{4}{3}\pi r^3\times 4 = \frac{16}{3}\pi r^3$$

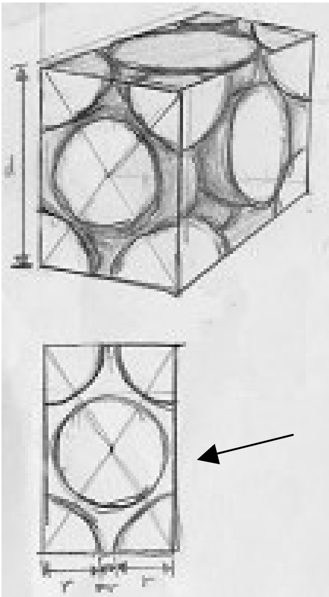
$$利用率 = V_S \div V_P$$
$$= \frac{16}{3}\pi r^3\div[2(m+2)^2\sqrt{-(m+2)^2+12}\,r^3]$$
$$= \frac{8\pi}{3(m+2)^2\times\sqrt{-(m+2)^2+12}}$$

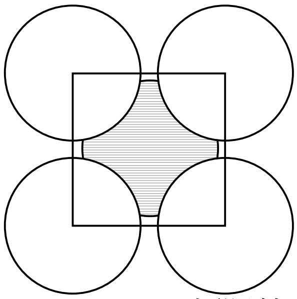
根據這個公式，我們可以用 Excel 列出下表，表示 m 與利用率的關係。

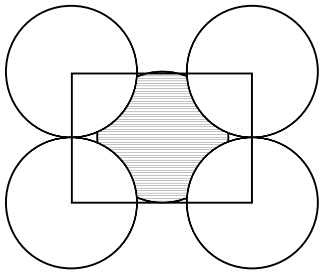
m	利用率	m	利用率	m	利用率	m	利用率
0	74.05%	0.3	61.14%	0.6	54.14%	0.9	52.57%
0.05	71.39%	0.35	59.60%	0.65	53.47%	0.95	53.01%
0.1	68.95%	0.4	58.22%	0.7	52.95%	1	53.74%
0.15	66.72%	0.45	56.99%	0.75	52.59%	1.05	54.83%
0.2	64.69%	0.5	55.90%	0.8	52.39%	…	…
0.25	62.83%	0.55	54.95%	0.85	52.38%	1.4	109.25%

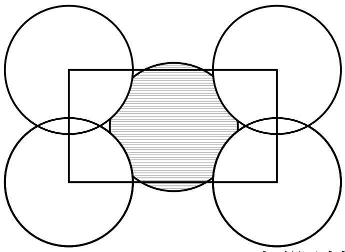
但是看一看當 m=1.4r 時，利用率爲 109.25%，顯然不對。利用率不可能大於 100%的。我們知道當 m 太大時，三球之間的空間太大，會使的原本擺在其上的球落下，導致公式不對。但是那時候 $m = 2\sqrt{3}-2 \approx 1.464102$，因此當 m=1.4 時，顯然還沒超過這個限度。那是什麼問題呢？

如圖二十四般，是一個基本單位的側視圖。隨著 m 越來越大，三顆球上的球，也會不斷地「下沉」，也就是 d 不斷地縮短；當 m 到了一個「極限值」時，接觸中間那顆球體的上面三顆球體與下面三顆球體，正好也接在一起；若 m 超過了這個「極限值」 第一、第三層的球體體積便會有重複的部分，事實上是無法如此排的，因此公式的值也就錯了。




m<極限值


m=極限值


m>極限值

圖二十四

那麼公式到底在 m 的值是多少時是對的呢？

我們知道 m 最小是 0，最大的值（即剛剛所稱的「極限值」)就是第一層、第三層的球體會相碰處的時候。因此，那時候柱體的高正好爲 2r。根據之前公式：

$$d = \frac{2}{3}\sqrt{-3(m+2)^2+36}\ r$$

我們可以列出 m 的方程式：

$$\frac{2}{3}\sqrt{-3(m+2)^2+36}\ r = 2r$$

$$\Rightarrow \sqrt{-3(m+2)^2+36} = 3$$

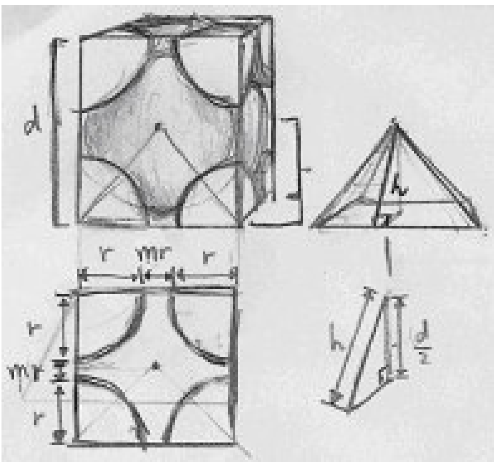
$$\Rightarrow -3(m+2)^2+36=9$$

$$\Rightarrow m = 1 \text{ or } -5$$

$m>0$，-5 不符因此 $m=1$

因此對於用三角錐排法時的利用率公式要規定 $0 \leq m \leq 1$。

由 m 的值與利用率之關係表，符合範圍的部分（黑字部分），可看出顯然地，m 爲 0 時其利用率最大，m 越大，利用率則越小。



圖二十五

如二十五圖般，對於正四角錐排法，設基本單位之底面球體之間間距爲 m×r；而中間球體球心與下方四球體球心相連形成之四角錐單位，其側方的等腰三角形高爲 h；基本單位長方體高爲 d。

四角錐單位側方等腰三角形，其兩腰爲 2r，底的一半是$(\frac{m}{2}+1)$r，因此可用畢氏定理求得：

$$h = \sqrt{(2r)^2-[(\frac{m}{2}+1)r]^2}$$
$$= \sqrt{4-(\frac{m}{2}+1)^2}\ r$$
$$= \sqrt{(3+\frac{m}{2})(1-\frac{m}{2})}\ r$$

如圖二十五右下，以 h 爲一直角三角形之斜邊，以$\frac{m}{2}+1$爲底，$\frac{d}{2}$便是其高，於是利用畢氏定理可求得 d。

$$d = 2\sqrt{h^2-[(\frac{m}{2}+1)r]^2}$$
$$= 2\sqrt{(3+\frac{m}{2})(1-\frac{m}{2})-(\frac{m}{2}+1)^2}\ r$$
$$= 2\sqrt{-\frac{m^2}{4}-m+3-\frac{m^2}{4}-m-1}\ r$$
$$= 2\sqrt{4-2(\frac{m}{2}+1)^2}\ r$$
$$= \sqrt{16-2(m+2)^2}\ r$$

基本單位底部的正方形，邊長爲(m+2)r 因此柱體底面積 A 爲：

$$A = [(m+2)r]^2 = (m+2)^2r^2$$

柱體體積 V_P 便爲：

$$V_P = A\times d$$
$$= (m+2)^2r^2 \times\sqrt{16-2(m+2)^2}\ r$$
$$= (m+2)^2\sqrt{16-2(m+2)^2}\ r^3$$

而一個基本單位內，有兩個球體（頂層和底層各有 4 個$\frac{1}{8}$球體，中間夾一個整球體）因此球體體積 V_S 爲：

$$V_S = \frac{4}{3}\pi r^3\times 2$$
$$= \frac{8}{3}\pi r^3$$

$$利用率 = V_S \div V_P$$
$$= \frac{8}{3}\pi r^3\div[(m+2)^2\sqrt{16-2(m+2)^2}\ r^3]$$
$$= \frac{8\pi}{3(m+2)^2\times\sqrt{16-2(m+2)^2}}$$

求出利用率後，相同的，m 也有一定的範圍。我們同樣由之前公式推導 m 的「極限值」。

$d = \sqrt{16-2(m+2)^2}\ r$

因此，我們設 d=2r，即可得到 m 之極限值：

$\sqrt{16-2(m+2)^2}\ r = 2r$

$\Rightarrow$ $16-2(m+2)^2 = 4$

$\Rightarrow$ $2(m+2)^2 = 12$

$\Rightarrow$ $m = (\sqrt{6}-2)$ or $(-\sqrt{6}-2)$

m>0，$(-\sqrt{6}-2)$不符因此 $m=\sqrt{6}-2 \approx 0.44949$

於是可用 Excel 列出下表，計算 m 為 0 到 0.44949 時，這種基本單位的利用率。

m	利用率	m	利用率
0	0.74048	0.25	0.682731
0.05	0.723348	0.3	0.680242
0.1	0.708954	0.35	0.681492
0.15	0.697315	0.4	0.687159
0.2	0.688517		

顯然的，m 越大，利用率越小。當 m 超過 $\sqrt{6}-2$ 後，第一、第三層球體便會相重疊。

對於球體裝箱的研究便到此告一段落，經過研究後，已經可以求得一些較基本且有規律的裝箱方法，其利用率，以及在箱子小時，何種方法可以裝最多球。

陸、研究結果：

經過試驗與觀察，可以發現並歸納出以下數點：

一、在平面時將圓形裝入正方形中，不重疊也不超出正方形的情況下，有兩種主要的擺法，一種是以正方形為基本的單位，另一種則以三角形為基本的單位。

二、當箱子夠大時，平面將圓形擺入正方形中，是以三角形排法時較省空間，即可擺入較多的圓。當正方型的箱子邊長超過 16r 後，三角形排法便優於正方形排法。

三、立體的球體裝箱中，較基本的排法可分為六種：三種以正方形排法為基底，三種以三角形排法為基底；而這三種中，第二層的球又分別能放在一顆球的正上方，兩顆球之間的上方，及以錐體的形式放在三（四）顆球中央的上方。

四、一開始，箱子很小時，正方體排列法能排最多球，但箱子較大後，由於其他種排列方式其平面上排高及立體上層高都較正方體排法小，因此箱子大後其他排法可以比正方體排法多排數層。當箱子邊長達 12r 後，A 排法、E 排法便優於正方體排法。箱子邊長達 16r 後，B 排法、C 排法便優於正方體排法。

五、這些排法中，以正方體排列法最沒效率，而正四面體、正四角錐體排法則最省空間。

六、箱子比較小時，長、寬、高分別為 l、w、h，和長、寬、高分別為 w、h、l，其利用率仍會有些許的差異。但若箱子夠大，這些差異是微不足道的。

七、裝箱時，若以「基本單位」的方式來考量，須考量基本單位是否可以緊密相連形成接近長方體的形狀，且每個基本單位都完全相同。當箱子不夠大時，不能用基本單位來思考，因為最外層不屬於基本單位的許多不完整球體，其體積亦佔了不小的比例；但如果箱子夠大（譬如……無限大） 最外層不完整球體的體積佔總球體體積的比例便微乎其微。因此可以說當箱子極大，用該排法裝箱的利用率=基本單位中的利用率。

八、若以球心相連為 n 柱體的方式來堆疊球體，則 n 越小，可以裝的球越多，即利用率

越大，主因是柱體單位中心是空的，n 越大中間的空位亦越大。對於柱體排法，若底面邊數爲 X（也就是基本單位是正 X 角柱）時，利用率爲：

$$利用率 = \frac{\pi\times(1-\frac{2}{X})}{3\times cot(\frac{180}{X})°}$$

九、若以球心相連爲正 n 角錐的方式來堆疊球體，n 爲 3 和 4 時，可以裝的球數最多，即利用率越大。但 n 只能是 3、4、5，球體無法堆疊成正六角錐以上（包括）的錐體。若使用正 X 角錐排法，基本單位是正 X 角柱：

- 當 X 爲 3 時：　利用率 $= \frac{\sqrt{2}\pi}{6}$
- 當 X 爲 4 或 5 時：　利用率 $= \frac{\pi}{3\times\cot(\frac{180}{X})°\times\sqrt{3-\cot^2(\frac{180}{X})°}}$

十、各種排法利用率大約如下：

排法	利用率
A	74.05%
B	60.46%
C	69.81%
D	52.36%
E	74.05%
F	60.46%

其中利用率，A = E > C > B = F > D，A 排法與 E 排法是最佳的排法，最省空間，利用率爲$\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$

十一、若 A 排法、E 排法之同一層的每個球體間距離 m×r，基本單位高度 d 會隨之縮小。如果 m 的值過大（在 A 排法中 m 最大可以爲 1r，再 E 排法中則不能超過（$\sqrt{6}$ -2)r），d<2r 時，基本單位中第一層和第三層球體便會相觸而重疊，因此 m 不可超過此「極限值」，m 的範圍是 0≤m≤極限值。

十二、在球體間間距 m 符合的範圍內：

- 正三角錐排法　利用率 $= \frac{8\pi}{3(m+2)^2\times\sqrt{12-(m+2)^2}}$
- 正四角錐排法　利用率 $= \frac{8\pi}{3(m+2)^2\times\sqrt{16-2(m+2)^2}}$

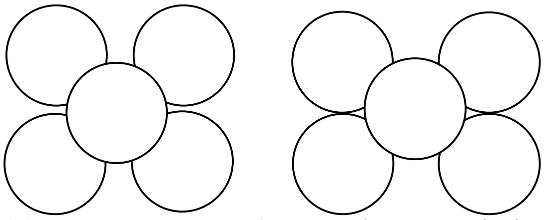
十二、最有效率的排法，在正三角錐排法以及正四角錐排法，都是當 m=0 的時候，也就是普通的角錐排法，相鄰球體是緊鄰的，利用率都是 $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ 。

柒、討論：

在箱子較小時，由於立方體表面多出的空間以及表層球體「多出來的兩個半徑」部分，所佔的體積比例較大，因此一開始各排法空間利用率的跳動幅度較大。而長、寬、高的數值變動也會對箱子產生影響，即使箱子體積保持相同。但是當箱子夠大後，這些變素皆能忽略，只需考慮基本單位，即可算空間利用率，即使箱子的形狀不同，也不會有明顯的影響。又基本單位是彼此能緊密接合的長方體。這些是爲什麼基本單位的利用率，就能代表箱子大後利用率的緣故。正由於這些的關係，若用 Excel 將箱子的邊長調成極大的值，例如 10^7等，也可以求得近似其基本單位利用率的值（但 Excel 亦無法計算過大的值，因此不能完全就靠 Excel 來逼近）。

捌、未來展望：

希望對球體很有興趣的人能夠做更深入、困難的研究。之後仍有許多空間能夠發揮。首先便希望能夠再繼續對最後一個研究作更深入的探討。例如若球體之間間距不同，使基本單位底面是長方形呢？或者是任意三角形呢？這先問題都還算有難度，值得繼續探討。



另外，若是考慮複雜一點的圖形呢，若基本單位為較大的立方體，或甚至，不是立方體而是其他可以重複的圖形呢？是否會有不同？以及任意放置球體時，其利用率有無規律？以及任意放置球體時其利用率依可能性的分布曲線等等……這先都值得再作深入的探討。在這次的運算和思考當中，使我感到數學的確是一門有趣無比的學科，且總有探討不完的問題，我也希望之後若有機會，能把球體裝箱的問題盡量做完。

玖、參考資料：

http://mikekong.uhome.net/Maths/Problems/sphere_packing.html
http://mathforum.org/dr.math/problems/sandin2.20.98.html
http://netcity1.web.hinet.net/UserData/lsc24285/
http://mathworld.wolfram.com/SpherePacking.html

評　語

030406 國中組數學科 第三名

球滿為患

填充問題是一個十分困難的問題。作者討論了不同排法下，球體填塞空間的比例，並由此討論較佳的配置方式。空間概念很好，以小單位來分析整體的想法也十分巧妙，很棒的結果。