中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030404

臺北縣立清水高級中學

指導老師姓名

陳國唐

作者姓名

徐睿

曾紹齊

壹、摘要

西洋棋盤上，騎士所能走的漢彌爾頓路徑(Hamiltonian Path)一直是數學遊戲的豐富題材，本次研究將要探討一個關於騎士由給定起點 P 經 $n \times n$ 棋盤到達給定終點 Q 之漢彌爾頓路徑(Hamiltonian Path)是否存在的問題，其中起點 P 與終點 Q 為 $n \times n$ 棋盤外圍緊鄰棋盤的兩個相異棋格，且棋盤上第 i 行第 j 列所在的棋格顏色塗法為：若 $i+j$ 為偶數，則塗成黑色；若 $i+j$ 為奇數，則塗成白色。

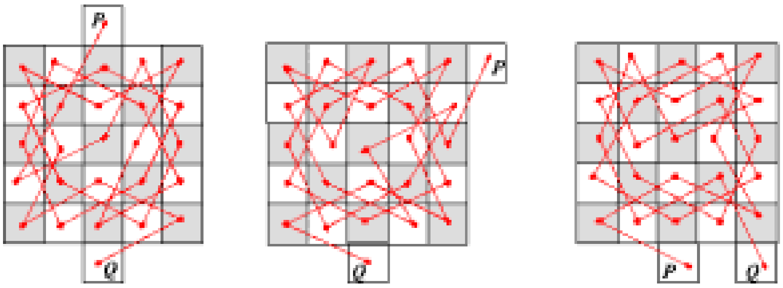


圖 a 騎士由給定起點 P 經 5X5 棋盤到達給定終點 Q 之漢彌爾頓路徑

研究結果顯示，並非任意以 $n \times n$ 棋盤外圍的兩個相異棋格為起點與終點，就可以得到所求的路徑。解的情況如下：一、當 $n = 1,2,3,4$ 時，找不到所求的路徑。二、當 $n = 5$ 時，起點、終點皆為白色的圖形，有部分找得到所求路徑，部分找不到所求路徑；其餘情形則找不到所求路徑。三、當 n 為大於 5 的偶數時，若起點與終點顏色相異，必找得到所求路徑；若起點與終點顏色相同，則找不到所求路徑。 四、當 n 為大於 5 的奇數時，若起點、終點皆為白色，則找得到所求路徑；其餘情形則找不到所求路徑。

貳、研究動機

1857 年數學家 Hamilton 發明一種遊戲，要在正十二面體上找一個迴路，包含 20 個頂點，且每個頂點只經過一次。圖 b 表示這樣的一個迴路。

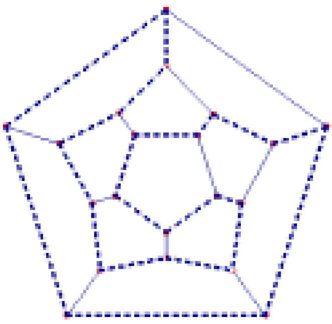


圖 b 正十二面體上的漢彌爾頓迴路

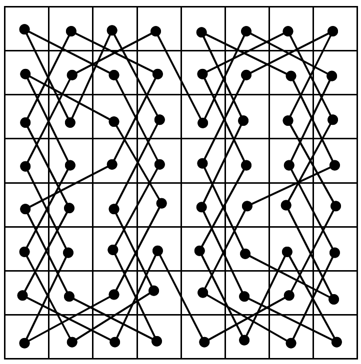


圖 c 西洋棋盤上騎士能走的漢彌爾頓迴路

事實上，早在 1759 年數學家 Euler 就曾探討過西洋棋盤上騎士是否能自任一點出發，經過所有棋格回到原出發點的問題，亦即找出西洋棋盤上騎士能走的漢彌爾頓迴路（ Hamiltonian Circuit ）的問題。圖 c 表示這樣的一個迴路。

數學益智遊戲網站(http://www.plastelina.net)上，有一道題目是要求騎士在護城河上的方陣中不重複地走過一定數目的棋格，如此一來，對面的城門才會完全開啟，騎士才有過河的機會。

圖 d　騎士渡河的遊戲

由這個遊戲，我們得到研究的題材。

參、研究目的

在 $n \times n$ 棋盤外圍的 $4n+4$ 個棋格任取兩相異棋格 P 與 Q，看看騎士由起點 P 經 $n \times n$ 棋盤到達終點 Q 之漢彌爾頓路徑是否存在。

肆、研究設備及器材

電腦、文書處理軟體 PowerPoint、紙與筆。

伍、研究過程或方法

一、必要條件

考慮一個 $n \times n$ 棋盤，若 $i+j$ 為偶數，則將棋盤上第 i 行第 j 列所在的棋格塗成黑色；若 $i+j$ 為奇數，則將棋盤上第 i 行第 j 列所在的棋格塗成白色。如此一來，騎士每次在棋盤上移動，不是自白棋格移至黑棋格，就是自黑棋格移至白棋格。當 n 為奇數(即 $n=2k-1$)時，在 $(2k-1)\times(2k-1)$ 個棋格中包含了 $2k^2-2k+1$ 個黑棋格，以及 $2k^2-2k$ 個白棋格。由於騎士的步法必為黑白相間，因此，若所求的路徑存在，則起始與結束的棋格必須為白色；當 n 為偶數(即 $n=2k$)時，在 $2k \times 2k$ 個棋格中包含了 $2k^2$ 個黑棋格，以及 $2k^2$ 個白棋格，因此，若所求的路徑存在，則起始與結束的棋格必須為一黑一白。

二、構造所求路徑

（一） $n=1$、2、3、4

顯然地，$n=1$、2、3 時找不到所求的路徑。

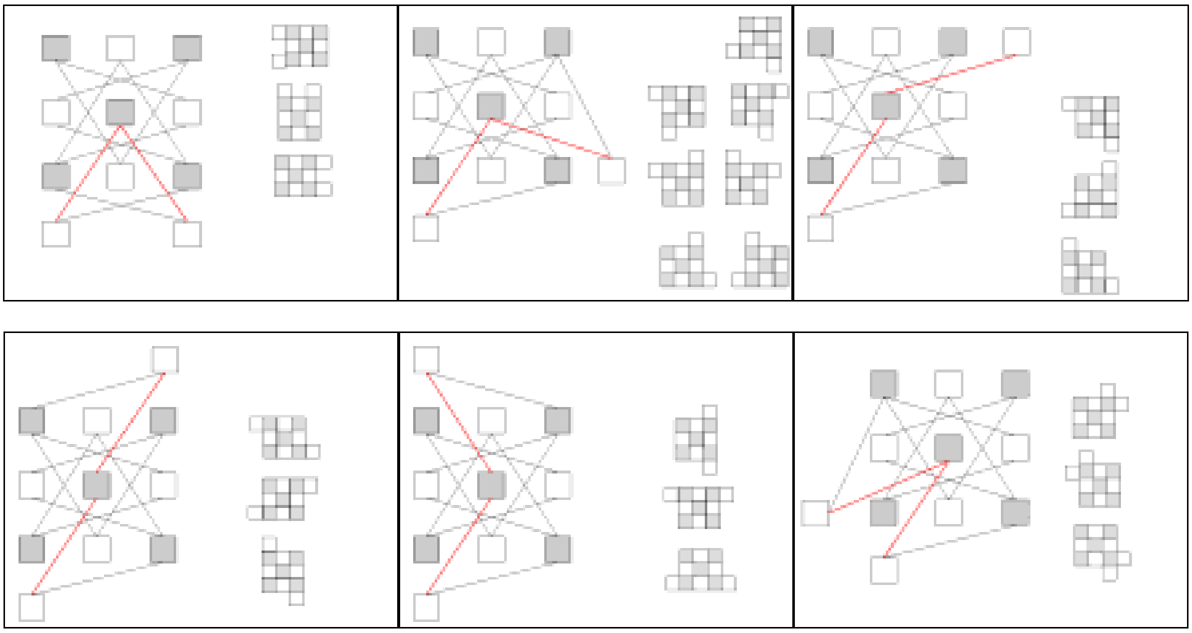
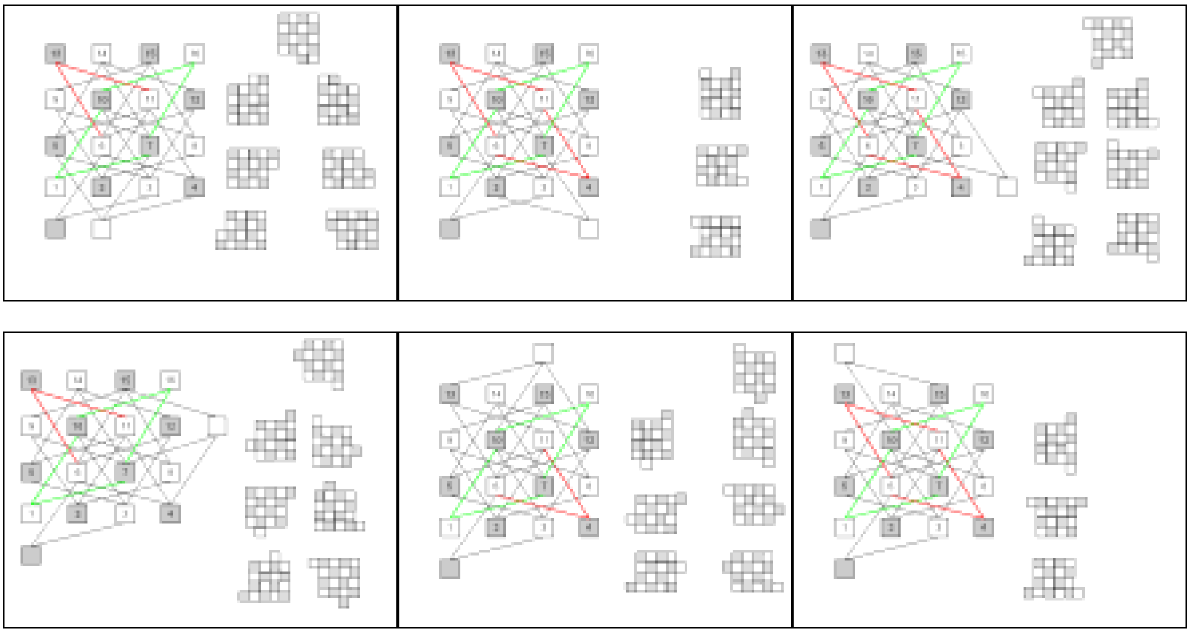
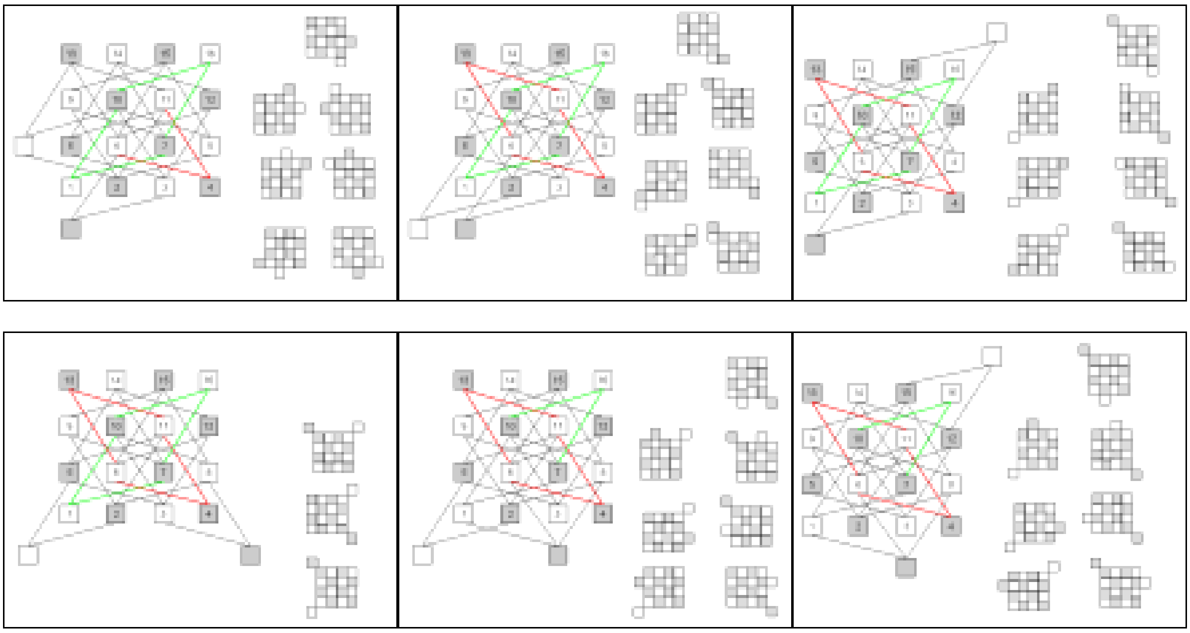


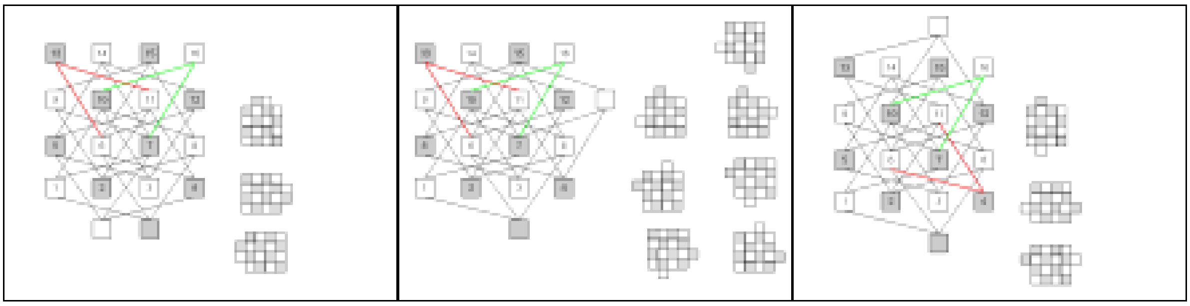
圖 e　n=3 的情形

利用一、之必要條件與圖形間旋轉、與線對稱的關係，可將起點、4×4 棋盤、終點之位置情形分為 15 類進行探討，其中十二類(如以下所示)含有封閉的迴路，因此找不到所求的路徑。





另外 3 類(如以下所示)雖然在開始移動前沒有形成封閉路徑，但在移動中皆會產生封閉路徑，因此亦找不到所求路徑。



以最左圖的情形為例。先考慮以黑棋格為起點、白棋格為終點的情形，若起點接至 6 或 8 號棋格，則會形成 1→7→16→10→1 這個封閉路徑，因此找不到所求路徑；若起點接至 1 號棋格，則隨之而來的路徑必為 7→16→10→8 或 7→16→10→3 或 10→16→7→9 或 10→16→7→14，此時均會形成封閉路徑，因此亦找不到所求路徑，如下圖 f、g 所示。

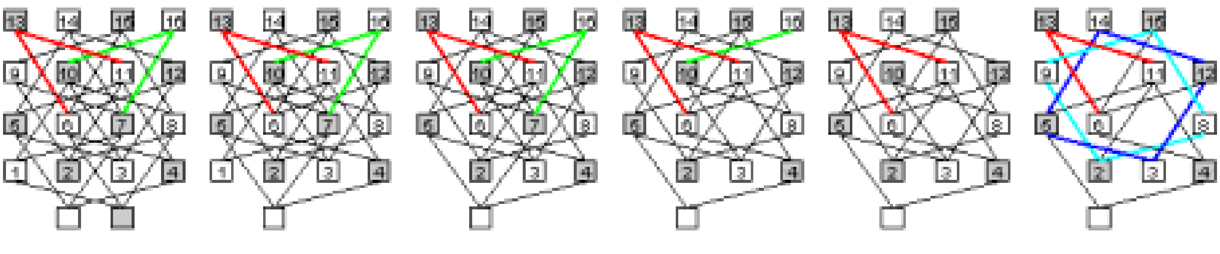


圖 f　起點→1→7→16→10→8 及起點→1→7→16→10→3 兩種走法導致無解

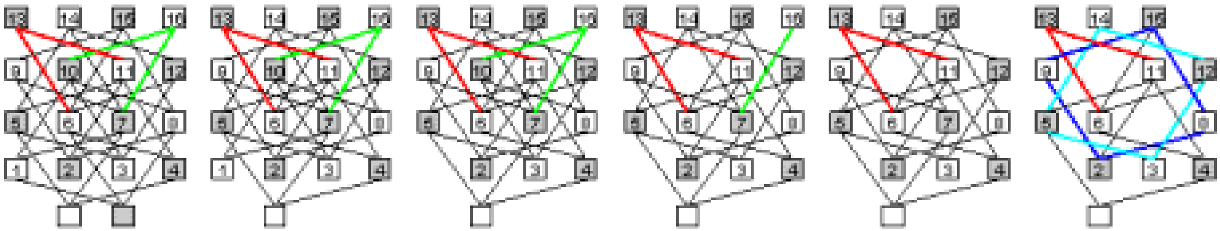


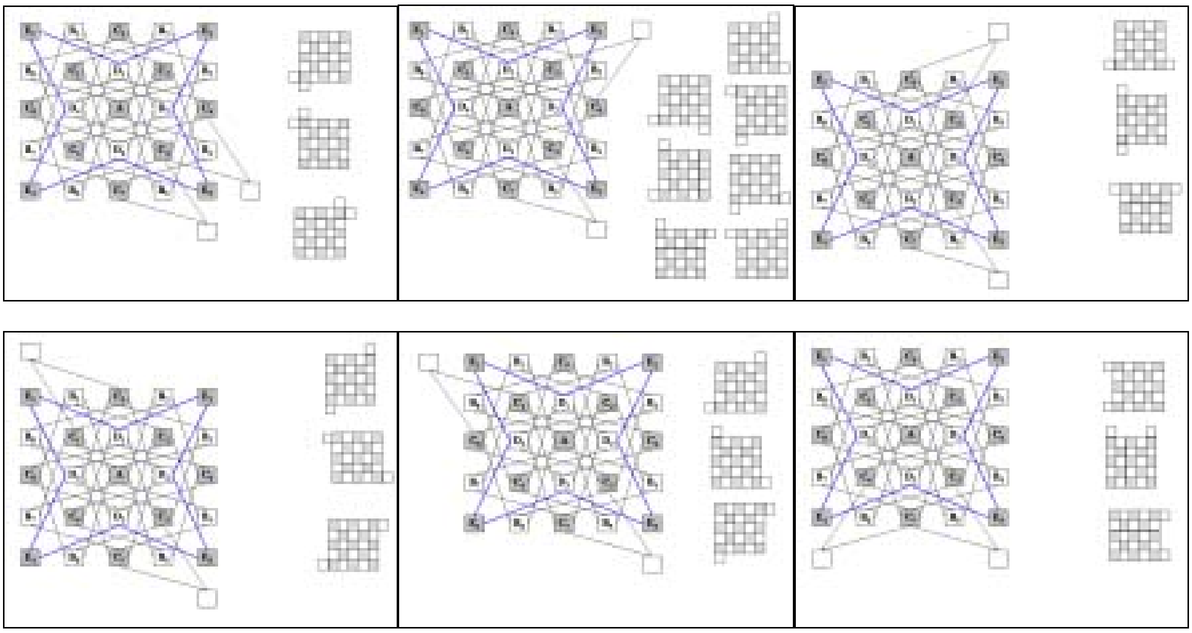
圖 g　起點→1→10→16→7→9 及起點→1→10→16→7→14 兩種走法導致無解

同理，亦可證明以白棋格為起點、黑棋格為終點的情形。

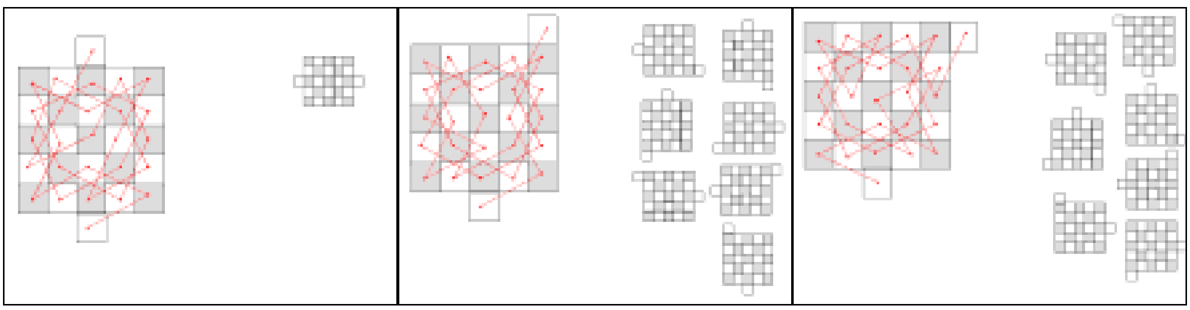
仿照上述證法亦可證明其餘兩類情形亦找不到所求路徑。

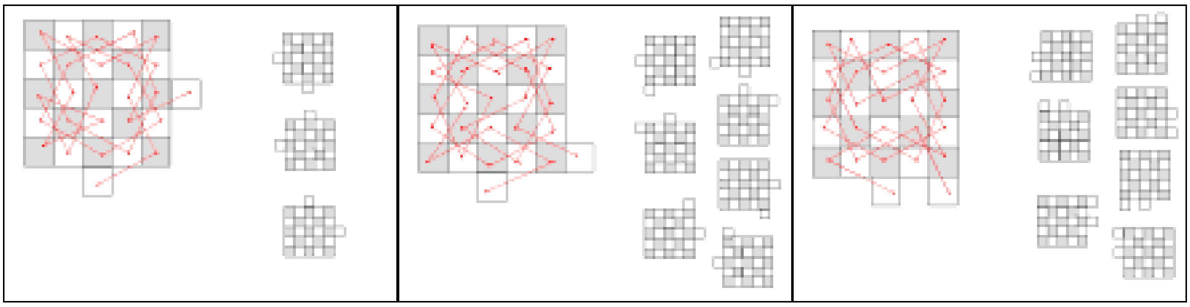
（二）$n = 4t + 1$

利用一、之必要條件，當 $n = 5$ 時，起點、5×5 棋盤、終點之位置情形分為 12 類進行探討，其中 6 類(如以下所示)含有封閉的迴路，因此找不到所求的路徑。



其餘 6 類可以找出所求之漢彌爾頓路徑，如以下所示：





觀察9×9棋盤上的棋格，可以發現最外圍兩層棋格具有兩獨立迴路，如下圖 h 所示。

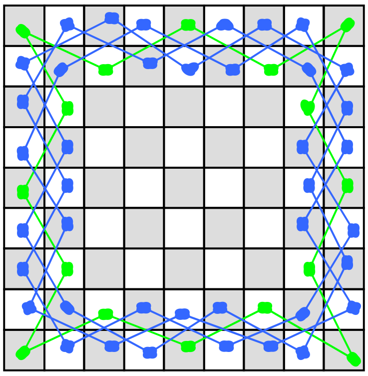
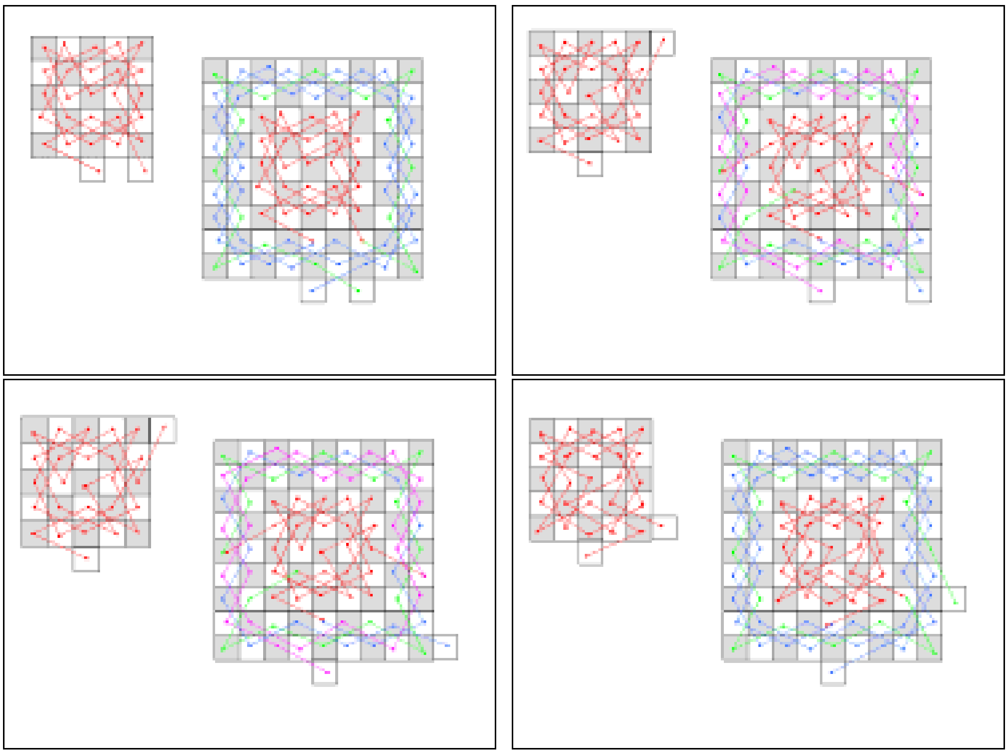
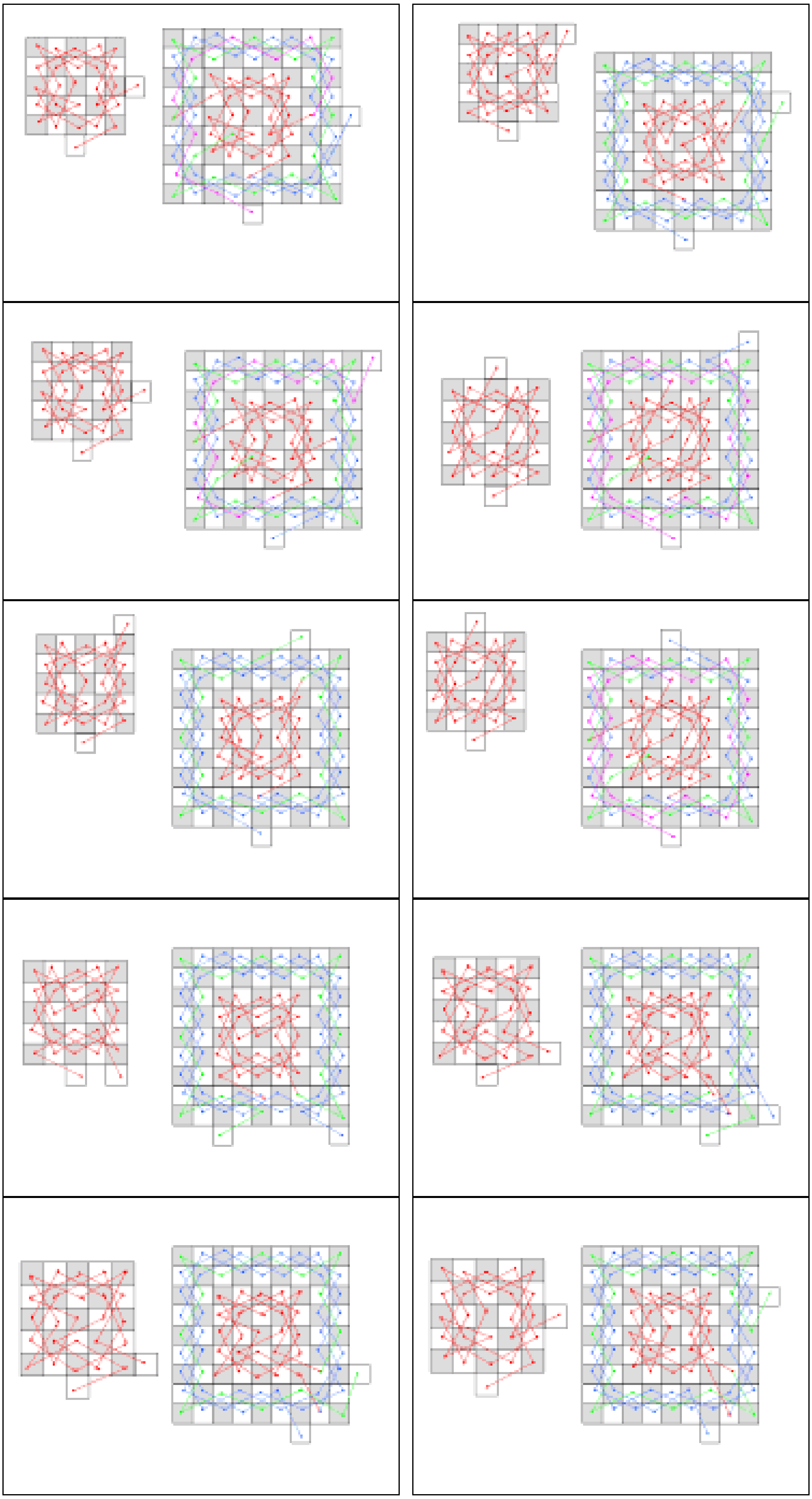
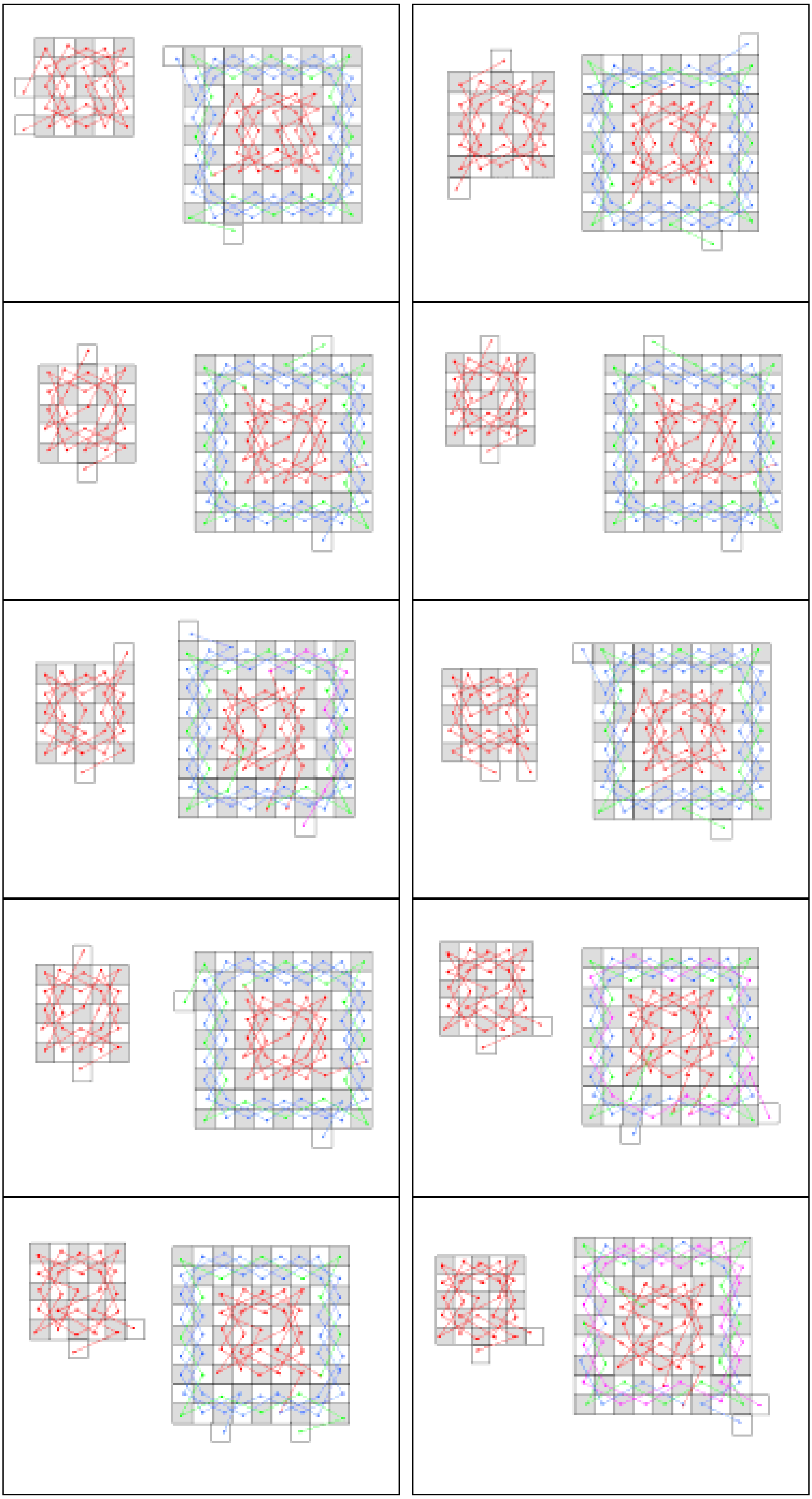


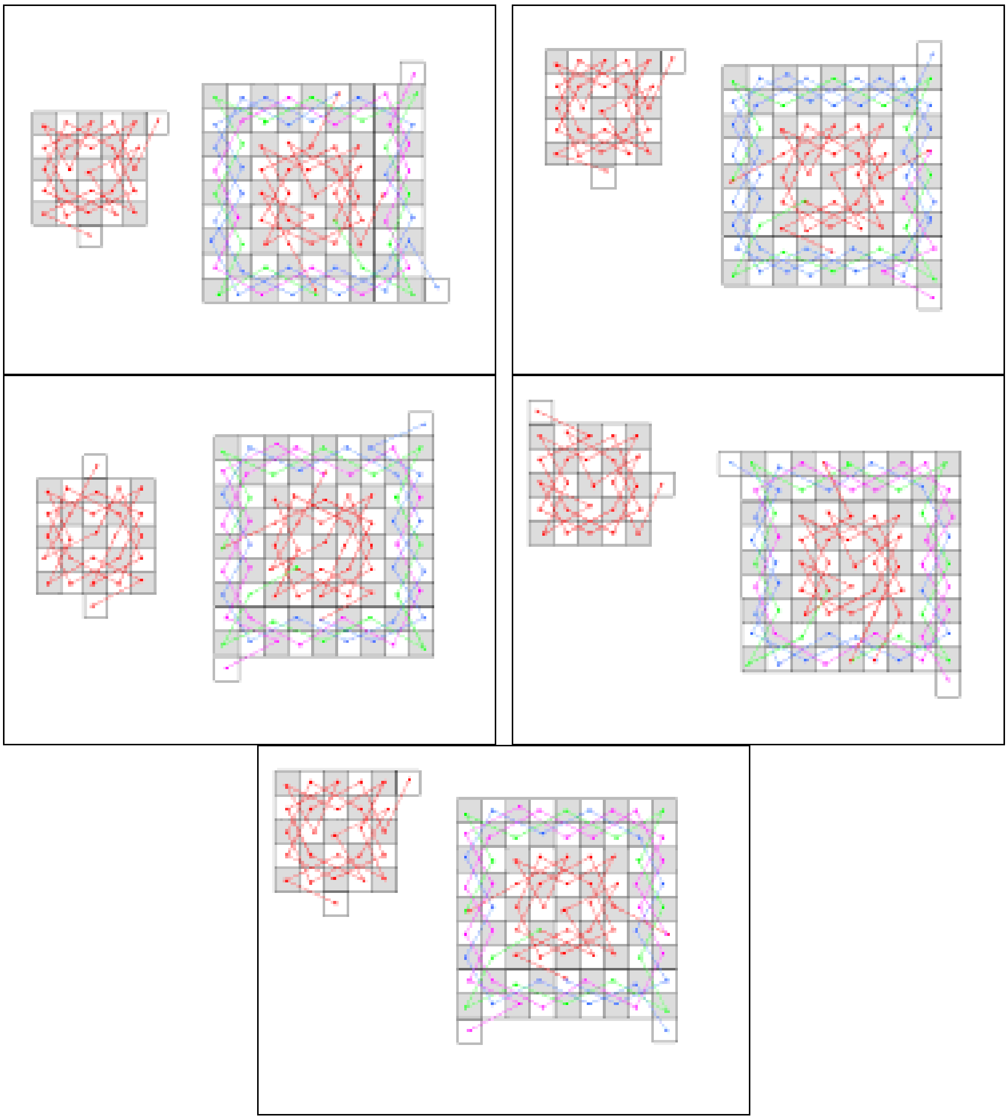
圖 h　9×9棋盤上的兩獨立迴路

利用這兩個獨立迴路與$n=5$時所得的漢彌爾頓路徑，可造出$n=9$時所求的漢彌爾頓路徑，如以下所示：





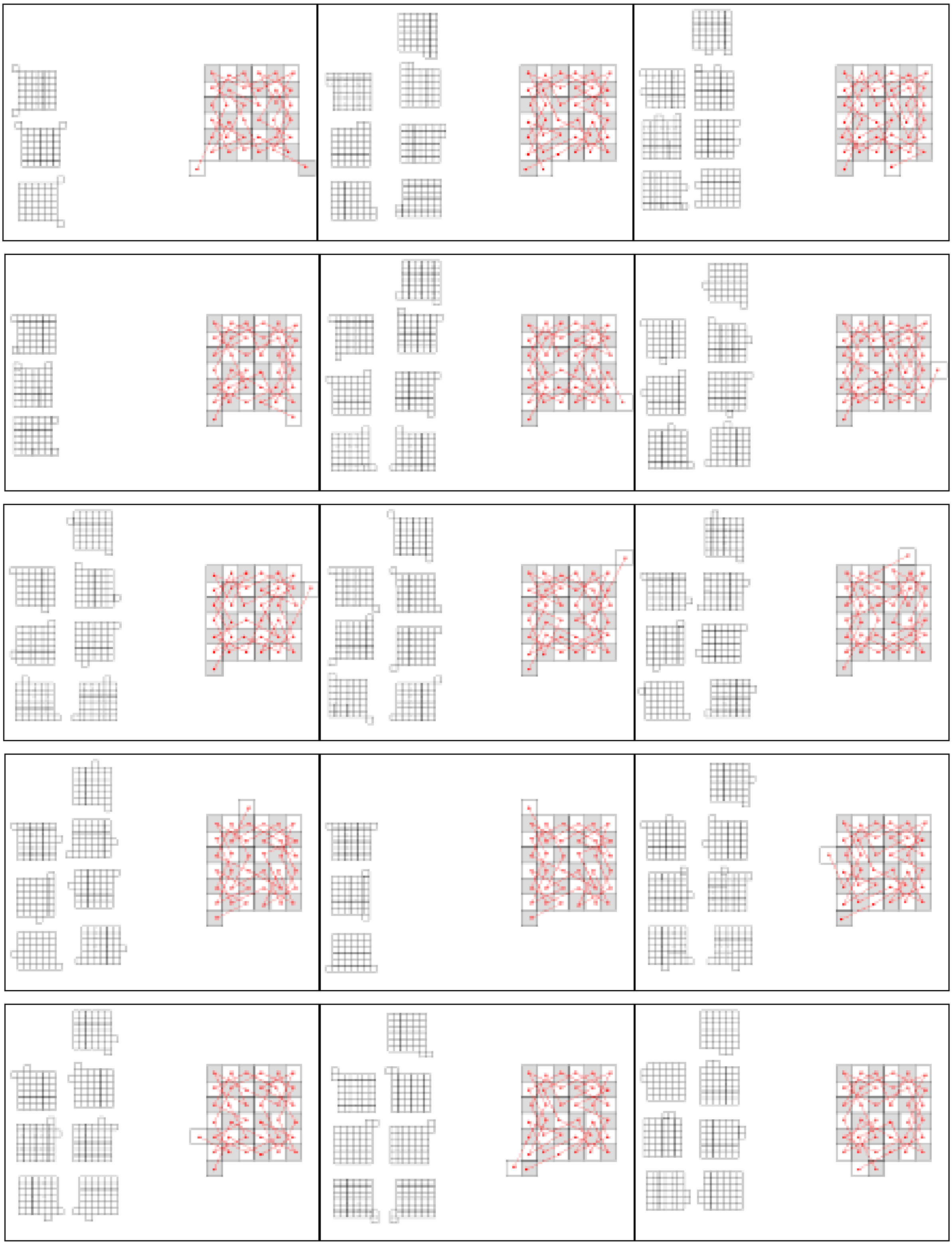


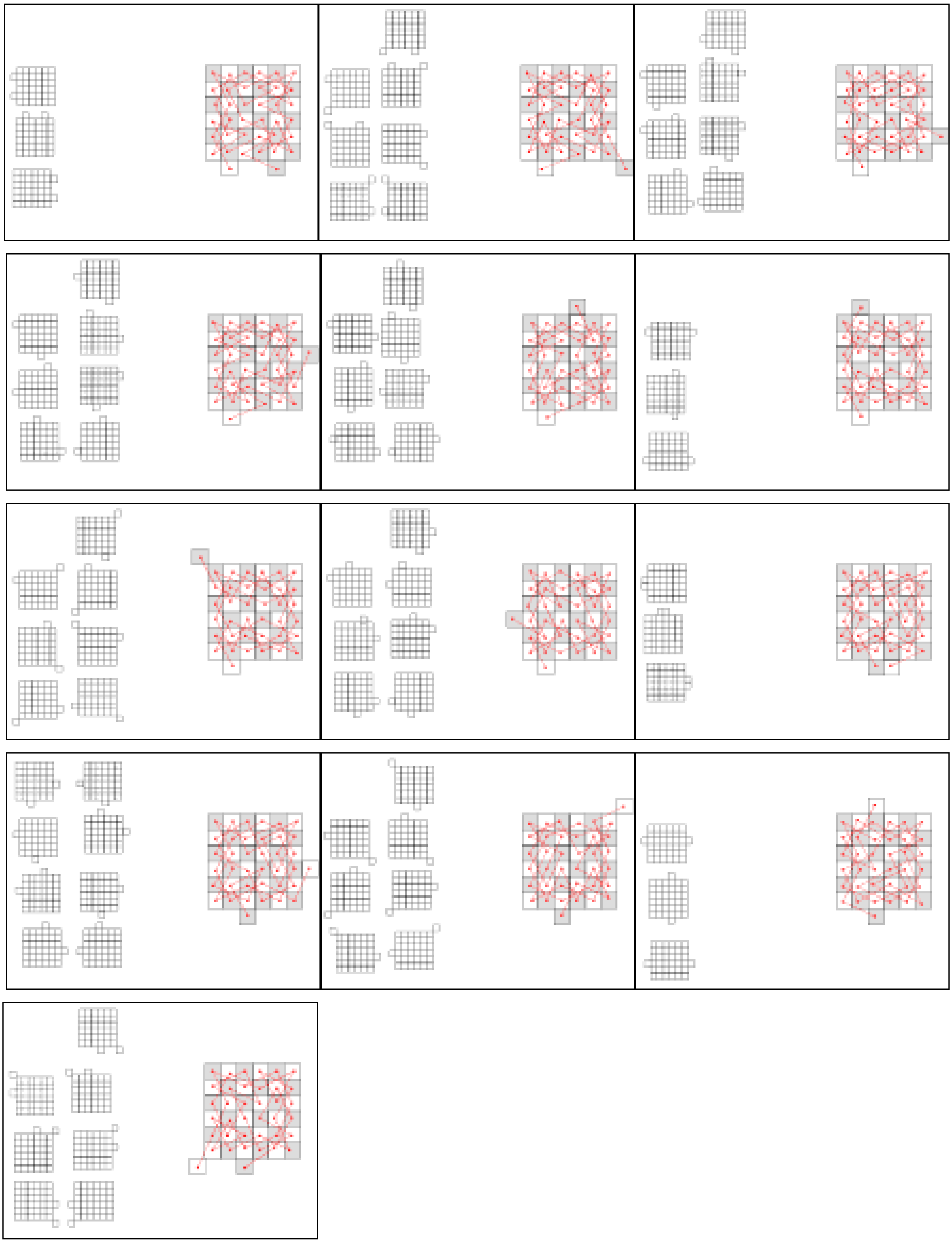


同理，可利用$[4(t+1)+1]\times[4(t+1)+1]$棋盤上最外圍兩層的獨立迴路，與$n=4t+1$時所得的漢彌爾頓路徑，造出$n=4(t+1)+1$時所求的漢彌爾頓路徑。

（三） $n = 4t + 2$

利用一、之必要條件，當 $n = 6$ 時，起點、6×6 棋盤、終點之位置情形分為 28 類進行探討，這 28 類都可以找出所求之漢彌爾頓路徑，如以下所示：





觀察10×10棋盤上的棋格，可以發現最外圍兩層棋格具有四個獨立迴路，如下圖 i 所示。

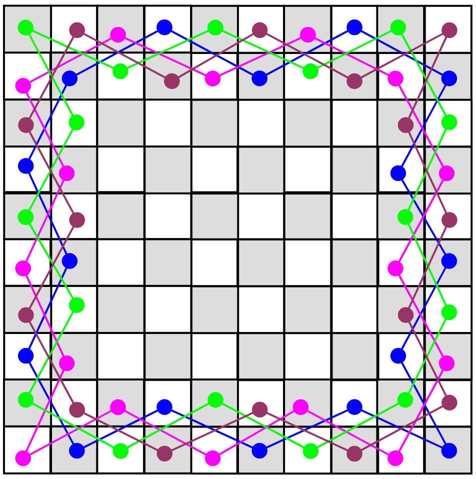


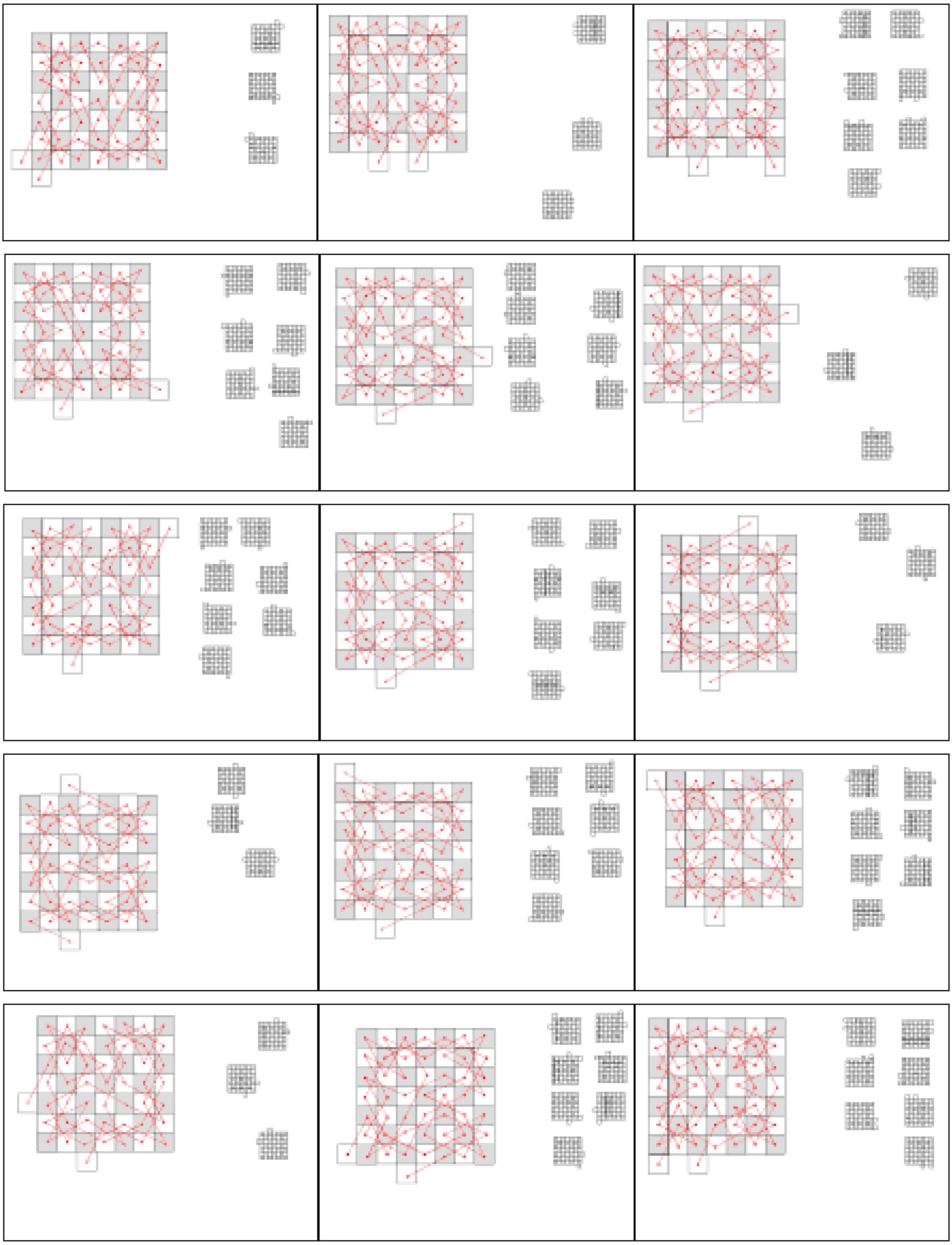
圖 i　10×10 棋盤上的四獨立迴路

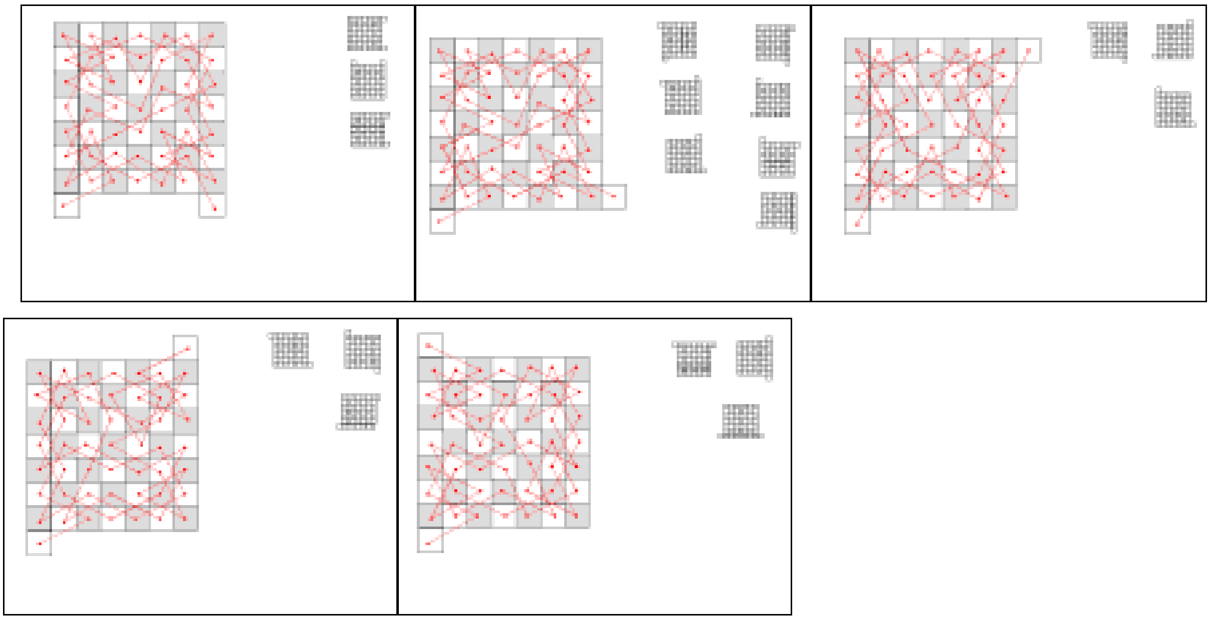
利用這四個獨立迴路與 $n=6$ 時所得的漢彌爾頓路徑，可造出 $n=10$ 時所求的漢彌爾頓路徑，如附件一所示。

同理, 可利用 $[4(t+1)+2] \times [4(t+1)+2]$ 棋盤上最外圍兩層的獨立迴路, 與 $n=4t+2$ 時所得的漢彌爾頓路徑，造出 $n=4(t+1)+2$ 時所求的漢彌爾頓路徑。

（四） $n=4t+3$

利用一、之必要條件，當 $n=7$ 時，起點、 7×7 棋盤、終點之位置情形分為 20 類進行探討，這 20 類都可以找出所求之漢彌爾頓路徑，如以下所示：





觀察11×11棋盤上的棋格，可以發現最外圍兩層棋格具有兩個獨立迴路，如下圖 j 所示。

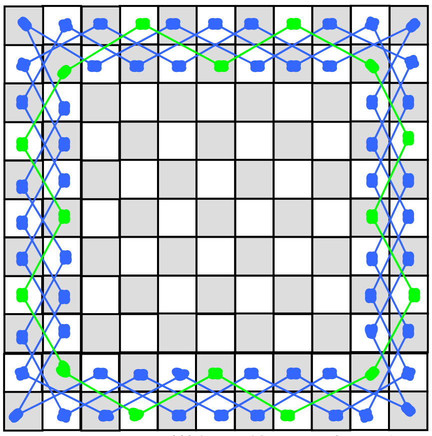


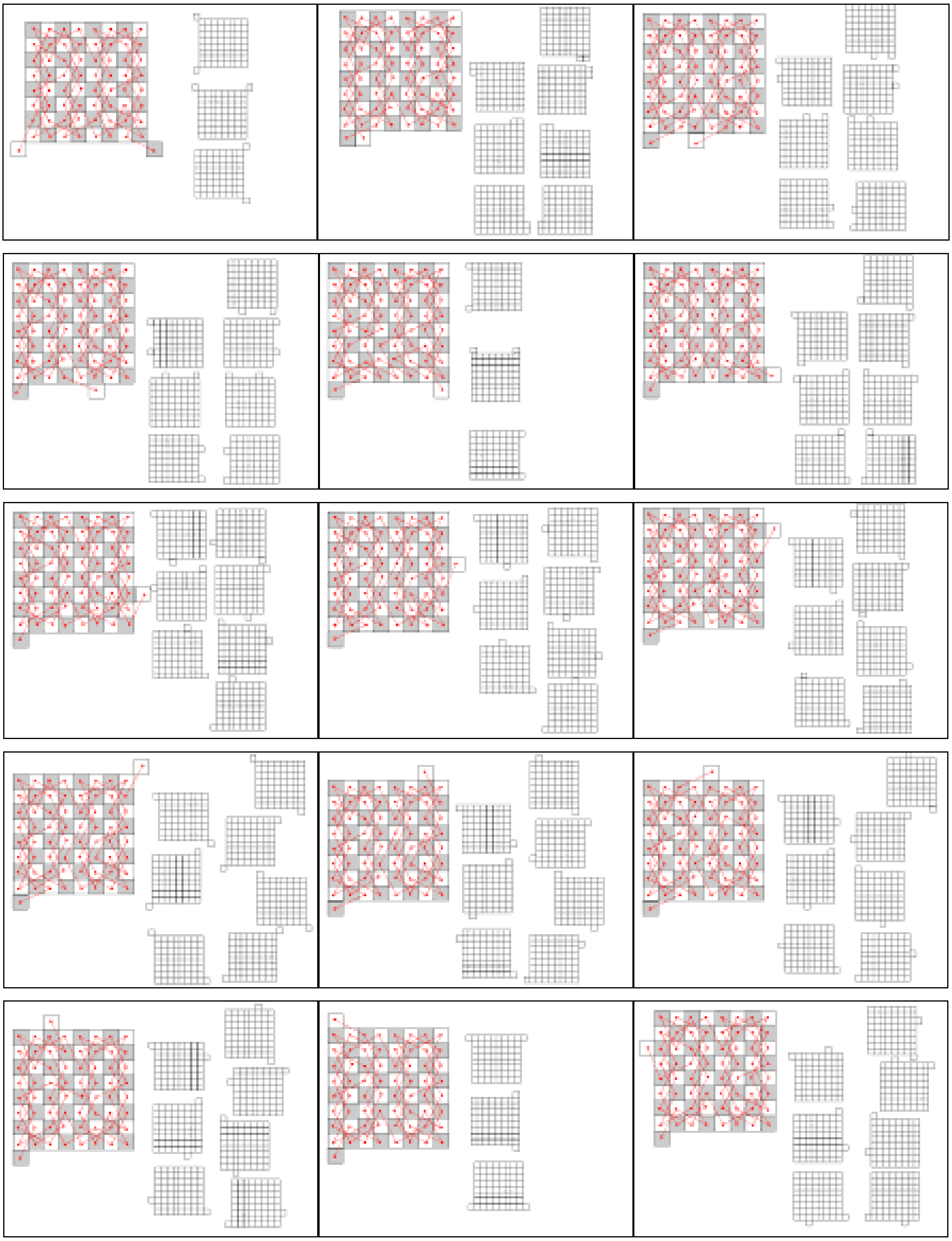
圖 j　11×11棋盤上的兩獨立迴路

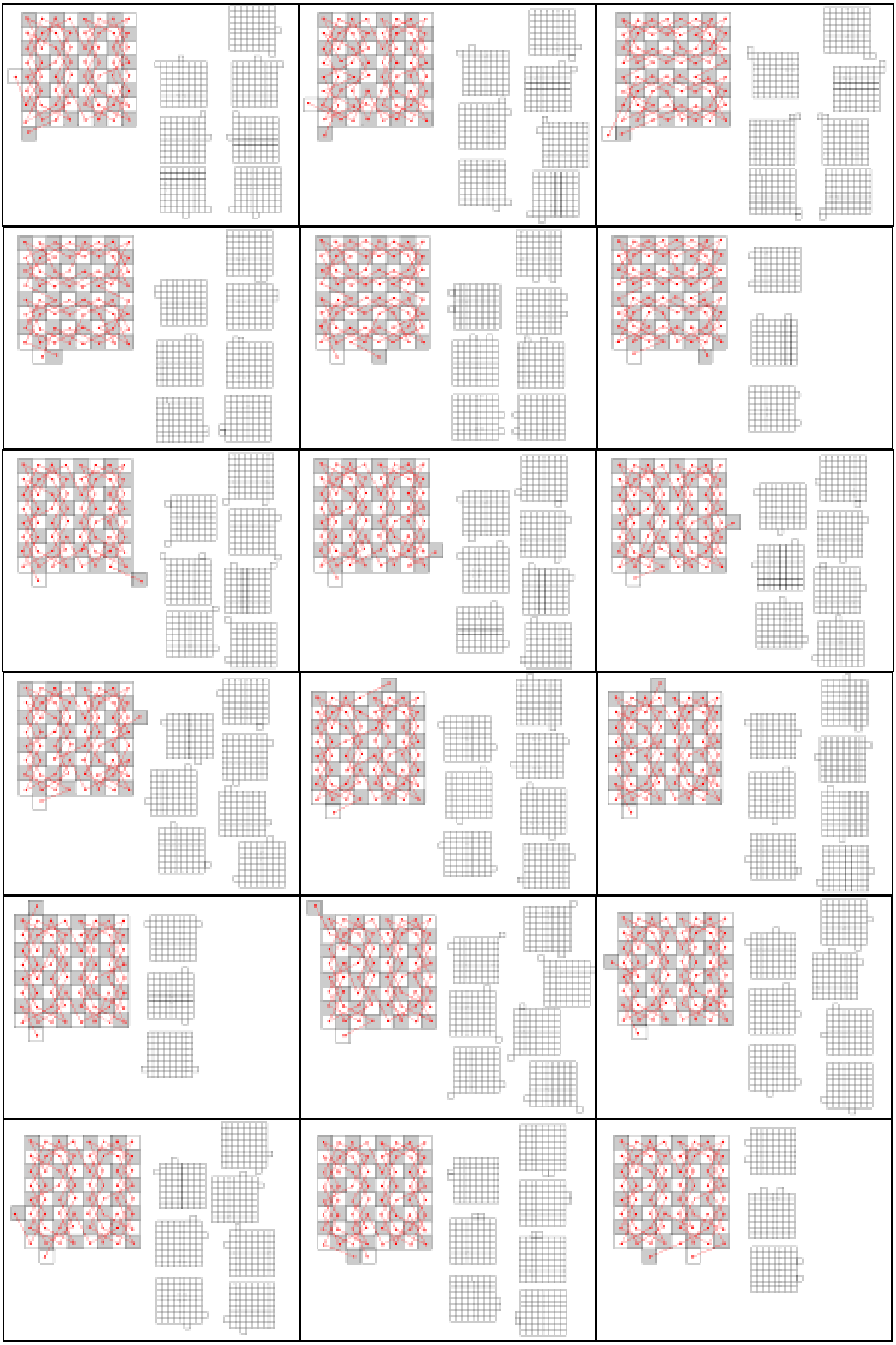
利用這兩個獨立迴路與$n=7$時所得的漢彌爾頓路徑，可造出$n=11$時所求的漢彌爾頓路徑，如附件二所示。

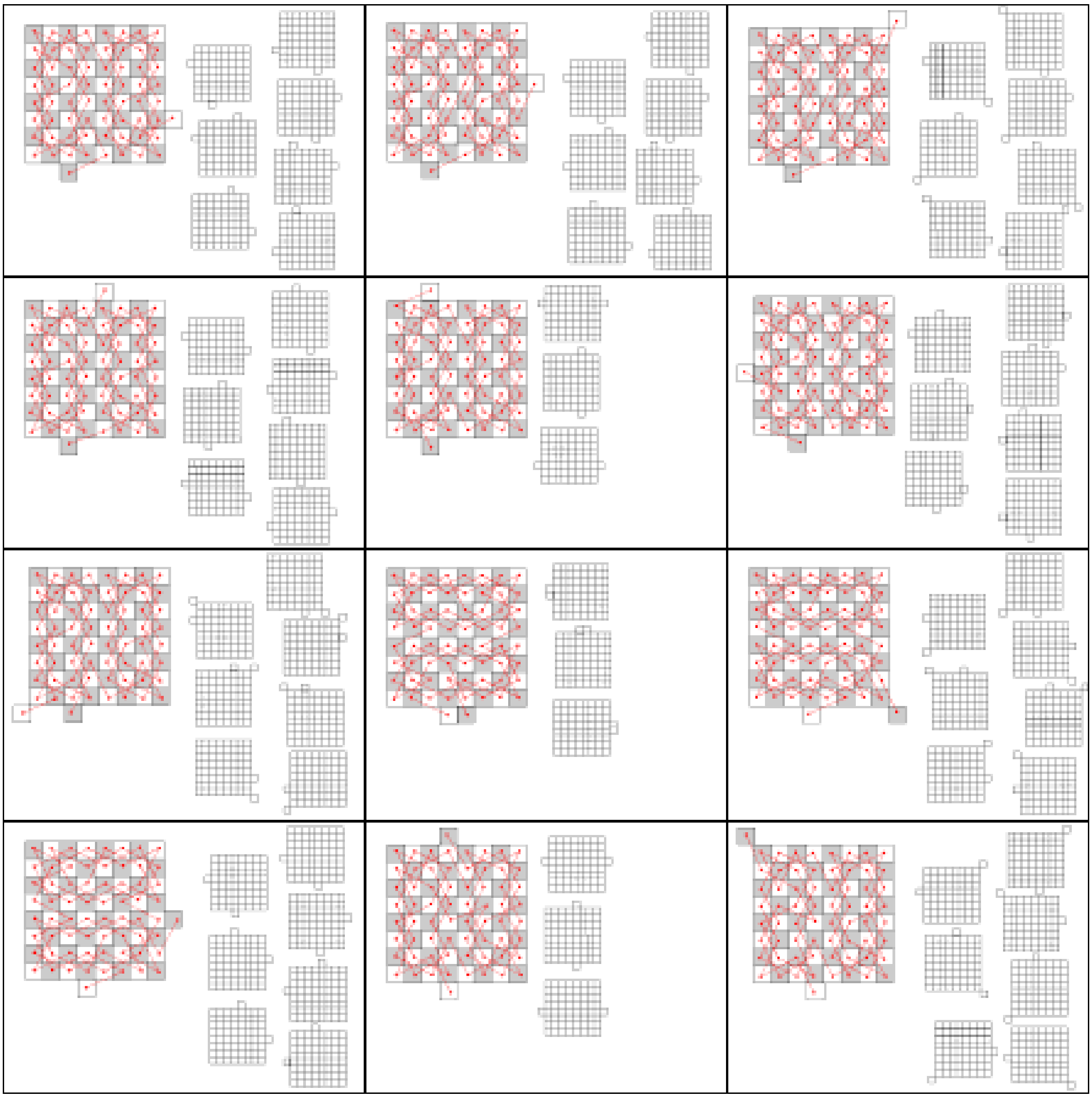
同理，可利用$[4(t+1)+3]\times[4(t+1)+3]$棋盤上最外圍兩層的獨立迴路，與$n=4t+3$時所得的漢彌爾頓路徑，造出$n=4(t+1)+3$時所求的漢彌爾頓路徑。

（五） $n=4t+4$

利用一、之必要條件，當 $n=8$ 時，起點、 8×8 棋盤、終點之位置情形分為 45 類進行探討，這 45 類都可以找出所求之漢彌爾頓路徑，如以下所示：







觀察12×12棋盤上的棋格，可以發現最外圍兩層棋格具有四個獨立迴路，如下圖 k 所示。

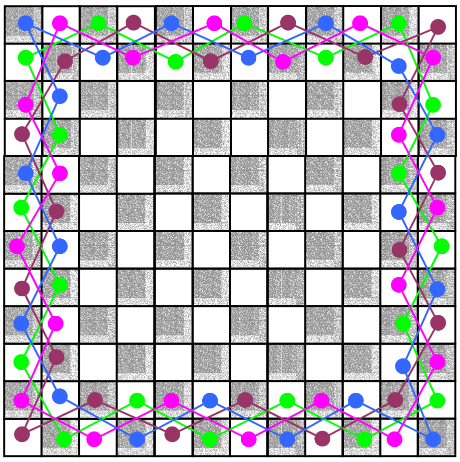


圖 k　12×12棋盤上的四獨立迴路

利用這四個獨立迴路與 $n=8$ 時所得的漢彌爾頓路徑，可造出 $n=12$ 時所求的漢彌爾頓路徑，如附件三所示。

同理, 可利用 $[4(t+1)+4]\times[4(t+1)+4]$ 棋盤上最外圍兩層的獨立迴路, 與 $n=4t+4$ 時所得的漢彌爾頓路徑，造出 $n=4(t+1)+4$ 時所求的漢彌爾頓路徑。

陸、研究結果

考慮一 $n\times n$ 棋盤, 若若 $i+j$ 為偶數, 則將第 i 行第 j 列所在的棋格塗成黑色；若 $i+j$ 為奇數，則將第 i 行第 j 列所在的棋格塗成白色。關於騎士由給定起點 P 經 $n\times n$ 棋盤到達給定終點 Q 之漢彌爾頓路徑(Hamiltonian Path)是否存在的問題（起點 P 與終點 Q 為 $n\times n$ 棋盤外圍的兩個相異棋格)，其解的情形如下：

一、當 $n=1,2,3,4$ 時，找不到所求的路徑；

二、當 $n=5$ 時，起點、終點皆為白色的圖形，有部分找得到所求路徑，部分找不到所求路徑；其餘情形則找不到所求路徑；

三、當 n 為大於 5 的偶數時，若起點與終點顏色相異，必找得到所求路徑；若起點與終點顏色相同，則找不到所求路徑；

四、當 n 為大於 5 的奇數時，若起點、終點皆為白色，則找得到所求路徑；其餘情形則找不到所求路徑；

柒、討論

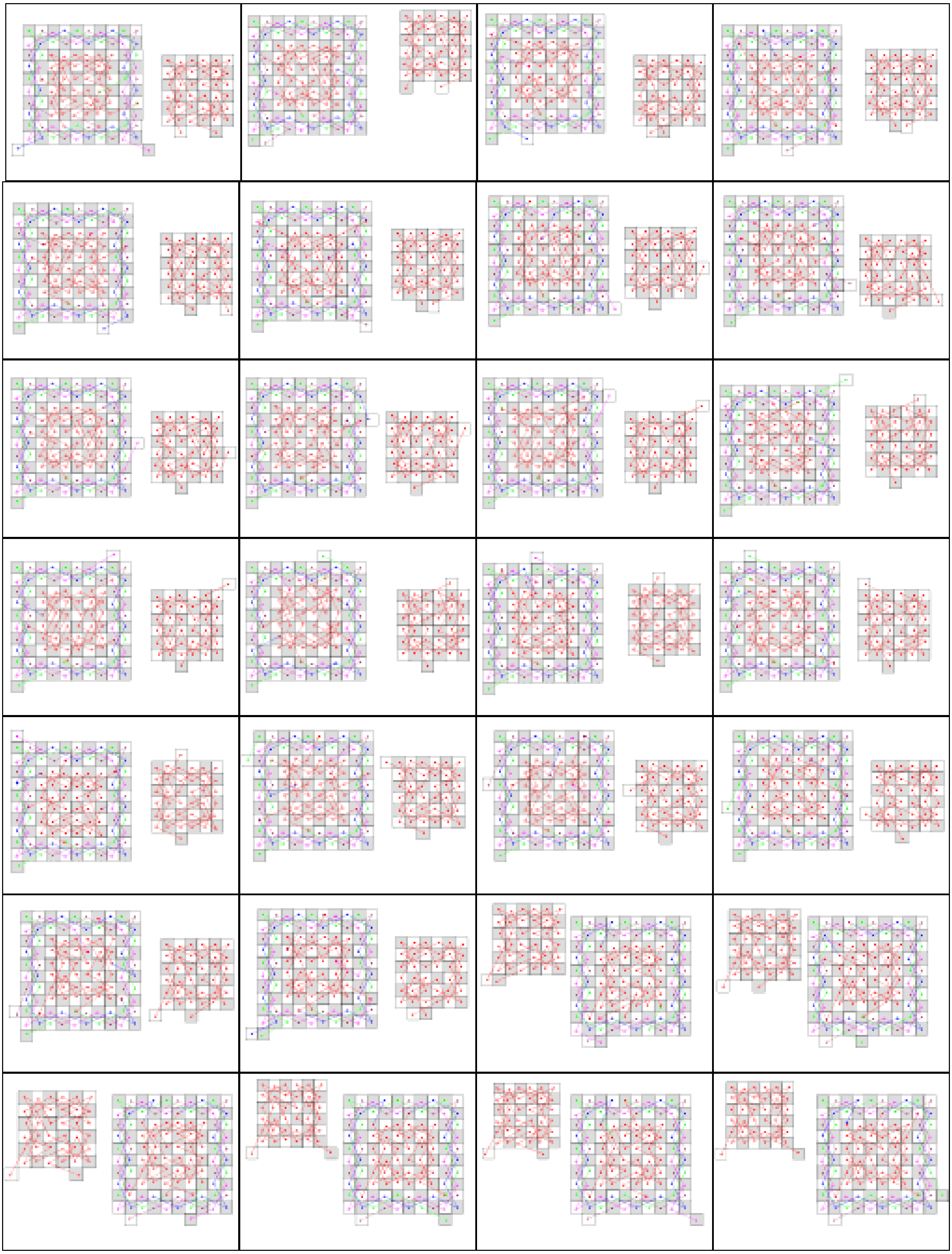
在探討所求的漢彌爾頓路徑是否存在時，我們使用了特定的構造方法，實際造出各種規模的所求路徑。因為圖形繁多，所以我們便將圖形依旋轉與線對稱的性質分類，如此，只要探討每類其中一個圖形即可。

此外, 在研究工具上, 我們選擇了電腦與文書處理軟體 PowerPoint。利用 PowerPoint, 我們得以處理大量的圖形、清楚地看見圖形精細的變化，並且在構造所求的漢彌爾頓路徑時, 重複地在前後步驟自由來回, 節省大量的作圖時間, 這一點是紙筆環境所不能比擬的。

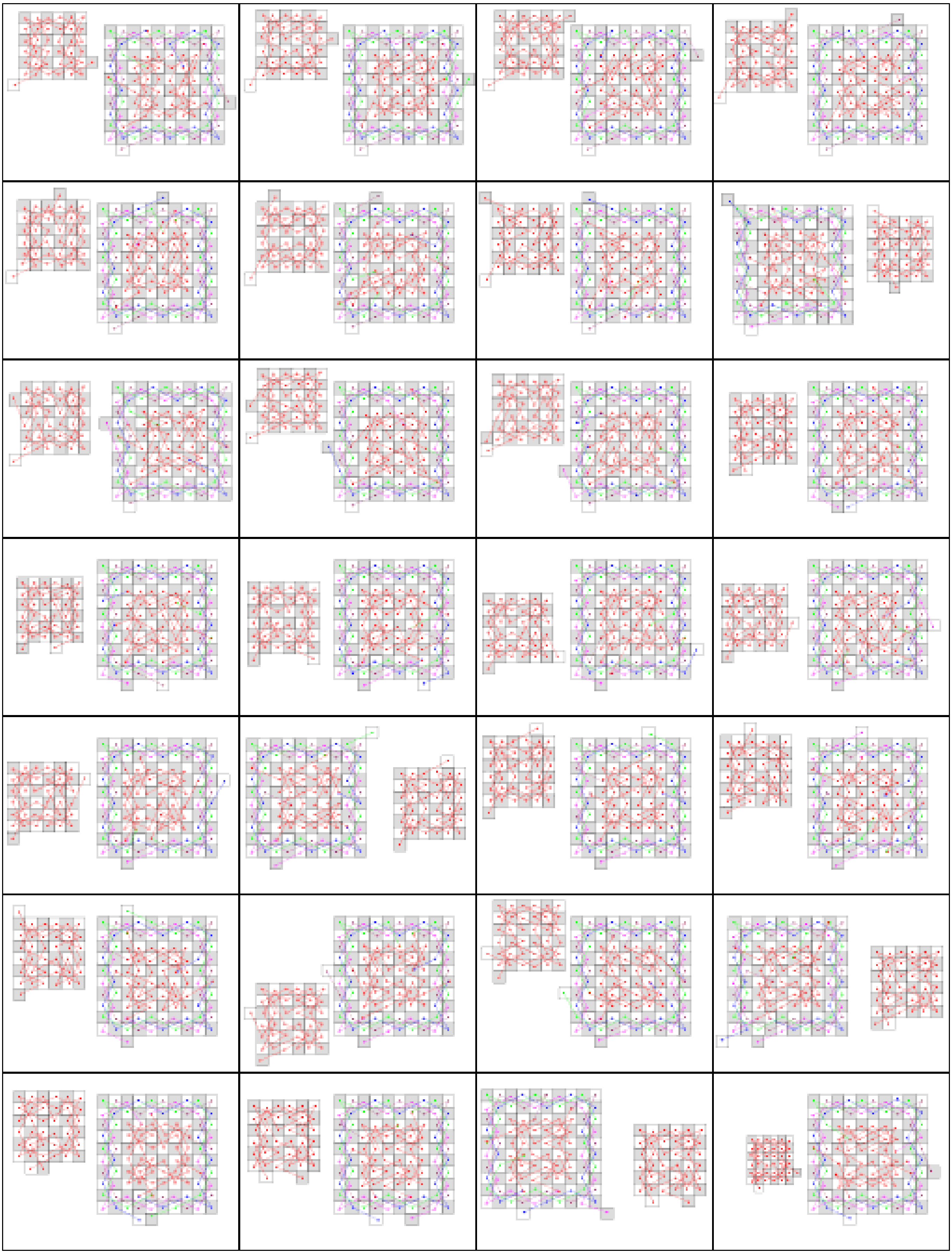
捌、參考資料

劉涵初（民 82)。圖形理論。**離散與組合數學**。台北：華泰書局。

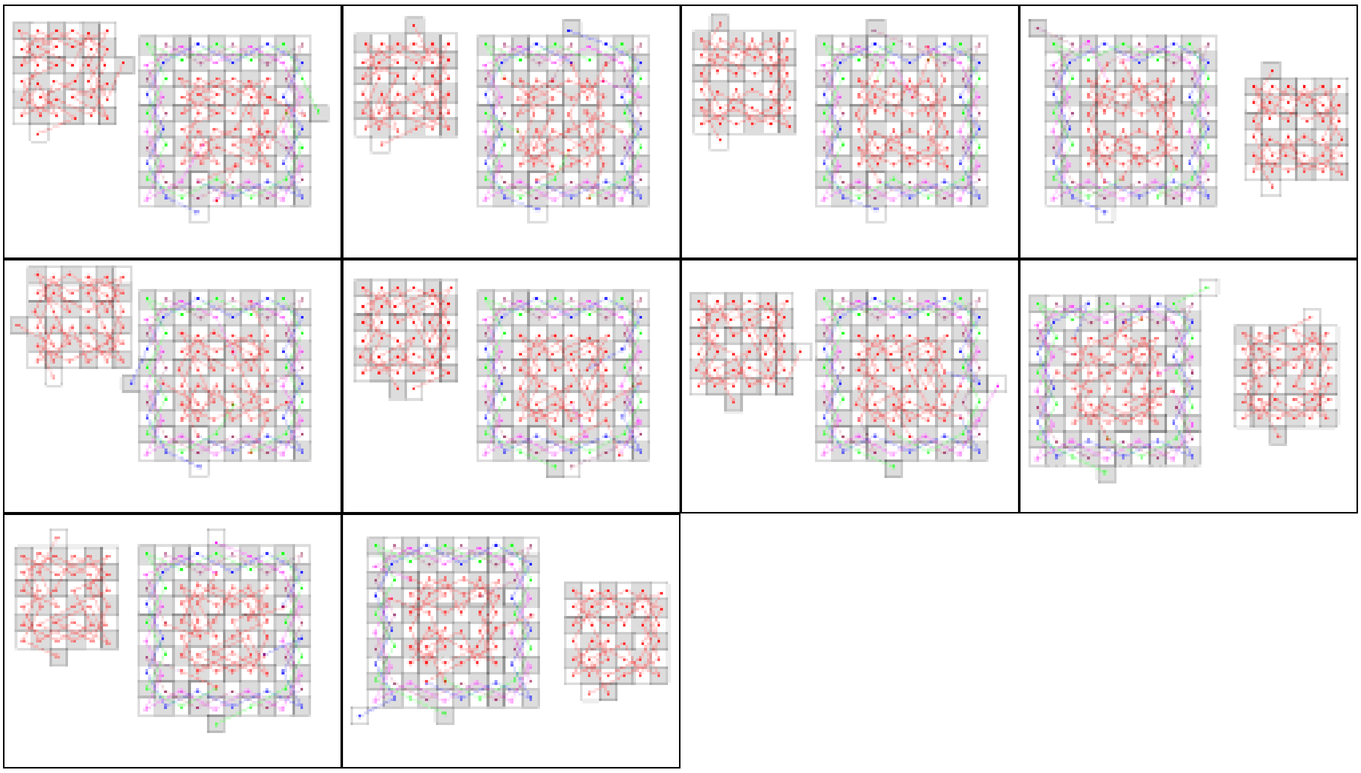
附件一



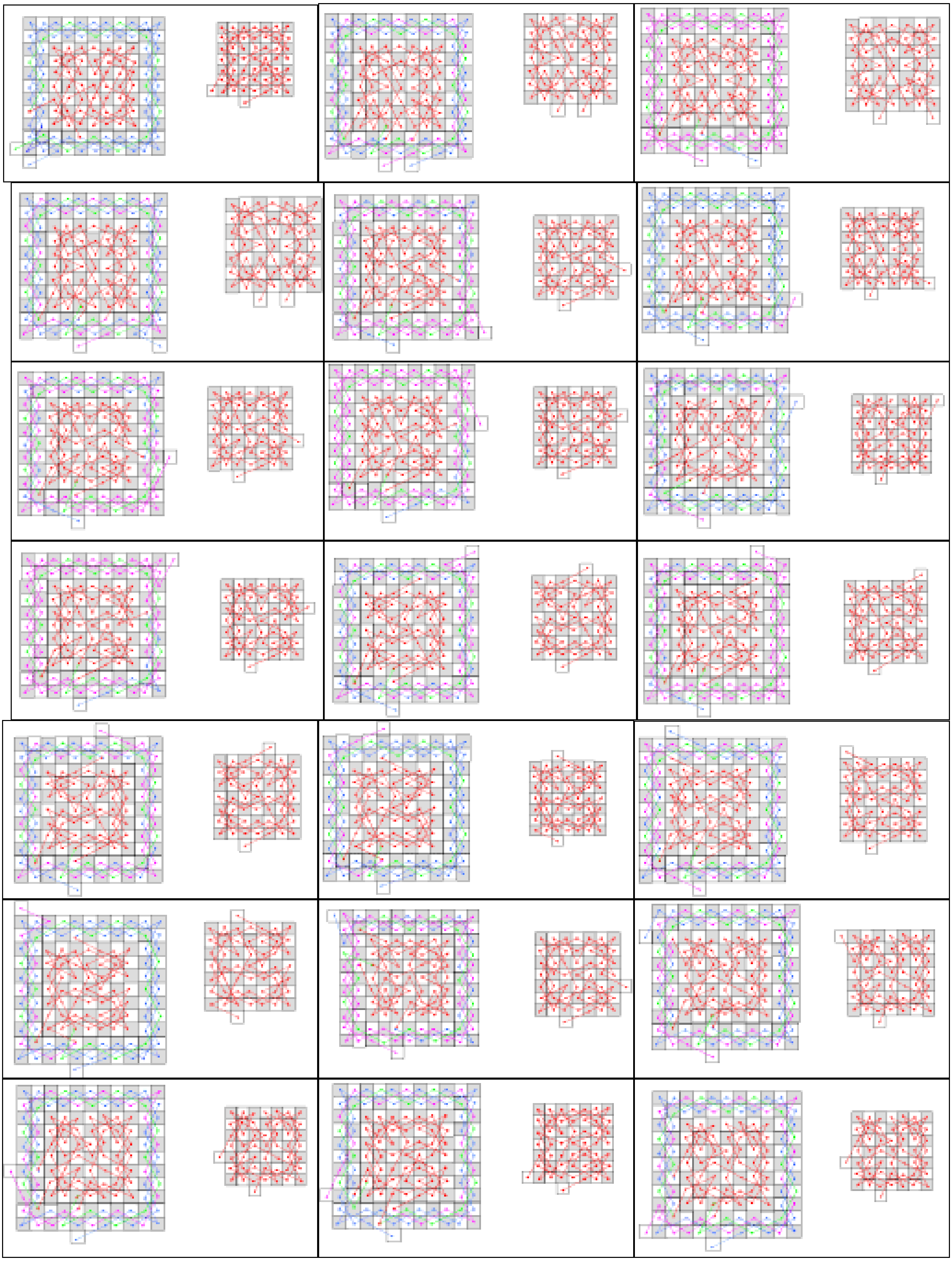
附件一



附件一

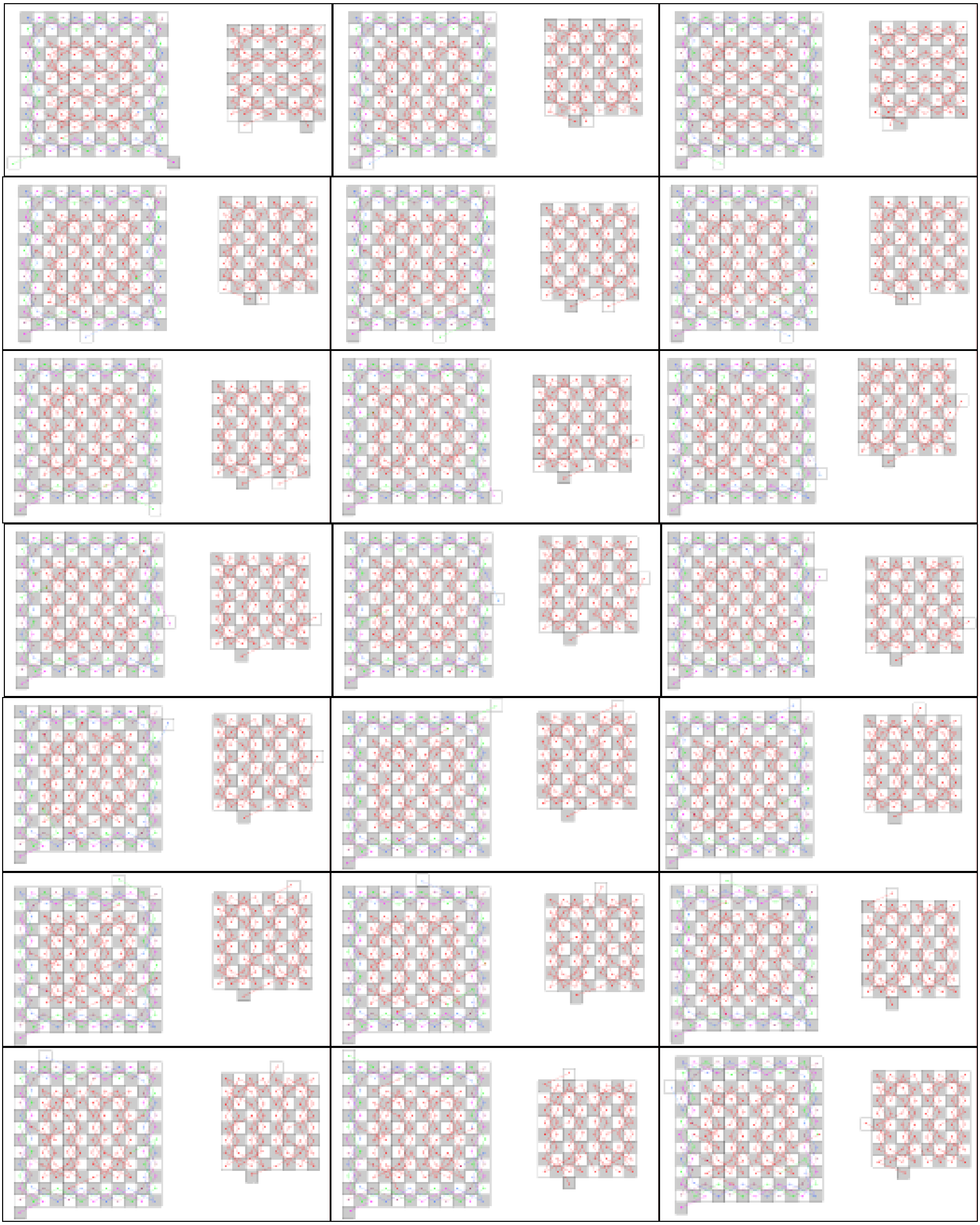


附件二

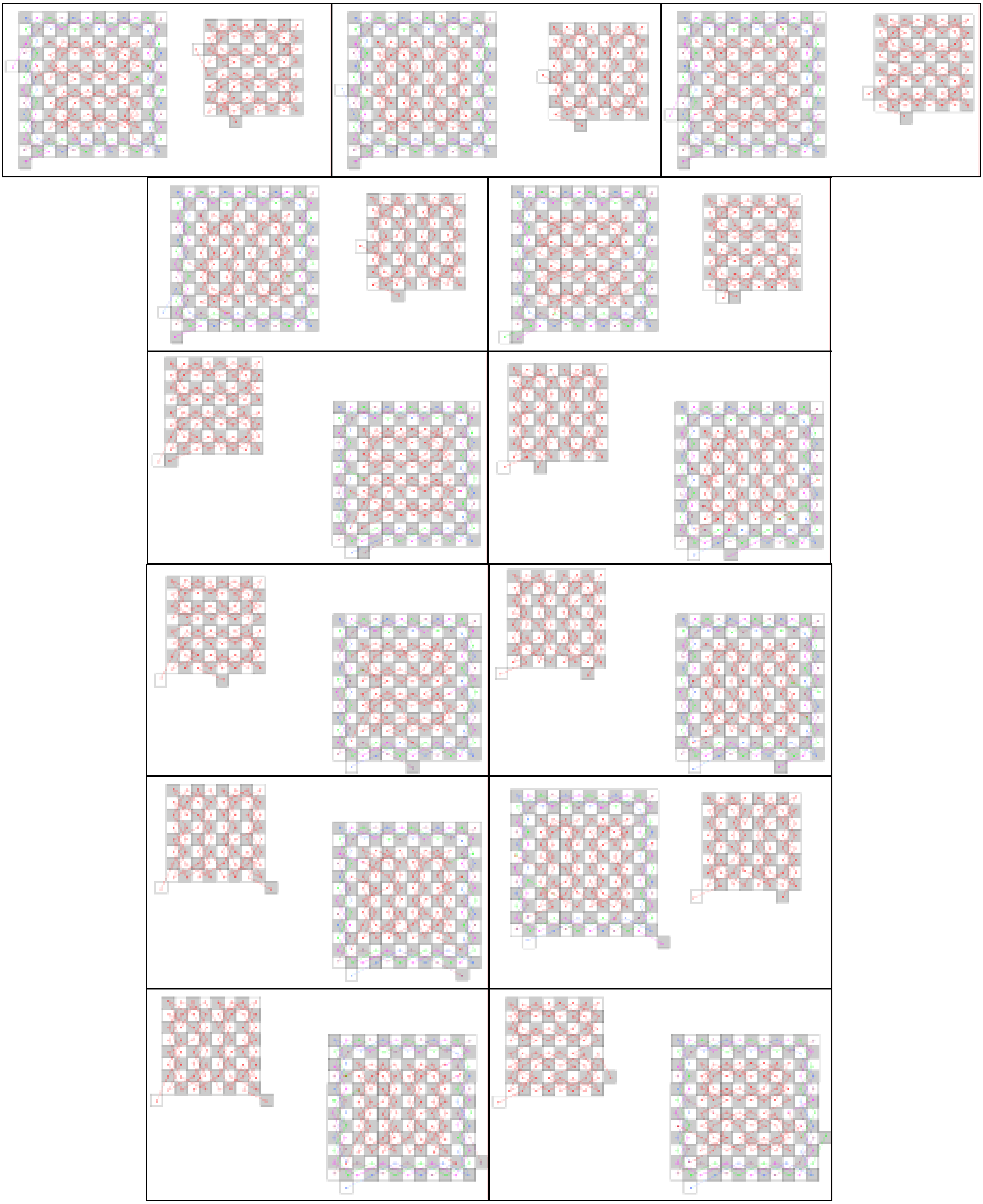


附件二

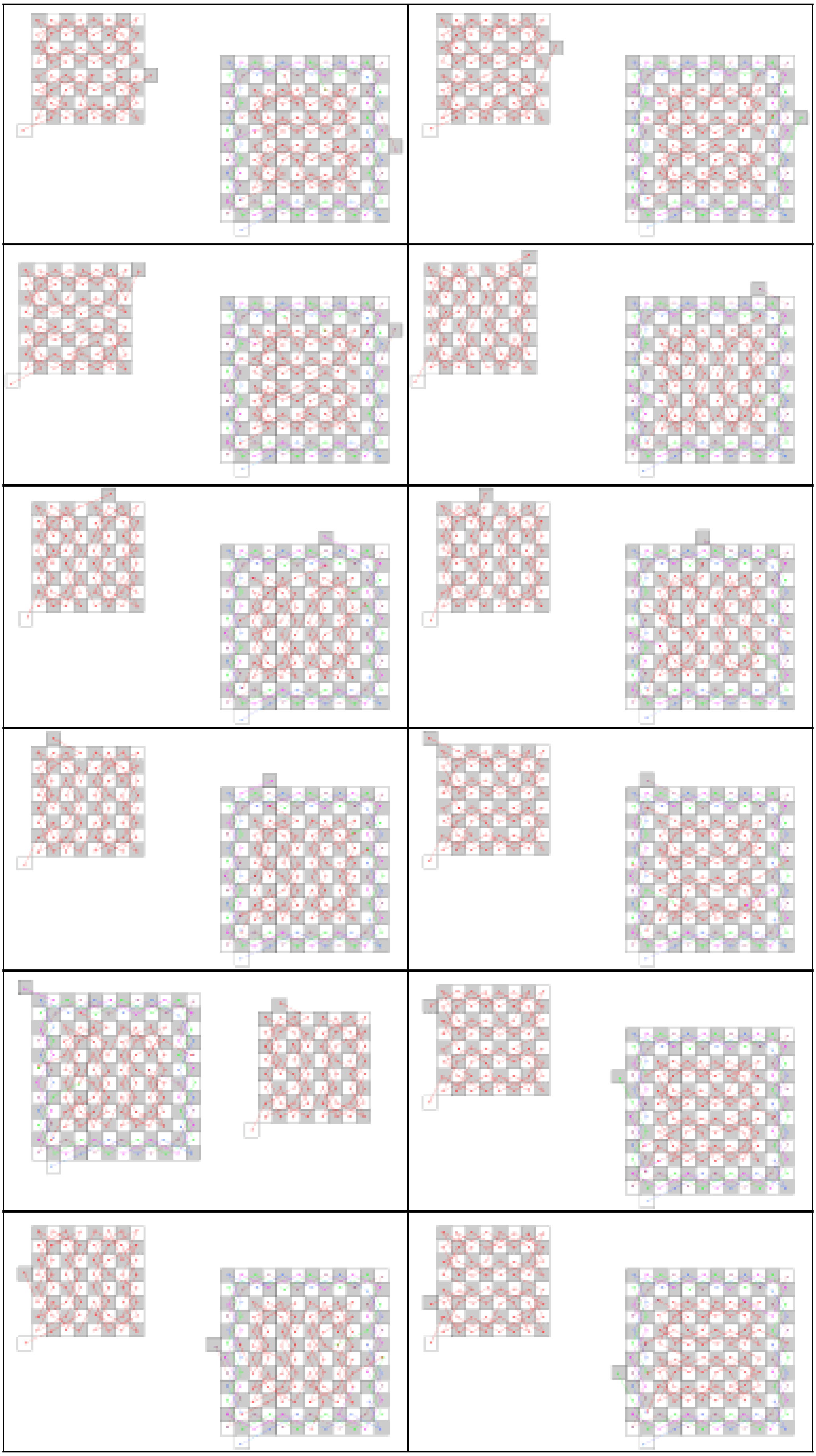
附件三



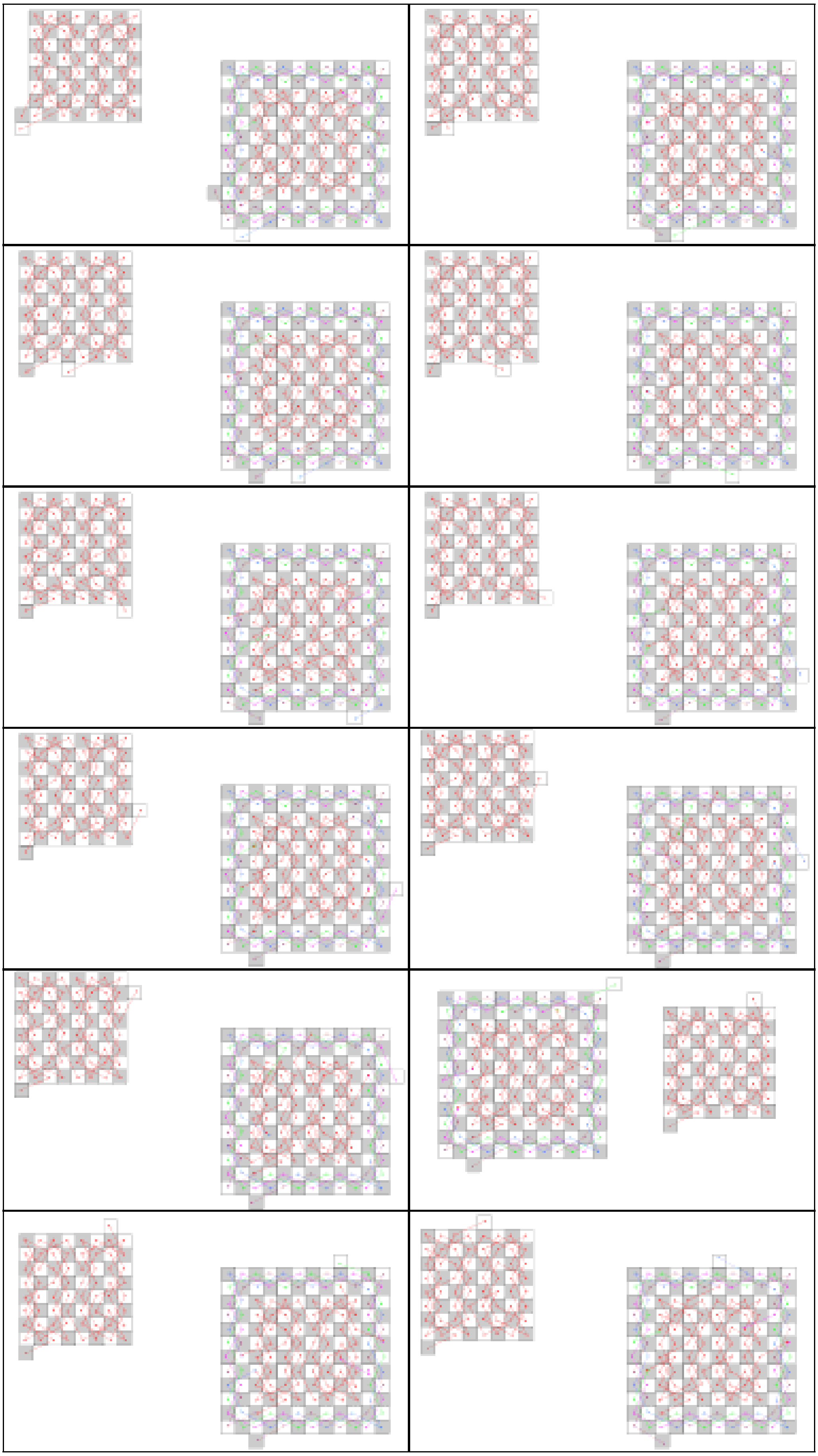
附件三



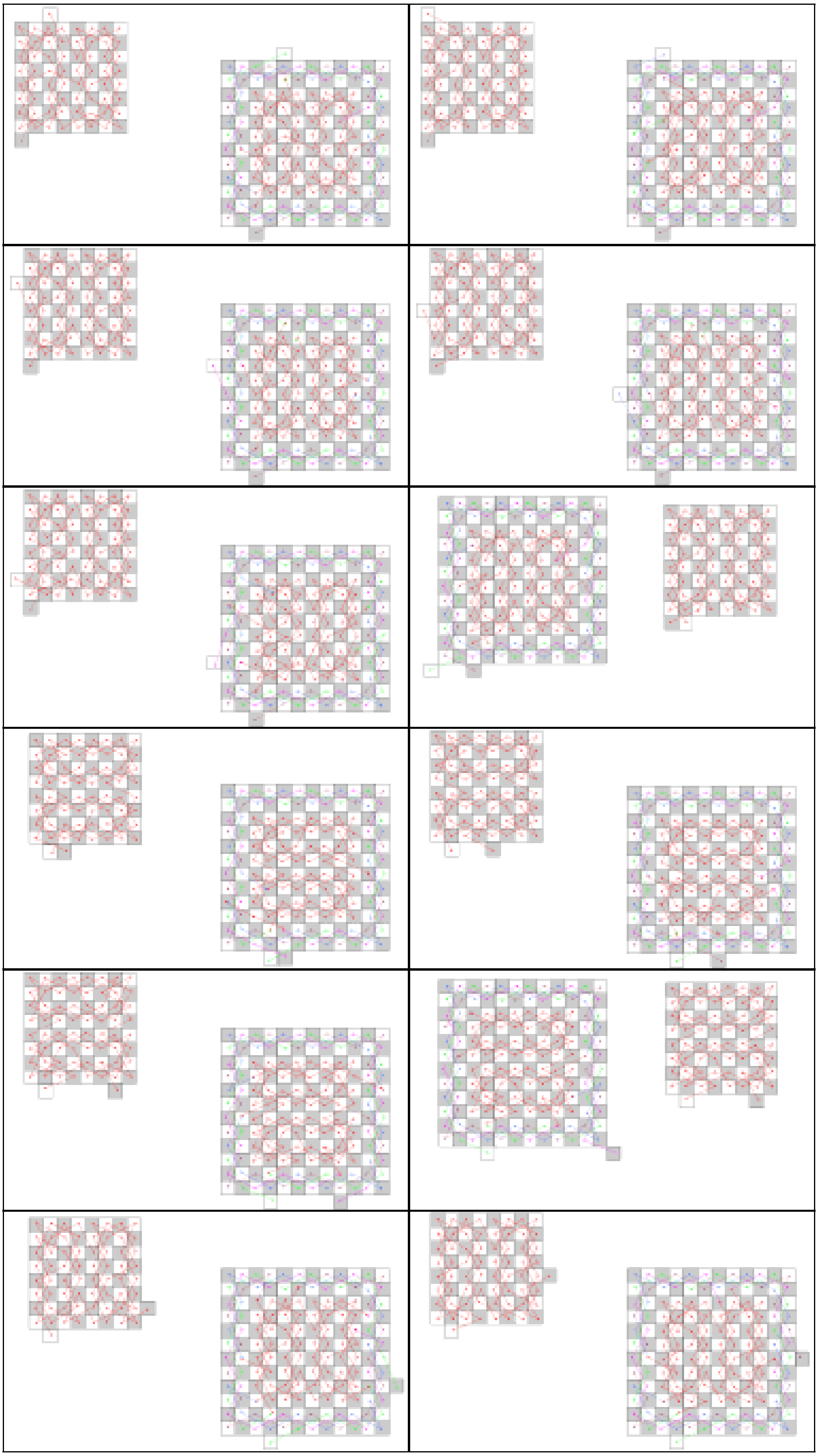
附件三



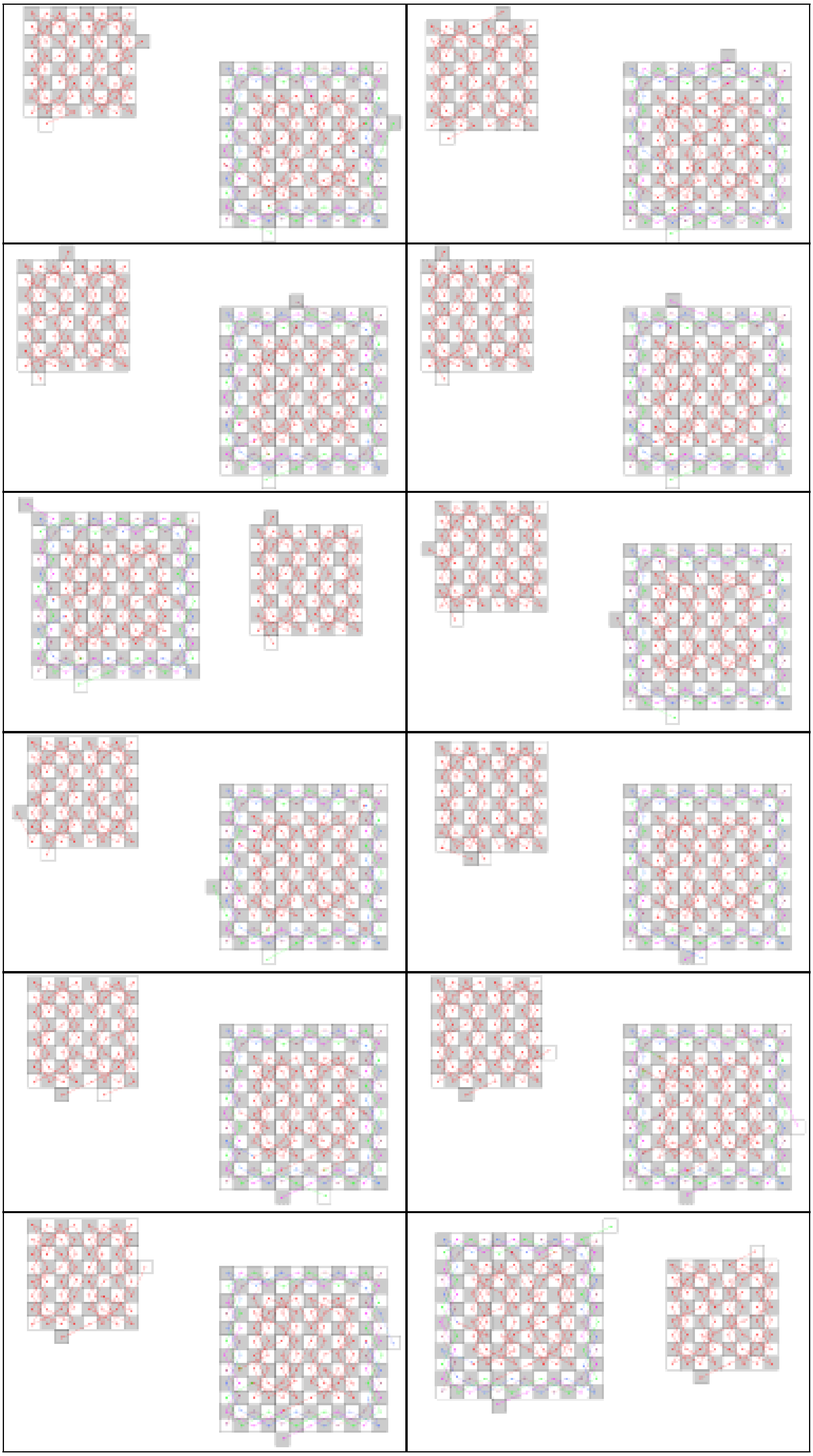
附件三



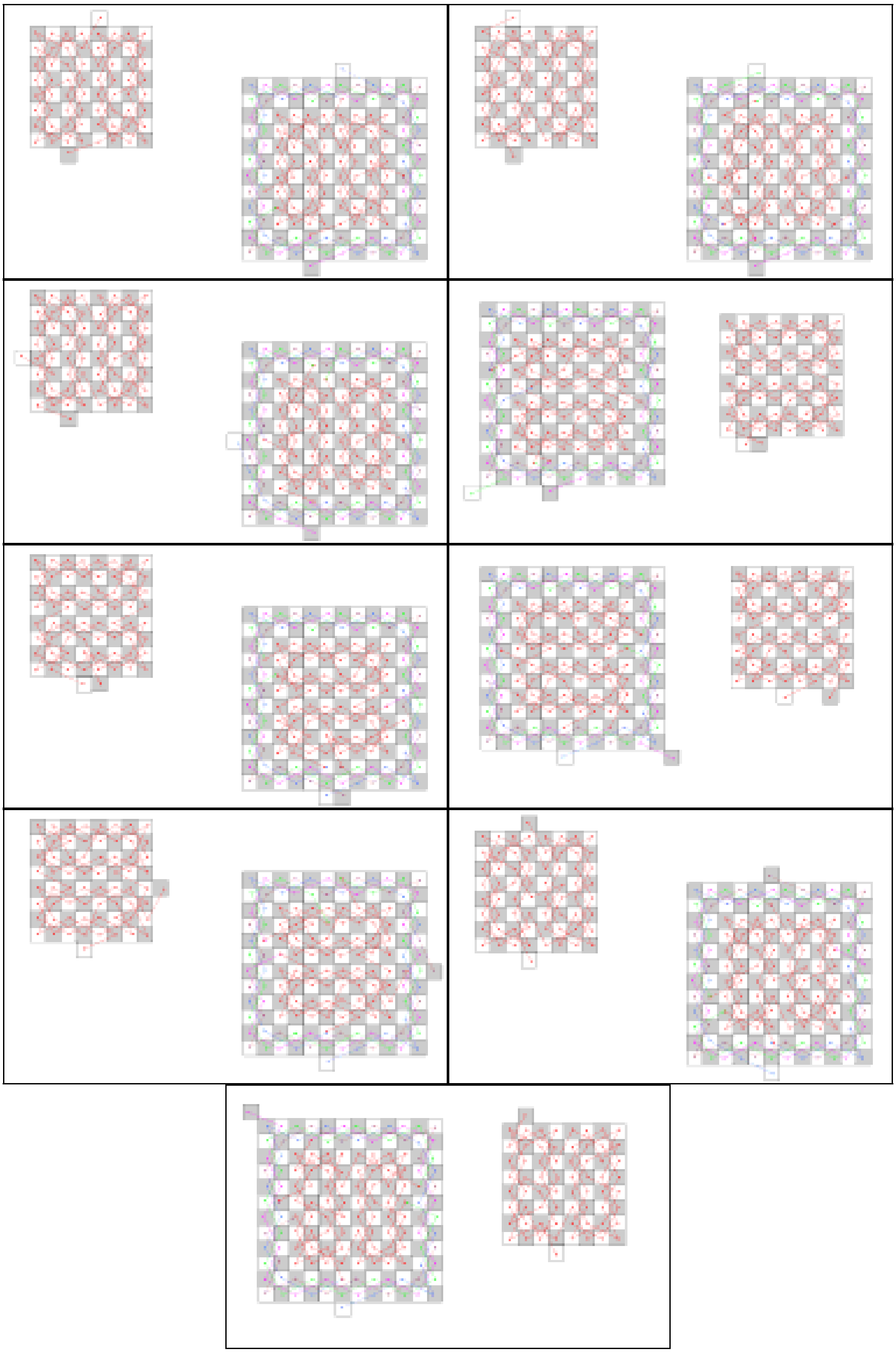
附件三



附件三



附件三



評　語

030404 **國中組數學科**

一個關於一筆劃的數學遊戲

討論某類圖形的漢彌爾頓路徑。利用接合的技巧，做了完整的分析。或許可再更進一步加入對不規則漢彌爾頓路徑的探討，如此結果將更為完美。