中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030403

臺北縣立蘆洲國民中學

指導老師姓名

孫雲龍

作者姓名

洪紹軒

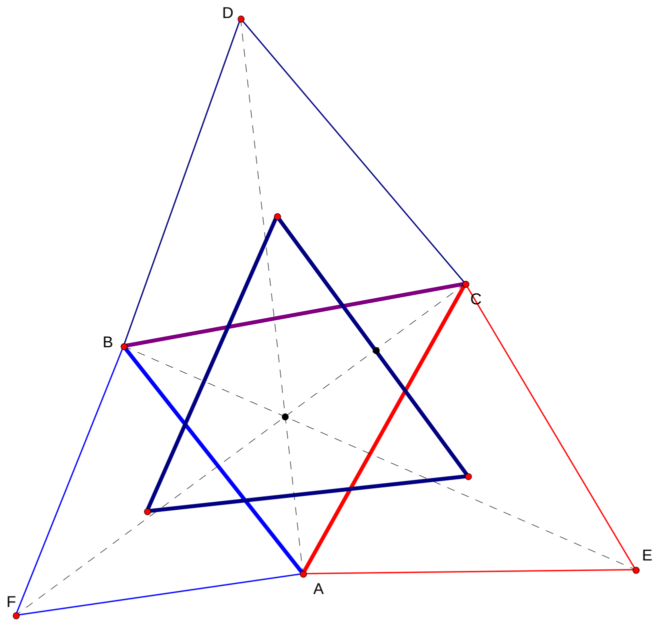
張能傑

蔡秉洲

壹、摘要

在浩瀚的海洋當中有一個神秘的百慕達三角洲，那麼在數學幾何當中是否也有神秘的三角形呢？

在課堂上，數學老師提到拿破崙不只是軍事家而且也算是數學家，他在數學史上留了一個以自己爲名的三角形定理，名爲拿破崙三角形定理。當看到此圖形〈圖一〉，幾何當中有如此神秘的圖形，因而興起了對此圖形深入研究的慾望，也是讓我們自己對數學有更深入的了解。雖然它是簡單的幾個三角形與線段所組成的圖形，卻是個富含許多創意與深思的幾何圖形，讓我們不由自主的陷入其中。



（圖一）

貳、研究動機

我們利用三角形的重心、外心，三角形邊長中點的連線和相似三角形的基本知識（國立編譯館第五冊第一章、第二章、第三章）來針對它的長度、面積以及比例來做探討，看看它的所有關聯性。爲了方便計算及作圖，我們利用了 GSP 繪圖軟體做爲我們主要的繪圖工具，我們三個人腦是最主要的思考工具。

參、研究目的

一、研究拿破崙三角形的邊長如何求？

二、在這個拿破崙三角形內，是否還能產生出其他的正三角形？

三、拿破崙三角形與它外面的六邊形的關係如何？

四、拿破崙三角形裡面還有沒有其他可以探討的地方？

五、任意三角形在移動任何一點時，整個圖形會有什麼樣子的變化？

六、有沒有可以套用的公式？

七、如果知道拿破崙三角形及費瑪點是否可畫出原始三角形？

肆、使用設備及器材

GSP 繪圖軟體、Microsoft　Word 軟體、紙、筆、國中數學課本

伍、研究過程

1. 做一個任意三角形 ABC，再以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 爲邊長，各做出一個正三角形。
2. 把三個正三角形(ΔBCD、ΔABF、ΔACE)的重心 A_1、B_1、C_1 連起來，會形成一個正三角形（附錄一），此爲拿破崙三角形。
3. 將外面的三個正三角形（ΔBCD、ΔABF、ΔACE）邊長的中點 M_1 連 G_1、D_1 連 F_1、E_1 連 H_1、會形成三個交點 I_1、J_1、K_1，這三個交點會形成另外一個小的三角形 $I_1J_1K_1$。

$\overline{A_1B_1}$ ： $\overline{D_1F_1}$ =2：3 且 $\overline{A_1B_1}\,//\,\overline{D_1F_1}$

$\overline{B_1C_1}$ ： $\overline{E_1H_1}$ =2：3 且 $\overline{B_1C_1}\,//\,\overline{E_1H_1}$

$\overline{A_1C_1}$ ： $\overline{M_1G_1}$ =2：3 且 $\overline{A_1C_1}\,//\,\overline{M_1G_1}$

$\therefore \overline{D_1F_1} = \overline{M_1G_1} = \overline{E_1H_1}$

$\therefore \Delta I_1J_1K_1$ 是正三角

且 $\overline{I_1J_1} = \dfrac{1}{2}\overline{A_1B_1}$

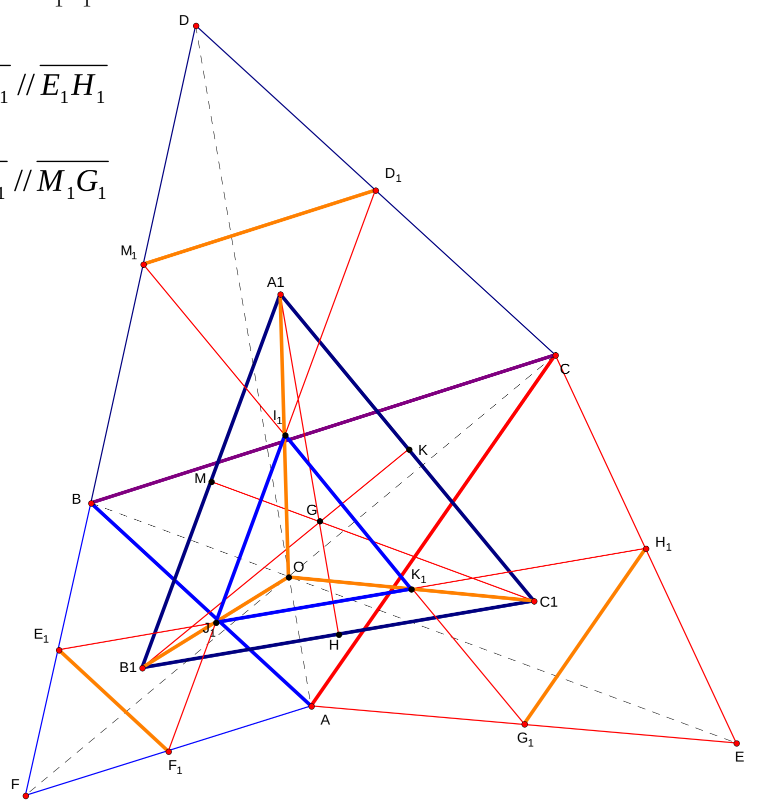
$\overline{J_1K_1} = \dfrac{1}{2}\overline{B_1C_1}$

$\overline{K_1I_1} = \dfrac{1}{2}\overline{A_1C_1}$

$\overline{I_1J_1} = \dfrac{1}{3}\overline{D_1F_1}$

$\overline{J_1K_1} = \dfrac{1}{3}\overline{E_1H_1}$

$\overline{K_1I_1} = \dfrac{1}{3}\overline{M_1G_1}$



(圖二)

A_1 是三角形 $M_1D_1I_1$ 的外心，也是三角形 DCO 的外心
B_1 是三角形 $E_1F_1J_1$ 的外心，也是三角形 BFO 的外心
C_1 是三角形 $G_1H_1K_1$ 的外心，也是三角形 CEO 的外心

$\overline{A_1I_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\overline{BC}$ 。$\overline{A_1O} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\overline{BC}$ 。

$\overline{B_1J_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\overline{BA}$ 。$\overline{B_1O} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\overline{BA}$ 。

$\overline{C_1K_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}\overline{AC}$ 。$\overline{C_1O} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\overline{AC}$ 。

$\overline{A_1I_1} = \dfrac{1}{2}\overline{A_1O}$ 。$\overline{B_1J_1} = \dfrac{1}{2}\overline{B_1O}$ 。$\overline{C_1K_1} = \dfrac{1}{2}\overline{C_1O}$ 。

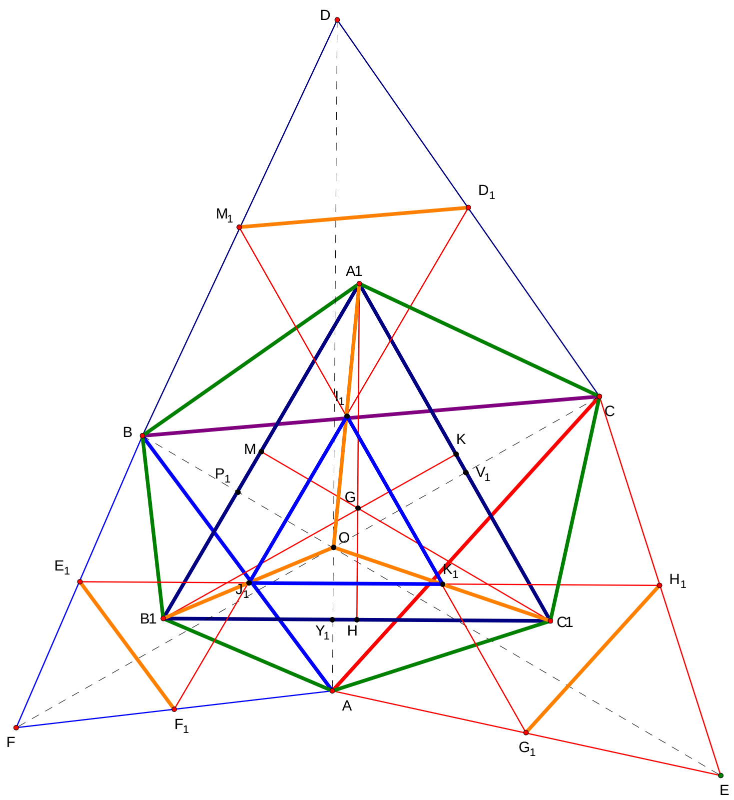
將點 A、點 B_1、點 B、點 A_1、點 C、點 C_1用線段連接起來，會形成一個六邊形。

➔ $\overline{A_1B} = \overline{A_1O}$，$\overline{BB_1} = \overline{B_1O}$，所以形成鳶形 A_1BB_1O，$\overline{A_1B_1}$ 是鳶形 A_1BB_1O 的對角線且 $\overline{BP_1} = \overline{P_1O}$ 。

➔ $\overline{A_1C} = \overline{A_1O}$，$\overline{C_1C} = \overline{C_1O}$，所以形成鳶形 A_1CC_1O，，$\overline{A_1C_1}$ 是鳶形 A_1CC_1O 的對角線且 $\overline{CV_1} = \overline{V_1O}$ 。

➔ $\overline{B_1A} = \overline{B_1O}$，$\overline{AC_1} = \overline{C_1O}$，所以形成鳶形 B_1OC_1A，$\overline{B_1C_1}$ 是鳶形 B_1OC_1A 的對角線且 $\overline{AY_1} = \overline{OY_1}$ 。

$\Delta A_1BB_1 = \Delta A_1OB_1$。
$\Delta B_1OC_1 = \Delta B_1AC_1$。
$\Delta A_1CC_1 = \Delta A_1OC_1$。



（圖三）

六邊形 $A_1BB_1AC_1C$ 面積=兩倍拿破崙三角形 $A_1B_1C_1$面積

∴ $\Delta ABC+\Delta A_1BC+\Delta BB_1A+\Delta ACC_1$=兩倍拿破崙三角形 $A_1B_1C_1$面積

〈 ΔABC面積見附錄二〉

$$\Delta ABC+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{AB}^2+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{BC}^2+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{CA}^2=2N\Delta A_1B_1C_1$$

$$\rightarrow \Delta ABC+\frac{\sqrt{3}}{12}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=2(\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{A_1B_1}^2)=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{A_1B_1}^2$$

註：N 爲拿破崙三角形代號

$$\rightarrow \overline{A_1B_1}^2=\frac{2}{\sqrt{3}}【\Delta ABC+\frac{\sqrt{3}}{12}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)】$$

$$\rightarrow \overline{A_1B_1}=\sqrt{\frac{2【\Delta ABC+\frac{\sqrt{3}}{12}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)】}{\sqrt{3}}}$$

∴拿破崙三角形的邊長爲： $\sqrt{\frac{2【\Delta ABC+\frac{\sqrt{3}}{12}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)】}{\sqrt{3}}}$

∴小的三角形 $I_1J_1K_1$的邊長等於 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2【\Delta ABC+\frac{\sqrt{3}}{12}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)】}{\sqrt{3}}}$

(費瑪點到拿破崙三角形重心的距離)

$$\frac{2\times(AreaAC_1OB_1)}{\overline{B_1C_1}}=\overline{AO}$$

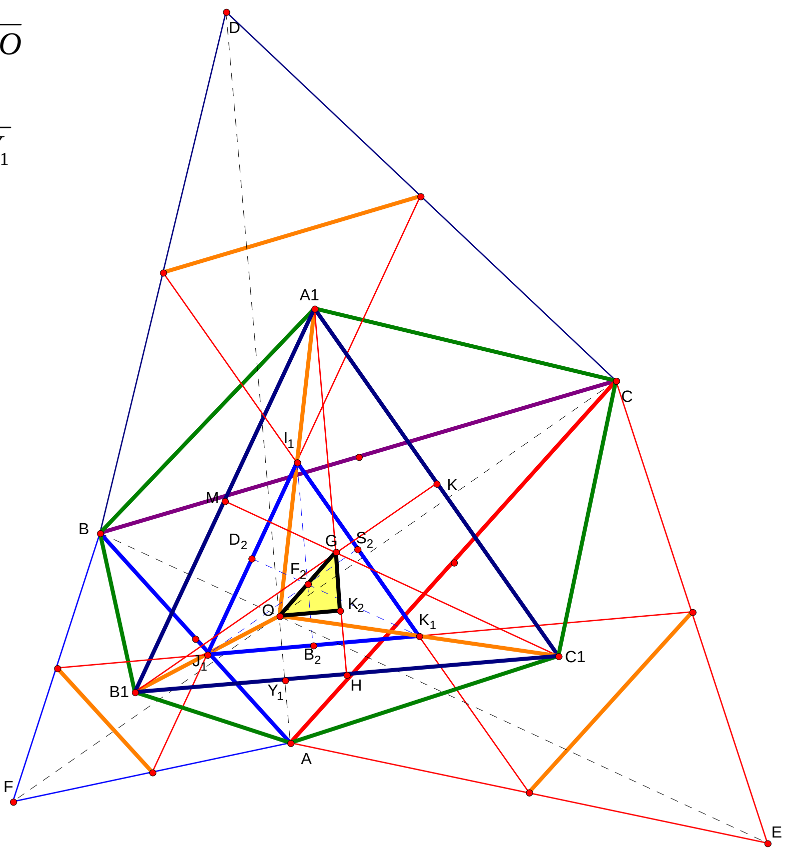
$$2\times\Delta C_1AO\div\overline{AO}=\overline{C_1Y_1}$$

$$\overline{Y_1H}=\overline{C_1Y_1}-\overline{C_1H}$$

$$\overline{GH}=\frac{\sqrt{3}}{6}\overline{C_1B_1}$$

$$\overline{OY_1}=\frac{1}{2}\overline{AO}$$

$$\overline{GH}-\overline{OY_1}=\overline{GK_2}$$



（圖四）

費瑪點到拿破崙三角形重心的距離：$\sqrt{(\overline{GH}-\overline{OY_1})^2+\overline{Y_1H}^2}=\overline{GO}$

∴費瑪點到小正三角形重心的距離：$\dfrac{\sqrt{(\overline{GH}-\overline{OY_1})^2+\overline{Y_1H}^2}}{2}=\overline{F_2O}$

(拿破崙三角形的內部解析)

（代號）：

令平行四邊形 $M_2B_1N_1J_1=\boldsymbol{a_1}$

令四邊形 $P_1O_1Q_1M=\boldsymbol{b_1}$

令平行四邊形 $A_1R_1I_1S_1=\boldsymbol{c_1}$

令四邊形 $T_1U_1V_1K=\boldsymbol{d_1}$

令平行四邊形 $K_1X_1C_1W_1=\boldsymbol{e_1}$

令四邊形 $Z_1Y_1HA_2=f_1$

令梯形 $J_1N_1Y_1Z_1=\boldsymbol{g_1}$

令梯形 $A_2HX_1K_1=\boldsymbol{h_1}$

令梯形 $K_1W_1V_1U_1=\boldsymbol{m_1}$

令梯形 $T_1KS_1I_1=\boldsymbol{n_1}$

令梯形 $I_1R_1MQ_1=\boldsymbol{p_1}$

令梯形 $O_1P_1M_2J_1=\boldsymbol{r_1}$

$\boldsymbol{a_1+g_1+f_1=h_1+e_1} \because \boldsymbol{g_1=h_1} \Rightarrow \boldsymbol{a_1+f_1=e_1}$

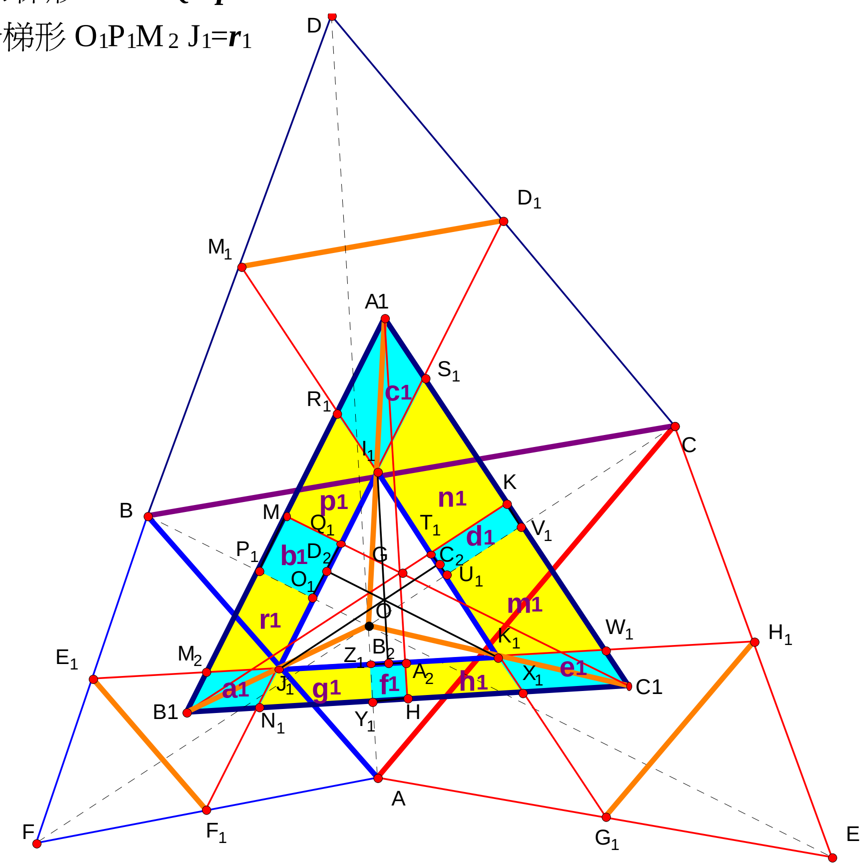
$\boldsymbol{a_1+r_1+b_1=p_1+c_1} \because \boldsymbol{r_1=p_1} \Rightarrow \boldsymbol{a_1+b_1=c_1}$

$\boldsymbol{e_1+m_1+d_1=n_1+c_1} \because \boldsymbol{m_1=n_1} \Rightarrow \boldsymbol{e_1+d_1=c_1}$

且$\because \boldsymbol{a_1+b_1=e_1+d_1}$

$\Rightarrow \boldsymbol{a_1+b_1=a_1+f_1+d_1}$

$\Rightarrow \boldsymbol{b_1=f_1+d_1}$



（圖五）

陸、研究結果--(見圖四)

一、<u>拿破崙</u>三角形的邊長＝$\sqrt{\dfrac{2【\Delta ABC+\dfrac{\sqrt{3}}{12}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)】}{\sqrt{3}}}$

二、<u>拿破崙</u>三角形的高=$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{\dfrac{2【\Delta ABC+\dfrac{\sqrt{3}}{12}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)】}{\sqrt{3}}}$

三、形成費瑪點的線段長：

形成費瑪點的線段：拿破崙三角形的高

$\overline{DA}$ ： $\overline{A_1H}=\overline{CF}$ ： $\overline{B_1K}=\overline{BE}$ ： $\overline{C_1M}$ =2：1

$$\overline{DA}=\overline{CF}=\overline{BE}=\sqrt{3}\times\sqrt{\dfrac{2【\Delta ABC+\dfrac{\sqrt{3}}{12}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)】}{\sqrt{3}}}$$

四、<u>拿破崙</u>三角形的面積＝$\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{2【\Delta ABC+\dfrac{\sqrt{3}}{12}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)】}{\sqrt{3}}$

$$=\frac{1}{2}【\Delta ABC+\frac{\sqrt{3}}{12}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)】$$

五、費馬點與<u>拿破崙三角形重心</u>的距離＝$\sqrt{【(\overline{GH}-\overline{OY_1})^2+\overline{Y_1H}^2】}=\overline{GO}$

六、費馬點與<u>小正三角形重心</u>的距離＝$\dfrac{\sqrt{【\langle\overline{GH}-\overline{OY_1}\rangle^2+\overline{Y_1H}^2】}}{2}=\overline{F_2O}$

七、<u>拿破崙</u>三角形與小正三角形的邊長比＝2：1

八、<u>拿破崙</u>三角形與小正三角形的周長比＝2：1

九、<u>拿破崙</u>三角形與小正三角形的面積比＝4：1

十、六邊形周長是費瑪點到小正三角形的頂點和的四倍。

十一、<u>拿破崙</u>三角形與六邊形的面積比＝1：2

十二、小正三角形與六邊形的面積比＝1：8

十三、六邊形分成三個鳶形，費瑪點是三個鳶形的交點。

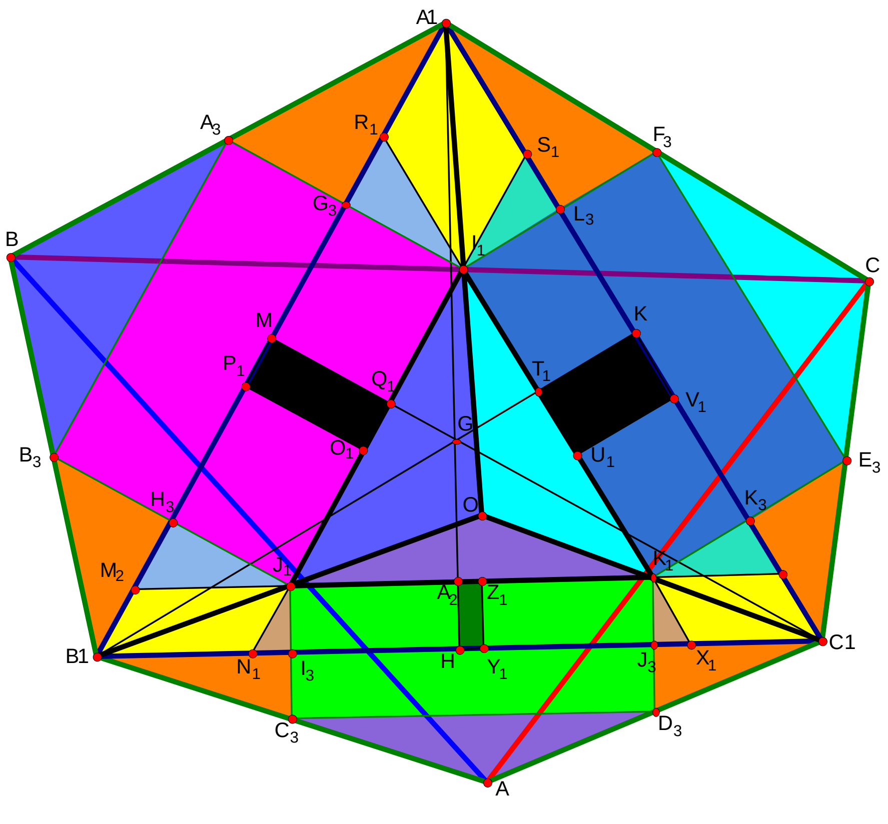
柒、討論

揭開面具！

這副面具看似平淡無奇，但底下卻藏著許多秘密。它不但擁有多種不同的像貌，臉型更是變化多端，它到底有什麼特別的樣子呢？那就來揭開面具吧！

把六邊形 $AB_1BA_1CC_1$當作是一個大面具：

令四邊形 $MP_1O_1Q_1$爲它左邊的大眼睛	令四邊形 $KT_1U_1V_1$爲它右邊的大眼睛
令四邊形 $Z_1Y_1HA_2$ 爲它的牙齒	令三角形 $I_1J_1K_1$爲它的正三角尖鼻
令四邊形 $J_1K_1D_3C_3$ 爲它的嘴唇	令三角形 C_3D_3A 爲它的下巴
令四邊形 $A_3B_3J_1I_1$爲它的左臉頰	令四邊形 $F_3E_3K_1I_1$爲它的右臉頰
令三角形 A_3BB_3爲左邊的三角耳朵	令三角形 F_3CE_3爲右邊的三角耳朵

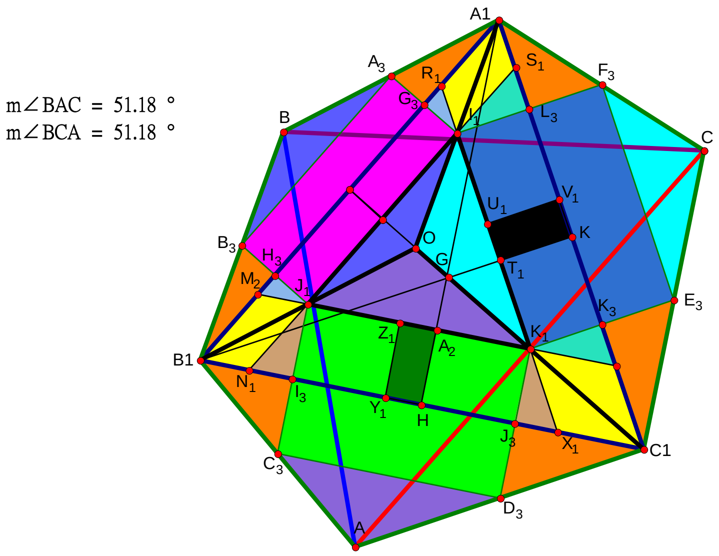


(原始面具圖)

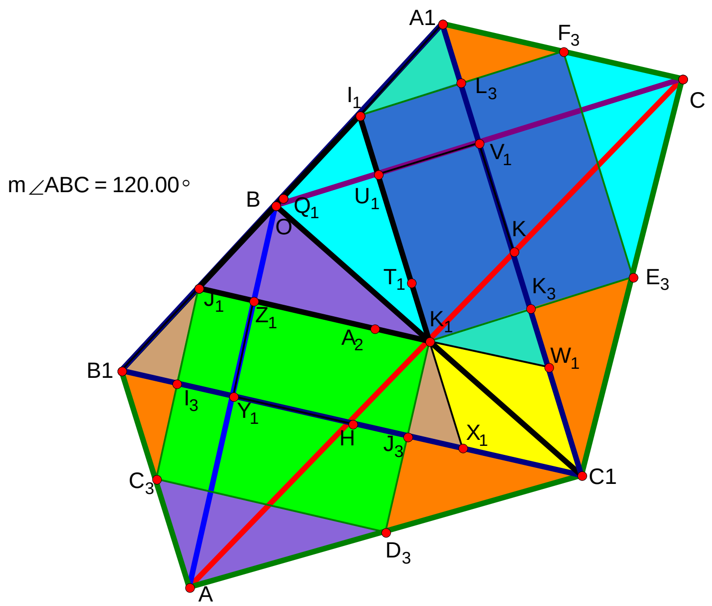
※左眼睛要如何才會閉起來？

情況一：當原始三角形 ABC 變爲等腰三角形〈∠BAC=∠BCA〉，左眼睛就會閉起來。(面具圖一)

情況二：當 B 點與費瑪點 O 重疊時，左眼睛就會閉起來，且∠CBA=120 度時，左臉頰就會不見。(面具圖二)



(面具圖一)

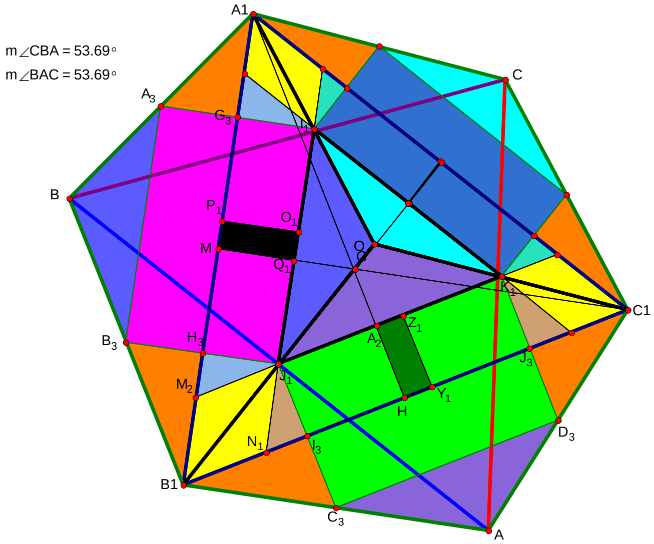


(面具圖二)

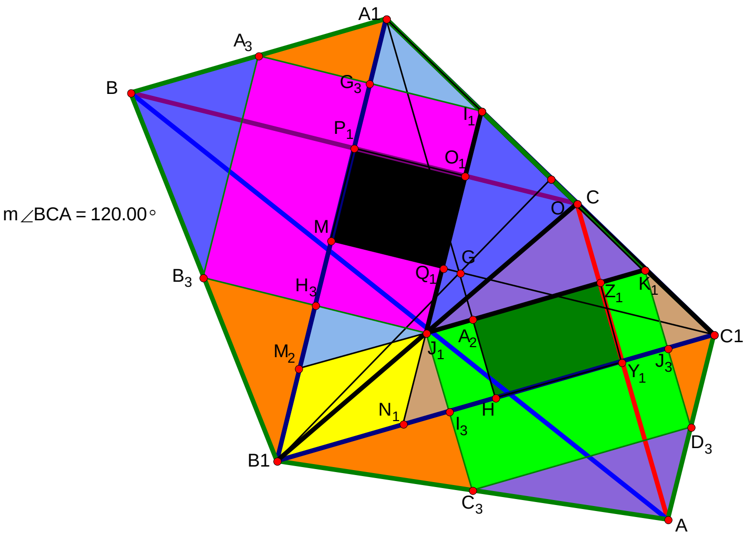
※右眼睛要如何才會閉起來？

情況一：當原始三角形 ABC 變爲等腰三角形〈∠CBA=∠BAC〉，右眼睛就會閉起來。(面具圖三)

情況二：當 C 點與費瑪點 O 重疊時，右眼睛就會閉起來，且∠BCA=120 度時，右臉頰就會不見。(面具圖四)



(面具圖三)

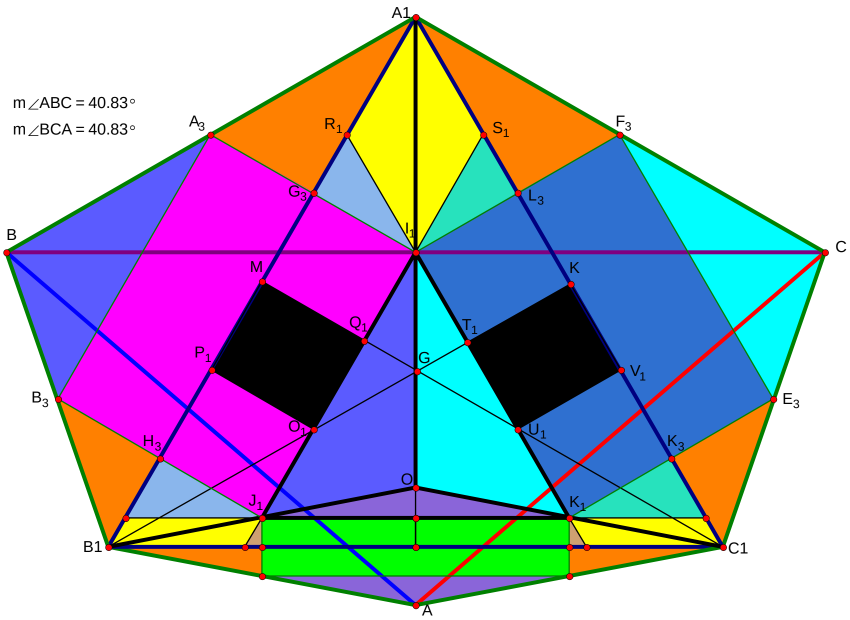


(面具圖四)

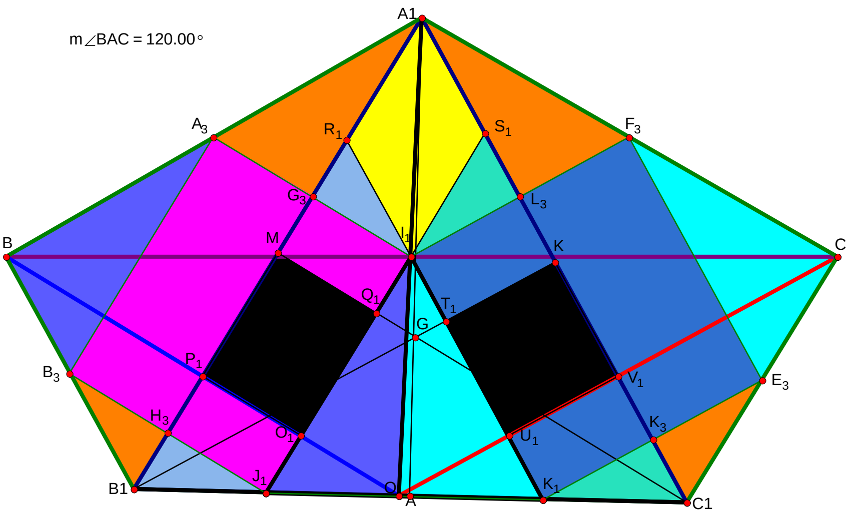
※牙齒要如何才會不見？

情況一：當原始三角形 ABC 變爲等腰三角形〈∠ABC=∠BCA〉，牙齒就會不見。(面具圖五)

情況二：當 A 點與費瑪點 O 重疊時，牙齒就會不見，且∠BAC=120 度時，嘴唇、下巴就會不見。(面具圖六)



(面具圖五)



(面具圖六)

當∠BCA 度數越小的時候，它的右臉頰面積、右耳朵就會比較大。

當∠CBA 度數越小的時候，它的左臉頰面積、左耳朵就會比較大。

當∠BAC 度數越小的時候，它的嘴唇、下巴就會比較大。

右眼睛、左眼睛、牙齒，其中兩個較小的面積和必等於第三個較大的面積。

且較小的兩個長方形的寬和會等於較大的長方形的寬。

例：左眼睛的寬+牙齒的寬=右眼睛的寬(原始面具圖)

(眼睛與牙齒的變動)

爲什麼有時候牙齒和眼睛都會隨著那張大臉的扭動而變來變去的？他的大臉到底又會變出什麼花招呢？咱們就拭目以待吧！

※爲什麼他的兩個大眼睛總是喜歡往上撐呢？牙齒又爲什麼一下露出左邊的，一下露出右邊的？首先必須從面積關係的部份著手。已經知道一個事實「原始三角形的任意一邊越長，其邊所對的平行四邊形越大」，利用這個事實，就能判斷出牙齒(或眼睛)會與哪一個平行四邊形相加而等於另一個較大的平行四邊形(詳細內容見拿破崙三角形的內部解析)，由此也可知牙齒(或眼睛)會在拿破崙三角形中線的左或右。運用此相加性質，就可任意拉動圖形，並且知道該怎麼拉動、從哪裡拉動，讓這張臉變成一副小丑面具！

(三角形的摺疊)

我們發現在整個六邊形中，若將拿破崙三角形的圖形從中去除，可分割出三塊三角形。則此三塊三角形中，各有一塊長方形，它們的面積彼此之間互有關係。接下來是我們的探討。

∵ A_3是$\overline{A_1B}$的中點，B_3是$\overline{BB_1}$的中點

∴ $\overline{A_3B_3}=\frac{1}{2}\overline{A_1B_1}$

又 T_2是$\overline{BP_1}$的中點

∴ $\overline{T_2P_1}=\frac{1}{2}\overline{BP_1}$

＊ 假設$\overline{A_3B_3}$爲 X、$\overline{T_2P_1}$爲 Y

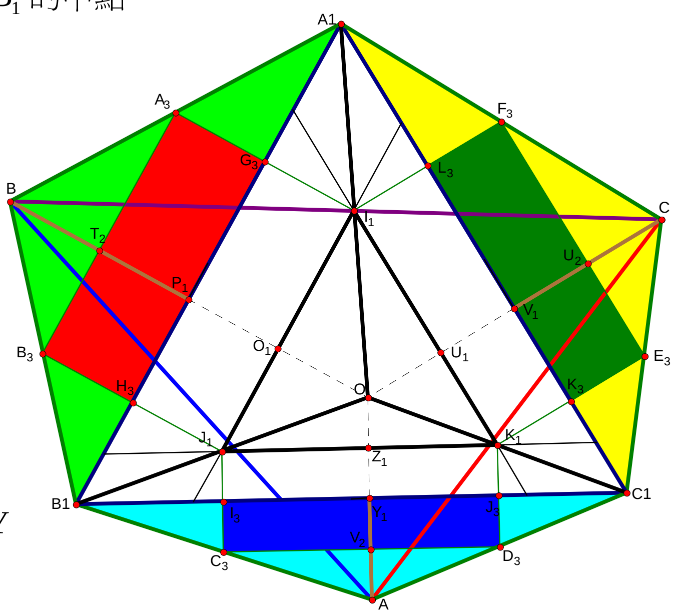
長方形 $A_3B_3H_3G_3$=XY

$\Delta A_1BB_1=2X\times2Y\times\frac{1}{2}=2XY$

由此可知：

→$\Delta A_1BB_1=2\times$長方形 $A_3B_3H_3G_3$

→$\Delta A_1A_3G_3+\Delta A_3BB_3+\Delta B_3B_1H_3$=長方形 $A_3B_3H_3G_3$



(面具圖七)

(同理可證)：

→ΔA_1CC_1 =2×長方形 $F_3L_3K_3E_3$ →$\Delta A_1F_3L_3+\Delta F_3CE_3+\Delta E_3K_3C_1$=長方形 $F_3L_3K_3E_3$
→ΔAB_1C_1=2×長方形 $I_3C_3D_3J_3$ →$\Delta B_1I_3C_3+\Delta C_3AD_3+\Delta D_3J_3C_1$=長方形 $I_3C_3D_3J_3$

在六邊形中，有些圖形之間的比例互有關聯性。

(代號)：

令$\Delta B_3C_3J_1$的面積代號爲 甲 。

令$\Delta A_3F_3I_1$的面積代號爲 乙 。

令$\Delta E_3D_3K_1$的面積代號爲 丙 。

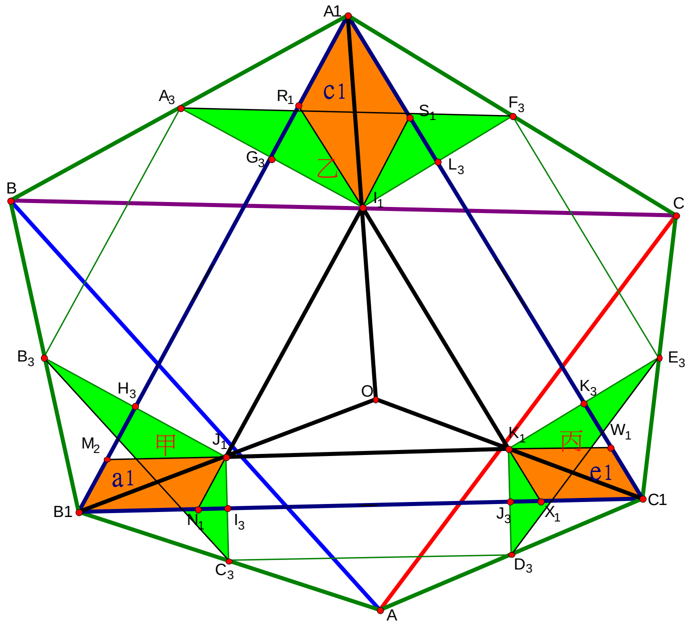
令平行四邊形 $M_2B_1N_1J_1$的面積代號爲 $\boldsymbol{a}_1$ 。

令平行四邊形 $A_1R_1I_1S_1$的面積代號爲 $\boldsymbol{c}_1$ 。

令平行四邊形 $K_1X_1C_1W_1$的面積代號爲 $\boldsymbol{e}_1$ 。

三角形與平行四邊形的比例關係	比值
甲：乙 $=\boldsymbol{a}_1 : \boldsymbol{c}_1$	相同
乙：丙 $=\boldsymbol{c}_1 : \boldsymbol{e}_1$	相同
丙：甲 $=\boldsymbol{e}_1 : \boldsymbol{a}_1$	相同

註：比例並不會隨圖形而改變，但比值會因圖形的大小，而有所變化。



(面具圖八)

捌、結論

◎不利用角度的方式而只用邊長求出拿破崙三角形的邊長及面積，可以利用拿破崙三角形的中線長度求出形成費瑪點的 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 長。(圖四)

◎小正三角形的重心與拿破崙三角形的重心和費瑪點會在同一條直線上，且小三角形的重心是費瑪點與拿破崙三角形的重心之間連線的中點。(圖四)

◎費瑪點到拿破崙三角形的三個頂點和的兩倍等於六邊形的周長。

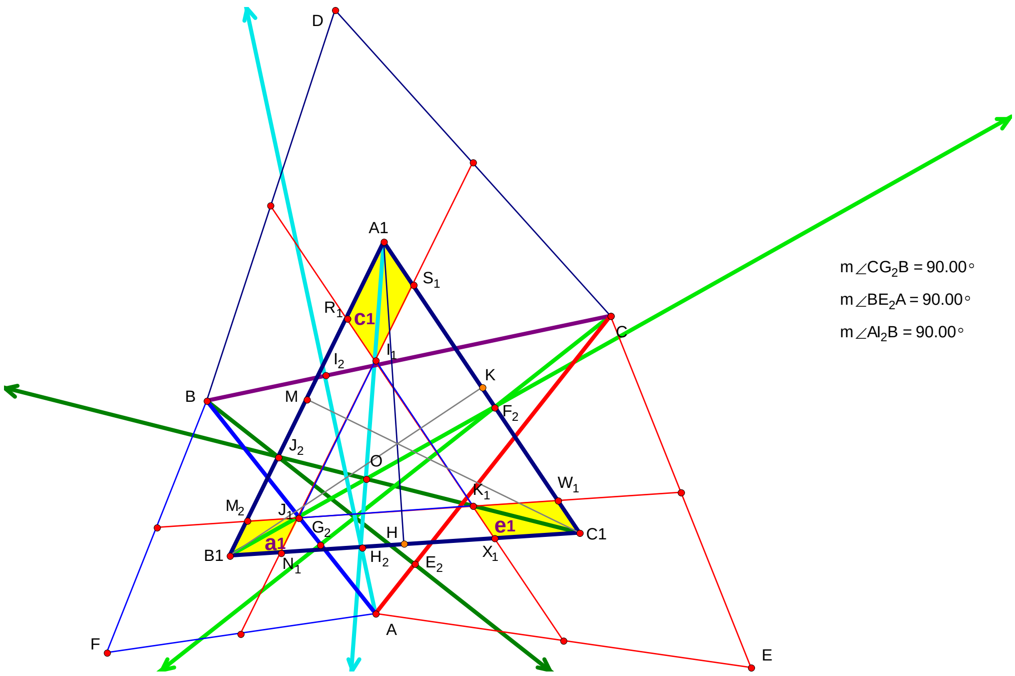
$2(\overline{OA_1}+\overline{OB_1}+\overline{OC_1})$=六邊形 $AB_1BA_1CC_1$ 的周長。

◎ 費瑪點可以將六邊形分成三個鳶形，而且也是三個鳶形的交點，且拿破崙三角形的三個邊長剛好是三個鳶形的對角線。

◎任意三角形的角度越大它所對的黃色平行四邊形面積越大。(原始面具圖)

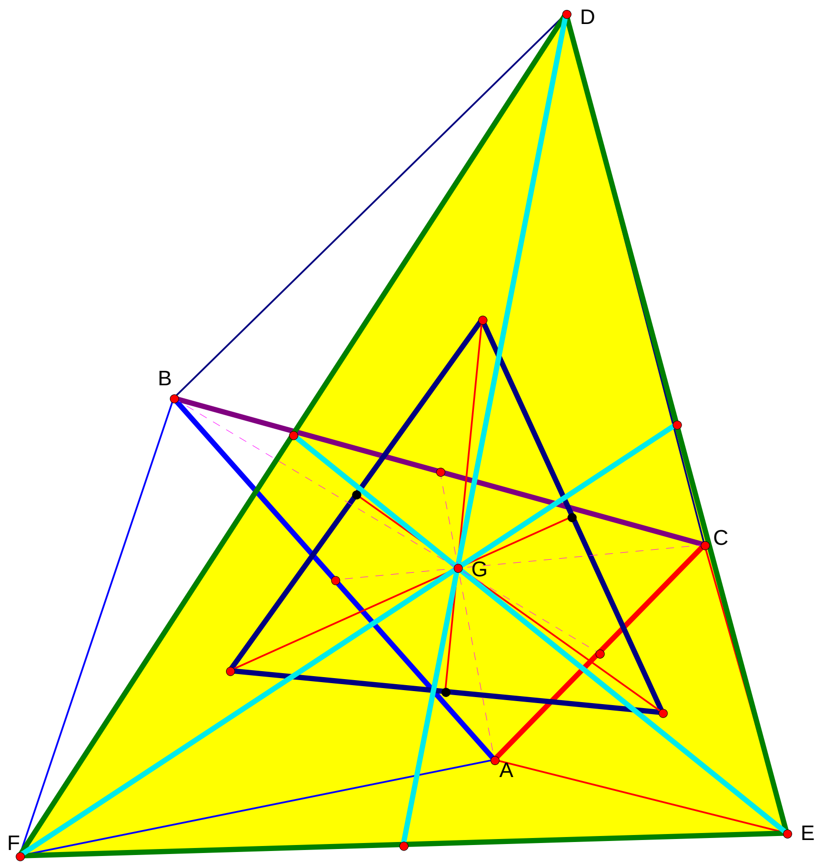
◎(可利用平行四邊形找出原始三角形的高及費瑪點)

將平行四邊形 a_1 的對角線 $\overline{B_1J_1}$ 加以延伸，其延伸線段將與拿破崙三角形的邊長 $\overline{A_1C_1}$ 相交於點 F_2 ，再將C與 F_2 連線並延伸，此延伸線段又會交原始三角形ABC的邊長 $\overline{AB}$ 於點 G_2 ，而 $\overline{CG_2}$ 爲原始三角形 $\overline{AB}$ 的高。同理可證 $\overline{BE_2}$ 是 $\overline{AC}$ 的高， $\overline{AI_2}$ 是 $\overline{BC}$ 的高。三個平行四邊形a_1、c_1、e_1的對角線的延長會交於一點，此點爲費瑪點O。



（圖六）

◎原始三角形的重心是拿破崙三角形的重心，也是外圍大三角形DFE的重心。



（圖七）

◎(反推原始三角形的面積)

※已知條件：

一個拿破崙三角形、費瑪點、費瑪點到拿破崙三角形三個頂點的距離。

※求：

如何反推原始三角形的面積。

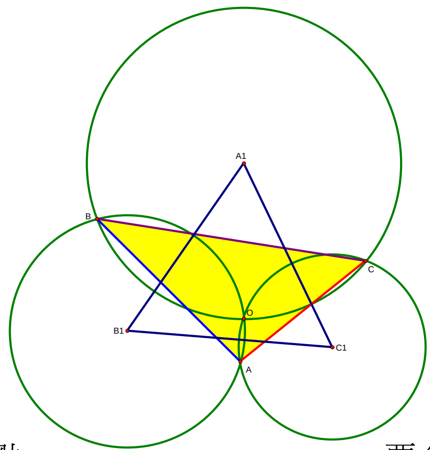
令 $\dfrac{\overline{A_1O}+\overline{B_1O}+\overline{C_1O}}{2}=S$　　令 $\overline{A_1O}=a$ ， $\overline{B_1O}=b$ ， $\overline{C_1O}=c$

$$\sqrt{\sqrt{3}\times\frac{(\overline{A_1O}+\overline{B_1O}+\overline{C_1O})}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{(-\overline{A_1O}+\overline{B_1O}+\overline{C_1O})}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{(\overline{AO}-\overline{BO}+\overline{CO})}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{(\overline{AO}+\overline{BO}-\overline{CO})}{2}}$$

$$=\sqrt{\sqrt{3}\times S\times\sqrt{3}【S-a】\times\sqrt{3}【S-b】\times\sqrt{3}【S-c】}$$

$$=\sqrt{9\times S\times(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$=3\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$



(圖八)

◎如果給一個拿破崙三角形與費瑪點，要怎麼畫出原

始三角形？

1.分別以拿破崙三角形的三個頂點爲圓心，以費瑪點到三個頂點爲半徑，做三個圓。

2.圓與圓之間外圍的交點，分別標上 A、B、C，並連線，所形成的三角形即爲原始三角形。(見圖八)

◎(六邊形周長與原始三角形周長的比值)

※ a 爲原始三角形的任一邊長

$$\left(\frac{\sqrt{3}a}{3}+\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)\div a = \left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}\right)\div a = \frac{2\sqrt{3}a}{3}\times\frac{1}{a} = \frac{2\sqrt{3}a}{3a} = \frac{\sqrt{12}a}{3a} = \frac{\sqrt{12}}{3}$$

依此，我們可推出：

六邊形周長與原始三角形周長比值= $\frac{\sqrt{12}}{3}$

面具下的拿破崙三角形就像百慕達三角洲一樣，深深的吸引著我們，一旦碰觸了它就陷入這幾何漩渦裡，無法自拔。每當它表情的改變，都足以撼動我們的心，讓我們深深的愛上這個面具。而且我們覺得當時的拿破崙大帝應該有使用過此圖形來做爲攻城掠地的戰術，讓敵人陷入無法自救的境地。我們也相信這個圖形曾被運用在一球多人的運動（如：籃球、足球、躲避球這類型）當中，做包圍的策略，讓敵人無法逃出拿破崙的手掌心。

玖、參考資料及其他

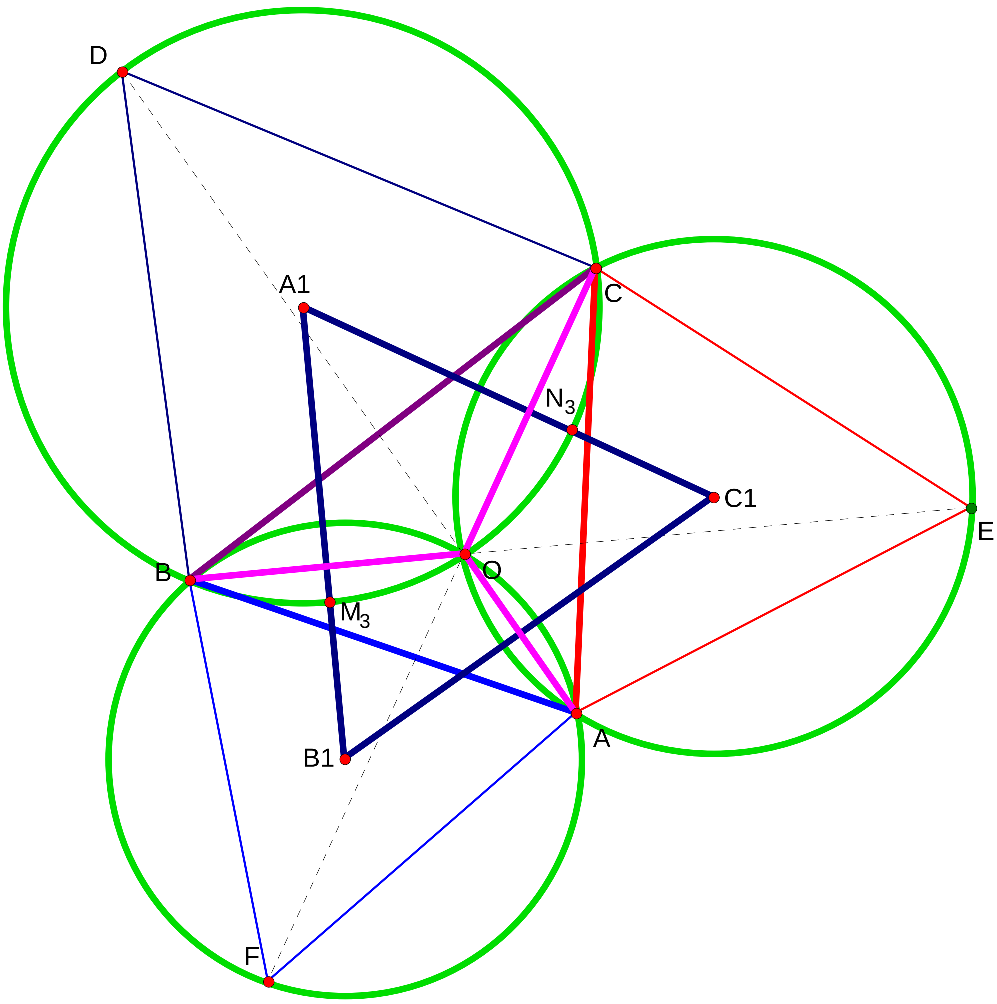
國立編譯館　第五冊

九章出版社　數學的藝術

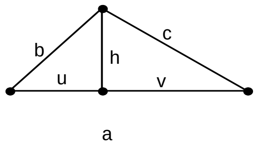
（附錄一）拿破崙三角形(<u>正三角形</u>)的證明

以 A_1、B_1、C_1爲圓心各作一個外接圓，分別爲⊙A_1、⊙B_1、⊙C_1。⊙A_1與⊙C_1相交於 C 點、O 點，並連線；⊙A_1與⊙B_1相交於 B 點、O 點，並連線；⊙B_1與⊙C_1相交於 A 點、O 點，並連線。$\overline{CO}$、$\overline{BO}$、$\overline{AO}$。因爲∠BOC=∠AOC=120 度，所以∠AOB=120 度，又∠F=60 度，得∠AOB+∠F=180 度，由此可知，B、O、A、F 四點共圓，且 O 點在ΔABF 的外接圓上，同理可知，O 點會是三個正三角形外接圓的公共交點。

$\overline{A_1B_1}$ 、$\overline{A_1C_1}$ 與⊙A_1相交於 M_3、N_3，M_3、N_3分別是弧 BM_3O、弧 ON_3C 的中點，進而推知弧 M_3ON_3上的圓心角∠A_1=60 度，同理可證∠B_1=∠C_1=60 度，所以，$\Delta A_1B_1C_1$爲正三角形。



（附錄二）----Helon 公式



$b^2 = u^2 + h^2$

$c^2 = v^2 + h^2$

→$u^2 - v^2 = b^2 - c^2$

→(u-v)(u+v)=$b^2 - c^2$

→u-v=$\dfrac{b^2 - c^2}{a}$

→u=$\dfrac{b^2 - c^2}{a} + v$

$= \dfrac{b^2 - c^2}{a} + a - u$

→2u=$\dfrac{b^2 - c^2}{a} + \dfrac{a^2}{a}$

$= \dfrac{b^2 - c^2 + a^2}{a}$

→u=$\dfrac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}$

$h^2 = b^2 - u^2$

h=$\sqrt{b^2 - u^2}$

A=$\dfrac{ah}{2} = \dfrac{a}{2}\sqrt{b^2 - u^2}$

$= \dfrac{\sqrt{a^2b^2 - a^2u^2}}{2}$

→(2A)$^2 = a^2b^2 - a^2u^2$

→4A^2=a$^2 b^2 - a^2 \times (\dfrac{b^2 - c^2 + a^2}{2a})^2$

→4A$^2 = a^2b^2 - a^2 \times \dfrac{(b^2 - c^2 + a^2)^2}{4a^2}$

→4A$^2 = a^2b^2 - \dfrac{(b^2 - c^2 + a^2)^2}{4}$

→4A$^2 = \dfrac{4a^2b^2 - (b^2 - c^2 + a^2)^2}{4}$

→16A$^2 = (2ab)^2 - (b^2 - c^2 + a^2)^2$

→16A^2 =【2ab+$(b^2 - c^2 + a^2)$】【2ab-$(b^2 - c^2 + a^2)$】

→16A^2 =【(a+b)$^2 - c^2$】【2ab$- b^2 + c^2 - a^2$】

→16A^2 =【(a+b)$^2 - c^2$】【c$^2 - (a^2 + b^2 - 2ab)$】

=【(a+b-c)(a+b+c)】【$c^2 - (a-b)^2$】

=【(a+b-c)(a+b+c)】【(c+(a-b))(c-(a-b))】

=(a+b-c)(a+b+c)(c+a-b)(c-a+b)

定義 S=$\dfrac{a+b+c}{2}$ →a+b+c=2S

→16A^2=2S×(2S-C-C)(2S-2b)(2S-2a)

→16A^2=2S×2(S-c)×2(S-b)×2(S-a)

→16A^2=16S(S-a)(S-b)(S-c)

→ A^2=S(S-a)(S-b)(S-c)

→A=$\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$

評 語

030403 國中組數學科

面具下的拿破崙三角形

探討一三角形和其拿破崙三角形間一些有趣的特性。充份展現了幾何圖形的優美性質，如能對不同形式的拿破崙三角都做出分析將更為完美。