

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030402

臺北縣立海山高級中學

指導老師姓名

陳鈺方

林明億

作者姓名

章偉恩

陳玟綾

黃珮涵

陳尚揚

中華民國第四十四屆全國中小學科學展覽

作品說明書

科 別：數學科

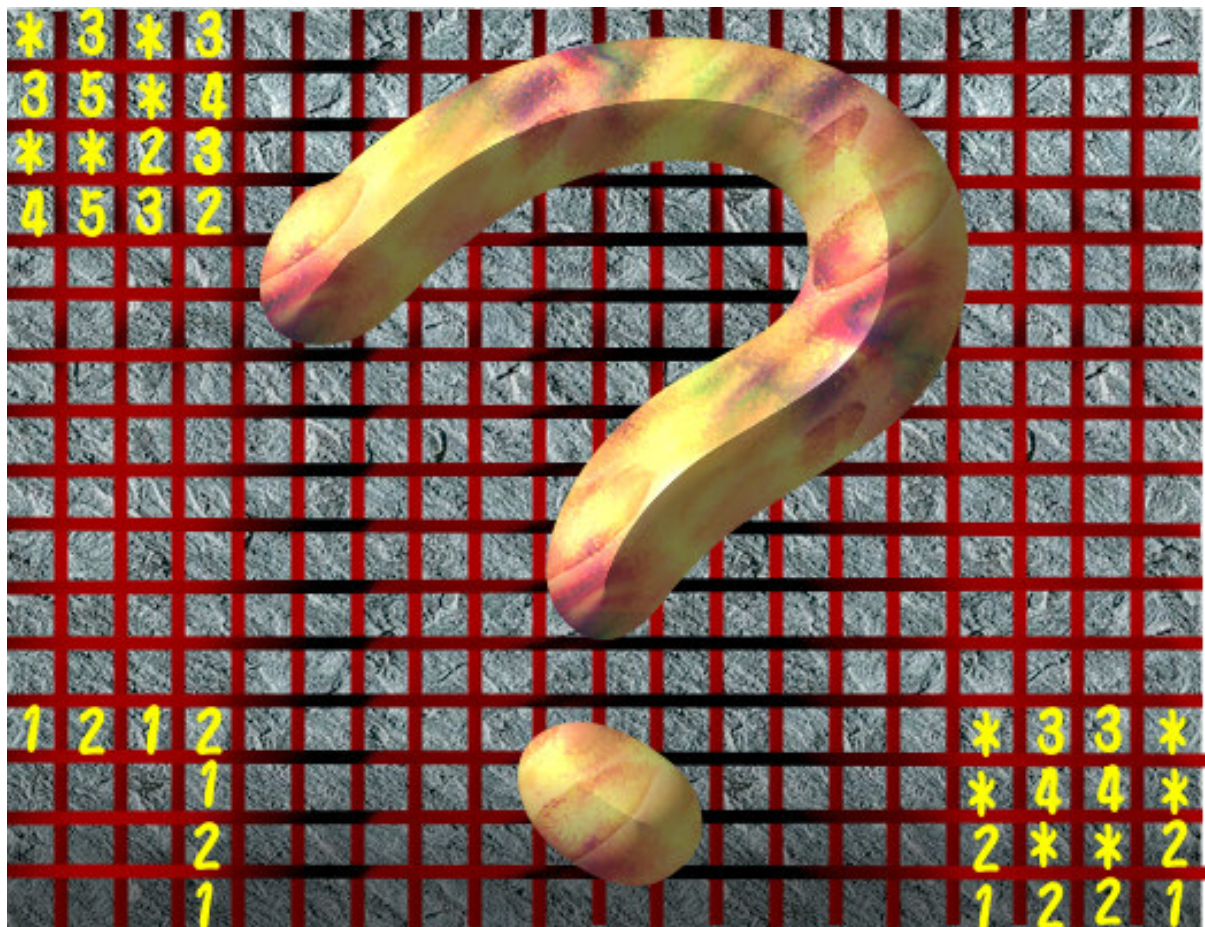
組 別：國中組

作品名稱：最後的審判

關 鍵 詞：踩地雷

編 號：

最後的審判



目錄

■ 壹.摘要	3
■ 貳.研究動機	3
■ 參.研究目的	3
■ 肆.研究設備及器材	3
■ 伍.研究過程或方法	4
■ 陸.研究結果	5
■ 柒.討論	22
■ 捌.結論	22
■ 玖.參考資料及其他	23

壹、摘要

貳、研究動機小遊戲，大啓示。你知道如何判斷該不該以「猜」來決定下一步嗎？答案在「最後的審判」！

一個遊戲的勝負，取決於遊戲技巧及關鍵性的運氣。但運氣不是永遠的，所以我們致力於找尋如何改善技巧。從幾次的遊戲之中，發現從數字排列的情形及相鄰二數的和差關係來判斷地雷的所在處是較可行的方法；從數字的排列中，我們發現許多可快速判斷的規則，例如長蛇陣、L 形、方陣形及數字和差與地雷分布的關係等；某些有多種分布情況的陣形，就算出各格可能有的地雷機率，以致於不得已要猜時，做出較安全(地雷)的判斷。

貳、研究動機

過年時，看到表哥正上網用 msn 和電腦另一端的同學聊天，邊聊邊玩踩地雷的遊戲。於是，我就和表哥對決了一場，但只能用一點數字便要推出地雷所在處，由於屢試屢敗，基於好勝心的作祟下，開始了我對踩地雷的研究。數週後，當我回到學校，在預習的過程中，發現第六章所教的「機率」和複習考的準備範圍「數型排列」與踩地雷似乎有些關係，於是便開始了我的研究。

參、研究目的

- 1.利用邏輯推理來分析如何破解踩地雷，並配合週遭數字，更準確判斷地雷位置。
- 2.若有多種情形下，分析其分佈的機率。

肆、研究設備及器材

1. 筆、紙、橡皮擦。
2. 電腦 Celeron。

伍、研究過程或方法

一、符號定義：

(一)

*=地雷 Z=已知為數字 X=推得為數字 #=可能為地雷 0=數字為零
☆=不為地雷 ?=什麼都不知道 @=任意

(二)

本說明書中，「數字」代表「以數字為中心」在周圍 3X3 方陣中，有「多少地雷數」。

二、研究過程：

(一) 先玩踩地雷後歸納出些許固定情況

(二) 因不可能玩遍所有模式,故使用別種方式

(三) 用逆向思考,將自己當電腦,來決定數字擺法

(四) 雖然正式踩地雷遊戲數字的擺法是隨機,但不好研究,故將數字排成有規律,非亂排

(五) 若用大盤格推,由於範圍太大,且每格和每格間互相牽連,這樣找不易找出規律,因此將範圍縮小致基本的 3X3 或是 4X4 大小

(六) 因靠牆較易判斷,故從靠牆開始,判斷地雷之處

(七) 先研究 L 形的(大 L, L, 小 L)以規律的數字擺入

(八) 再研究十字型以規律的數字擺入

(九) 還有正方形,用規律的數字擺入

(十)在過程(七)到(九)中,有些情形太多種,因此不能夠算規則,對破解踩地雷沒有太大幫助,因此將其收集下來,為多種可能形

(十一)找出一些無論利用規則去套或使用推理方式去解都無法解出的情形

(十二)已研究出一些規則,再玩踩地雷,便利用規則的套入,很快就可破解踩地雷,證實規則有助破解踩地雷

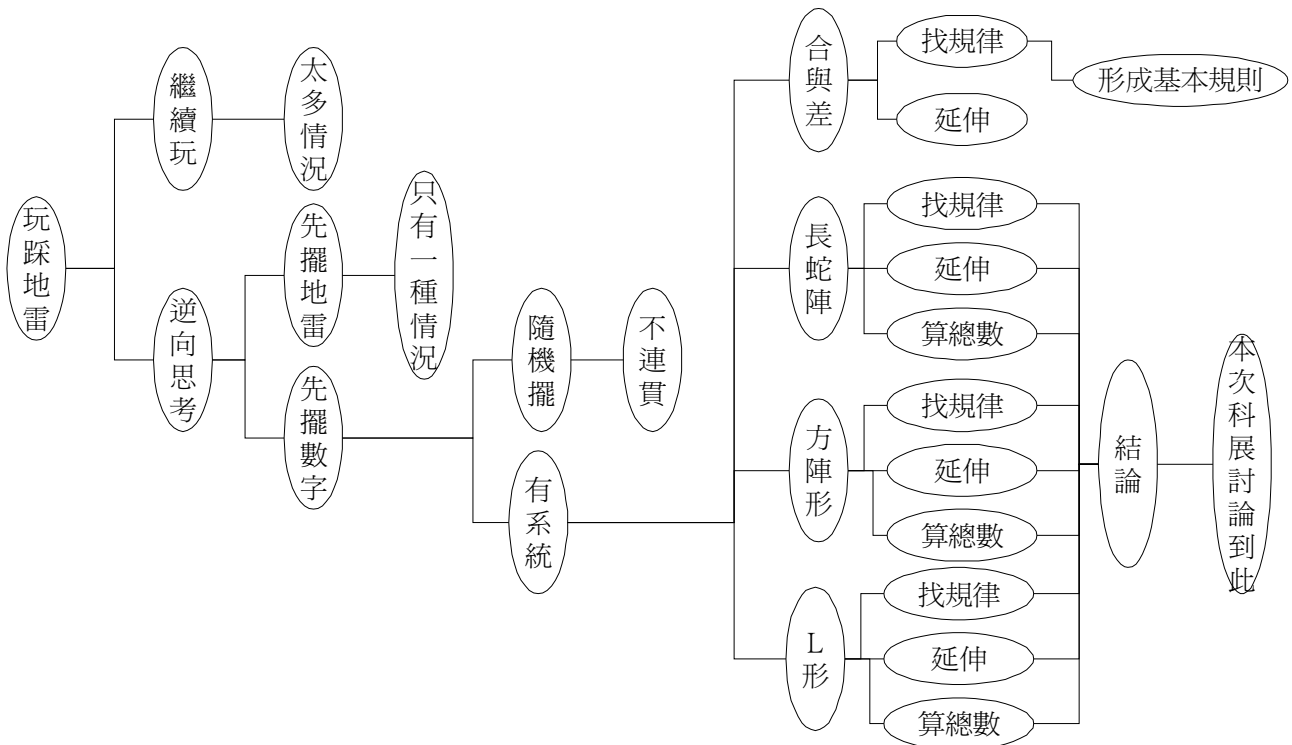
(十三)我們發現,若先設地雷為何,便不易發現其中規律性,且和先擺數字比起來,先擺數字會有好幾種情形,但若先擺地雷必只有一種情形,如此就必須試出所有情況,才能進行統整,故只研究關於先擺數字再決定地雷位置,也較符合踩地雷只給數字而要自己尋找地雷的模式

三、方法

(一)在電腦玩踩地雷,並紀錄固定的形式

(二)利用小學作業簿當踩地雷的格子填上數字

四、流程圖



陸、研究結果

一、基本規則推論(此節甲、乙、丙、丁.....為地雷可能分布區)

(一)數字差

1.相鄰二數靠邊

甲	Z_1	Z_2	丙	A	=甲、乙兩格內地雷數	$Z_1 = A + C$
乙	戊	己	丁	B	=丙、丁兩格內地雷數	$Z_2 = B + C$
				C	=戊、己兩格內地雷數	$Z_1 - Z_2 = (A + C) - (B + C) = A - B$

- (1)當 $Z_1 - Z_2 = 0$ 則 $A=2$ $B=2$ (甲、乙、丙、丁皆有一地雷)
 $A=1$ $B=1$ (甲、乙有一為地雷，丙、丁有一為地雷)
 $A=0$ $B=0$ (甲、乙、丙、丁皆不為地雷)
- (2)當 $Z_1 - Z_2 = 1$ 則 $A=2$ $B=1$ (甲、乙皆為地雷，丙、丁有一為地雷)
 $A=1$ $B=0$ (甲、乙有一為地雷，丙、丁皆不為地雷)
- (3)當 $Z_1 - Z_2 = 2$ 則 $A=2$ $B=0$ (甲、乙皆為地雷，丙、丁皆不為地雷)
- (4)結論： Z_1 、 Z_2 之差即甲+乙及丙+丁之差。

2. 相鄰二數不靠邊

甲	庚	辛	丁
乙	Z_1	Z_2	戊
丙	壬	癸	己

A	=甲、乙、丙三格內地雷數	$Z_1=A+B$
B	=丁、戊、己三格內地雷數	$Z_2=B+C$
C	=庚、辛、壬、癸四格內地雷數	$Z_1-Z_2=(A+B)-(B+C)=A-B$

(1) 當 $Z_1 - Z_2 = 0$ 則 $A=2$ $B=2$ (甲、乙、丙、丁、戊、己皆有一地雷)

$A=1$ $B=1$ (甲、乙、丙有一為地雷，丁、戊、己有一為地雷)

$A=0$ $B=0$ (甲、乙、丙、丁、戊、己皆不為地雷)

(2) 當 $Z_1 - Z_2 = 1$ 則 $A=2$ $B=1$ (甲、乙、丙皆為地雷，丁、戊、己有一為地雷)

$A=1$ $B=0$ (甲、乙、丙有一為地雷，丁、戊、己皆不為地雷)

(3) 當 $Z_1 - Z_2 = 2$ 則 $A=2$ $B=0$ (甲、乙、丙皆為地雷，丁、戊、己皆不為地雷)

(4) 結論： Z_1 、 Z_2 之差即甲+乙+丙及丁+戊+己之差。

3. 相鄰三數不靠邊

甲	庚	辛	子	丁
乙	Z_1	Z_2	Z_3	戊
丙	壬	癸	丑	己

A	=甲、乙、丙三格內地雷數	$Z_1=A+B+C$
B	=庚、壬二格內地雷數	$Z_2=B+C+D$
C	=辛、癸二格內地雷數	$Z_3=C+D+E$
D	=子、丑二格內地雷數	$Z_1-Z_2=A-D$
E	=丁、戊、己三格內地雷數	$Z_2-Z_3=B-E$
		$Z_1-Z_3=A+B-D-E$

(1) 設 $Z_1=Z_3>Z_2$ 。則 $3 \geq Z_1 - Z_2 \geq 0$

(2) 當 $Z_1 - Z_2 = 3$ ，則 $D=0$ 。故 $A=E=3$

(3) 當 $Z_1=5$ ， $Z_1 - Z_2 = 3$ ，則 $D=0$ 、 $B=0$ 。故 $A=E=3$ ， $C=2$

(4) 當 $Z_1=6$ ， $Z_1 - Z_2 = 3$ ，則 $D=0$ 、 $B=0$ 。故 $A=E=3$ ，但 $C=2$ (與原條件不符)。故當 $Z_1=6$ 以上， $3 > Z_1 - Z_2 \geq 0$

1	2	3	2	1
1	Z_1	Z_2	Z_3	1
1	2	3	2	1

← 右述數字為地雷所在格所供給的數字數

(5) 當 $Z_1=5$ ， $Z_1 - Z_2 = 3$ ，則 $A=E=3$ 。當 $Z_1=5+1$ ，則只能置放於庚或壬。但如此一來， $Z_1 \neq Z_3$ ，與條件不合。故子或丑也需置放 1 地雷，如此一來， $Z_2=2+2$ ，故 525 後是 646 而非 636。

(6) 結論： 當 $Z_1=Z_3>Z_2$ 。且 $Z_1 \leq 5$ 時，則 $3 \geq Z_1 - Z_2 \geq 0$ 。若 $Z_1 \geq 6$ 時，則 $3 > Z_1 - Z_2 \geq 0$ 。

二.規則

(一)長蛇陣

1.靠牆：

(1) 111

有以下三種情形：

①

1	1	1	*
*	☆	☆	☆

②

1	1	1	☆
*	☆	☆	*

③

1	1	1	☆
☆	*	☆	☆

《1》 解說：先從靠二邊牆的 1 擺地雷，放在 1 的下面後，會有①②二種情形，而第三種情況就是的 1 共用一個地雷。

《2》 延伸：

試著把 1 的數目增多(1111、11111、111111……)

1111 也有三種情形

1	1	1	1	*
☆	*	☆	☆	☆

1	1	1	1	☆
☆	*	☆	☆	*

1	1	1	1	☆
*	☆	☆	*	☆

11111 則只有二種情形

1	1	1	1	1	☆
☆	*	☆	☆	*	☆

1	1	1	1	1	☆
*	☆	☆	*	☆	☆

111111 有 3 種情形

1	1	1	1	1	1	*
*	☆	☆	*	☆	☆	☆

1	1	1	1	1	1	☆
*	☆	☆	*	☆	☆	*

1	1	1	1	1	1	☆
☆	*	☆	☆	*	☆	☆

1111111 有三種情形

1	1	1	1	1	1	1	*
☆	*	☆	☆	*	☆	☆	☆

1	1	1	1	1	1	1	☆
☆	*	☆	☆	*	☆	☆	*

1	1	1	1	1	1	1	☆
*	☆	☆	*	☆	☆	*	☆

11111111 又只有 2 種情形

1	1	1	1	1	1	1	1	☆
*	☆	☆	*	☆	☆	*	☆	☆

1	1	1	1	1	1	1	1	☆
☆	*	☆	☆	*	☆	☆	*	☆

從上面的結果，我們發現只要是基本型(111 三個一循環)再加二個 1，也就是五個 1、八個 1、十一個 1……則排出來的情形只會有二種，但其他情形就會有三種。

☆	1	2	1	☆
☆	*	☆	*	☆

《1》 若有一陣為 121 且靠牆，則地雷必在二個 1 的下方。

《2》 解說：因為若將二個 1 的地雷皆放在外圍則雖然 1 滿足了卻不滿足 2，又因為若是二個 1 共用地雷，也就是地雷在 2 的下方，也不滿足 2，故地雷必在二個 1 的下方。

《3》 延伸：

A

☆	1	2	2	1	☆
☆	☆	*	*	☆	☆

- 若有一陣為 1221 且靠牆，則地雷在二個 2 下方。
- 解說：此形就是 121 再多加一個 2，因為若 1 的地雷皆不和 2 共用，則雖然滿足了 1，其他空格也不能再擺，二個 2 也就不成立，而若地雷在 1 的下方，則二個 2 仍少一個地雷，故地雷在二個 2 的下方。

B

☆	1	1	2	1	1	☆
☆	☆	*	☆	*	☆	☆

- 有一陣為 11211 且靠牆，則地雷在 121 的二個 1 下方。
- 解說：其實此形就是 121 情形再加上二個 1 而已，因此地雷在 121 的二個 1 下方。

C

☆	1	2	2	2	1	☆
☆	*	☆	*	*	☆	☆

☆	1	2	2	2	1	☆
☆	☆	*	*	☆	*	☆

- 若有一陣 12221，則地雷的排法會有 2 種情形。
- 解說：因為若 1 的地雷在最左或最右，則其周圍的 2 就不符合，故地雷必不在最左欄及最右欄。所以會有以上 2 種排法。

(2)

☆	2	3	2	☆
☆	*	*	*	☆

《1》 若有一陣為 232 且靠牆，則地雷必在 232 下方。

《2》 解說：因為要滿足 3 所以 232 的下方皆為地雷，而擺上後也剛好滿足二個 2，因此地雷必在 323 下方。

《3》 延伸：

A

☆	2	3	3	2	☆
☆	*	*	*	*	☆

● 若有一陣為 2332 且靠牆，則地雷在 2332 的下方。

● 解說：此形即將 232 多放入一個 3 而已。

(其中 3 可為 2~無限多個，結果仍相同)

B

☆	1	2	3	2	1	☆
☆	☆	*	*	*	☆	☆

● 若有一陣為 12321 且靠牆，則地雷在 232 下方。

● 解說：此形即將 232 的二旁各加一個 1，因此地雷在 232 下方。

(其中 3 的數目可為 1~無限多個，結果仍相同)

(3)

#	3	3	3	#
#	*	*	*	#

《1》 若有一陣為 333 且靠牆，則地雷在左邊#區的其中格及右邊#區的其中一格。

《2》 解說：為了滿足中間的 3 則 333 下方皆為地雷，擺上後左邊的 3 及右邊的 3 仍少一個地雷，故剩下的二個地雷會在左邊#區的其中格及右邊#區的其中一格。

(其中 3 的數目可為 3~無限，結果仍相同)

《3》 延伸：

A

*	3	1	1	3	*
*	*	☆	☆	*	*

● 若有一陣為 3113 且靠牆，則除了二個 1 下面不為地雷外，其餘皆為地雷。

● 解說：因為在 3 的周圍四格中，要有三個地雷，又 31(13)的下方不可同時為地雷，否則 1 會太多，所以可知最左欄與最右欄必為地雷；擺上地雷後，會發現每個數接還少一個地雷，且二個 1 不可共用同一個地雷，否則將不滿足二個 3，故剩下的二個地雷必在 3 的下面。

B

*	3	1	2	3	*
*	☆	*	☆	*	*

- 若有一陣為 3123 且靠牆，則地雷必不在 2 的下方及鄰近 1 的 3 的下方。
- 解說：因為在 3 的周圍四格中，要有三個地雷，所以最左欄和最右欄必為地雷，擺上地雷後，2 仍少二個地雷，且在 2 下方三格中要有二個地雷，又知道不可擺在 12 的下方，否則 1 的地雷數不符合，故地雷必在 3 的下方，滿足 3 後則知 2 的另一地雷在 1 的下方，擺上後，此情形便成立。

(4)

*	4	3	4	*
*	*	*	*	*

《1》 若有一陣為 434 且靠牆，則地雷必環繞著數字。

《2》 解說：為了滿足二個 4 則 434 四周必為地雷，而擺上後剛好滿足 3，則地雷必環繞著數字。

(其中 3 的數目可為 1~無限，結果仍相同)

(5)

*	4	2	1	☆
*	*	*	☆	☆

《1》 若有一陣為 421 且靠牆，則地雷會在 4 週遭的空格。

《2》 解說：因為 4 需要四個地雷，擺上後也符合 2 及 1，此情形變成立。

《3》 延伸:

將 421 及 124(421 旋轉 180 度)組合，可得：

*	4	2	1	1	2	4	*
*	*	*	☆	☆	*	*	*

《1》 若有一陣為 421124 且靠牆，則除了二個 1 下方二格，其餘皆為地雷。

《2》 解說：本形其實就是 421 的組合，因此思考方式相同。

結論：當數字靠牆後，可能的結果數量也會隨之縮小，且就算靠牆，仍有二種情形不易討論：

1. 排列方法太多：212、222、323
2. 排列方法不成立：131、242、252、262、313、343、353、363、414、424、444、454、464、515、525、535、545、555、565、616、626、636、646、656、666

2.不靠牆

(1)

☆	#	☆	#	☆
☆	1	2	1	☆
☆	#	☆	#	☆

《1》若有一陣為 121 且不靠牆，則二地雷可任選#格放置(二個地雷不可同時在同一個 1 的上下)

《2》解說:因爲 121 上下六格必須放置二個地雷才能滿足 2，若地雷置於 2 的上或下，則二個 1 就滿足了，因此六格中就不可再擺地雷，但 2 仍少一地雷，所以 2 的上下必不爲地雷。又若 1 的地雷在六格外，則六格內就不可再擺地雷，故地雷必在二個 1 的上或下。故有以下四種情形：

☆	*	☆	*	☆
☆	1	2	1	☆
☆	☆	☆	☆	☆

☆	*	☆	☆	☆
☆	1	2	1	☆
☆	☆	☆	*	☆

☆	☆	☆	*	☆
☆	1	2	1	☆
☆	*	☆	☆	☆

☆	☆	☆	☆	☆
☆	1	2	1	☆
☆	*	☆	*	☆

(2)

☆	*	☆	*	☆
☆	2	4	2	☆
☆	*	☆	*	☆

《1》若有一陣為 242 且不靠牆，則地雷必在二個 2 的上方和下方。

《2》解說：因爲若二個 2 的地雷爲共用或擺至最左及最右時，則會發現雖然滿足了 2 但是 4 仍缺少二個地雷，故地雷必在二個 2 的上方及下方。

(3)

*	☆	#	☆	*
*	4	1	4	*
*	☆	#	☆	*

《1》若有一陣為 414 且不靠牆，則地雷會在#區中的其中一格。

《2》因爲在中間六格中只能擺放一個地雷，且要滿足二個 4 的需求，因此最左欄、右欄皆爲地雷，又二個 4 及 1 仍少一個地雷，所以地雷必在 1 的上下。

故地雷有以下 2 種排法：

*	☆	*	☆	*
*	4	1	4	*
*	☆	☆	☆	*

*	☆	☆	☆	*
*	4	1	4	*
*	☆	*	☆	*

(4)

☆	*	*	*	☆
☆	4	6	4	☆
☆	*	*	*	☆

《1》 若有一陣為 414 且不靠牆，則地雷必在 6 的周圍。

《2》 解說：爲了要滿足 6，所以 6 的周圍皆爲地雷，擺上地雷後，也剛好滿足二個 4，所以此情形成立。

(4)

*	☆	*	☆	*
*	5	2	5	*
*	☆	*	☆	*

《1》 若有一陣為 525 且不靠牆，則地雷必在二個 2 的上方和下方及最左和最右。

《2》 解說：因爲 525 上下六格中只能放二個地雷，而又爲了要滿足二個 5，也就是二個 5 必須共用二個地雷才不會缺少地雷，所以除了最左欄及最右欄皆爲地雷外，2 的上下方也爲地雷，如此才能同時滿足 525。

(5)

#	*	*	*	#
#	5	6	5	#
#	*	*	*	#

《1》 若有一陣為 565 且不靠牆，則地雷會在 565 的上下方及最左欄的其中一格及最右欄的其中一格。

《2》 解說：爲了滿足 6，故 565 的上下方皆爲地雷，個 5 各少一地雷所以剩下的二個地雷會在最左欄的其中一格及最右欄的其中一格。

結論：

在發現了 121 的情形之後，我們將相似的數型排列出來後，發現二種情形：

1. 排列方法太多：212、222、232、313、323、333、343、414、0.0424、434、454、535、555、636、656
2. 排列方法不成立：131、141、151、161、252、262、353、363、515、545、616、626、646、666
3. 組合：

當我們研究出一些教基本的情形之後，我們就可以把各種情形組合起來，形成一長條，如此不但可以節省一個個試的時間，組合出來的情形也比較多樣些。

例：

將靠牆的 121 及 1221 組合

☆	1	2	1	☆
☆	*	☆	*	☆

+

☆	1	2	2	1	☆
☆	☆	*	*	☆	☆

=

☆	1	2	1	1	1	2	2	1	☆
☆	*	☆	*	☆	☆	*	*	☆	☆

(二)L形

	A	B	C	D
1	#	#	#	@
2	#	1	#	#
3	#	1	1	#
4	#	#	#	#

形式1：當 C2 為地雷時，只有一種情況，就是 C2 為地雷。

形式2：當 C2 不為地雷時，若 A4 為地雷，則且 A1、B1、C1 有一為地雷，D2、D3、D4 也有一為地雷。

形式3：當 C2 不為地雷時若 A4 不為地雷，則 A2、A3、B4、C4 須有一為地雷

1.若在 A2 或 A3，則 D2、D3、D4 須有一為地雷

2.若在 B4 或 C4，則 A1、B1、C1 須有一為地雷。

將二 L111 形接合如下：可用上述三種形式搭配排列成所需地雷擺法(因為情況太多種，所以暫不做討論)

#	#	#	#	#	#
#	1	#	#	1	#
#	1	1	1	1	#
#	#	#	#	#	#

#	#	#	@	@	@
#	1	#	#	#	#
#	1	1	1	1	#
#	#	#	#	1	#
@	@	@	#	#	#

#	#	#	#	#
#	1	#	1	#
#	1	1	1	#
#	#	#	#	#

#	#	#	@	@
#	1	#	#	#
#	1	1	1	#
#	#	#	1	#
@	@	#	#	#

#	#	#	@
#	1	#	#
#	1	1	#
#	1	#	#
#	1	1	#
#	#	#	#

@	#	#	#	@
@	#	1	#	#
#	#	1	1	#
#	1	1	#	#
#	#	1	#	#
@	#	#	#	@

1.

	A	B	C	D
1	#	#	#	@
2	#	1	#	#
3	#	2	1	#
4	#	#	#	#

(1)	A	B	C	D
1	☆	☆	☆	@
2	☆	1	*	☆
3	☆	2	1	☆
4	*	☆	☆	☆

(2)	A	B	C	D
1	☆	☆	☆	@
2	#	1	☆	☆
3	#	2	1	☆
4	*	#	#	☆

(1)若 C2 為地雷，則 A4 必為地雷。

(2)若 A4 為地雷，C2 不為地雷，則 A2、A3、B4、C4 中有一為地雷。

(3)A2、A3 或 B4、C4 不可能同時有二個地雷。

(4)A1、B1、C1、D2、D3、D4 中，不能同時有一以上的地雷。

2.

	A	B	C	D
1	☆	☆	☆	@
2	#	1	☆	☆
3	#	3	1	☆
4	*	#	#	☆

C2 不可能為地雷。

A4 必為地雷，A1、B1、C1、D2、D3、D4 不能為地雷。

3.

	A	B	C	D
1	#	#	#	@
2	#	2	#	#
3	#	1	2	#
4	#	#	#	#

(1)

	A	B	C	D
1	#	#	#	@
2	☆	2	*	#
3	☆	1	2	#
4	☆	☆	☆	#

(2)

	A	B	C	D
1	#	#	#	@
2	☆	2	☆	#
3	☆	1	2	#
4	*	☆	☆	#

(3)

	A	B	C	D
1	#	#	#	@
2	#	2	☆	#
3	#	1	2	#
4	☆	☆	☆	#

(4)

	A	B	C	D
1	#	#	#	@
2	☆	2	☆	#
3	☆	1	2	#
4	☆	#	#	#

(1)若 C2 為地雷，則 A1、B1、C1 有一為地雷，D2、D3、D4 也有一為地雷。

(2)若 A4 為地雷，則 A1、B1、C1 有二為地雷，D2、D3、D4 也有二為地雷。

(3)若 A2、A3 有一為地雷，則 A1、B1、C1 有一為地雷，D2、D3、D4 有二為地雷。

(4)若 B4、C4 有一為地雷，則 A1、B1、C1 有二為地雷，D2、D3、D4 有一為地雷。

4.

	A	B	C	D
1	#	#	#	@
2	#	3	#	#
3	#	1	3	#
4	#	#	#	#

(1)

	A	B	C	D
1	*	*	*	@
2	☆	3	*	*
3	☆	1	3	*
4	☆	☆	☆	*

(2)

	A	B	C	D
1	*	*	*	@
2	☆	3	☆	*
3	☆	1	3	*
4	*	☆	☆	*

(3)

	A	B	C	D
1	#	#	#	@
2	#	3	☆	*
3	#	1	3	*
4	☆	☆	☆	*

(4)

	A	B	C	D
1	*	*	*	@
2	☆	3	☆	#
3	☆	1	3	#
4	☆	#	#	#

(1)若 C2 為地雷，則 A1、B1、C1 有二為地雷，D2、D3、D4 也有二為地雷。

(2)若 A4 為地雷，則 A1、B1、C1、D2、D3、D4 皆為地雷。

(3)若 A2、A3 有一為地雷，則 A1、B1、C1 有二為地雷，D2、D3、D4 皆為地雷。

(4)若 B4、C4 有一為地雷，則 A1、B1、C1 皆為地雷，D2、D3、D4 有二為地雷。

5.

	A	B	C	D
1	*	*	*	@
2	☆	4	*	*
3	☆	1	4	*
4	☆	☆	☆	*

(1)C2 必為炸彈

(2)A1、B1、C1、D2、D3、D4 皆為地雷

	A	B	C	D	E
1	#	#	#	@	@
2	#	1	#	@	@
3	#	1	#	#	#
4	#	1	1	1	#
5	#	#	#	#	#

當 C3 為地雷時，只有一種情況，就是 C3 為地雷。

當 C3 不為地雷時，若 A5 為地雷，則 A2、C2 有一為地雷，D3、D5 有一為地雷。

當 C3 不為地雷時，若 A5 不為地雷

若 A3 為地雷，則 D3、D5 有一為地雷

若 A4 為地雷，則 A1、B1、C1 有一為地雷，D3、D5 也有一為地雷

若 B5 為地雷，則 E3、E4、E5 有一為地雷，A2、C2 也有一為地雷

若 C5 為地雷，則 A2、C2 有一為地雷

(六)、方陣形

*	*	*	*
*	5	5	*
*	5	5	*
*	*	*	*

(1)若數字排列為上圖，且周圍靠牆或皆為數字，則炸彈排列為上圖。

(2)解說：因為外圍皆為數字，所以 5 的炸彈只有一種擺法，而填上炸彈後此公式便成立了。

1.四字方陣形(共 13 種)

	A	B	C	D
1				
2		4	4	
3		4	4	
4				

(1)四個角全是炸彈(共 4 種)

*	*	*	*
	4	4	*
*	4	4	
*	*	*	*

*	*	*	*
	4	4	
*	4	4	*
*	*	*	*

*	*	*	*
*	4	4	*
	4	4	
*	*	*	*

*	*	*	*
*	4	4	
	4	4	*
*	*	*	*

先固定四個角為炸彈

分別假設 A2、A3 不是炸彈

則有 A2(2 種)、A3(2 種)情況，共 4 種情況

(2)只有兩個角是炸彈(共 8 種)

*		*	*
*	4	4	*
*	4	4	*
	*	*	

*	*		*
*	4	4	*
*	4	4	*
	*	*	

*	*	*	
	4	4	*
*	4	4	*
*	*	*	

*	*	*	
*	4	4	*
	4	4	*
*	*	*	

	*	*	
*	4	4	*
*	4	4	*
*		*	*

	*	*	
*	4	4	*
*	4	4	*
*	*		*

	*	*	*
*	4	4	
*	4	4	*
	*	*	*

	*	*	*
*	4	4	*
*	4	4	
	*	*	*

分別固定 A1、D1，A1、A4，A4、D4，A1、D4 為炸彈

分別假設 B1、C1(上前 2 圖)A2、A3(上後 2 圖)B4、C4(下前 2 圖)D2、D3(下後 2 圖)不為地炸彈

則有 A1、D1(2 種)，A1、A4(2 種)，A4、D4(2 種)，A1、D4(2 種)情況，共 8 種情況

(3)四個角都不是炸彈(共 1 種)

	*	*	
*	4	4	*
*	4	4	*
	*	*	

固定 4 個角都不是炸彈

則只有 1 種

(4)分析

由上圖發現只有偶數角數合理(0.2.4)

因每個 4 只有 5 處放置炸彈，因此決定哪一格不是炸彈即可決定其中一個 4 的所有炸彈

由上述三點可得知，四個角是炸彈的機率皆為

8/13(61.5%)

四個角以外的其他格子是炸彈的機率皆為

31/13(76.9%)

8/13	10/13	10/13	8/13
10/13	4	4	10/13
10/13	4	4	10/13
8/13	10/13	10/13	8/13

2.四四四三方陣形(共 12 種)

	A	B	C	D
1				
2		4	4	
3		4	3	
4				

(1)有三個角是炸彈(共 8 種)

	*	*	*		*	*	*		*	*	*		*	*	*	*	*	*	*
*	4	4		*	4	4		*	4	4	*	*	4	4	*		4	4	
*	4	3	*	*	4	3	*	*	4	3		*	4	3		*	4	3	*
*		*	*	*	*		*	*		*	*	*	*		*	*	*	*	

*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
	4	4	*	*	4	4		*	4	4	*
*	4	3			4	3	*		4	3	
*	*	*		*	*	*		*	*	*	

先固定 A1 不是炸彈

分別假設 B4、D1，C4、D2，B4、D3，C4、D3 不為炸彈

則共有 4 種

再固定 A1 是炸彈

分別假設 A2、D2，A2、D3，A3、D2，A3、D3 不為炸彈

則共有 4 種

(2)只有一個角是炸彈(共四種)

	*	*	*		*	*	*		*	*			*	*	
*	4	4		*	4	4	*	*	4	4	*	*	4	4	*
*	4	3	*	*	4	3		*	4	3	*	*	4	3	*
	*	*			*	*		*		*		*	*		

先固定 D1 是炸彈

則 3 有 D2、D3 兩種

再固定 A4 是炸彈

則 3 有 B4、C4 兩種

(3)分析

由四四四三方陣形可知有一、三個角是炸彈的狀況合理

對角的 4 與 3 其中一個的角必有炸彈

B1, C1 必為炸彈

各格是炸彈的機率如右圖

3.四四四五方陣形(共 5 種)

4/12	12/12	12/12	10/12
10/12	4	4	7/12
10/12	4	3	7/12
8/12	8/12	9/12	4/12

	A	B	C	D
1				
2		4	4	
3		4	5	
4				

(1)有三個角是炸彈(共 4 種)

*	*	*	
*	4	4	*
	4	5	*
*	*	*	*

*	*	*	
	4	4	*
*	4	5	*
*	*	*	*

*		*	*
*	4	4	*
*	4	5	*
	*	*	*

*	*		*
*	4	4	*
*	4	5	*
	*	*	*

	*	*	
*	4	4	*
*	4	5	*
	*	*	*

先固定 D1 不為炸彈

則有 A2, A3 兩種

再固定 A4 不為炸彈

則有 B1, C1 兩種

(2)只有一個角是炸彈(共 1 種)

固定 A1, D1, A4 不為炸彈

則只有一種

(3)分析

由四四四五方陣形可知有一、三個角是炸彈的狀況合理

因為 5 的空格只有五格，所以全部都是炸彈

4 與 4 對角的出現炸彈機率只有 40%

各個角是炸彈的機率如右圖

經過其他種狀況之中我們發現：

若格子內總數的和等於偶數，則地雷在四角內的可能個數只有偶數可能。反之，若為奇數，則地雷在四角內的可能個數只有奇數可能。

4/5	4/5	4/5	2/5
4/5	4	4	5/5
4/5	4	5	5/5
2/5	5/5	5/5	5/5

	A	B	C	D
1				
2		甲	乙	
3		丙	丁	
4				

∴ B1 和 C1 為甲和乙共用
 A2 和 A3 為甲和丙共用
 B4 和 C4 為丙和丁共用
 D2 和 D3 為乙和丁共用

若任一地雷在(B1.C1.A2.A3.D4.C4.D2.D3)的其中一格中，則代表地雷總數中的其中二個，又任一數乘 2 皆為偶數：

偶	—	偶	=	偶	1 = 甲 + 乙 + 丙 + 丁 2 = 地雷在(B1.C1.A2.A3.D4.C4.D2.D3)的個數 3 = 剩下地雷個數
奇	—	偶	=	奇	
1		2		3	

∴ 若地雷總數是偶數，則四角為地雷的可能是偶數；反之，地雷總數是奇數，則四角為地雷的可能是奇數。

計算四角中為地雷的算式：

(甲 + 乙 + 丙 + 丁) - 2 × (地雷在 B1.C1.A2.A3.D4.C4.D2.D3 的個數) = 地雷在四角中的個數

例：

1

2

	4	4	
	4	3	

→

	*	*	*
*	4	4	
*	4	3	*
	*	*	

	*	*	*
*	4	4	
*	4	3	*
*		*	*

$4 + 4 + 4 + 3 = 15$ (奇數)

在四角中個數一或三(奇數個)

1. $(4 + 4 + 4 + 3) - 2 \times 6 = 3$

2. $(4 + 4 + 4 + 3) - 2 \times 7 = 1$

4. 方陣形的排列總數 (*代表地雷，O 代表不為地雷)

因為數字排列總數等於地雷排列總數，且地雷排列所形成的數字只有一種可能，又須使方陣形成立(中間四格皆為 1 以上的數字)，且影響每格數字的地雷最多五個，故數字範圍為 1~5，又地雷只有 12 格擺放位置，但只有 0 或 1 個地雷的方陣形無法成立，故地雷數需介於 2~12 間(但四角只能影響 1 格數字，其餘八格可各影響 2 格)。

(1) 2 個地雷

《1》固定角基本算法：因為共有四格數字，故每一個地雷皆須影響 2 格。則兩地雷只能放置於對邊區塊(B1&C1、B4&C4 區塊)。則地雷排列總數共有： $2(B1 \text{ or } C1) \times 2(B4 \text{ or } C4) \times 2(\text{直向 or 橫向}) = 8$ 種

	A	B	C	D
1	O	* ₁	* ₂	O
2	* ₈			* ₃
3	* ₇			* ₄
4	O	* ₆	* ₅	O

《2》排列組合速算法： $C_2^{12}=66$ ， $C_2^7 \times 4$ (旋轉對稱)=84。但需扣掉重複計算的部分，如一、二圖中即有重複，觀察發現重複會位於同一行或列。

故需加回 $C_2^4 \times 4$ (旋轉對稱)=24 及 A1, D4；A4, D1 兩種。

所以地雷排列總數共有： $66-84+24+2=8$ 種

《3》可知上述二法皆可找出地雷排列總數。

(2)三個地雷

《1》固定角基本算法：

固定角 A1, A4 為*，其餘角不為*，剩 1*可擺，則 C2&C3 數字無法成立，所以*必在 D2orD3： $2(D2orD3) \times 4$ (旋轉對稱)=8 種

固定角 A1 為*，其餘角不為*，剩 2*可擺，則 C2&C3&B3 數字無法成立，又 2*不可在同一區塊內(必有一格以上數字不成立)，所以 2*可在對邊區塊： $2(B1 \text{ or } C1) \times 2(B4 \text{ or } C4) \times 2$ (直向 or 橫向) $\times 4$ (旋轉對稱)=32 種

或 2*可在相鄰區塊，但不可同時在 A2A3 及 B1C1 區塊內(2*在相鄰區塊，且 1*在 A2A3 區塊內，則 C2orC3 必有一格不成立)，

所以： $2(D2orD3) \times 2(B4orC4) \times 4$ (旋轉對稱)=16 種

固定角皆為 O，固定 2*位同一區塊，故必有 2 數字無法成立，則另 1*必在其對邊區塊： 2 (一區塊內格數) $\times 4$ (旋轉對稱)=8 種或 3*皆不於同一區塊： C_3^4 (四區塊選三) $\times 2^3$ (區塊格數^{3 區塊})=32 種。

以上總和共： $8+32+16+8+32=96$ 種

《2》排列組合速算法： $C_3^{12}=220$ ， $C_3^7 \times 4$ (旋轉對稱)=140，

需加回 $C_3^4 \times 4$ (旋轉對稱)=16。所以 $220-140+16=96$ 種

《3》上述兩種相符，故成立。

(3)四個地雷

《1》固定角基本算法：

固定四個角皆為*，則只有 1 種。

固定三個角皆為*，則 C3 無法成立，且剩 1*可擺，所以 D2orD3orB4orC4 必有一為*： $4(D2orD3orB4orC4) \times 4$ (旋轉對稱)=16 種。

固定二個角皆為*(相鄰)，則 C2&C3 無法成立，且剩 2*可擺，所以 2*可一起擺在對邊區塊： 1 (對邊區塊) $\times 4$ (旋轉對稱)=4 種

或 2*可擺在三區塊選二區塊： C_2^3 (三區塊選二區塊) $\times 2^2$ (區塊格數^{2 區}) $\times 4$ (旋轉對稱)=48 種

固定二個角皆為*(相對)，則 B3&C2 無法成立，且剩 2*可擺，所以 1*需擺在 B1C1 區塊 or D2D3 區塊，另 1*需擺在 A2A3 區塊 or B4C4 區塊： 2^2 (區塊格數^{2 區}) $\times 2^2$ (區塊格數^{2 區}) $\times 2$ (旋轉對稱)=32 種

固定一個角為*，則 B3&C2&C3 無法成立，且剩 3*可擺，所以*擺在四區塊中三區塊： C_3^4 (四區塊選三) $\times 2^3$ (區塊格數^{3 區}) $\times 4$ (旋轉對稱)=128 種

2. A B C D

1	*	*		
2				O
3				O
4		O	O	O

(1) A B C D

2. A B C D

1	*	*		
2	O			
3	O			
4	O	O	O	

(2) A B C D

1	*			O
2				
3				
4	*			O

1	*			O
2				
3				
4	O			O

(3) A B C D

1	O			O
2				
3				
4	O			O

2. A B C D

1	*	*	*	
2				O
3				O
4		O	O	O

(2) A B C D

2. A B C D

1	*	*	*	
2	O			
3	O			
4	O	O	O	O

(3) A B C D

1	*			*
2				
3				
4	*			O

1	*			O
2				
3				
4	*			O

(3) A B C D

1	*			O
2				
3				
4	O			*

或 2*擺在一起，又擺在 B1C1 或 A2A3，則 B3C3、C2C3 不成立，故另一*需置於其對邊區塊： $2(\text{區塊}) \times 2^1(\text{區塊格數}^1 \text{區塊}) \times 4(\text{旋轉對稱})=16$ 種

或 2*擺在一起，又擺在 B4C4 或 D2D3，則 B3 或 C2 不成立，故另一*需置於 B3 或 C2 旁 4 格(扣除角)： $2(\text{區塊}) \times 4(\text{可影響數字格數}) \times 4(\text{旋轉對稱})=32$ 種

《2》排列組合速算法： $C_4^{12}=495$ ， $C_4^7 \times 4(\text{旋轉對稱})=140$ ，需加回 $C_4^4 \times 4(\text{旋轉對稱})=4$ 。排列總數 $=495-140+4=359$ 種

《3》上述兩種相符，故成立。

《4》因以排列組合速算法既快速又簡便、正確。故以下情形僅使用速算法。

(4)

	A	B	C	D
1	*			O
2				
3				
4	O			O

(4)五個地雷

$C_5^{12}=792$ ， $C_5^7 \times 4(\text{旋轉對稱})=84$ 。排列總數 $=792-84=708$

(5)六個地雷

$C_6^{12}=924$ ， $C_6^7 \times 4(\text{旋轉對稱})=28$ 。排列總數 $=924-28=896$

(6)七個地雷

$C_7^{12}=792$ ， $C_7^7 \times 4(\text{旋轉對稱})=4$ 。排列總數 $=792-4=788$

(7)八到十二個地雷

由於八到十二個地雷無論怎麼排皆一定成立方陣形，故以速算法計算較不費時。

八個： $C_8^{12}=49$

十個： $C_{10}^{12}=66$

十二個： $C_{12}^{12}=1$

九個： $C_9^{12}=220$

十一個： $C_{11}^{12}=12$

(8)分析

1.由排列組合法可算出 0~12 個地雷於 12 格中排列各為 1、12、66、220、495、792、924、792、495、220、66、12、1，將這些數相加(即不考慮方陣形每格須 ≥ 1)得到 4096，也就是 2^{12} 。符合 12 格每格有 2 種可能(地雷與非地雷)的總組數。

2.又符合邏輯共有 $8+96+359+708+896+788+495+220+66+12+1$ 共 3649 種

柒、討論

一、 Z_1 、 Z_2 之差即甲+乙及丙+丁之差。

二、 Z_1 、 Z_2 之差即甲+乙+丙及丁+戊+己之差。

三、當 $Z_1=Z_3>Z_2$ 。且 $Z_1\leq 5$ 時，則 $3\geq Z_1-Z_2\geq 0$ 。若 $Z_1\geq 6$ 時，則 $3>Z_1-Z_2\geq 0$ 。

四、當數字靠牆後，可能的結果數量也會隨之縮小，且就算靠牆，仍有二種情形不易討論：

(一)排列方法太多：212、222、323

(二)排列方法不成立：131、242、252、262、313、343、353、363、414、424、444、454、464、515、525、535、545、555、565、616、626、636、646、656、666

五、在發現了 121 的情形之後，我們將相似的數型排列出來後，發現二種情形：(一)排列方法太多：212、222、232、313、323、333、343、414、0.0424、434、454、535、555、636、656

(二)排列方法不成立：131、141、151、161、252、262、353、363、515、545、616、626、646、666

六、由排列組合法可算出 0~12 個地雷於 12 格中排列各為

(一)12.66.220.495.792.924.792.495.220.66.12.1，其相加(即不考慮方陣形每格須 ≥ 1)為 4096，也就是 2^{12} 。符合 12 格每格有 2 種可能(地雷與非地雷)的總組數。

(二)又符合邏輯共有 $8+96+359+708+896+788+495+220+66+12+1$ 共 3649 種

八、結論

破解採地雷時，要先縮小範圍來討論，找出許多常見的基本形，接著我們就會發現，有很多的變化形其實都是從基本形加以組合和變化而已。研究差數的時候，我們先研究 2 個數相連且靠牆的情形(如圖 1)，得到的結果是： Z_1 、 Z_2 之差即甲+乙及丙+丁之差。

(圖 1)

甲	Z_1	Z_2	丙
乙	戊	己	丁

又研究了 2 個數相連但不靠牆的差數情形(如圖 2)，可得： Z_1 、 Z_2 之差即甲+乙+丙及丁+戊+己之差。

(圖 2)

甲	庚	辛	丁
乙	Z_1	Z_2	戊
丙	壬	癸	己

接著是 3 數相連不靠牆(如圖 3)，可得：當 $Z_1=Z_3>Z_2$ 。且 $Z_1\leq 5$ 時，則 $3\geq Z_1-Z_2\geq 0$ 。若 $Z_1\geq 6$ 時，則 $3>Z_1-Z_2\geq 0$ 。

(圖 3)

甲	庚	辛	壬	丁
乙	Z_1	Z_2	Z_3	戊
丙	壬	癸	丑	己

因此，只要知道相連兩數或三數的差，就可以判斷最左欄及最右欄的地雷數，也就是知道了 Z_1-Z_2 或 $Z_1-Z_2-Z_3$ 的結果，再配合一兩個條件，就可以很快推出地雷的位置。

玖、參考資料及其他

一、參考資料

- (一)windows 中的踩地雷
- (二)msn 中的踩地雷
- (三)仁林版：一上一數型的關係、翰林版：二下一機率與抽樣

二.其他

深入研究：

- (一)當影響範圍的格子不只是 3x3 而已,而擴大到 4x4 或 5x5……
- (二)如果只從地雷或是其他數字推出特殊的數字。
例:想要找 2 這個數，就可以排出這樣的形式等…
- (三)由數字來判斷地雷在每一個空格出現的機率

1	2	1
*		*

- (四)從有限的地雷數及格子數來排出特定的數字和。例：想要的數字和為 15，給的地雷數為 3，格子數為 2x7 時

1	1	2	1	2	1	1
1	*	2	*	2	*	1

- (五)從有限的數字排出最少的地雷。

例:在 2x4 的格子裡，給數字一 4 個、數字二 2 個最少地雷數為 2 個。

1	2	2	1
1	*	*	1

- (六)在一定的範圍裡用最多或最少的地雷排出最大或最小的數字和,所以在一定的格字數中，會有四種情況:1 最多地雷數字和最大 2 最少地雷數字和最大 3 最多地雷數字和最小 4 最少地雷數字和最小

生活應用：

在一定的範圍中，限定地雷的數量(最少)，並研究其擺法，擺出總數字和為最大。或是在一定的範圍中，限定地雷的數量(最多)，並研究其擺法，使得排出來的總數字和為最小。所以會有以下四種情形：1、最多地雷數，最大數字總和。2、最多地雷數，最小數字總和。3、最少地雷數，最多數字總和。4、最少地雷數，最少數字總和。

另外，可用在土地利用及水資源分配的情形。例:在 5x5 的地區範圍裡，總共只能用到五個水庫(一個水庫的影響範圍為 3x3)，要如何擺放水庫，才能使水庫發揮最大的效用，養活最多的人，並且不浪費水資源？(亦可以用在電線杆的架設等…)。

評語

030402 國中組數學科

最後的審判

踩地雷遊戲的分析，對一些數字組合的地雷分佈做了詳盡的討論。嘗試將複雜的問題切割成小部份是很不錯的想法，如能針對更多可能做分析就更完美了。