中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 數學科

030401

臺北縣立福和國民中學

指導老師姓名

李進福

作者姓名

林冠伯

顏嘉誼

原凱文

中華民國第四十四屆中小學科學展覽會

作品說明書

科　　別：數學科

組　　別：國中組

作品名稱：凹凸有致---多邊形的重心

關 鍵 詞：面積交換、槓桿原理、重心

編　　號：

壹、摘要

課堂上所學得的重心僅止於三角形，並未提及四邊以上的多邊形或是凹多邊形的重心。於是我們利用網路及圖書館查閱多邊形的重心相關資料，找到以前科展的兩篇作品，及數學辭典中相關的幾何學知識。

在了解資料的內容並試著自己作圖尋找多邊形重心時，我們發現以往科展作品中有錯及某些問題未曾解決。於是我們利用了**【面積交換性質】**找到修正的方法後，便可用**【槓桿原理】**求得正確之重心。並且此方法可推廣到凹、凸 N 多邊形。

之後，我們也發現凹四邊形的重心隨著圖形的不同而存在於形內、形外、邊線等不同位置，進一步的我們研究出判斷式。至於凹 N（N≧5）邊形之重心位置，是否存在判斷式？我們仍在努力尋找中。

貳、研究動機

在**國中數學課本第二冊 1-1 三角形的性質**中，我們學到了如何求得三角形的重心，書上教我們用針線來檢驗所求重心是否正確，正當大家興趣盎然的在上課時檢驗自己所作重心是否正確時，我們不禁好奇聯想，四邊形重心的求法又是如何呢？五邊形、六邊形、不規則凸多邊形，甚至不規則凹多邊形等，是否有共同的方法能求得重心呢？當我們查閱相關資料時，發現以前全國科展得獎的前輩們，所做出的求重心的方法，有些是有問題的，因此我們想針對此錯誤試著研究出解決之道。

參、研究目的

一、 找到簡潔而有系統的方法，以尺規作圖，來求出任一凸多邊形和凹多邊形的重心，並針對以前科展作品中所出現的問題，找出解決的方法，並推廣至不規則 N 多邊形。

二、 以實作方法檢驗所找到的重心是否正確，並找到簡潔而有系統的方法，可應用於國中數學的教學上。

肆、研究設備和器材

一、尺、圓規、雙面膠、膠水

二、厚紙板（2 ㎜）、馬糞紙（0.5 ㎜）、模型卡紙（1 ㎜）、西卡紙、方格紙、A4 影印紙、.A4 影印紙（膠膜護貝）

三、電腦—GSP 繪圖軟體

伍、研究過程與方法

一、 預備知識

(一) 重心的定義

重心為各部上諸重力合作作用之點。普通物體比地球甚小，故作用物體各部之重力視為平行，其合力為此等重力之和，其質量即此物體的重量。

(二) 槓桿原理（如圖 1）

G 為支點，則 $F_1 \times L_1 = F_2 \times L_2$

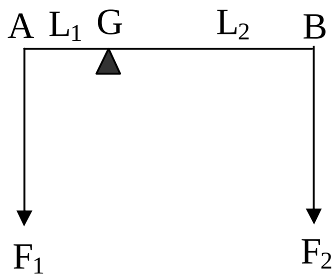


圖 1

由 $F_1 \times L_1 = F_2 \times L_2$

ð　$F_1 \times \overline{AG} = F_2 \times \overline{BG}$

ð　$\overline{AG} : \overline{BG} = F_2 : F_1$

(三) 【面積交換】性質

若 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

則△ACD＝△BCD

△AED＝△BCE（如圖 2）

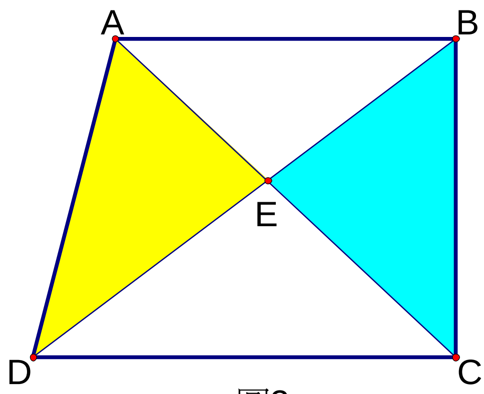


圖2

※依此性質可將任一 N 邊形（N≧4）面積轉為等面積的三角形，故在此以凹六邊形 *ABCDEF* 為例說明【面積交換】的作法（如圖 3）：

（1） 連 $\overline{AC}$

（2） 作 $\overline{BM}$ 平行 $\overline{AC}$ 交 $\overline{AF}$ 之延長線於 M

（3） 連 $\overline{MC}$（註：將凹六邊形 *ABCDEF* 交換成面積相等的凹五邊形 *MCDEF*）

（4） 作 $\overline{FK}$ 平行 $\overline{ME}$，交 $\overline{MC}$ 於 K

（5） 連 $\overline{EK}$（註：將凹五邊形 *MCDEF* 交換成面積相等的四邊形 *KCDE*）

（6） 連 $\overline{EC}$

（7） 作 $\overline{KL}$ 平行 $\overline{EC}$ 交 $\overline{ED}$ 之延長線於 L

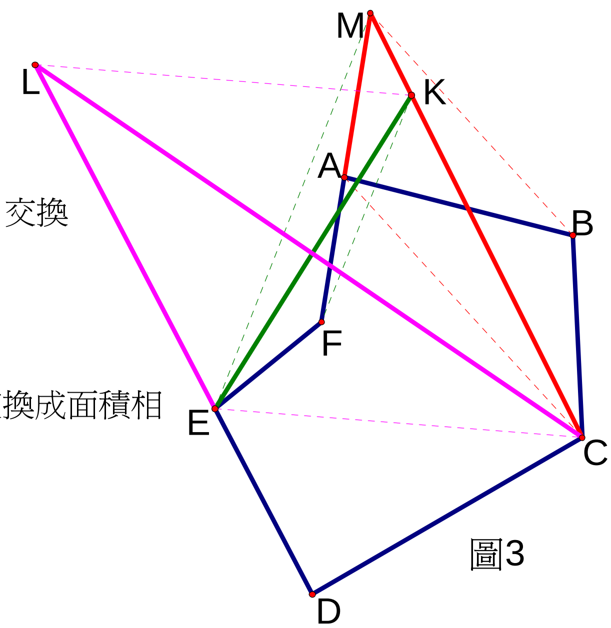


圖3

（8） 連 $\overline{LC}$（註：將四邊形 *KCDE* 交換成面積相等的三角形 *LCD*）

（9） ∴△LCD＝凹六邊形 ABCDEF

二、前言：發現錯誤

(一) 第三十一屆全國科展國中數學組第一名----尋找多邊形的重心（王哲麒、翁士杰）

※ 此作品使用面積平分法求重心

原文如下：（中華民國第三十一屆中小科學展覽 優勝作品專輯 國中組 p.109）

以物理學的觀點來說，重心是一個物體重量的均衡點，倘若此物體是一個厚度均勻的多邊形體，如果厚度$\rightarrow 0$，則可以得到一〝理想平面〞，而且**重心就落在此平面的面積平分線上，只要找出兩條面積平分線,其交點即爲所求**。………

當我們遇到不規則的凸四邊形時，我們該如何取面積平分線呢？如果我們能成功的將四邊形轉化成面積相等的三角形，則面積平分線只要連接頂點與對邊中點即可得到，於是我們找到了下面的方法。

作法：（見圖九）

（1）連$\overline{DB}$

（2）作$\overline{AE} \parallel \overline{DB}$交 L 於 E

（3）連$\overline{DE}$

（4）取$\overline{CE}$中點 F

（5）連$\overline{DF}$，$\overline{DF}$即爲四邊形 $ABCD$ 之面積平分線＃

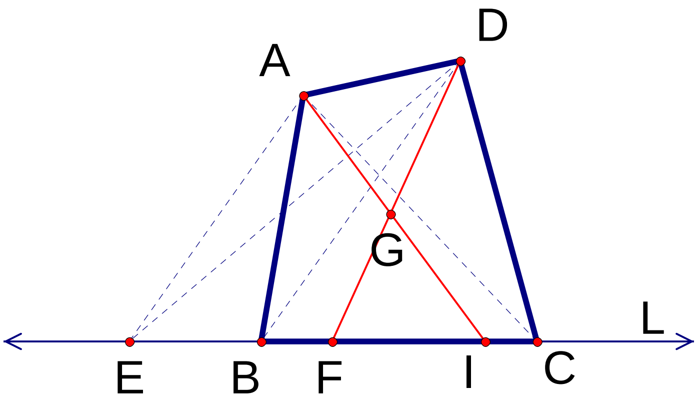
證明：$\because \overline{AE} \parallel \overline{DB}$ By 性質 g.$\therefore$a$\triangle ADB$＝a$\triangle EBD$

a 四邊形 $ABCD$＝a$\triangle DBC$+a$\triangle ADB$＝a$\triangle DBC$+a$\triangle EBD$

＝a$\triangle DEC$

$\because$F 為$\overline{CE}$中點 $\therefore \overline{DF}$平分$\triangle DEC$（By 性質 h）即$\overline{DF}$為四邊形 $ABCD$ 之面積平分線。

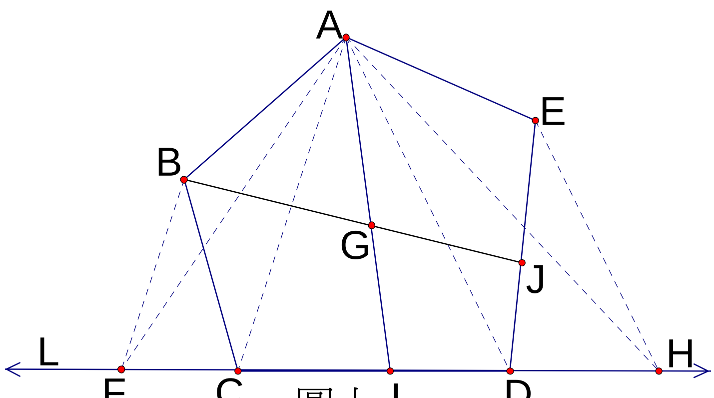
所以我們要找四邊形 ABCD 的重心，只要依上述方法再作一條面積平分線$\overline{AI}$（見圖九），則$\overline{AI}$與$\overline{DF}$之交點 G 即爲四邊形 ABCD 之重心。



圖九

3.不規則凸五邊形的重心

作法：(見圖十)



圖十

(1) 連 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AD}$

(2) $\overline{BF}$ // $\overline{AC}$ ； $\overline{EH}$ // $\overline{AD}$ 分別交 L 於 F 、H

(3) 連 $\overline{AF}$ 、 $\overline{AH}$ ；取 $\overline{FH}$ 中點 I

(4) 連 $\overline{AI}$

(5) 同法可得 $\overline{BJ}$

(6) 得 $\overline{AI}$ 與 $\overline{BJ}$ 之交點 G，即為所求#

證明：

$\because$ $\overline{BF}$ // $\overline{AC}$ ， $\overline{EH}$ // $\overline{AD}$

by 性質 g（同底等高面積相等） $a\triangle ABC=a\triangle ACF\&a\triangle AED=a\triangle ADH$

$\therefore a$ 五邊形 $ABCDE = a\triangle ABC + a\triangle ACD + a\triangle AED$

$= a\triangle ACF + a\triangle ACD + a\triangle ADH = a\triangle AFH$

又$\because I$ 為 $\overline{FH}$ 中點 by 性質 h(等底同高的兩三角形面積相等) $a\triangle AFI = a\triangle AHI$

$\therefore \overline{AI}$ 為五邊形 $ABCDE$ 之面積平分線

同理 $\overline{BJ}$ 亦為五邊形 $ABCDE$ 之面積平分線

$\therefore \overline{AI}$ 與 $\overline{BJ}$ 之交點 G 即為五邊形 $ABCDE$ 的重心。#

(二) 所發現的問題：

問題 1：當我們利用 GSP 繪圖軟體，並用同一方法作出由四個頂點所形成之四條面積平分線，卻發現用這個做法所求得的四個面積平分線 $\overline{DF}$ 、$\overline{AI}$ 、$\overline{BK}$ 、$\overline{CJ}$ 、未必交於一點。(如圖 4）該作者只做了兩條面積平分線（如圖九），因此，並未發現四條面積平分線只有在某些特殊情形（如平行四邊形或正方形、長方形、菱形，見圖 5）等圖形，才會交於一點。

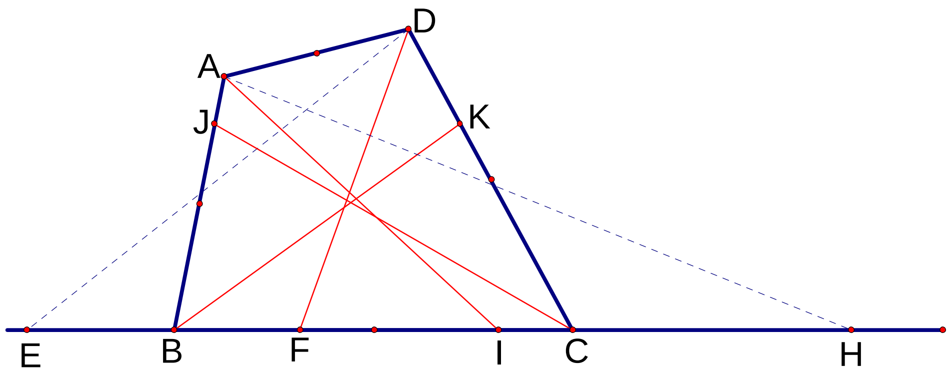
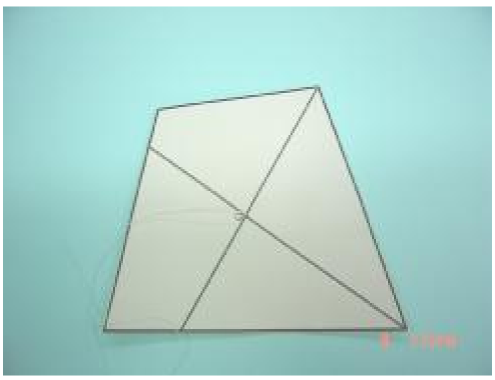
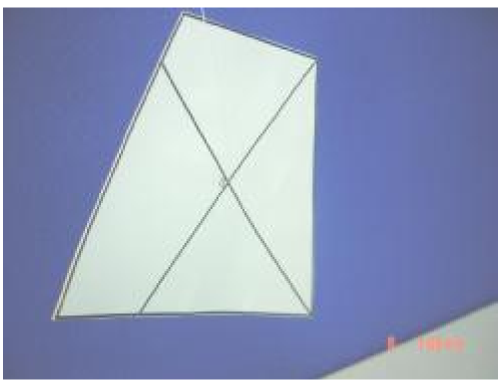


圖4

※實作所得照片


正面觀


實際操作情形（不平衡）

四條過頂點之面積平分線相交於一點之四邊形，共有如下四種：

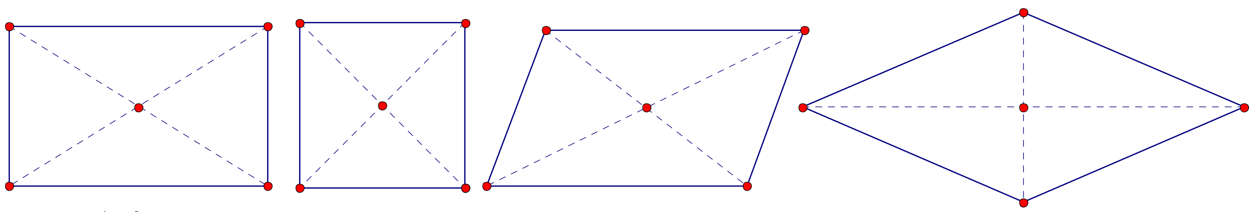


圖5

因爲這四個圖形之面積平分線（過頂點）爲對角線，故會交於一點，且其交點爲重心。

※**因此由凸多邊形之各頂點所求得的面積平分線之交點，並無法求得大多數凸多邊形之重心。**

問題 2：（如圖 4）我們利用**【面積交換】**所求出來之面積平分線 $\overline{AI}$ 、$\overline{DF}$ ，分別爲$\triangle ABI$、$\triangle DEC$ 之中線，但$\triangle ABH$ 與$\triangle DEC$ 並非同一三角形，所以 $\overline{AI}$ 、$\overline{DF}$ 兩線之交點不一定爲重心。

該件科展作品中，作者也用此方法求不規則凸五邊形之重心，基於上列理由，其所得之不規則凸五邊形之重心也是錯誤的。（如圖 6）**（本圖取自中華民國第三十一屆中小學科學展覽優勝作品專輯---國中組數學科第一名 p.110 圖十）**

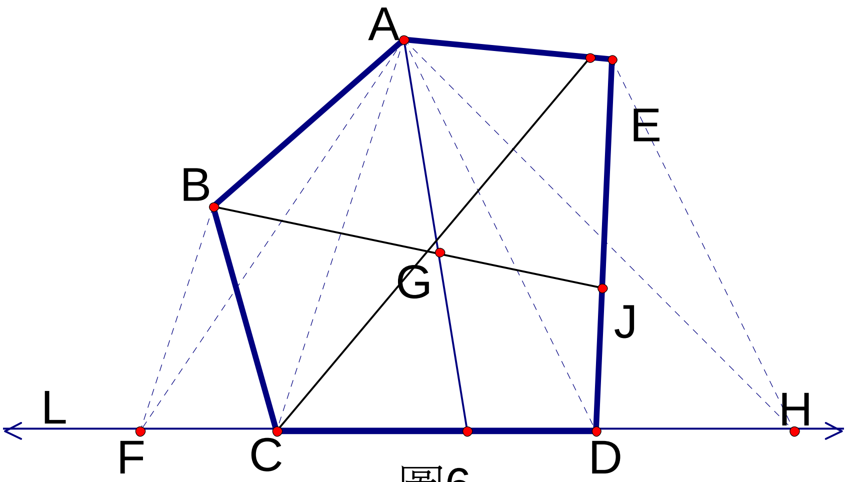


圖6

三、問題研究

針對中華民國小學科展第三十一屆國中組數學科的錯誤，我們試著以面積及【槓桿原理】方式尋找解決之道。

【問題一.1】作出凸四邊形 *ABCD*（如圖 7）之重心

分析：首先將四邊形分成兩三角形△*ABD*、△*BCD*，分別求出其重心G_1、G_2。因為G_1及G_2分別為△*ABD* 與△*BCD* 之重心，假設此四邊形厚度是固定，此時質量比就是面積比了。若在$\overline{G_1G_2}$上取得一平衡支點 G，使得$\overline{GG_1}$ ：$\overline{GG_2}$ ＝△*ABD* 之面積：△*BCD* 的面積，則依槓桿原理，支點 G 為四邊形 *ABCD* 重心所在。因為△BG_1D 的面積是△*ABD* 的三分之一，同時△BG_2D 的面積是△*BCD* 的三分之一，$\overline{BD}$為△BG_1D和△BG_2D 共用底，所以△BG_1D：△BG_2D ＝$\overline{G_1E}$ ：$\overline{EG_2}$ ，就得到支點 G，也就是此四邊形的重心。

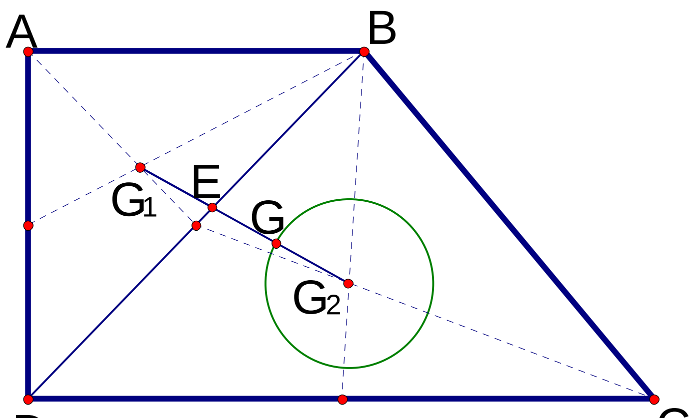


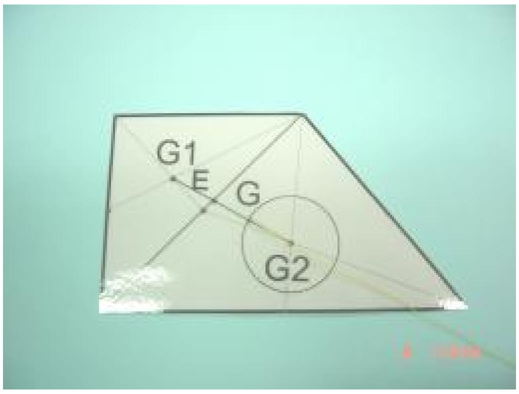
圖7

作法：1. 作△*ABD*、△*BCD* 之重心G_1 、G_2

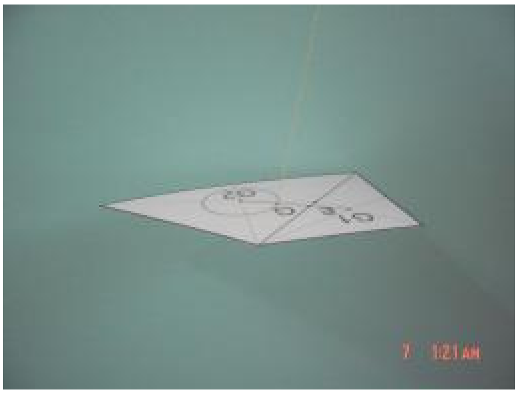
2.連接G_1 、G_2 ，交對角線$\overline{BD}$於 E 點

3.以G_2點為圓心，$\overline{G_1E}$ 為半徑劃圓，交$\overline{G_1G_2}$ 於 G 點，則 G 點為所求四邊形 *ABCD* 的重心

※實作所得照片



正面觀



實際操作情形

【問題一. 2】作出凹四邊形 *ABCD*（見圖 8）之重心

分析：同【問題一.1】

作法： 1.連接凹點 B 與所對頂點 D，分凹四邊形 *ABCD* 成△*ABD* 與△*BCD*

2.求作△*ABD* 與△*BCD* 的重心 G_1 與 G_2

3.作 $\overline{G_1G_2}$ ，交 $\overline{BD}$ 於 E 點

4.取 $\overline{G_1G} = \overline{G_2E}$ ，則 G 點爲凹四邊形 *ABCD* 之重心

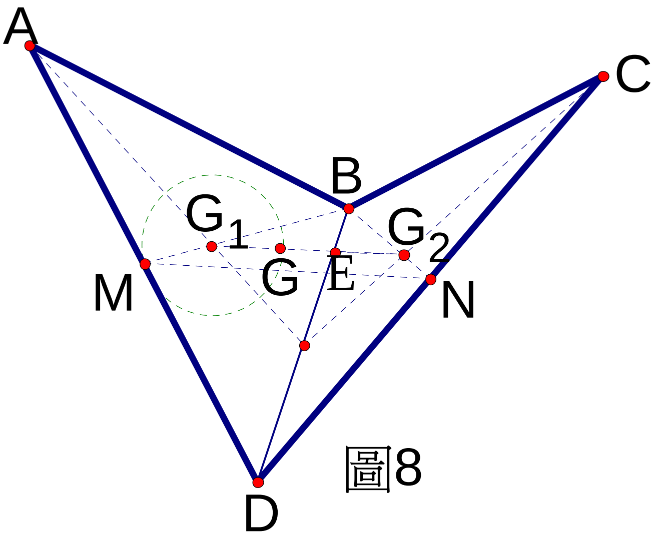
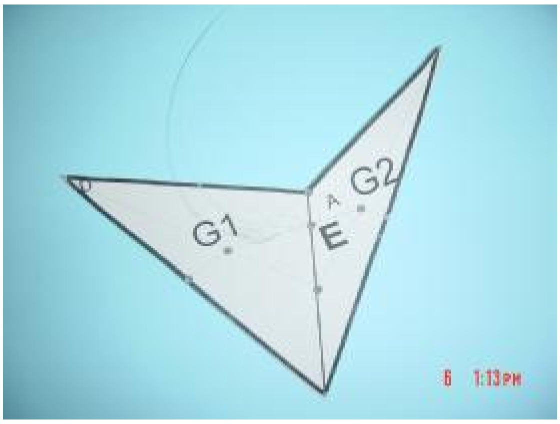


圖8

※ 實作所得照片



正面觀

實際操作情形

※在尋找凹四邊形重心時，我們意外發現以下一些問題：

（如圖 9），在凹四邊形 $ABCD$ 中 M、N 分別爲 $\overline{AD}$ 、 $\overline{CD}$ 中點

1.連接 $\overline{MN}$ 、 $\overline{AC}$

2.延長 $\overline{BD}$ 交 $\overline{AC}$ 於 P

3.令 $\overline{MN}$ 分別交 $\overline{AB}$ 於 Q，交 $\overline{PD}$ 於 R $\Longrightarrow$ $\overline{NR}=\frac{1}{2}\overline{CP}$

設 $\overline{AP} \geqq \overline{CP}$ ，則有下列情形：

1.若 B、A、C 點皆在 $\overline{MN}$ 同側，則重心在形內（如圖 8）

2.若 B 與 $\overline{AC}$ 在 $\overline{MN}$ 異側，且當

（1） $\overline{MQ} > \frac{1}{2}\overline{CP}$ ，則重心在形內（如圖 9）

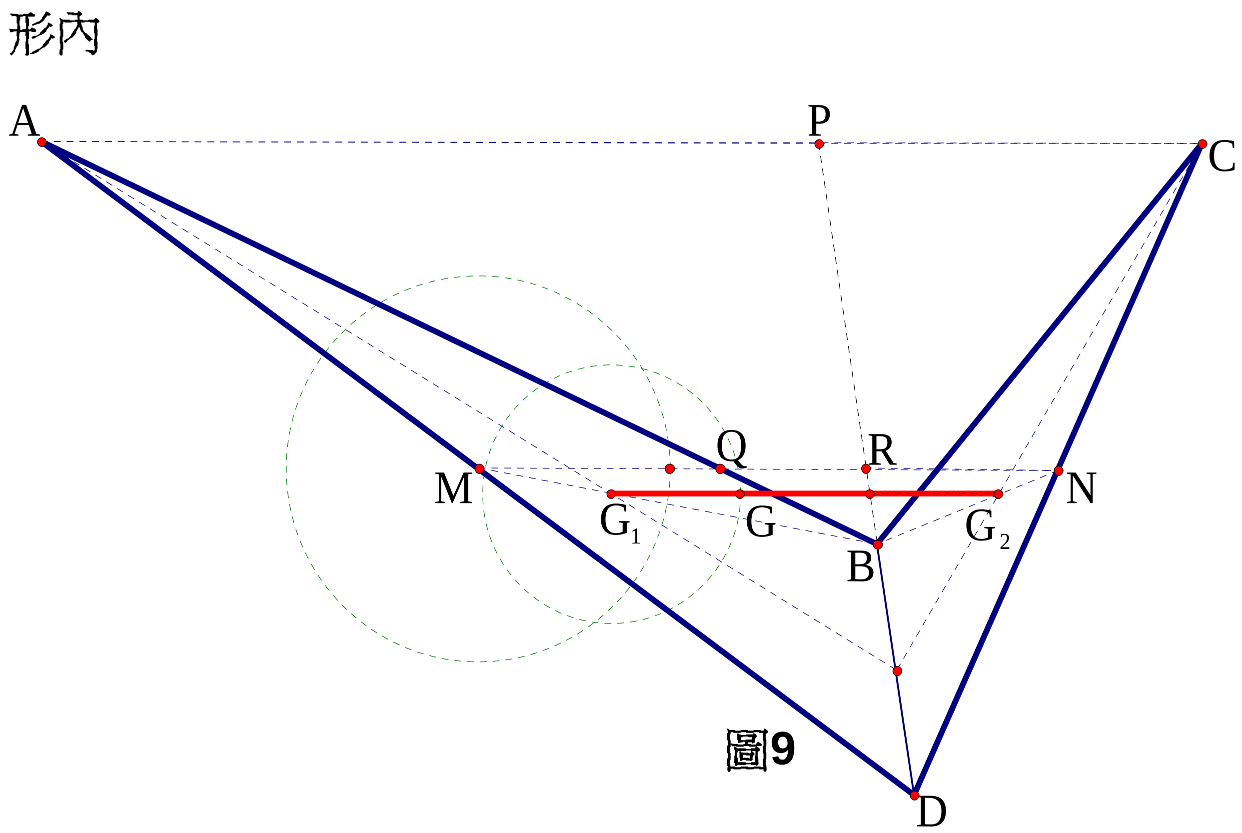


圖9

（2）$\overline{MQ} < \frac{1}{2}\overline{CP}$，則重心在形外。（如圖 10）

形外

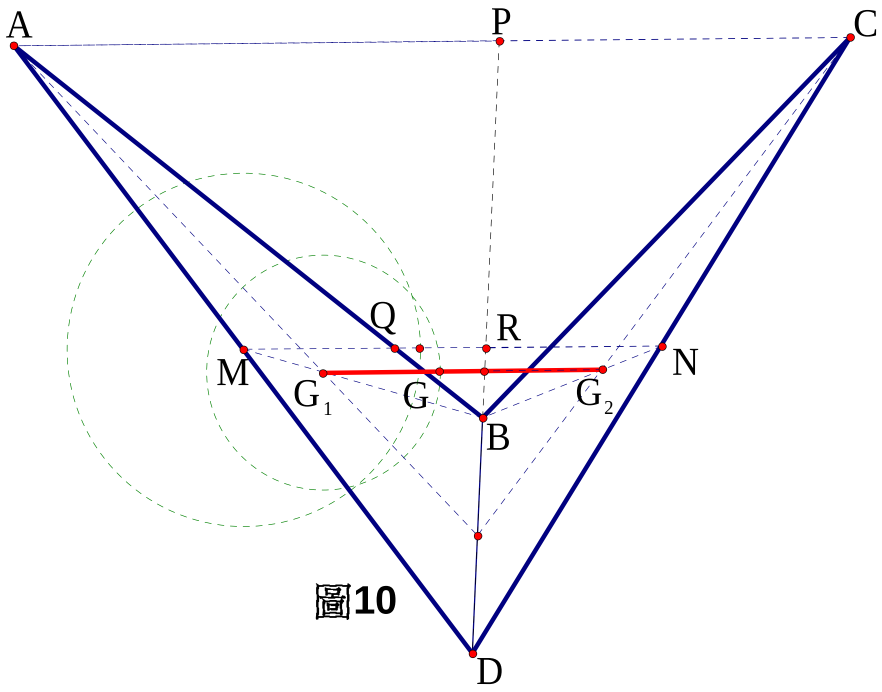


圖10

（3）$\overline{MQ} = \overline{NR} = \frac{1}{2}\overline{CP}$，則重心在邊上（$\overline{AB}$）（如圖 11）

邊上

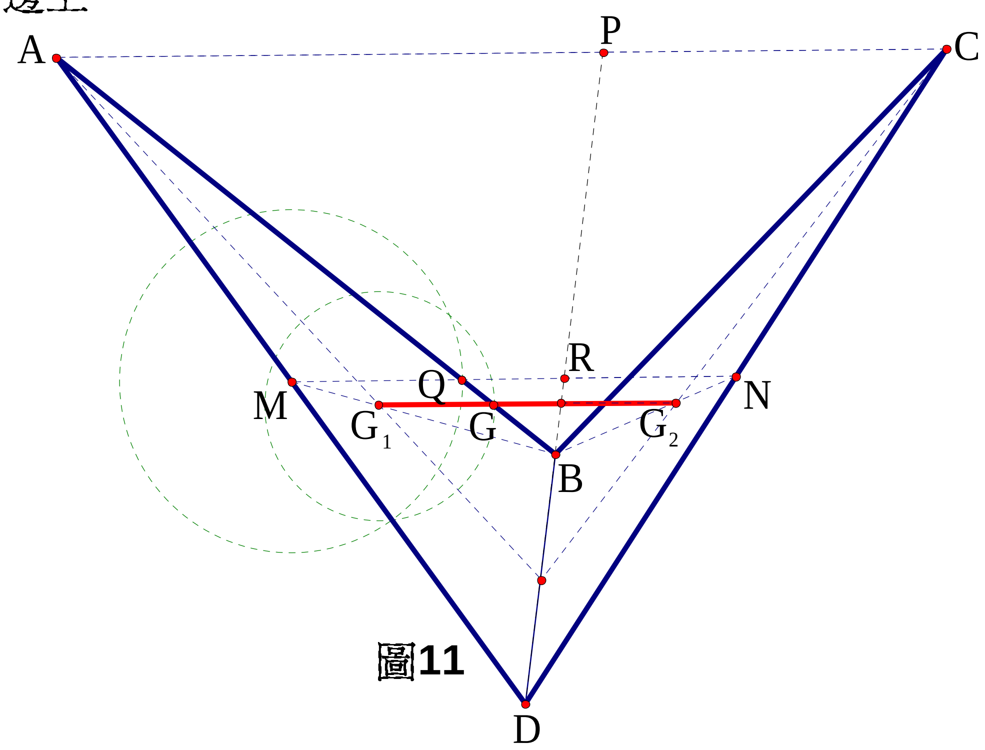


圖11

（4）特別地，當 $\overline{MQ}=\overline{NR}=\frac{1}{2}\overline{CP}$，且 B 點位於 MN 連線上時，我們得凹四邊形的重心在頂點（凹處）上即 B、Q、G 三點重合，此時 $\Delta ABD=\Delta BCD$。（如圖 11）

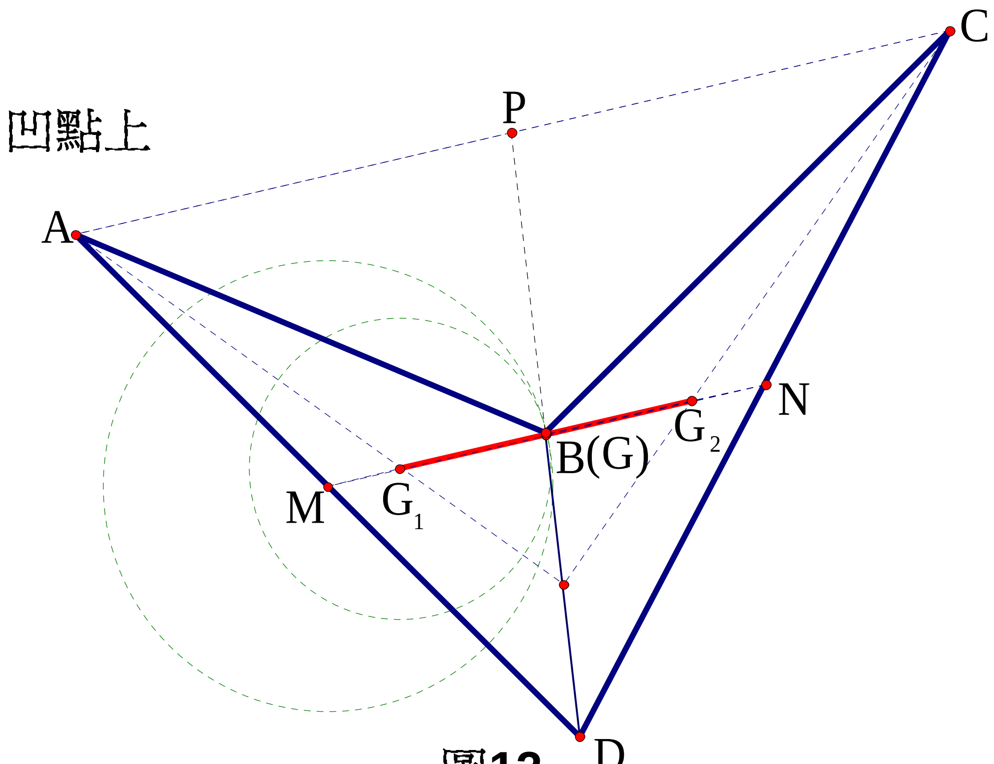
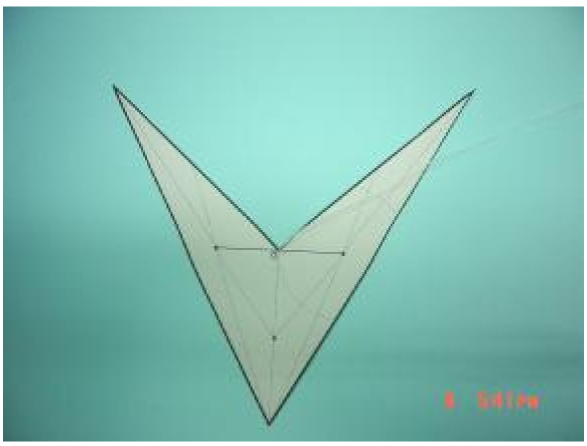
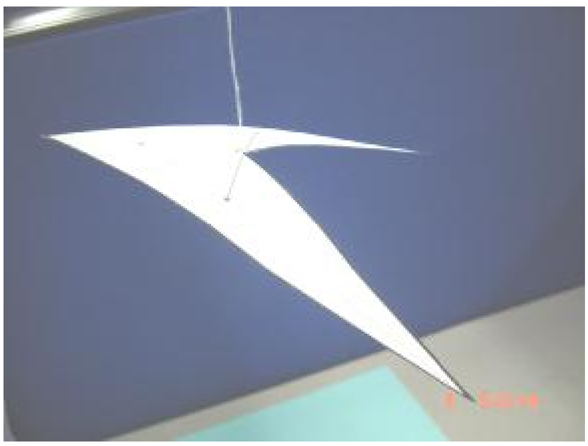


圖12

※實作所得照片



正面觀



實際操作情形

【問題二.1】作出凸五邊形 *ABCDE*（如圖 13）的重心

我們可將凸五邊形分成△*ABC* 與四邊形 *AEDC*，接著：

1.分別作出△*ABC* 的重心 G_3 及四邊形 *AEDC* 的重心 G_4（方法同【問題一.1】）

2.同【問題一.1】，連接 $\overline{G_3G_4}$ 交 $\overline{AC}$ 於 P

3.在 $\overline{G_3G_4}$ 上取 $\overline{G_3P}=\overline{G_4G}$ ，得重心 G

本以爲用此模式操作下去，即可得 N 邊形之重心。但是用同樣模式所得五邊形「重心」，我們以實物操作時，發現此方法所得之點 G 並非重心。難怪第三十一屆中華民國科展國中數學組第一名作品－尋找多邊形的重心，在其內容中以此方法尋求重心僅止於四邊形而已。

那問題又出在哪裡？經過團隊們仔細的推敲，我們找到原因如下：

因爲在【問題一.1】，我們取$\triangle BDG_1=\frac{1}{3}\triangle ABD$ 與$\triangle BDG_2=\frac{1}{3}\triangle BCD$ 去作比較，而五邊形 *ABCDE* 中，我們取$\triangle ACG_3$與$\triangle ACG_4$去做比較。但因爲$\triangle ACG_3$雖然等於$\frac{1}{3}\triangle ABC$，但是$\triangle ACG_4$卻不一定等於四邊形 *AEDC* 面積的$\frac{1}{3}$，因此$\triangle ACG_3:\triangle ACG_4$不一定等於$\triangle ABC$：四邊形 *AEDC* 面積。所以，求得的點 G 自然不一定爲五邊形重心。（如圖 12）

針對上述比例式不相等的問題，我們想到，只要將原五邊形一條對角線分成四邊形與三角形，再在兩圖形各取其面積的$\frac{1}{3}$，即可修正上述之錯誤。

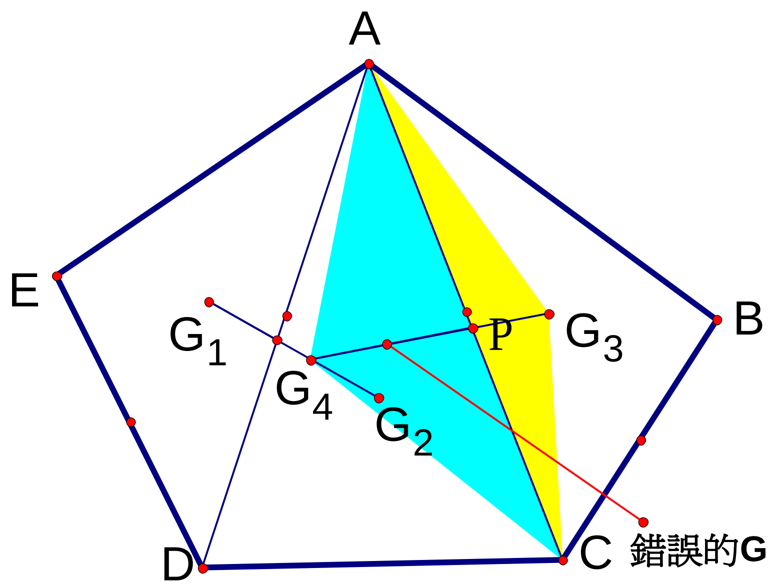


圖13

修正如下：(如圖 14)

1.利用【問題一.1】的方法，求得四邊形 $ACDE$ 之重心 G_4

2.過 E 點做平行 $\overline{AD}$ 的直線交 $\overleftrightarrow{CD}$ 於 F 點

3.連接 A ，F 兩點，則經過**【面積交換】**後，$\triangle AFC$＝四邊形 $ACDE$ 之面積

4.在 $\overline{CF}$ 上取點 K 使得 $\overline{CK}=\frac{1}{3}\overline{CF}$ ，則$\triangle ACK$=$\frac{1}{3}\triangle AFC$＝$\frac{1}{3}$四邊形 $ACDE$ 之面積

5.作 $\overline{KG_3}$ 交 $\overline{AC}$ 於 O 點，在 $\overline{KG_3}$ 取點 L，使得 $\overline{KL}=\overline{G_3O}$ 3

6.作 $\overline{KG_4}$ ，過 L 點作平行 $\overline{G_4K}$ 的直線

7.此直線交 $\overline{G_3G_4}$ 於 G 點，則 G 點為真正的五邊形重心

證明：

1.Θ $\overline{EF}\,//\,\overline{AD}$ $\therefore \Delta ADE=\Delta ADF \Rightarrow \Delta ACF=$ 四邊形 AEDC 面積

2.Θ $\overline{CK}=\frac{1}{3}\overline{CF}$ $\therefore \Delta ACK=\frac{1}{3}\Delta ACF=\frac{1}{3}$四邊形 AEDC 面積

3.四邊形 AEDC 面積： $\Delta ABC=\frac{1}{3}$四邊形 AEDC 的面積：$\frac{1}{3}$△ABC= ΔACK ：

$\Delta ACG_3=\overline{KO}$ ： $\overline{OG_3}$

4.Θ $\overline{LG}\parallel\overline{KG_4}$ $\therefore \overline{G_4G}$ ： $\overline{G_3G}=\overline{KL}$ ： $\overline{LG_3}=\overline{G_3O}$ ： $\overline{KO}$ （$\because \overline{KL}=\overline{OG_3}$）

5.$\therefore \overline{G_4G}$ ： $\overline{G_3G}=\Delta ABC$ ：四邊形 AEDC 面積，根據[槓桿原理]可得 G 為五邊形 ABCDE 之重心

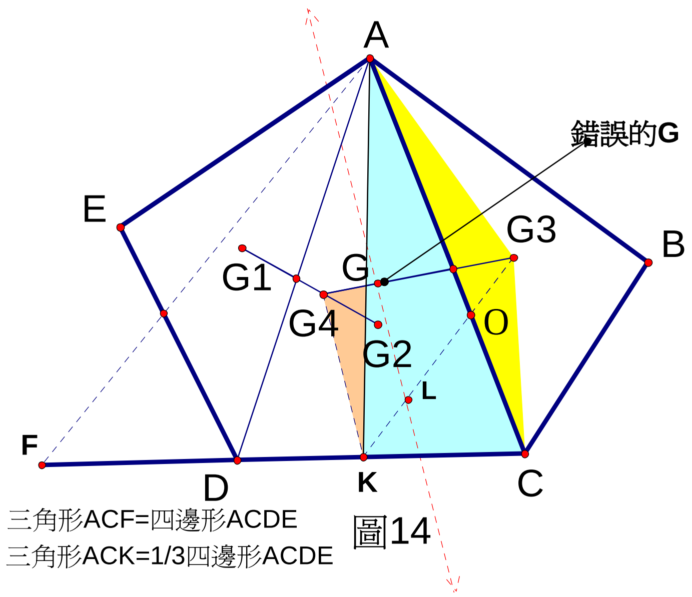
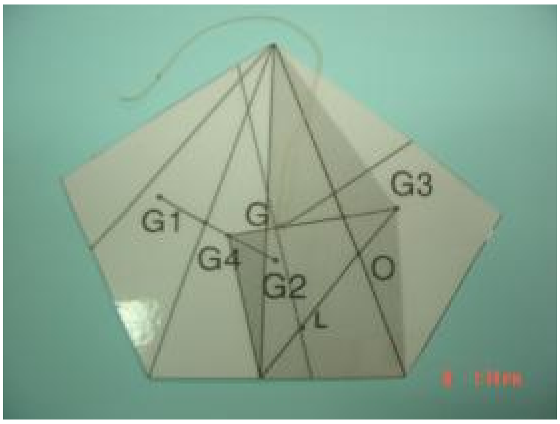
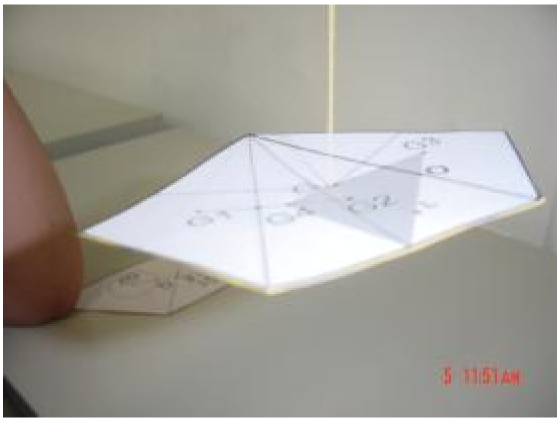


圖14

※凸五邊形實作所得照片





正面觀　　　　實際操作情形

【問題二.2】作出凹五邊形 *ABCDE*（如圖 15）之重心

作法： 1.將五邊形 $ABCDE$ 分成△ABC、四邊形 $ACDE$，並分別求出其重心 G_1 、 G_2

2.利用【面積轉換】，先連 $\overline{AD}$ ，做線段過 E 點平行之直線 $\overline{AD}$ 交 $\overline{CD}$ 於 F，得△ACF＝凹四邊形 $AEDC$ 面積

3.在 $\overline{CF}$ 上作出 $\overline{HC}=\frac{1}{3}\overline{FC}$

4.連 $\overline{HG_1}$ 交 $\overline{AC}$ 於 J

5.在 $\overline{HG_1}$ 上作 $\overline{HJ}=\overline{G_1I}$

6.作 $\overline{IG} \parallel \overline{HG_2}$ 交 $\overline{G_1G_2}$ 於 G，則 G 爲所求

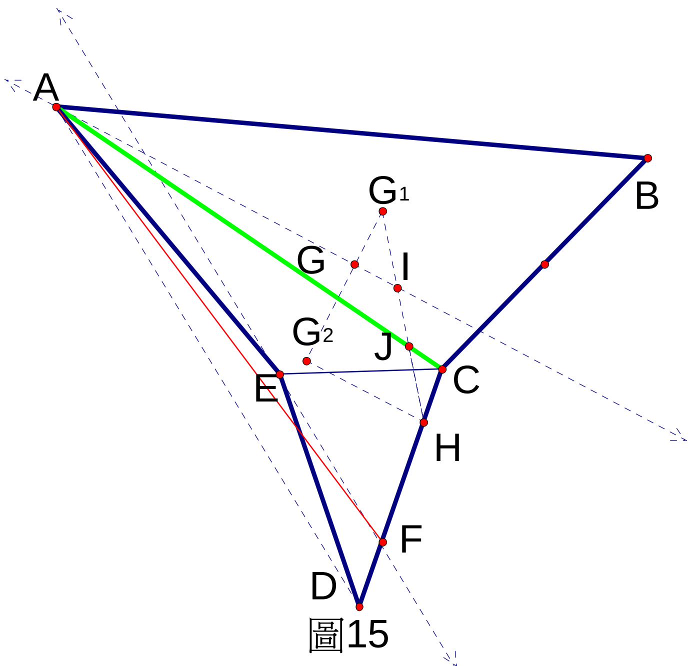
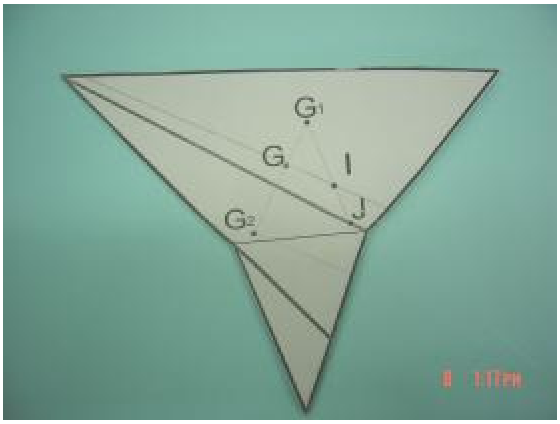
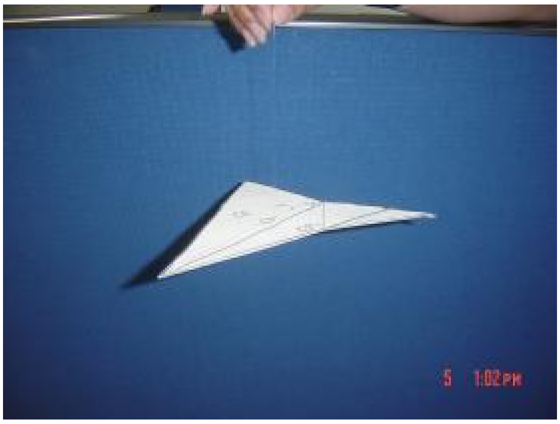


圖15

※凹五邊形實作所得照片





正面觀　　　　　　　　　　實際操作情形

依樣畫葫蘆，我們繼續朝尋找六邊形的重心邁進

【問題三.1】作出凸六邊形 *ABCDEF*（如圖 16）之重心

作法： 1.將六邊形 *ABCDEF* 分成五邊形 *ABDEF* 與△*BCD*，分別求出重心 G_1 、 G_2

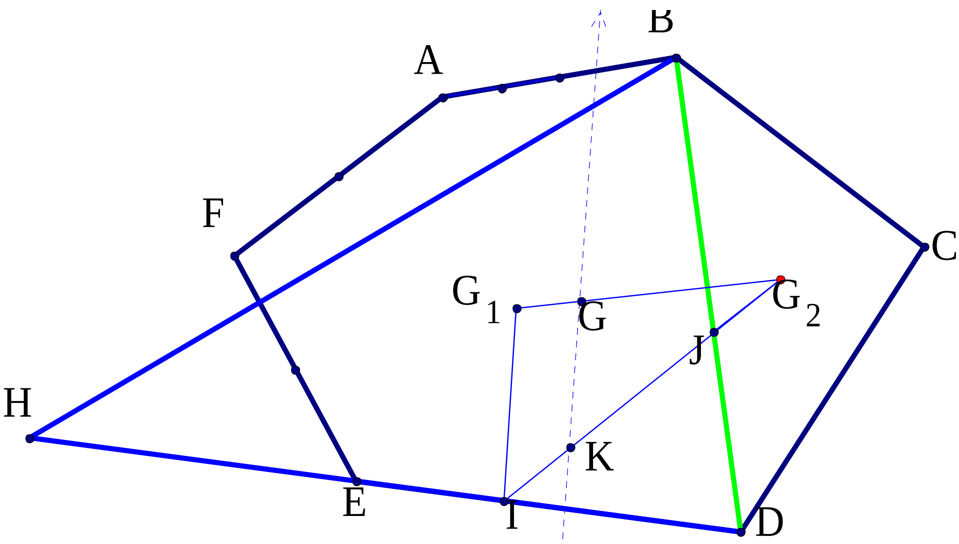
2.利用**【面積轉換】**作△*BDH*＝五邊形 *BAFED* 面積

3.在 $\overline{DH}$ 上取一點 I 使得 $\overline{DI}=\frac{1}{3}\overline{DH}$

4.連 $\overline{IG_2}$ 交 $\overline{BD}$ 於 J

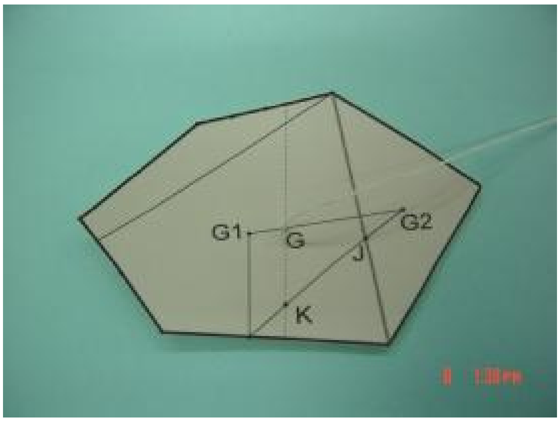
5.在 $\overline{IG_2}$ 上作 $\overline{IK}=\overline{JG_2}$

6.作 $\overline{KG}\ /\!/\ \overline{IG_1}$ 交 $\overline{G_1G_2}$ 於 G，則 G 爲所求

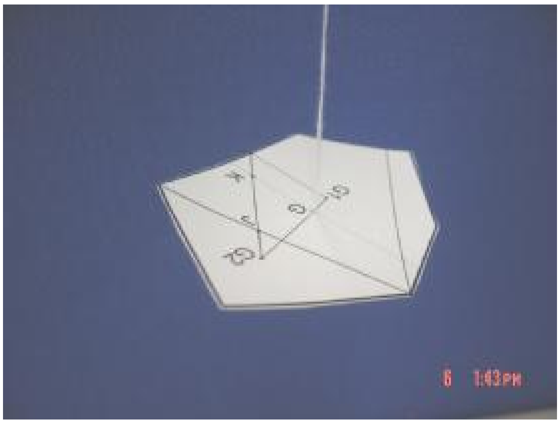


三角形BDH=五邊形ABDEF　圖16

※凸六邊形實作所得照片



正面觀



實際操作情形

【問題三.2】作出凹六邊形 *ABCDEF*（如圖 17）之重心

作法：同【問題三.1】

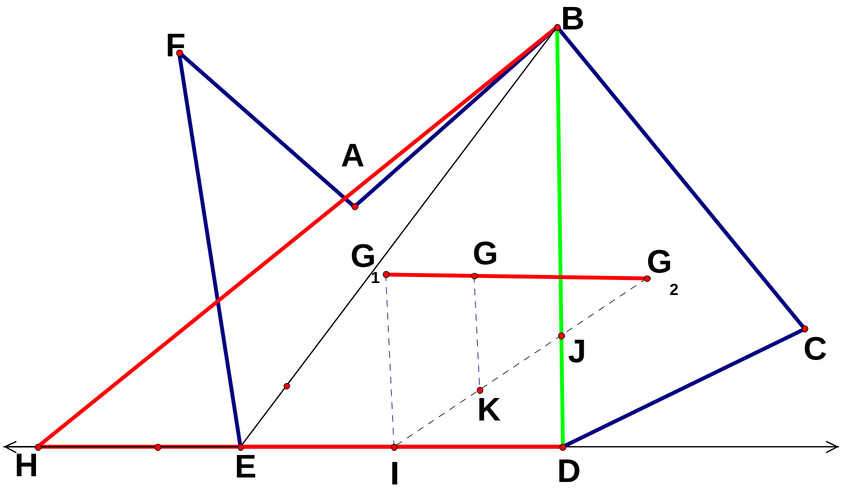
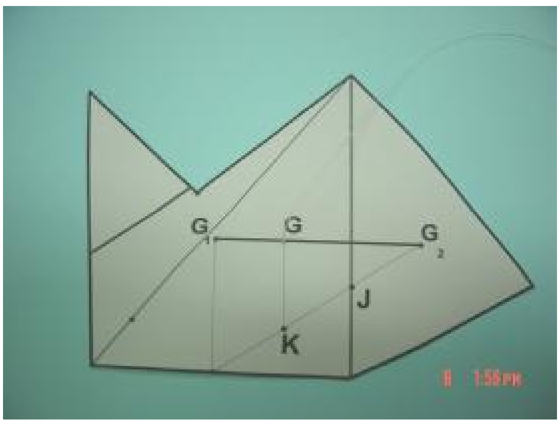
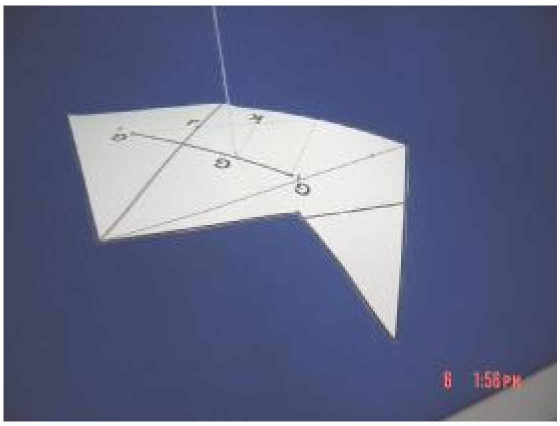


圖17

※凹六邊形實作所得照片



正面觀



實際操作情形

利用上述的模式，我們類推至 N 邊形之重心。問題如下：

【問題四.1】作出凸 N 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_n$（如圖 18）之重心

※也就是將我們想出來的方法，推廣到不規則凸 N 邊形重心求法

作法： 1.假設 N－1 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1}$ 之重心 G_1 及

$\Delta A_1A_{n-1}A_n$ 之重心 G_2

2.利用【面積交換】作出 ΔA_1PA_{n-1} =N－1 邊形 $A_1A_2\cdots\cdots A_{n-1}$ 之面積

3.在 $\overline{PA_{n-1}}$ 上作 $\overline{QA_{n-1}}=\frac{1}{3}\overline{PA_{n-1}}$

4.連 $\overline{QG_2}$ 交 $\overline{A_1A_{n-1}}$ 於 R

5.在 $\overline{QG_2}$ 作 $\overline{QS}=\overline{RG_2}$

6.作 $\overline{SG}//\overline{QG_1}$，交 $\overline{G_1G_2}$ 於 G 點，則 G 爲所求。

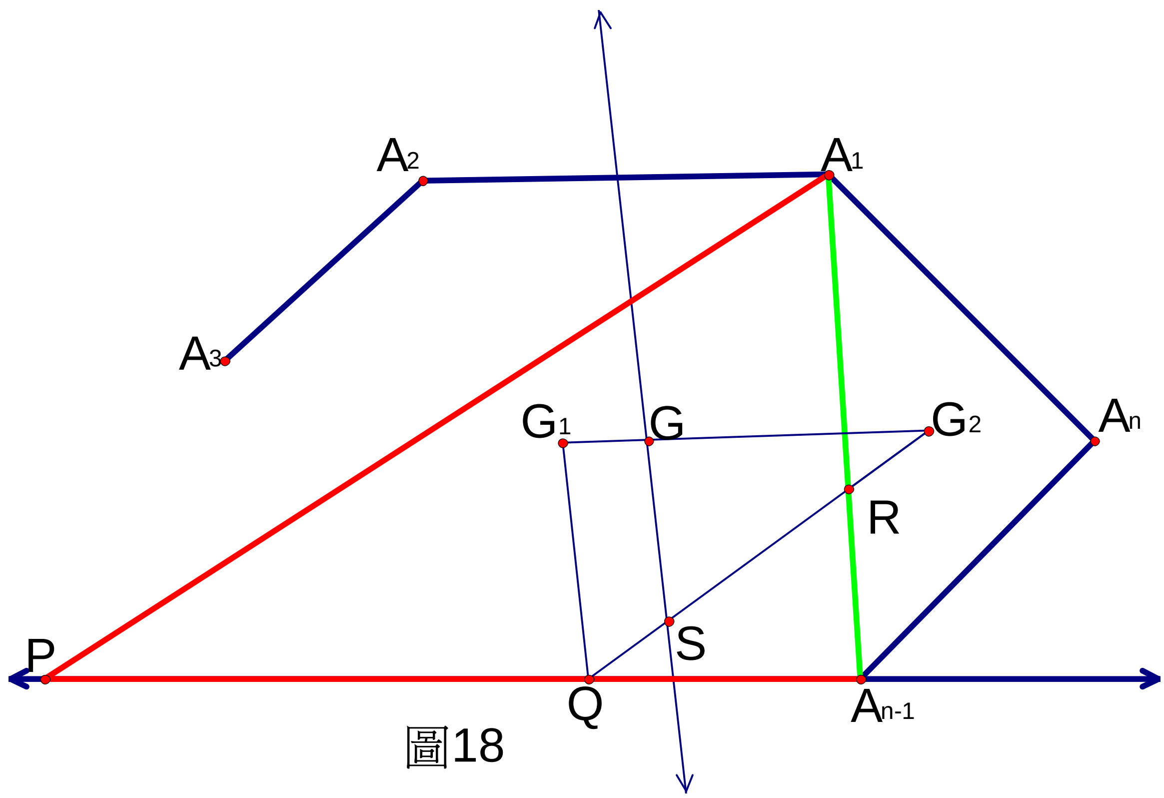


圖18

【問題四. 2】作出凹 N 邊形 $A_1A_2 \cdots\cdots A_n$（如圖 19）之重心

作法：同【問題四.1】

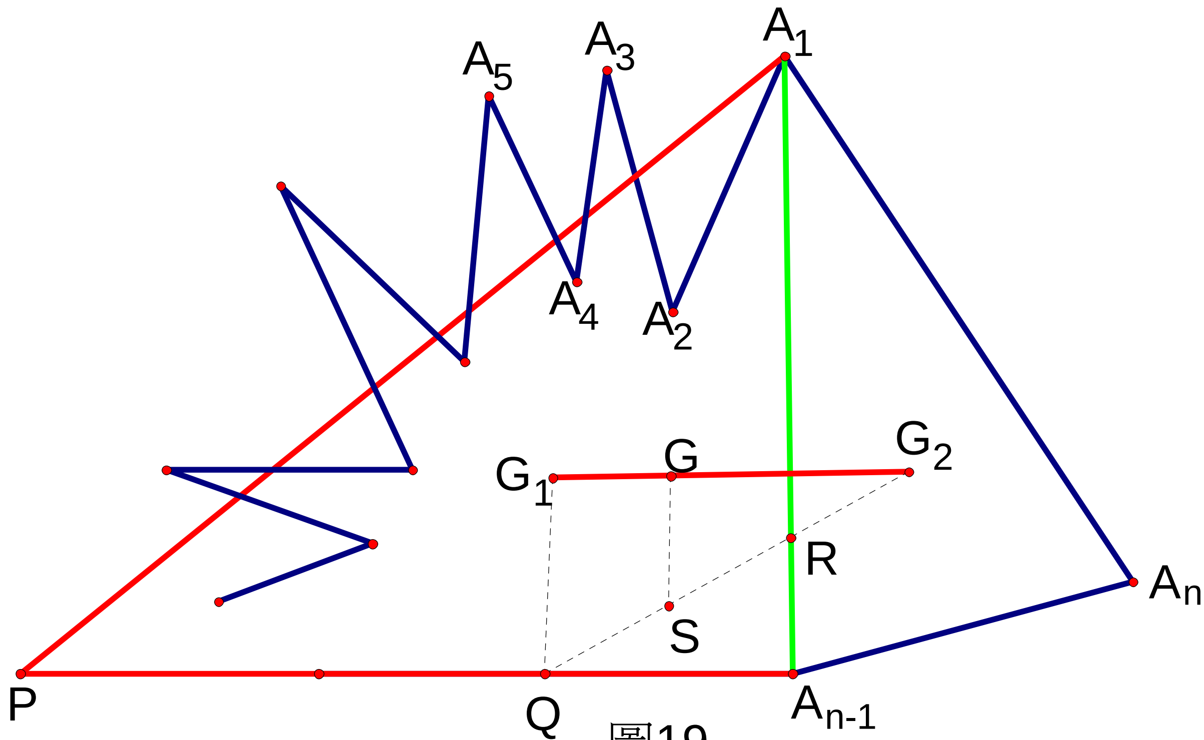


圖19

至此，我們已成功的利用[**面積交換**]及[**槓桿原理**]透過修正找出多邊形的重心。但美中不足的是當 n>4 之凹多邊形其重心與圖形之位置關係是否有類似的判斷式？，由於時間及能力有限，我們尚未找出，正加油中。更深切的期盼同好能共同解答此問題。

四、操作試驗：

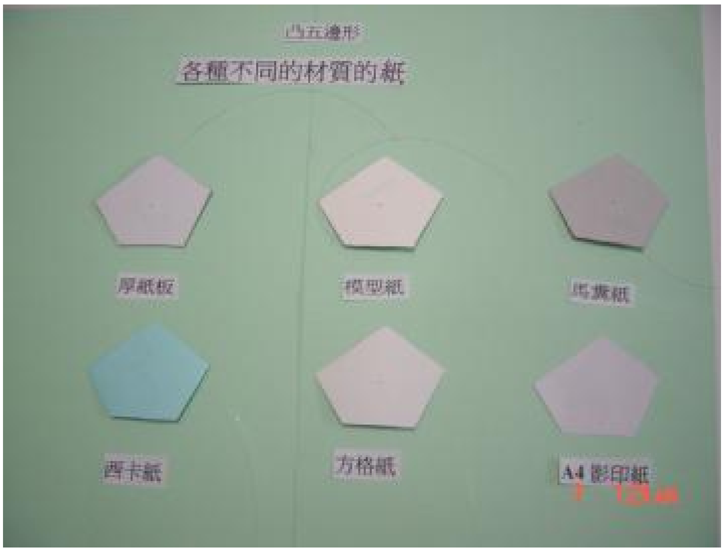
(一) 前言：

我們在課堂上曾經利用國中課本所寫的針線法實際操作，實驗自己所作之三角形重心是否正確，因此後來做研究時，如果懷疑自己做的重心是否正確，常常立刻列印下來，剪好圖形，用針線法檢驗前述各種研究方法所求出各多邊形的重心是否正確，圖形能否平衡。老師知道後，說我們是難得用實驗來驗證數學的。但是在多次的操作下我們卻發現常有同一圖形，因為不同材質的使用，使用的吊線不同，或擺放一段時間之後，會使已求得正確重心之圖形無法平衡，或之前能平衡，後來想展示給老師看時卻又不平衡，因此我們想找出造成這種情形的原因，並找出最好的材料及注意事項以供老師在教學上使用。

(二) 實際操作之過程

1.先利用 GSP 在電腦上做圖。
2.列印多張圖形並剪下圖。
3.分別採用雙面膠、膠水等塗料或護貝方式，將圖黏貼在下列各種材質的紙上。
  a.厚紙板（2 ㎜）
  b.馬糞紙（0.5 ㎜）
  c.模型卡紙（1 ㎜）
  d.西卡紙
  e.方格紙
  f.A4 影印紙
4.分別用一般棉線及釣魚線穿過重心實際吊起看圖形是否平衡。
  ※實作所得照片

凹四邊形各類材質照片



凸五邊形各類材質照片

(三) 結果如下：

凹四邊形照片 1： 1.模型卡紙平衡度極佳 2.馬糞紙有不平衡現象 3.厚紙板完全無法平衡	
凹四邊形照片 2： 1.模型卡紙平衡度極佳 2.西卡紙的偏移最嚴重將近 150 度的偏移 3.方格紙也會偏移，不易平衡，但偏移程度低於西卡紙	
凹四邊形照片 3： 1.A4 影印紙剛剪下時，平衡度極佳，但凹四邊形會有某一邊，因爲重力而下垂的情形（紙較薄故支撐力差） 2.爲改善此情形加以護貝後，不但平衡度極佳，且改善了下垂變形之缺點（如照片最左邊的圖） 3.照片中也可比較出方格紙的偏移十分厲害	

凸五邊形照片 1： 1.A4 影印紙護貝後和未護貝時，兩者平衡度極佳 2.方格紙及西卡紙仍然容易偏移，不易平衡 3.A4 影印紙護貝後可保存較久不會變形	
凸五邊形照片 2： 1.模型卡紙仍然平衡度極佳 2.尤其和旁邊的方格紙和西卡紙相比，更可見其不同	
凸五邊形照片 3： 1.厚紙板仍然平衡不易但偏移度低於凹四邊形 2.馬糞紙的偏移度也和後紙板相差不大 3.模型卡紙的平衡度極佳	

(四) 素材製作之討論與建議

（一）雙面膠並不適用於黏貼上，因爲雙面膠有厚度，會使重心偏移。
（二）厚紙板太重，易因穿洞時些微偏移而不平衡。
（三）厚紙板太厚，穿洞不易，穿好後也易因線比洞細，而造成不平衡。
（四）若用紙較薄；如 A4 影印紙：容易平衡，但因太薄，也容易使某一邊捲起造成重心偏移。
（五）A4 影印紙若加以護貝則可改善 4.之缺點
（六）紙太厚，如厚紙板、模型卡紙，則在穿洞時若沒有垂直穿入，也容易偏移。並因剪裁時，些微的誤差造成大的偏移。
（七）另外洞太大，使得線在中間偏移不定，也會造成圖形（即使找到真正的重心）不平衡。後來我們利用線結塞在洞中，才減少偏移程度。
（八）用釣魚線因較粗易卡在洞中，所以成效較好，但不適合用於薄的紙。
（九）最適合展示的是使用厚薄適中的是模型紙配上釣魚線
（十）黏貼適合用膠水平塗，且塗滿才不會造成誤差
（十一）圖形不要放大過多，圖放大後重量誤差也大。
（十二）作圖時不需畫出重心，因列印時表示重心的點，會呈現出一個大的圓，應利用兩線之交點，才能確認下針的位置。

陸、討論與結論：

一、 對於 N 邊形，利用過頂點的兩條面積平分線所得交點 G，

（一）若 N=3 則 G 點爲此 N 邊形之重心。

（二）若 N＞3 則 G 點不一定爲此 N 邊形之重心。（※此爲第三十一屆中華民國科展國中數學組第一名作品－尋找多邊形重心內容之誤）

二、 凸 N 邊形的重心必在形內。

三、 凹 N 邊形的重心可能在形內、邊界上（含頂點）、或在形外。特別當 N=4 時，可確定：

（一）當 $\overline{AC}$ 與 B（凹處之頂點）在 $\overline{MN}$ 之同側，則重心在形內（如圖 8）

（二）當 $\overline{AC}$ 與 B（凹處之頂點）在 $\overline{MN}$ 之異側，且：

1.當 $\overline{MQ} > \frac{1}{2}\overline{CP}$，則重心在形內。（如圖 9）

2.當 $\overline{MQ} < \frac{1}{2}\overline{CP}$，則重心在形外。（如圖 10）

3. $\overline{MQ}=\overline{NR}=\frac{1}{2}\overline{CP}$，則重心在邊上（$\overline{AB}$）(如圖 11）特別地，當 Q 與 B 重合時，我們得凹四邊形的重心在頂點、(凹處）上，此時 $\Delta ABD=\Delta BCD$。（如圖 12）

四、 操作實驗重心是否正確時的發現

（一）在材質上我們建議用模型卡紙或 A4 影印紙加以護貝，不建議使用課本所提的厚紙板。

（二）因紙的厚度不同，較厚的紙使用釣魚線；較薄的指使用棉線。最適合展示的是使用厚薄適中的是模型紙配上釣魚線

（三）黏貼適合用膠水平塗，不適合用雙面膠，因為雙面膠有厚度，會使重心偏移。

（四）穿洞時應注意避免造成誤差。

（五）電腦作圖時，不建議標出重心，應利用兩線之交點，才能確認下針的位置。

柒、參考資料及其它

一、 作者：※部貞市郎 ；書名：幾何學辭典； 版本：再版； 出版地：臺北市； 出版社：九章編輯部；頁數：956；出版年：77 年

二、 作者：王哲麒、翁士杰； 書名：中華民國科展第三十一屆參展作品專輯；名稱：尋找多邊形的重心-國中數學組第一名；頁數：107-120；出版者：國立台灣科學教育館；出版年：80 年

三、 作者：鄭元博；光碟名：台灣 2003 年國際科學展覽會參展作品專輯；名稱：滿足 $\sum_{n=1}^{n}\overrightarrow{MP}=0$ 之 M 點是否為重心之探索；版本：初版；出版者：國立台灣科學教育館；出版地：臺北市；頁數：4；出版年：92 年

四、 作者：孫自嘉等五人； 書名：中華民國科展第二十一屆到第三十屆國中數學組得獎作品合集；名稱：平面圖形重心問題之探討--國中組數學科第三名；頁數：165--176；出版年：79 年

五、 作者：陳冒海；書名：國民中學數學第三冊；版本：初版 ；出版者：南一書局；出版年：93 年

六、 書名：幼獅數學大辭典；出版地：台北市；出版社：幼獅文

七、 作者：黃福坤；篇名：以物理學觀點求多邊形的重心；出版年：2000/3/19；來源：http://phy.ntnu.edu.tw/demolab/wwwboard0/messages/2269.html

評　語

030401 國中組數學科　佳作

凹凸有致─多邊形重心的求法

能細察過去研究的失誤，並運用數學方法重新尋找出路，也因而獲致更豐富的研究成果，值得鼓勵。