

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國小組

數學科

科別：數學科

組別：國小組

作品名稱：在裡面。變多少

關鍵詞：面積、比例

編號：080410

學校名稱：

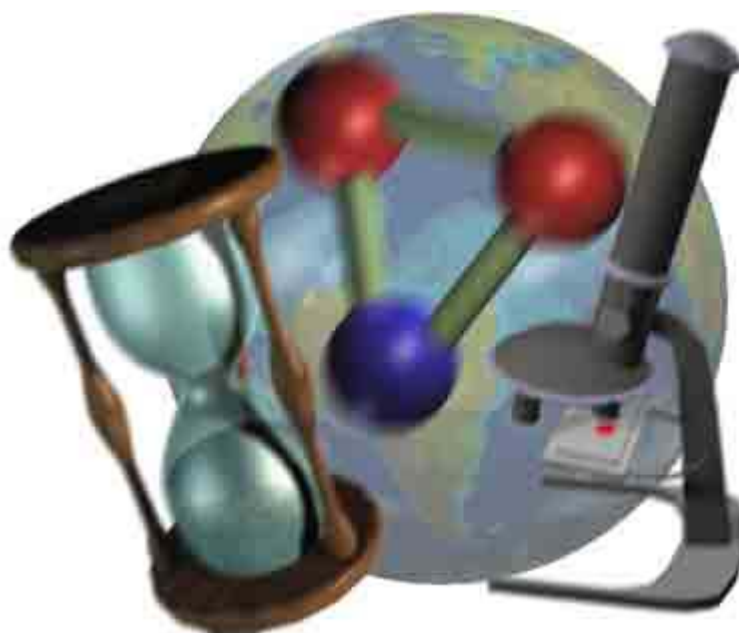
宜蘭縣羅東鎮羅東國民小學

作者姓名：

陳彥齊、莊皓翔、張峰耀、江侑軒、陳加頌、盧以昕

指導老師：

葉文雄、陳昇群

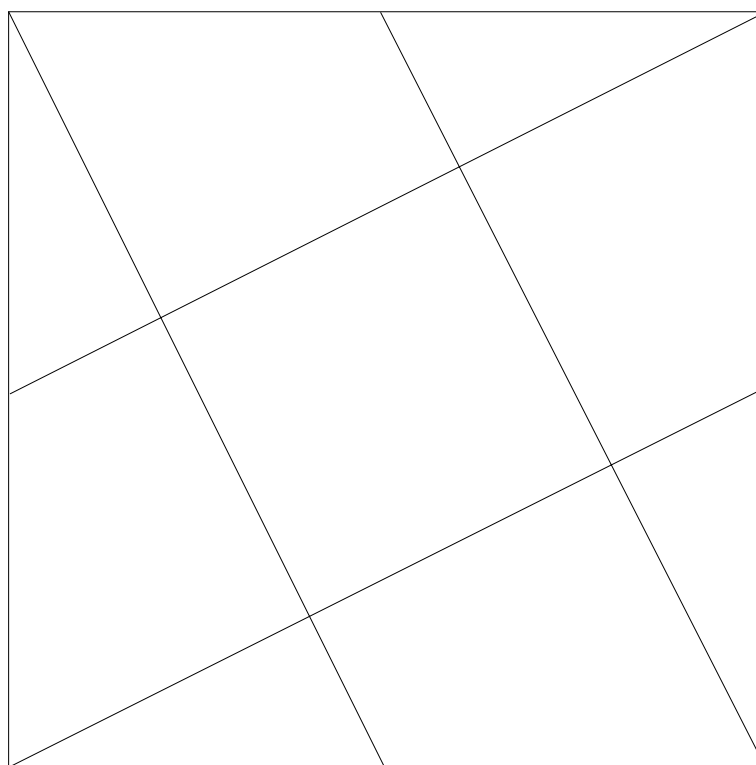


摘要

本研究探討將一多邊形的邊長等分，以等分點至對角做切割線，形成的內多邊形面積為原多邊形面積的幾分之幾，研究過程中利用「擴大法」、「切割法」、「假設法」來解決問題，並歸納提出解題的計算式。

壹、研究動機

老師請在公佈欄提出一個動動腦的數學問題（如下圖），老師準備請第一位答出這個問題的同學，問題是：「誰知到這個內正方形的面積？」

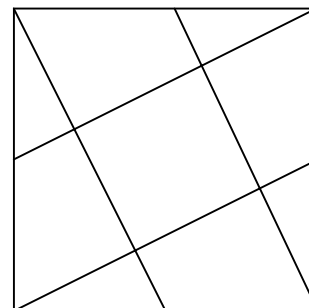


老師提示：「外正方形的邊長是 10 公分，分成 2 等份，再把等分點連至對角，而所形成的內正方形是多少平方公分。」大家想啊想，一時都想不出解答，我當然不能讓這樣的疑惑繼續存在。花一個下課時間，我找出答案了：「20 平方公分」。雖然有了答案，我卻覺得這個問題十分有趣，值得繼續探討，便開始了這趟令人興奮的研究之旅了。

貳、研究目標

1. 將正方形的 1 邊分成 n 等分點，取其中的一點，連至對角，作分割線，四角都連，所形成的內正方形，為外正方形的幾分之幾。（如右下圖）

2. 將長方形的 1 邊分成 n 等分，取其中的一點，連至對角，作分割線，四角都連，所形成的內平行四邊形為外長方形的幾分之幾。
 3. 將平行四邊形的 1 邊分成 n 等分，取其中的一點，連至對角，作分割線，四角都連，所形成的內平行四邊形為外平行四邊形的幾分之幾。
 4. 將正三角形的 1 邊分成 n 等分，取其中的一點，連至對角，作分割線，三角都連，所形成的內正三角形為外正三角形的幾分之幾。
 5. 將正六邊形的 1 邊分成 n 等分，取其中的一點，連至對角，作分割線，六角都連，所形成的內正六邊形為外六邊形的幾分之幾。
- 甲. 歸納研究結果，找出內正方形為外正方形幾分之幾的公式。
 - 乙. 歸納研究結果，找出內平行四邊形為外長方形幾分之幾的公式。
 - 丙. 歸納研究結果，找出內平行四邊形為外平行四邊形幾分之幾的公式。
 - 丁. 歸納研究結果，找出內正三角形為外正三角形幾分之幾的公式。
 - 戊. 歸納研究結果，找出內正六邊形為外正六邊形幾分之幾的公式。



參、研究器材

1. 方格紙
2. 直尺
3. 計算紙
4. 彩色筆
5. 電算器

肆、名詞使用

1. 正方形：四個角都是直角，四個邊都等長的形狀。
2. 長方形：四個角都是直角，平行邊邊長相等。
3. 平行四邊形：平行邊等長，有 2 對平行邊。
4. 正三角形：三個角都是 60° 角，三個邊都等長的形狀。
5. A^2 (A 的平方)：即是 $A \times A$ ；因此， $2^2 = 2 \times 2$ ； $3^2 = 3 \times 3$ 。
6. 等分：正方形，長方形，平行四邊形，正六邊形，指的是分割線與分割線的距離是全部的幾分之幾；三角形指的是分割線與最靠近的頂點的距離是全部的幾分之幾。
7. 分割線：指取某一點連接至對角的線。

伍、研究過程

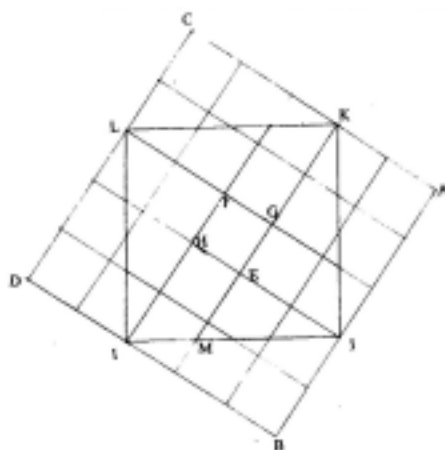
【研究 1】：將正方形的 1 邊分成 n 等分，取其中的一等分點，連至對角，作分割線，四角都連，所形成的內正方形，為原正方形的幾分之幾。

方法：擴大法 切割法

擴大法：

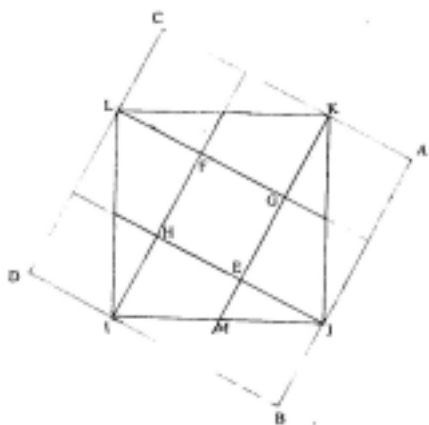
A. 等分 $1/2$

1. 把正方形 IJKL 的分割線加長，圍出大正方形 ABDC。大正方形 ABDC 分割成 9 個小正方形，如圖。
2. 其中三角形 $DIL \times 2 =$ 長方形 DIFL、三角形 $CLK \times 2 =$ 長方形 CLGK、三角形 $BIJ \times 2 =$ 長方形 BIHJ、三角形 $AKJ \times 2 =$ 長方形 AKEJ，所以 $\square ABDC + \square EHFG = \square IJKL \times 2$ 。
3. $\square IJKL$ 有 $(9+1) \div 2 = 5$ 個小正方形，而 $\square EHFG$ 有 1 個小正方形，所以 $\square EHFG = 1/5 \square IJKL$ 。



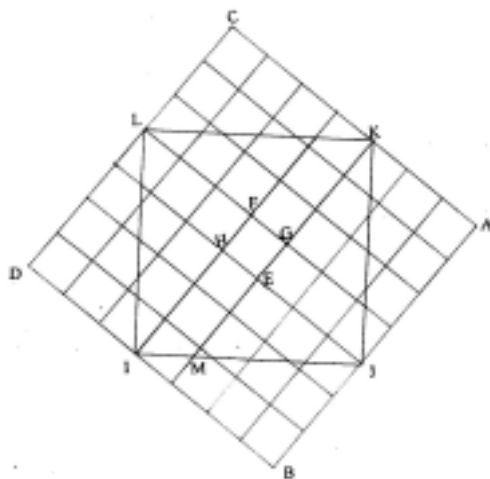
B. 等分是 $1/3$

1. 把正方形 IJKL 的分割線加長，圍出大正方形 ABDC。大正方形 ABDC 分割成 25 個小正方形，如圖。
2. 其中三角形 $DIL \times 2 =$ 長方形 DIFL、三角形 $CLK \times 2 =$ 長方形 CLGK、三角形 $BIJ \times 2 =$ 長方形 BIHJ、三角形 $AKJ \times 2 =$ 長方形 AKEJ，所以 $\square ABDC + \square EHFG = \square IJKL \times 2$ 。
3. $\square IJKL$ 有 $(25+1) \div 2 = 13$ 個小正方形，而 $\square EHFG$ 有 1 個小正方形，所以 $\square EHFG = 1/13 \square IJKL$ 。



C. 等分是 $1/4$

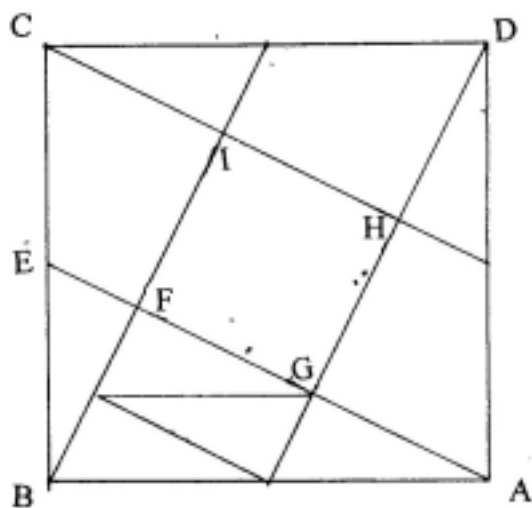
1. 把正方形 IJKL 的分割線加長，圍出大正方形 ABDC。大正方形 ABDC 分割成 49 個小正方形，如圖。
2. 其中三角形 DIL $\times 2$ = 長方形 DIFL、三角形 CLK $\times 2$ = 長方形 CLGK、三角形 BIJ $\times 2$ = 長方形 BIHJ、三角形 AKJ $\times 2$ = 長方形 AKEJ，所以 $\square ABDC + \square EHFG = \square IJKL \times 2$ 。
3. $\square IJKL$ 有 $(49+1) \div 2 = 25$ 個小正方形，而 $\square EHFG$ 有 1 個小正方形，所以 $\square EHFG = 1/25 \square IJKL$ 。



切割法：

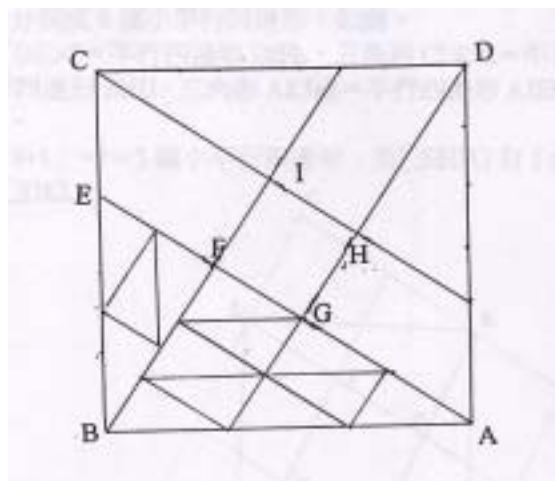
A. 等分是 $1/2$

1. 把 $\triangle ABE$ 分割成許多小三角形，使每個三角形面積都相等。
2. $\triangle ABE$ 有 5 個小三角形， $\triangle ABF$ 有 4 個小三角形，是 $\triangle ABE$ 的 $4/5$ 。
3. 設 $\square ABCD = 1$ ，則 $\triangle ABE = 1/4$ ， $\triangle ABF = 1/4 \times 4/5 \square ABCD = 1/5 \square ABCD$ 。
4. $\square FGHI = \square ABCD - \triangle ABF \times 4 = \underline{1/5} \square ABCD$ 。



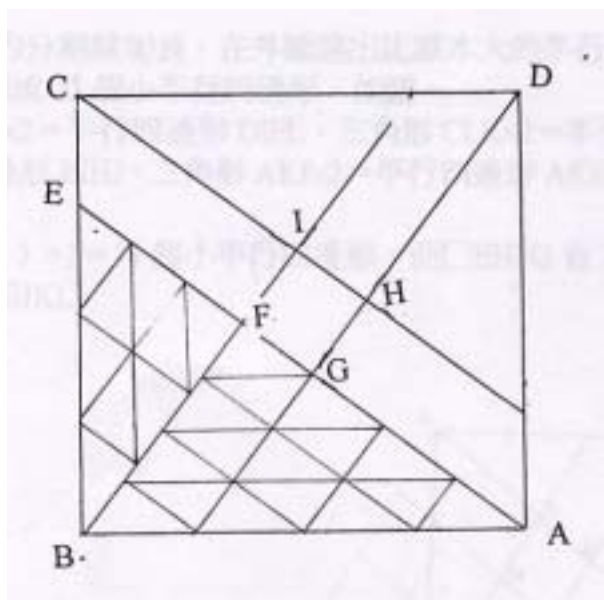
B. 等分是 $\frac{1}{3}$

1. 把 $\triangle ABE$ 分割成許多小三角形，使每個三角形面積都相等。
2. $\triangle ABE$ 有 13 個小三角形， $\triangle ABF$ 有 9 個小三角形，是 $\triangle ABE$ 的 $\frac{9}{13}$ 。
3. 設 $\square ABCD = 1$ ，則 $\triangle ABE = \frac{1}{3}$ ， $\triangle ABF = \frac{1}{3} \times \frac{9}{13} \square ABCD = \frac{3}{13} \square ABCD$ 。
4. $\square FGHI = \square ABCD - \triangle ABF \times 4 = \frac{1}{13} \square ABCD$ 。



C. 等分是 $\frac{1}{4}$

1. 把 $\triangle ABE$ 分割成許多小三角形，使每個三角形面積都相等。
2. $\triangle ABE$ 有 25 個小三角形， $\triangle ABF$ 有 16 個小三角形，是 $\triangle ABE$ 的 $\frac{16}{25}$ 。
3. 設 $\square ABCD = 1$ ，則 $\triangle ABE = \frac{3}{8}$ ， $\triangle ABF = \frac{3}{8} \times \frac{16}{25} \square ABCD = \frac{6}{25} \square ABCD$ 。
4. $\square FGHI = \square ABCD - \triangle ABF \times 4 = \frac{1}{25} \square ABCD$ 。



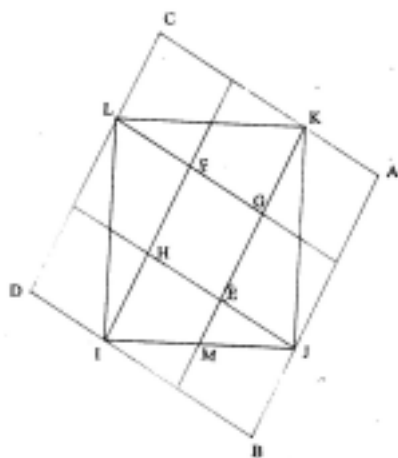
【研究 2】：將長方形的 1 邊分成 n 等分，取其中的一等分點，連至對角，作分割線，四角都連，所形成的內平行四邊形為外長方形的幾分之幾。

方法：擴大法 切割法

擴大法：

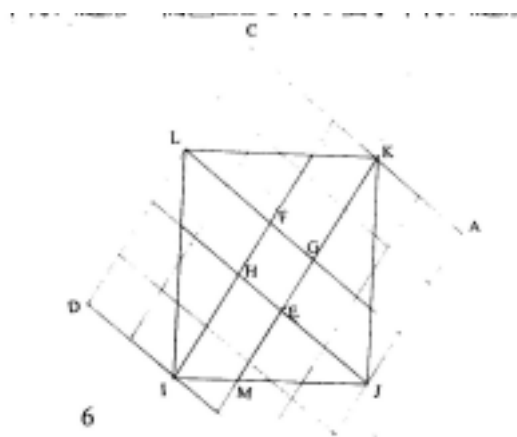
A. 等分是 $1/2$

1. 把長方形 IJKL 的分割線加長，在外圍連出比原本大的平行四邊形 ABDC。大平行四邊形 ABDC 分割成 9 個小平行四邊形，如圖。
2. 其中三角形 $DIL \times 2 =$ 平行四邊形 $DIFL$ 、三角形 $CLK \times 2 =$ 平行四邊形 $CLGK$ 、三角形 $BIJ \times 2 =$ 平行四邊形 $BIHJ$ 、三角形 $AKJ \times 2 =$ 平行四邊形 $AJEK$ ，所以 $\square ABDC + \square EHFG = \square IJKL \times 2$ 。
3. $\square IJKL$ 有 $(9+1) \div 2 = 5$ 個小平行四邊形，而 $\square EHFG$ 有 1 個小平行四邊形，所以 $\square EHFG = 1/5 \square IJKL$ 。



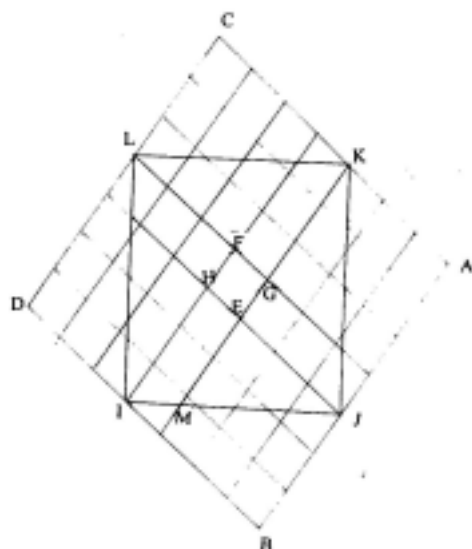
B. 等分是 $1/3$

1. 把長方形 IJKL 的分割線加長，在外圍連出比原本大的平行四邊形 ABDC。大平行四邊形 ABDC 分割成 25 個小平行四邊形，如圖。
2. 其中三角形 $DIL \times 2 =$ 平行四邊形 $DIFL$ 、三角形 $CLK \times 2 =$ 平行四邊形 $CLGK$ 、三角形 $BIJ \times 2 =$ 平行四邊形 $BIHJ$ 、三角形 $AKJ \times 2 =$ 平行四邊形 $AKEJ$ ，所以 $\square ABDC + \square EHFG = \square IJKL \times 2$ 。
3. $\square IJKL$ 有 $(25+1) \div 2 = 13$ 個小平行四邊形，而 $\square EHFG$ 有 1 個小平行四邊形，所以 $\square EHFG = 1/13 \square IJKL$ 。



C. 等分是 $1/4$

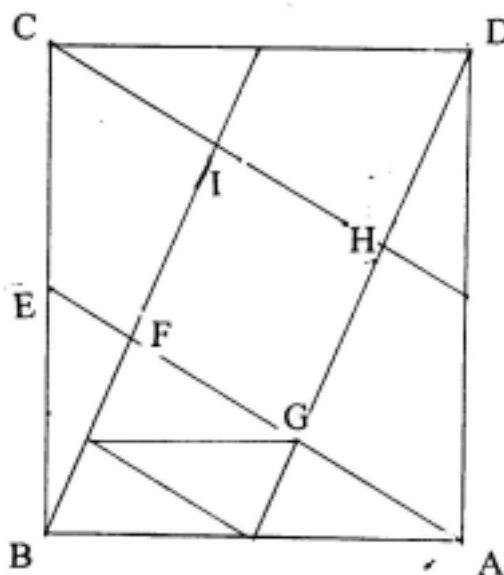
1. 把長方形 IJKL 的分割線加長，在外圍連出比原本大的平行四邊形 ABDC。大平行四邊形 ABDC 分割成 49 個小平行四邊形，如圖。
2. 三角形 DIL $\times 2$ = 平行四邊形 DIFL、三角形 CLK $\times 2$ = 平行四邊形 CLGK、三角形 BIJ $\times 2$ = 平行四邊形 BIHJ、三角形 AKJ $\times 2$ = 平行四邊形 AKEJ，所以 $\square ABDC + \square EHFG = \square IJKL \times 2$ 。
3. $\square IJKL$ 有 $(49+1) \div 2 = 25$ 個小平行四邊形，而 $\square EHFG$ 有 1 個小平行四邊形， $\square EHFG = 1/25 \square IJKL$ 。



切割法：

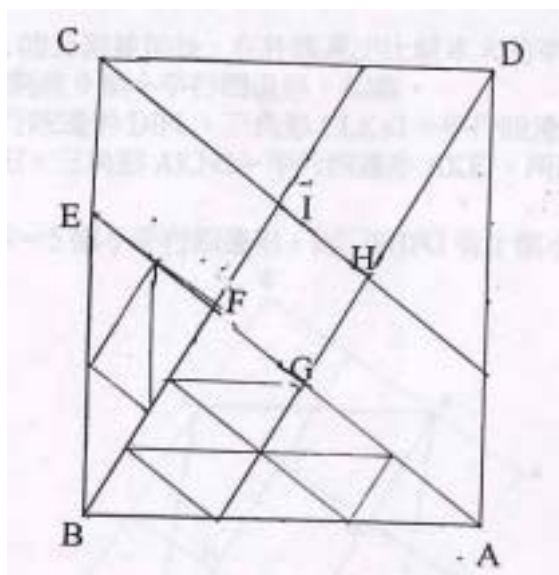
A. 等分是 $1/2$

1. 把 $\triangle ABE$ 分割成許多小三角形，使每個三角形面積都相等。
2. $\triangle ABE$ 有 5 個小三角形， $\triangle ABF$ 有 4 個小三角形，佔 $\triangle ABE$ 的 $4/5$ 。
3. 設長方形 ABCD = 1，則 $\triangle ABE = 1/4$ ， $\triangle ABF = 1/4 \times 4/5$ 長方形 ABCD = $1/5$ 長方形 ABCD。
4. 平行四邊形 FGHI = 長方形 ABCD - $\triangle ABF \times 4 = 1/5$ 長方形 ABCD。



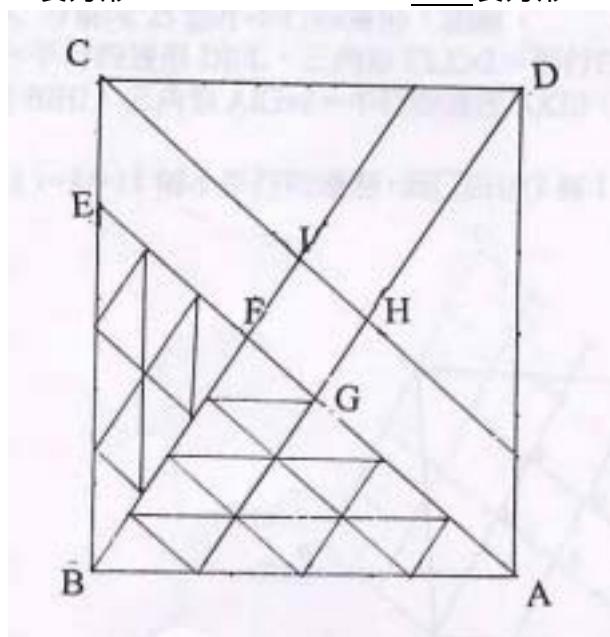
B. 等分是 $\frac{1}{3}$

1. 把 $\triangle ABE$ 分割成許多小三角形，使每個三角形面積都相等。
2. $\triangle ABE$ 有 13 個小三角形， $\triangle ABF$ 有 9 個小三角形，佔 $\triangle ABE$ 的 $\frac{9}{13}$ 。
3. 設長方形 $ABCD = 1$ ，則 $\triangle ABE = \frac{1}{3}$ ， $\triangle ABF = \frac{1}{3} \times \frac{9}{13}$ 長方形 $ABCD = \frac{3}{13}$ 長方形 $ABCD$ 。
4. 平行四邊形 $FGHI =$ 長方形 $ABCD - \triangle ABF \times 4 = \frac{1}{13}$ 長方形 $ABCD$ 。



C. 等分是 $\frac{1}{4}$

1. 把 $\triangle ABE$ 分割成許多小三角形，使每個三角形面積都相等。
2. $\triangle ABE$ 有 25 個小三角形， $\triangle ABF$ 有 16 個小三角形，佔 $\triangle ABE$ 的 $\frac{16}{25}$ 。
3. 設長方形 $ABCD = 1$ ，則 $\triangle ABE = \frac{3}{8}$ ， $\triangle ABF = \frac{3}{8} \times \frac{16}{25}$ 長方形 $ABCD = \frac{4}{25}$ 長方形 $ABCD$ 。
4. 平行四邊形 $FGHI =$ 長方形 $ABCD - \triangle ABF \times 4 = \frac{1}{25}$ 長方形 $ABCD$ 。



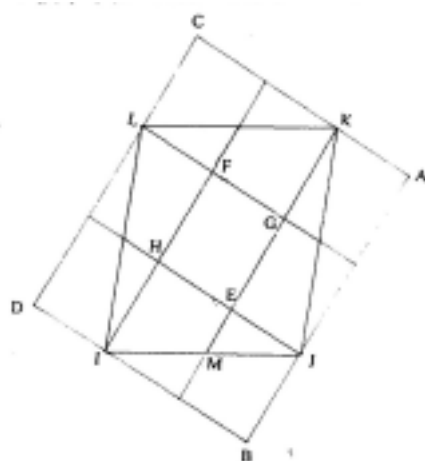
【研究 3】：將平行四邊形的 1 邊分成 n 等分，取其中的一等分點，連至對角，作分割線，四角都連，所形成的內平行四邊形為外平行四邊形的幾分之幾。

方法：擴大法 切割法

擴大法：

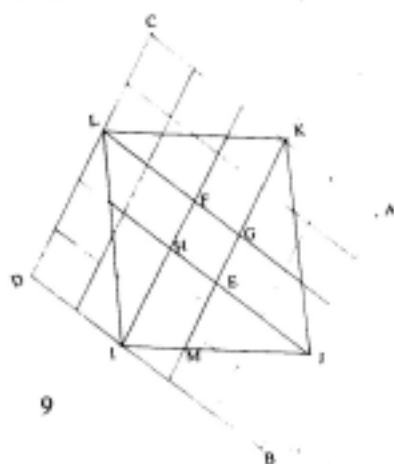
A. 等分是 $1/2$

1. 把平行四邊形 IJKL 的分割線加長，在外圍連出比原本大的平行四邊形 ABDC。大平行四邊形 ABDC 分割成 9 個小平行四邊形，如圖。
2. 三角形 $DIL \times 2 =$ 平行四邊形 $DIFL$ 、三角形 $CLK \times 2 =$ 平行四邊形 $CLGK$ 、三角形 $BIJ \times 2 =$ 平行四邊形 $BIHJ$ 、三角形 $AKJ \times 2 =$ 平行四邊形 $AKEJ$ ，所以 $\square ABDC + \square EHFG = \square IJKL \times 2$ 。
3. $\square IJKL$ 有 $(9+1) \div 2 = 5$ 個小平行四邊形，而 $\square EHFG$ 有 1 個小平行四邊形， $\square EHFG = 1/5 \square IJKL$ 。



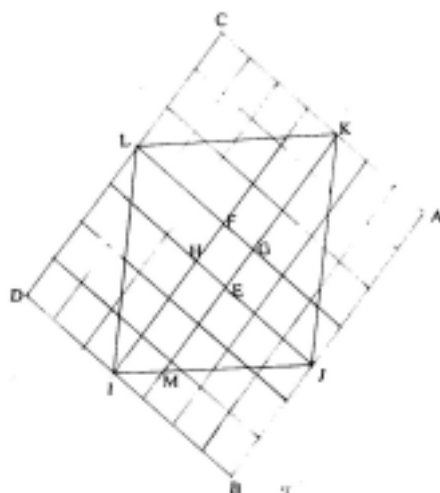
B. 等分是 $1/3$

1. 把平行四邊形 IJKL 的分割線加長，在外圍連出比原本大的平行四邊形 ABDC。大平行四邊形 ABDC 分割成 25 個小平行四邊形，如圖。
2. 三角形 $DIL \times 2 =$ 平行四邊形 $DIFL$ 、三角形 $CLK \times 2 =$ 平行四邊形 $CLGK$ 、三角形 $BIJ \times 2 =$ 平行四邊形 $BIHJ$ 、三角形 $AKJ \times 2 =$ 平行四邊形 $AKEJ$ ，所以 $\square ABDC + \square EHFG = \square IJKL \times 2$ 。
3. $\square IJKL$ 有 $(25+1) \div 2 = 13$ 個小平行四邊形，而 $\square EHFG$ 有 1 個小平行四邊形， $\square EHFG = 1/13 \square IJKL$ 。



C. 等分是 $1/4$

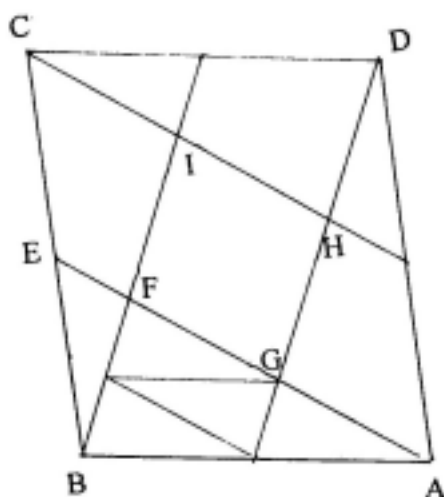
1. 把平行四邊形 IJKL 的分割線加長，在外圍連出比原本大的平行四邊形 ABDC。大平行四邊形 ABDC 分割成 49 個平行四邊形，如圖。
2. 三角形 $DIL \times 2 =$ 平行四邊形 DIFL、三角形 $CLK \times 2 =$ 平行四邊形 CLGK、三角形 $BIJ \times 2 =$ 平行四邊形 BIHJ、三角形 $AKJ \times 2 =$ 平行四邊形 AKEJ，所以 $\square ABDC + \square EHFG = \square IJKL \times 2$ 。
3. $\square IJKL$ 有 $(49+1) \div 2 = 25$ 個小平行四邊形，而 $\square EHFG$ 有 1 個小平行四邊形， $\square EHFG = 1/25 \square IJKL$ 。



切割法：

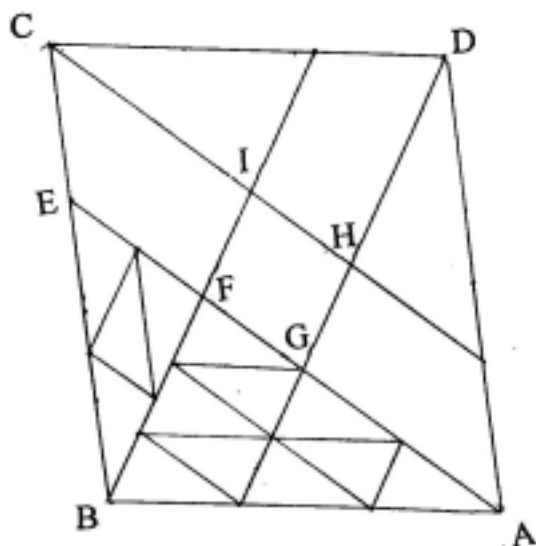
A. 等分是 $1/2$

1. 把 $\triangle ABE$ 分割成許多小三角形，使每個三角形面積都相等。
2. $\triangle ABE$ 有 5 個小三角形， $\triangle ABF$ 有 4 個小三角形，佔 $\triangle ABE$ 的 $4/5$ 。
3. 設平行四邊形 $ABCD = 1$ ，則 $\triangle ABE = 1/4$ ， $\triangle ABF = 1/4 \times 16/25$ 平行四邊形 $ABCD = 4/25$ 平行四邊形 $ABCD$ 。
4. 平行四邊形 $FGHI =$ 平行四邊形 $ABCD - \triangle ABF \times 4 = 1/25$ 平行四邊形 $ABCD$ 。



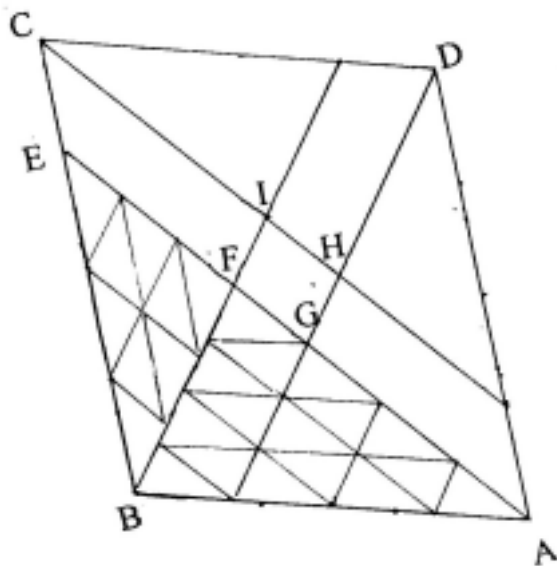
B. 等分是 $\frac{1}{3}$

1. 把 $\triangle ABE$ 分割成許多小三角形，使每個三角形面積都相等。
2. $\triangle ABE$ 有 13 個小三角形， $\triangle ABF$ 有 9 個小三角形，佔 $\triangle ABE$ 的 $\frac{9}{13}$ 。
3. 設平行四邊形 $ABCD = 1$ ，則 $\triangle ABE = \frac{1}{3}$ ， $\triangle ABF = \frac{1}{3} \times \frac{9}{13}$ 平行四邊形 $ABCD = \frac{3}{13}$ 平行四邊形 $ABCD$ 。
4. 平行四邊形 $FGHI =$ 平行四邊形 $ABCD - \triangle ABF \times 4 = \frac{1}{13}$ 平行四邊形 $ABCD$ 。



C. 等分是 $\frac{1}{4}$

1. 把 $\triangle ABE$ 分割成許多小三角形，使每個三角形面積都相等。
2. $\triangle ABE$ 有 25 個小三角形， $\triangle ABF$ 有 16 個小三角形，佔 $\triangle ABE$ 的 $\frac{16}{25}$ 。
3. 設平行四邊形 $ABCD = 1$ ，則 $\triangle ABE = \frac{3}{8}$ ， $\triangle ABF = \frac{3}{8} \times \frac{16}{25}$ 平行四邊形 $ABCD = \frac{6}{25}$ 平行四邊形 $ABCD$ 。
4. 平行四邊形 $FGHI =$ 平行四邊形 $ABCD - \triangle ABF \times 4 = \frac{1}{25}$ 平行四邊形 $ABCD$ 。



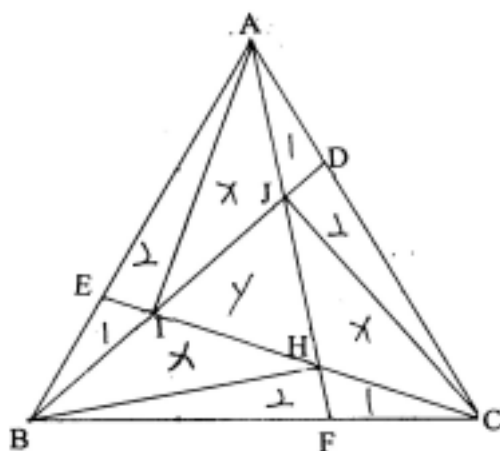
【研究 4】: 將正三角形的 1 邊分成 n 等分, 取其中的一等分點, 連至對角, 作分割線, 三角都連, 所形成的內正三角形為外正三角形的幾分之幾。

方法：假設法 擴大法 切割法

假設法：

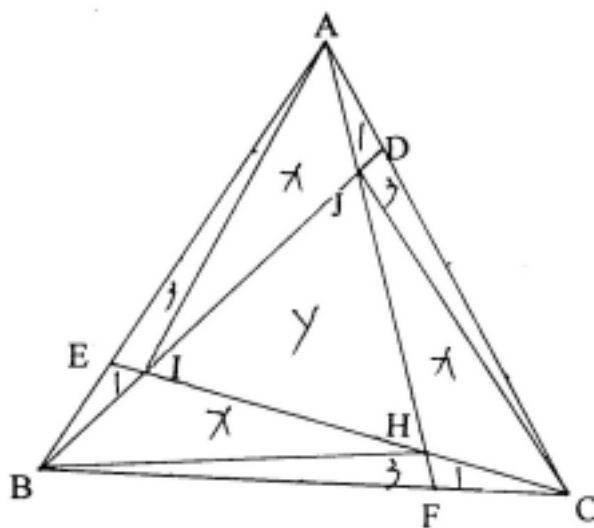
A. 等分是 $1/3$

1. 把點 CJ , AI , BH 各連出一條虛線, 設 CHJ 、 AIJ 、 $BHI = X$, $HIJ = Y$, 設 AEI 、 BFH 、 $CDJ = 2$, 設 CFH 、 ADJ 、 $BEI = 1$ 。
2. 以相交點 J 列等式： $2(1+X) = 2+X+Y$, $X = Y$
以相交點 A 列等式： $2(4+X) = 5+2X+Y$, $3 = Y$
 $X = Y = 3$
3. $HIJ / ABC = 3 / (3 \times 4 + 9) = 1/7$



B. 等分是 $1/4$

1. 把點 CJ , AI , BH 各連出一條虛線, 設 CHJ 、 AIJ 、 $BHI = X$, $HIJ = Y$, 更設 AEI 、 BFH 、 $CDJ = 3$, 也設 CFH 、 ADJ 、 $BEI = 1$ 。
2. 以相交點 J 列等式： $3(1+X) = 3+X+Y$, $2X = Y$
 $X = 8$, $Y = 16$
3. 以相交點 A 列等式： $3(5+X) = 7+2X+Y$
4. $HIJ / ABC = 16 / (3 \times 8 + 12 + 16) = 4/13$



C. 等分是 $1/5$

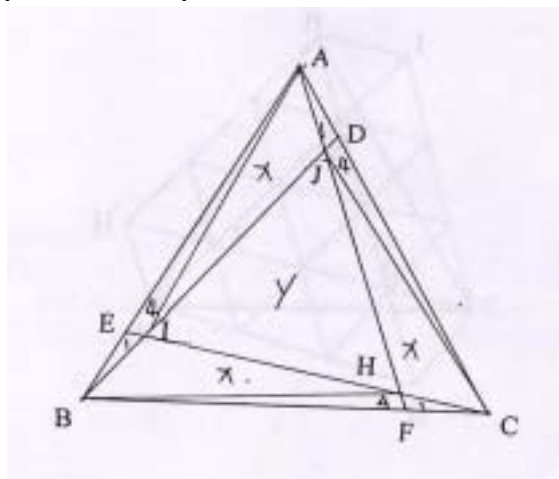
1. 把點 CJ , AI , BH 各連出一條虛線, 設 CHJ 、 AIJ 、 $BHI = X$, $HIJ = Y$, 更設 AEI 、 BFH 、 $CDJ = 4$, 也設 CFH 、 ADJ 、 $BEI = 1$ 。

2. 以相交點 J 列等式: $4(1+X) = 4+X+Y$, $3X = Y$

$$X = 15, Y = 45$$

3. 以相交點 A 列等式: $4(6+X) = 9+2X+Y$

4. $HIJ/ABC = 45/(3 \times 15 + 15 + 45) = 3/7$



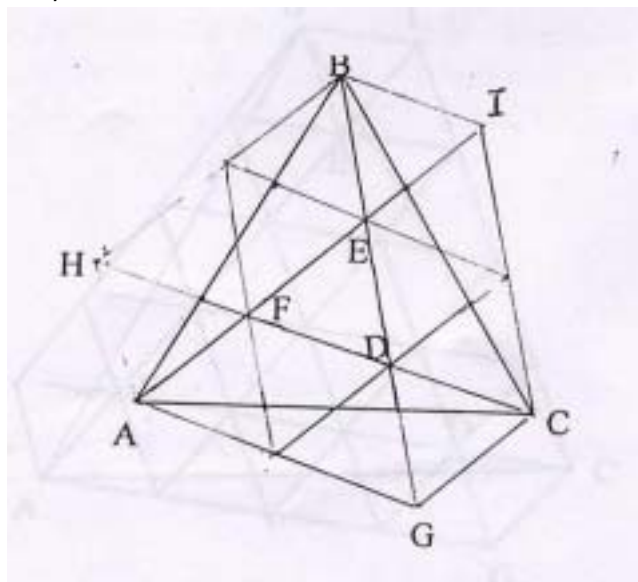
擴大法:

A. 等分是 $1/3$

1. 先連出如圖的樣子。

2. 六邊形 $AHBICG$ 有 13 個正三角形, 三角形 $DBC = 1/2$ 四邊形 $DBIC$ 、三角形 $ABE = 1/2$ 四邊形 $AEBH$ 、三角形 $AFC = 1/2$ 四邊形 $AFCG$, 所以六邊形 $AHBICG$ 加 $DEF = 2$ ABC 。

3. $1 \div (13+1) \div 2 = 1/7$, $DEF = 1/7$ ABC

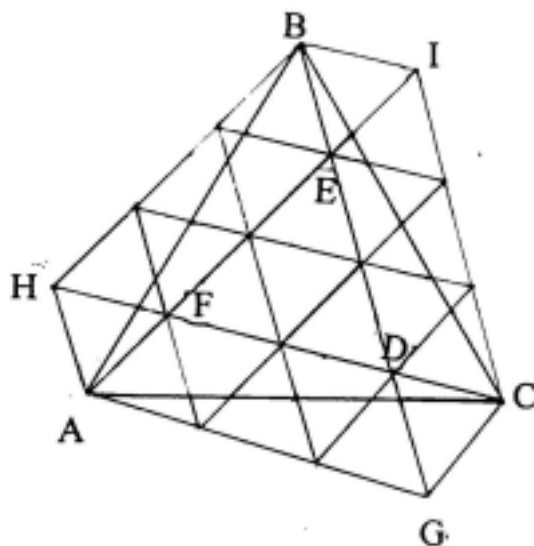


B. 等分是 $1/4$

1. 先連出如圖的樣子。

2. 六邊形 AHBICG 有 22 個正三角形，三角形 DBC = $1/2$ 四邊形 DBIC、三角形 ABE = $1/2$ 四邊形 AEBH、三角形 AFC = $1/2$ 四邊形 AFCG，所以六邊形 AHBICG 加 DEF = 2 ABC。

3. $4 \div (22+4) \div 2 = 4/13$ ， DEF = $4/13$ ABC

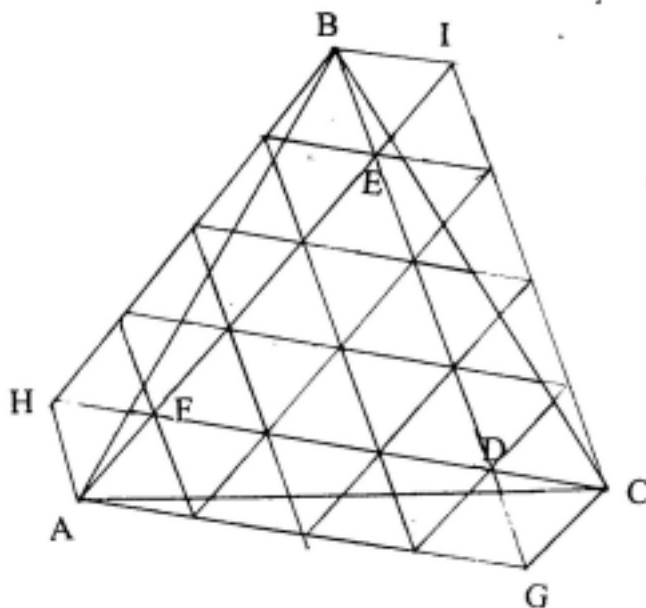


C. 等分是 $1/5$

1. 先連出如圖的樣子。

2. 六邊形 AHBICG 有 33 個正三角形，三角形 DBC = $1/2$ 四邊形 DBIC、三角形 ABE = $1/2$ 四邊形 AEBH、三角形 AFC = $1/2$ 四邊形 AFCG，所以六邊形 AHBICG 加 DEF = 2 ABC。

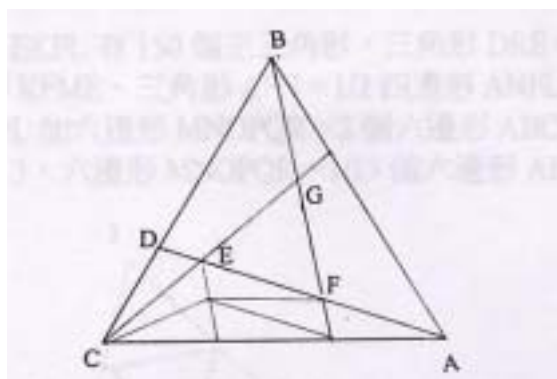
3. $9 \div (33+9) \div 2 = 4/13$ ， DEF = $3/7$ ABC



切割法：

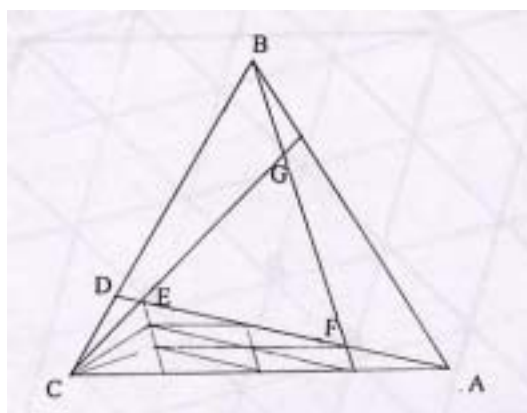
A. 等分是 1/3

1. 把 $\triangle ACD$ 分割成許多小三角形，使每個三角形面積都相等。
2. $\triangle ACD$ 有 7 個小三角形， $\triangle ACE$ 有 6 個小三角形，佔 $\triangle ACD$ 的 $\frac{6}{7}$ 。
3. 設 $ABC = 1$ ，則 $ACD = \frac{1}{3} ABC$ ， $ACE = \frac{1}{3} \times \frac{6}{7} ABC = \frac{2}{7} ABC$ 。
4. $EFG = (ABC - ACE \times 3) ABC = (1 - \frac{6}{7}) ABC = \underline{\underline{\frac{1}{7} ABC}}$ 。



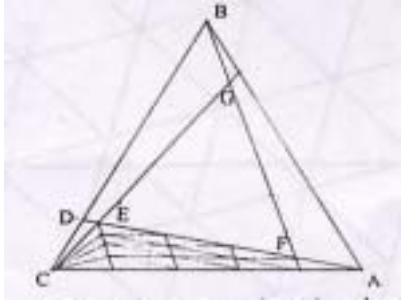
B. 等分是 1/4

1. 把 $\triangle ACD$ 分割成許多小三角形，使每個三角形面積都相等。
2. $\triangle ACD$ 有 13 個小三角形， $\triangle ACE$ 有 12 個小三角形，佔 $\triangle ACD$ 的 $\frac{12}{13}$ 。
3. 設 $ABC = 1$ ，則 $ACD = \frac{1}{4} ABC$ ， $ACE = \frac{1}{4} \times \frac{12}{13} ABC = \frac{3}{13} ABC$ 。
4. $EFG = (ABC - ACE \times 3) ABC = (1 - \frac{9}{13}) ABC = \underline{\underline{\frac{4}{13} ABC}}$ 。



C. 等分是 $1/5$

1. 把 $\triangle ACD$ 分割成許多小三角形，使每個三角形面積都相等。
2. $\triangle ACD$ 有 21 個小三角形， $\triangle ACE$ 有 20 個小三角形，佔 $\triangle ACD$ 的 $20/21$ 。
3. 設 $ABC = 1$ ，則 $ACD = 1/5 \triangle ABC$ ， $ACE = 1/5 \times 20/21 \triangle ABC = 4/21 \triangle ABC$ 。
4. $EFG = (\triangle ABC - ACE \times 3) \triangle ABC = (1 - 4/7) \triangle ABC = \underline{3/7} \triangle ABC$ 。



同理，也可證明直角三角形、等腰三角形和不規則三角形，而證明出的答案也和正三角形一樣。

【研究 5】: 將正六邊形的 1 邊分成 n 等分, 取其中的一等分點, 連至對角, 作分割線, 六角都連, 所形成的內正六邊形為外正六邊形的幾分之幾。

方法：擴大法

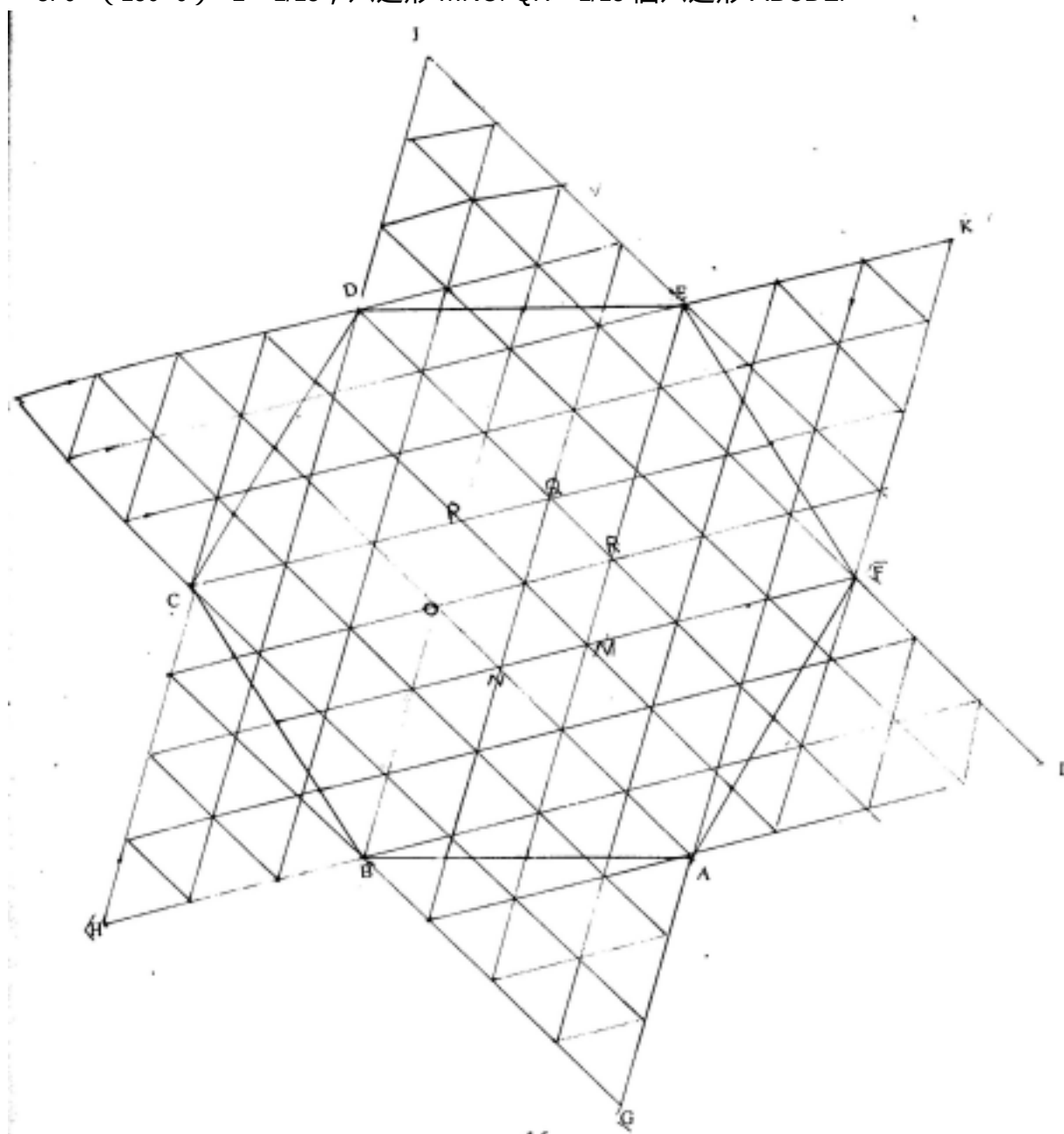
擴大法：

A. 等分是 $1/2$

1. 先連出如圖的樣子。

2. 十二邊形 AGBHCIDJEKFL 有 150 個正三角形, 三角形 DRE = $1/2$ 四邊形 JDRE、三角形 MEF = $1/2$ 四邊形 KFME、三角形 AFN = $1/2$ 四邊形 ANFL, 以下同理, 所以十二邊形 AGBHCIDJEKFL 加六邊形 MNOPQR = 2 個六邊形 ABCDEF。

3. $6 \div (150 + 6) \div 2 = 1/13$, 六邊形 MNOPQR = $1/13$ 個六邊形 ABCDEF

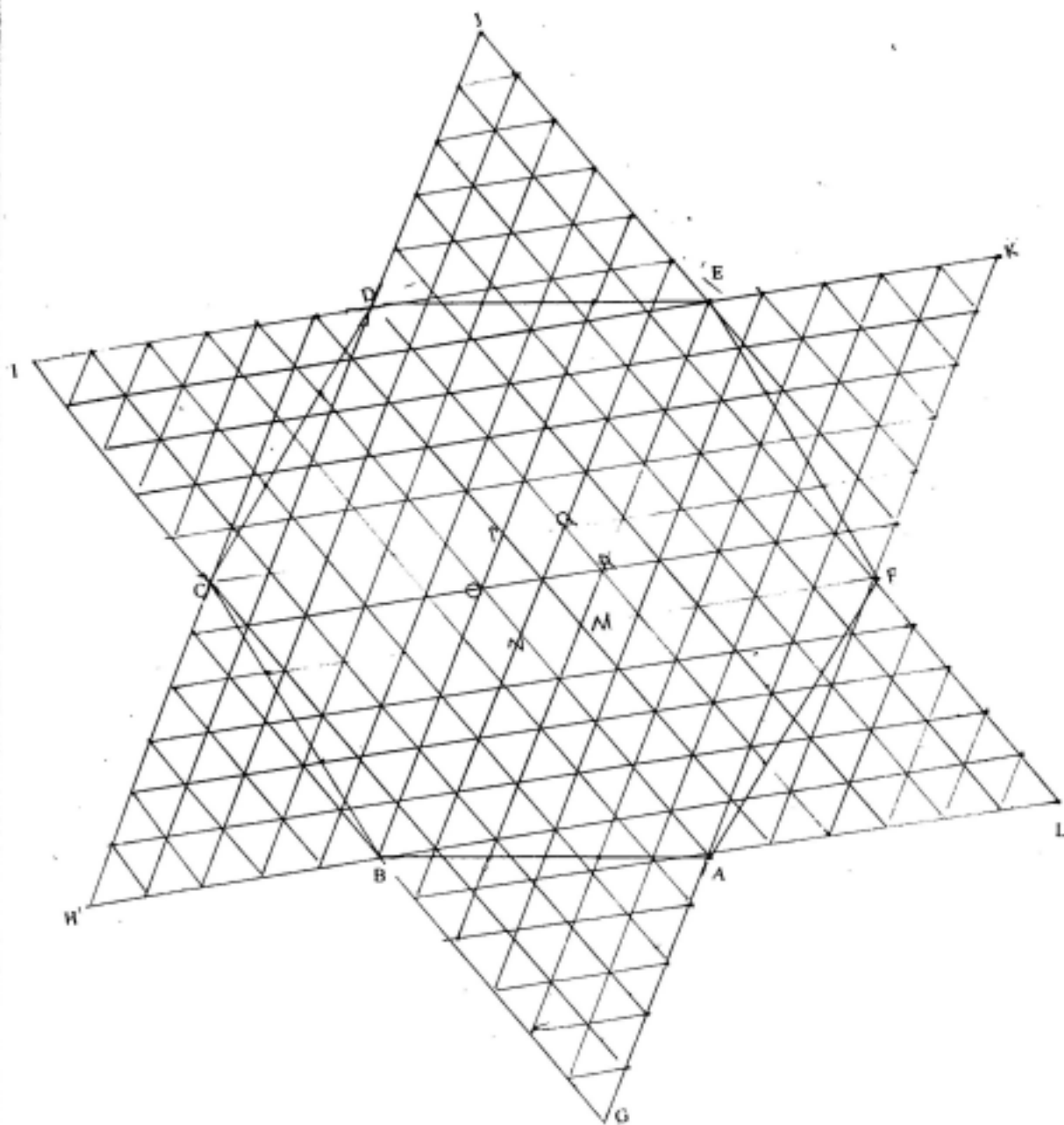


B. 等分是 $\frac{1}{3}$

1. 先連出如圖的樣子。

2. 十二邊形 AGBHCIDJEKFL 有 366 個正三角形，三角形 DRE = $\frac{1}{2}$ 四邊形 JDRE、三角形 MEF = $\frac{1}{2}$ 四邊形 KFME、三角形 AFN = $\frac{1}{2}$ 四邊形 ANFL，以下同理，所以十二邊形 AGBHCIDJEKFL 加六邊形 MNOPQR = 2 個六邊形 ABCDEF。

3. $6 \div (366 + 6) \div 2 = \frac{1}{31}$ ，六邊形 MNOPQR = $\frac{1}{31}$ 個六邊形 ABCDEF



【研究 6】歸納研究結果，找出內正方形為外正方形幾分之幾的公式。

列出前述各研究的結果：

等分：	分母 2	3	4	5	6	7	8	9
分子 1	1/5	1/13	1/25	1/41	1/61	1/85	1/113	1/155
2	無	2/5	1/5	2/17	1/13	2/37	1/25	2/65
3	無	無	9/17	9/29	1/5	9/65	9/89	1/13
4	無	無	無	8/13	2/5	8/29	1/5	8/53
5	無	無	無	無	25/37	25/53	25/73	25/97
6	無	無	無	無	無	18/25	9/17	2/5
7	無	無	無	無	無	無	49/65	49/85
8	無	無	無	無	無	無	無	32/41

擴大法：

需要求出的公式：

1. 大正方形 ABDC 有幾個小正方形？
2. □EHFG 有幾個小正方形？
3. □IJKL 有幾個小正方形？
4. □EHFG 是幾分之幾的 □IJKL？

一、大正方形 ABDC 有幾個小正方形？

等分為 1/2 時，大正方形 ABDC 有 9 個小正方形。

等分為 1/3 時，大正方形 ABDC 有 25 個小正方形。

等分為 1/4 時，大正方形 ABDC 有 49 個小正方形。

等分為 B/A 時，大正方形 ABDC 有幾個小正方形？

9, 25, 49 為 $3^2, 5^2, 7^2$ ，而 3 是由 (2+1) 組成，5 是由 (3+2) 組成，7 是由 (4+3) 組成，1 是由 (2-1) 組成，2 是由 (3-1) 組成，3 是由 (4-1) 組成，所以解 $(2A-B)^2$ 。

二、□EHFG 有幾個小正方形？

等分為 1/2 時，□EHFG 有 1 個小正方形。

等分為 1/3 時，□EHFG 有 1 個小正方形。

等分為 1/4 時，□EHFG 有 1 個小正方形。

等分為 B/A 時，□EHFG 有幾個小正方形？

1 是由 1×1 組成的，也可能是由 1 組成的。

因為等分是 2/3 時，□EHFG 有 4 個小正方形。

所以 1 是由 1×1 組成，解為 B^2 。

三、□IJKL 有幾個小三角形？

等分 1/2 時，□IJKL 有 $(9+1) \div 2 = 5$ 個小三角形。

等分 1/3 時，□IJKL 有 $(25+1) \div 2 = 13$ 個小三角形。

等分 1/4 時，□IJKL 有 $(49+1) \div 2 = 25$ 個小三角形。

等分 B/A 時，□IJKL 有幾個小三角形？

□IJKL 是大正方形 ABDC + □EHFG ÷ 2 的答案，等分 B/A 即是：

$$[B^2 + (2A-B)^2] \div 2 = (4A^2 - 4AB + 2B^2) \div 2 = 2A^2 - 2AB + B^2 = A^2 + (A-B)^2。$$

四、□EFGH 是幾分之幾的□IJKL？

等分 1/2 的□IJKL 是： $(1 \div 5)$ □IJKL = $1/5$ □IJKL。

等分 1/3 的□IJKL 是： $(1 \div 3)$ □IJKL = $1/3$ □IJKL。

等分 1/2 的□EFGH 是： $(1 \div 25)$ □IJKL = $1/25$ □IJKL。

等分 B/A 的□EFGH 是：？ □IJKL。

$$? = \frac{B^2}{A^2 + (A-B)^2}$$

長方形和平行四邊形的結果和正方形一樣，所以得出的計算式也相同。

【研究 7】：歸納研究結果，找出內正三角形為外正三角形幾分之幾的公式。

列出之前的結果。

	分母 3	4	5	6	7	8	9	10
分子 1	1/7	4/13	3/7	16/31	25/43	36/57	49/73	64/91
2	無	無	1/19	1/7	3/13	4/13	25/67	3/7
3	無	無	無	無	1/37	4/49	1/7	16/79
4	無	無	無	無	無	無	1/61	1/19

切割法：

需要求出的公式：

1. ACD 有幾個小三角形？
2. ACE 有幾個小三角形？佔 ACD 的幾分之幾？
3. 設三角形 ABC = 1 時，ACE 佔多少？
4. 1- ACE×3 = EFG。

一. ACD 有幾個小三角形？

等分 1/3 時，ACD 有 7 個小三角形。

等分 1/4 時，ACD 有 13 個小三角形。

等分 1/5 時，ACD 有 21 個小三角形。

等分 B/A 時，ACD 有幾個小三角形？

7 是由 6+1 組成的，6 是 2×3 組成的，2 是由 3-1 組成的。

綜合算式是： $3 \times (3-1) + 1 \times 1$ 。

13 是由 12+1 組成的，12 是 3×4 組成的，3 是由 4-1 組成的。

綜合算式是： $4 \times (4-1) + 1 \times 1$ 。

21 是由 20+1 組成的，20 是 4×5 組成的，4 是由 5-1 組成的。

綜合算式是： $5 \times (5-1) + 1 \times 1$ 。

B/A 代入算式： $A \times (A-B) + B^2$ 。

二. ACE 有幾個小三角形？佔 ACD 的幾分之幾？

等分 1/3 時，ACE 有 6 個小三角形，佔 ACD 的 6/7。

等分 1/4 時，ACE 有 12 個小三角形，佔 ACD 的 12/13。

等分 1/5 時，ACE 有 20 個小三角形，佔 ACD 的 20/21。

等分 B/A 時，ACE 有幾個小三角形，佔 ACD 的幾分之幾？

6 是 2×3 組成的，2 是由 3-1 組成的，佔 ACD 的 6÷7。

綜合算式是： $3 \times (3-1)$ ，佔 ACD 的 6/7。

12 是 3×4 組成的，3 是由 4-1 組成的，佔 ACD 的 12÷13。

綜合算式是： $4 \times (4-1)$ ，佔 ACD 的 12/13。

20 是 4×5 組成的，4 是由 5-1 組成的，佔 ACD 的 20÷21。

綜合算式是： $5 \times (5-1)$ ，佔 ACD 的 20/21。

B/A 代入算式： $A \times (A-B)$ ，佔 ACD 的 $\frac{A \times (A-B)}{A \times (A-B) + B^2}$ 。

三. 設三角形 $ABC = 1$ 時, ACE 佔多少?

等分是 $1/3$ 時: $ACE = 1 \div 3 \times 6 \div 7$ $ABC = 2/7$ ABC 。

等分是 $1/4$ 時: $ACE = 1 \div 4 \times 12 \div 13$ $ABC = 3/13$ ABC 。

等分是 $1/5$ 時: $ACE = 1 \div 5 \times 20 \div 21$ $ABC = 4/21$ ABC 。

等分是 B/A 時: $ACE = B \div A \times A \times (A-B) \div [A \times (A-B) + B^2]$ ABC
 $= \underline{B \times (A-B) / [A \times (A-B) + B^2]}$ ABC 。

四. 1- $ACE \times 3 = EFG$ 。

等分是 $1/3$ 時: $1-2 \div 7 \times 3 = 1/7$ ABC

等分是 $1/4$ 時: $1-3 \div 13 \times 3 = 4/13$ ABC

等分是 $1/5$ 時: $1-4 \div 21 \times 3 = 3/7$ ABC

等分是 B/A 時: $1-B \times (A-B) \div [A \times (A-B) + B^2] \times 3$
 $= A^2 - AB + B^2 - 3B(A-B) / A^2 - AB + B^2$
 $= \underline{(A-2B)^2 / (A-B)^2 + AB}$

【研究 8】：歸納研究結果，找出內正六邊形為外正六邊形幾分之幾的公式。

列出之前的結果。

	分母 2	3	4	5	6	7	8
分子 1	1/13	1/31	1/57	1/91	1/133	1/183	1/241
2	無	1/7	1/13	1/21	1/31	1/43	1/57
3	無	無	9/49	9/79	1/13	9/163	9/217
4	無	無	無	4/19	1/7	4/39	1/13
5	無	無	無	無	25/109	25/151	25/201
6	無	無	無	無	無	9/37	9/49
7	無	無	無	無	無	無	49/193

切割法：

需要求出的公式：

1. 六邊形 MNOPQR 有幾個小三角形？
2. 十二邊形 AGBHCIDJEKFL 有幾個小三角形？
3. 六邊形 ABCDEF 有幾個小三角形？
4. 六邊形 MNOPQR 佔多少的六邊形 ABCDEF？

一．六邊形 MNOPQR 有幾個小三角形？

等分 $1/2$ 時，六邊形 MNOPQR 有 6 個小三角形。

等分 $1/3$ 時，六邊形 MNOPQR 有 6 個小三角形。

等分 $1/4$ 時，六邊形 MNOPQR 有 6 個小三角形。

等分 B/A 時，六邊形 MNOPQR 有幾個小三角形？

A.

等分 $1/2$ 時，線段 MN 有 1 單位。

等分 $1/3$ 時，線段 MN 有 1 單位。

等分 $1/4$ 時，線段 MN 有 1 單位。

等分 $2/3$ 時，線段 MN 有 2 單位。

可以發現線段 MN 的長度與等分有密切的關連，都是分子的數字。

所以等分 B/A 時，線段 MN 有 B 單位，六邊形 MNOPQR 有 $[1+3+ \dots + (B-2)+B] \times 6 = \underline{6B^2}$ 個小三角形。

二．十二邊形 AGBHCIDJEKFL 有幾個小三角形？

等分 $1/2$ 時，十二邊形 AGBHCIDJEKFL 有 150 個小三角形。

等分 $1/3$ 時，十二邊形 AGBHCIDJEKFL 有 366 個小三角形。

等分 $1/4$ 時，十二邊形 AGBHCIDJEKFL 有 678 個小三角形。

等分 B/A 時，十二邊形 AGBHCIDJEKFL 有幾個小三角形？

A.

等分 $1/2$ 時，線段 CQ 有 4 單位，線段 PC 有 4-1 單位。

等分 $1/3$ 時，線段 CQ 有 6 單位，線段 PC 有 6-1 單位。

等分 $1/4$ 時，線段 CQ 有 8 單位，線段 PC 有 8-1 單位。

由上述的例子可以知道，線段 CQ 的長度是分母的 2 倍，而線段 PQ 等於線段 MN，所以線段 PC 是線段 CQ-線段 PQ，也就是：分母的 2 倍-分子
等分 B/A 時，線段 CQ 有 2A 單位線段 PC 有 2A-B 等分。

B.

線段 CQ = 線段 PB

所以平行四邊形 PBHC 有 $2 \times 2A(2A-B)$ 個小三角形。

十二邊形 AGBHCIDJEKFL 有 $24A(2A-B) + 6B^2 = 6 \times [4A(2A-B) + B^2]$ 個小三角形

三． 六邊形 ABCDEF 有幾個小三角形？

等分是 $1/2$ 時，六邊形 ABCDEF 有 78 個小三角形。

等分是 $1/3$ 時，六邊形 ABCDEF 有 186 個小三角形。

等分是 $1/4$ 時，六邊形 ABCDEF 有 342 個小三角形。

由研究過程知道六邊形 ABCDEF 是(十二邊形 AGBHCIDJEKFL+六邊形 MNOPQR)/2 個小正三角形。

所以等分是 B/A 時，六邊形 ABCDEF 有 $\{6 \times [4A(2A-B) + B^2] + 6B^2\} / 2$ 個小三角形：

$\{6 \times [4A(2A-B) + B^2] + 6B^2\} / 2 = \{6 \times [4A(2A-B) + 2B^2]\} / 2 = 6 \times (4A^2 - 4AB + B^2) = 6 \times [(2A-B)^2 + 2AB]$

四． 六邊形 MNOPQR 佔多少的六邊形 ABCDEF？

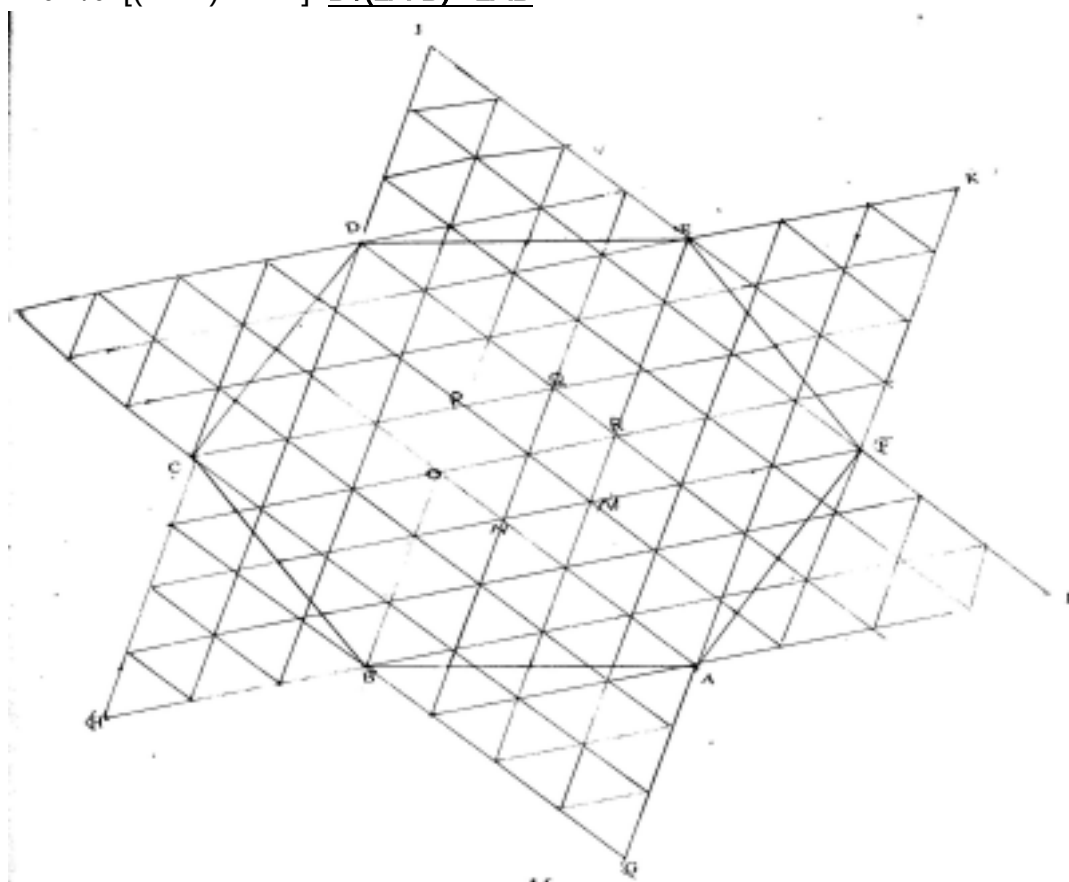
等分是 $1/2$ 時，六邊形 MNOPQR 佔六邊形 ABCDEF 的 $6/78 = 1/13$

等分是 $1/3$ 時，六邊形 MNOPQR 佔六邊形 ABCDEF 的 $6/186 = 1/31$

等分是 $1/4$ 時，六邊形 MNOPQR 佔六邊形 ABCDEF 的 $6/342 = 1/57$

等分是 B/A 時，六邊形 MNOPQR 佔六邊形 ABCDEF 的：

$6B^2 / 6 \times [(2A-B)^2 + 2AB] = B^2 / [(2A-B)^2 + 2AB]$



陸、研究結論

1. 把一多邊形的邊長等分，以等分點至對角做切割線，形成的內多邊形面積為原多邊形面積的幾分之幾？研究中，我們由正方形探討至長方形、平行四邊形、正三角形，以及正六邊形；並自行研究出「擴大法」、「切割法」、「假設法」來解決問題，也歸納提出解題的計算式。

2. 計算式整理如下：

類別	正方形	長方形	平行四邊形	正三角形	正六邊形
等分是 1/A	$\frac{1}{A^2+(A-1)^2}$	$\frac{1}{A^2+(A-1)^2}$	$\frac{1}{A^2+(A-1)^2}$	$\frac{(A-2)^2}{A^2-A+1}$	$\frac{1}{4A^2-2A+1}$
等分是 B/A	$\frac{B^2}{A^2+(A-B)^2}$	$\frac{B^2}{A^2+(A-B)^2}$	$\frac{B^2}{A^2+(A-B)^2}$	$\frac{(A-2B)^2}{(A-B)^2+AB}$	$\frac{B^2}{(2A-B)^2+2AB}$

3. 由遇到問題，在依尋由簡入繁的方式，去找出簡易計算公式的過程，的確是一種思考、與深具挑戰的過程，面對本研究這些問題，我們日後是再也不用花時間、動腦筋的去找出解答了。不過，最大的收穫是，我對數學的思考和解題的方式更多樣化了，再也不怕面對任何問題了！

柒、參考資料

書名	出版日	出版	頁數
國民小學數學課本第九冊（五上）	2002	南一書局	P48~49
國中數學課本第一、二冊	1999	國立編譯館	
妙解趣味數學 100	1997	銀禾文化事業	P97~98

評語

- 1.能利用比例解決問題，並能推廣一般化，值得肯定。
- 2.涉及的公式是從數字代入，說明稍嫌不夠，但能公式化誠屬不易。