

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國小組

數學科

科別：數學科

組別：國小組

作品名稱：七拼八湊話幾何

關鍵詞：平面圖形、對稱、鑲嵌

編號：080409

學校名稱：

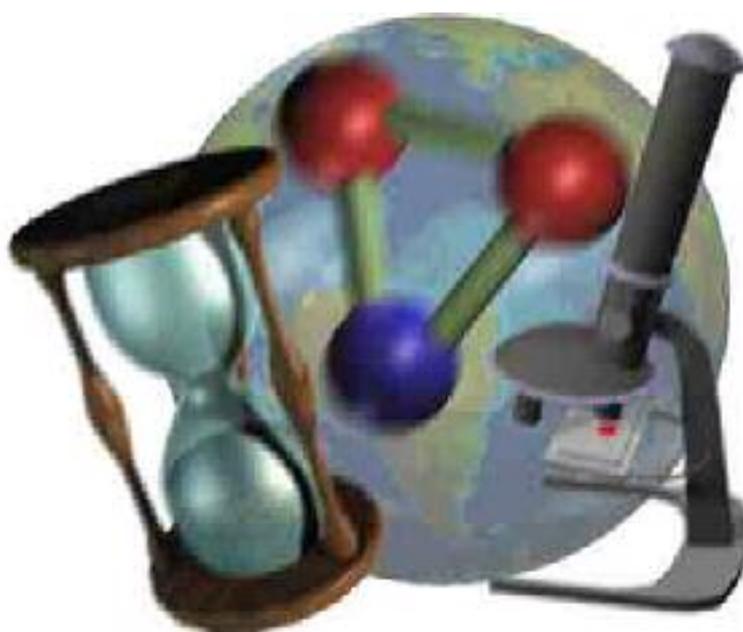
台南縣鹽水鎮鹽水國民小學

作者姓名：

柯宛廷、曾建勳、楊昆翰、翁以哲

指導老師：

何鳳珠、蔡焜明



## 摘要

七巧板是一個很好的學習教材，其中包含了幾種我們所熟悉的平面圖形，在探究圖形其性質之餘，我們發現在圖形組合中又可以演變出很多不同的形體變化，因此決定以七巧板作為我們研究發展的主題。

從形體的組成要素探索，到兩兩配對組合能否形成鑲嵌圖形？再縮小研究範圍至正方形、長方形及平行四邊形等三種基本平面圖形，採用不同巧板不同塊數進行搭配組合成大小不同的三種基本平面圖形，再配合三種色彩及各種圖形轉換的技巧（水平翻轉、垂直翻轉、旋轉及交錯複製），創意出千變萬化的鑲嵌圖形基模，並且將這些鑲嵌圖形基模輸入電腦，利用繪圖軟體作大平面的鋪呈，形成一幅幅有創意的圖形，以做為我們美化居家環境的參考。整個研究中讓我們深深地感受到“數學即生活”，更讓我們體會到數學的唯美。

## 壹、研究動機

一張 A4 的影印紙，你知道有多少妙用嗎？老師在課堂上讓我們以對稱方式對摺裁割，製作出不僅老少咸宜，且連拿破崙都熱愛的七巧板，接著，大家一頭栽進平面幾何圖形性質的論證之中，所以，我們對於這些基本的幾何圖形就有更深一層的認識。七巧板另一個迷人的地方就是圖形的拼排，常常是同學們暗自較勁的戰場，尤其是當圖形愈是簡單，其難度愈高。在回首之餘，瞄到教室後面的益智區地板是由一塊塊方形的塑膠地墊拼成的，除了一些簡易的顏色變化外，所見的都單色方格，當然在一些傢俱賣場有多樣的圖案方形地墊讓民眾選擇，讓房間地板拼排起來更加有美感，但是選擇的樣式依舊有限，不一定能符合大眾的需求，老師突然來個奇想：既然七巧板可以排成正方形，那麼若我們是地墊製造商，可否大量生產七巧板的五種簡易造型板，再搭配幾種簡單色彩變換，設計出無數種的拼排鑲嵌圖形，來供應消費者的需求呢？也就是消費者可以依自己所想要的圖形，選擇所需的造型板及顏色，在家中做親子 DIY，甚至定期做圖形變換。這個 idea 馬上就能引起我們的共鳴。

## 貳、研究目的

1. 認識七巧板的基本構造及關係。
2. 探究兩兩配對所能形成的簡易幾何圖形種類。
3. 哪些簡易的幾何圖形適合用來做鑲嵌的排列組合？
4. 尋找常見圖形的替代方式。
5. 任意搭配巧板，能否組成基本的平面圖形（包含正方形、長方形、平行四邊形）？
6. 運用巧板組成的基本平面圖形作鑲嵌的基模，密鋪整個平面來美化居家生活環境。
7. 尋找密鋪圖形中的鑲嵌基模。
8. 鑲嵌圖形視覺化中尋找規律。

## 參、實驗研究器材

七巧板、電算器、方格紙、電腦、數位相機、粉彩紙、白膠

## 肆、研究歷程與方法

### 活動一：認識七巧板的基本構造及關係。

玩過七巧板的人，未必就能將正方形紙張作正確的切割；一個不了解七巧板構造的人，在作圖形拼排時，常是無法得心應手的。基於這樣的理由，我們必須先對它的基本構造及巧板間的關係有所了解，才能作更深入的探究。

#### 方 法：

1. 將邊長 10 公分的正方形西卡紙依照七巧板的裁切方式進行切割。
2. 辨認每塊巧板的形體名稱，及組成要素（包含邊與角）。
3. 探討巧板之間的面積關係。

### 活動二：探究巧板間兩兩配對所能形成的簡易幾何圖形種類。

七巧板除了三種基本形體（正方形、平行四邊形、等腰直角三角形）外，若進行兩兩配對，所能形成的平面圖形又有哪些呢？

#### 方 法：

1. 以相同的兩塊巧板進行組合，能產生哪些新的平面圖形？
2. 以不同的兩塊巧板進行組合，有哪幾種配對方式，且能產生哪些新的平面圖形？

### 活動三：哪些簡易的幾何圖形適合用來做鑲嵌的排列組合？

能夠用來鋪滿整個平面的圖形就叫做鑲嵌圖形，這在日常生活中地板或牆壁磁磚上皆是常見到的，但是我們一般所見到的大都是正方形或長方形，那麼除了這兩種形體可以填滿整個平面外，還有沒有其它圖形可以做到呢？在活動二中我們所兩兩組合出來的圖形是可以作為鑲嵌圖形來鋪滿整個平面呢？

#### 方 法：

1. 檢驗七巧板的任一塊巧板，是否為鑲嵌圖形？
2. 檢驗活動二所組合出來的圖形是否為鑲嵌圖形？

### 活動四：找出常見圖形的替代拼貼方式

同一樣圖形可以有不同的替代拼貼方式，例如一個 1 號巧板就可以用 2 個 4 號巧板來拼排，除此之外應該還有很多類似的替代模式，當找出有規律的替代方式對我們往後的活動將會有很大的幫助。

#### 方 法：

1. 列出單一巧板及雙巧板中常拼排到的一些基本圖形。

2. 找出這些基本圖形的替代拼排方式。

### 活動五：任意搭配巧板，能否組成正方形、長方形、平行四邊形等三種鑲嵌圖形？

想要組合巧板首要注意的是邊長及角度，在我們了解每塊巧板的組成要素後，來進行巧板間的搭配，探究每種搭配組合是否皆能形成正方形、長方形或平行四邊形（之所以選擇正方形、長方形及平行四邊形是因為這三種圖形不但是常見的平面圖形，而且也很適合作鑲嵌圖形），以作為我們下個活動～創意鑲嵌圖形的設計基模。

#### 方 法：

1. 探究五種巧板能進行幾種不同的配對組合。
2. 以最小的5號巧板（等腰直角三角形）作為基本單位來計算組合出的圖形面積。
3. 在各種不同的配對組合中，各種巧板取  $n$  塊，能否組成各種不同大小的正方形？
4. 在各種不同的配對組合中，各種巧板取  $n$  塊，能否組成各種不同大小的長方形？
5. 在各種不同的配對組合中，各種巧板取  $n$  塊，能否組成各種不同大小的平行四邊形？

### 活動六：運用巧板組成的基本平面圖形作鑲嵌的基模，密鋪整個平面來美化我們居家生活環境。

在我們的日常生活中，有很多的圖案都是由鑲嵌圖形平鋪而成的，包括地板、牆壁、步道、服飾圖案、教堂壁飾等等，甚至包裝紙皆是，現在我們構想運用七巧板中簡易的五種平面圖形所配對出來的正方形、長方形及平行四邊形等三種形體，配上基本的三種色彩搭配，來創造出各種美麗的鑲嵌圖形。

#### 方 法：

1. 從活動四正方形的 26 種組合方式中，每組選出較適合的二種不同大小正方形，並分別嘗試做 2 組不同顏色搭配及不同巧板數間的變換組合。
2. 將上述所組合出來的正方形作為基本的鑲嵌圖形，運用各種技巧（水平翻轉、垂直翻轉、旋轉、交錯等）設計出 4 種鋪排的效果，且記錄使用的巧板編號及數量。
3. 從活動四長方形的 26 種組合方式中，每組選出較適合的二種不同大小長方形，並分別嘗試做 2 組不同顏色搭配及不同巧板數間的變換組合。
4. 將上述所組合出來的長方形作為基本的鑲嵌圖形，運用各種技巧（水平翻轉、垂直翻轉、旋轉、交錯等）設計出 4 種鋪排的效果，且記錄使用的巧板編號及數量。
5. 從活動四平行四邊形的 26 種組合方式中，每組選出較適合的二種不同大小平行四邊形，並分別嘗試做 2 組不同顏色搭配及不同巧板數間的變換組合。
6. 將上述所組合出來的平行四邊形作為基本的鑲嵌圖形，運用各種技巧（水平翻轉、垂直翻轉、旋轉、交錯等）設計出 4 種鋪排的效果，且記錄使用的巧板編號及數量。

## 活動七：尋找密鋪圖形中的鑲嵌基模。

面對日常生活中由鑲嵌圖形密鋪的平面(如地板、牆壁、步道、服飾圖案、教堂壁飾等等，甚至包裝紙等等)，必定有其固定的基模可複製，包括我們前一個活動所創作的圖形中，亦可能含有另一種基模，現在我們想嘗試去搜尋日常生活中的密鋪平面，找出其可能的鑲嵌基模。

### 方 法：

1. 由活動六鋪排出的各種密鋪平面中，各選出三種(分別以正方形、長方形及平行四邊形當基模)，嘗試尋找圖形中另外的鑲嵌基模。
2. 尋找日常生活中密鋪的平面圖形，嘗試找出其鑲嵌基模。

## 活動八：鑲嵌圖形視覺化中尋找規律。

由鑲嵌圖形所密鋪的平面必定含有其對稱性，而圖形的對稱與否在人們的視覺中，潛藏著一種“規律性”，對稱給人的感覺是“有跡可尋”，其中稍有“瑕疵”，就有種不完美的感覺，現在利用這種對稱的視覺化特性，來作兩種創意的活動～“找碴”及“未完成的任務”。

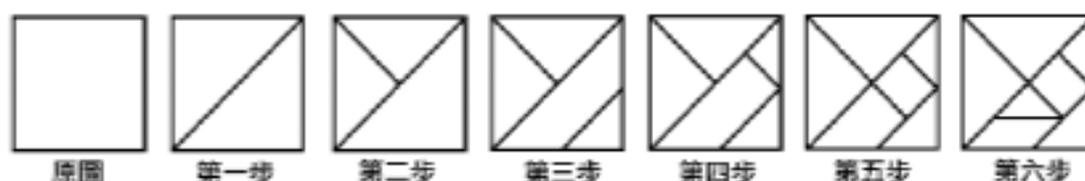
### 方 法：

1. “大家來找碴”：選用活動六的幾種鑲嵌基模實際拼貼成一個平面，但是在圖形中的一角動個手腳，使一個完美的圖形變成不完美，然後讓大家一起來找碴，看看是哪裡拼錯了！從中考驗大家對圖形的敏感度。
2. “未完成的任務”：選用活動六的幾種鑲嵌基模實際拼貼成一個半成品的平面，然後讓大家來接續未完成的拼貼工作，看看能否找出拼貼的規律性。

## 伍、研究結果

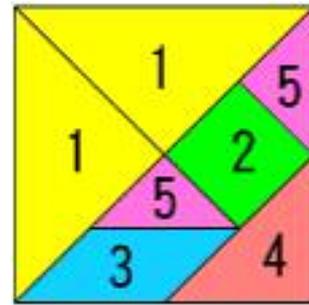
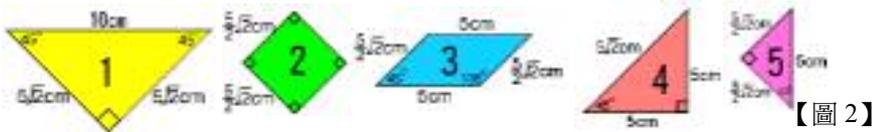
### 活動一實驗結果

從觀察七巧板的切割模式(圖1)，皆以等分為原則，即使不用尺來丈量，也可以完成分割，其實只要利用對摺原理即可。在切割完成後，雖然有七塊巧板，但是實際上只有三種不同的平面圖形，包含等腰直角三角形、正方形及平行四邊形(圖2)，其中等腰直角三角形又分成大中小3種，且之間的面積呈倍數關係。現在將正方形切割後的區塊分別編號(圖3)，並將我們所觀察到的關係整理如下(表1)：



※以邊長 10 公分的正方形來

【圖 1】



【表 1】

【圖 3】

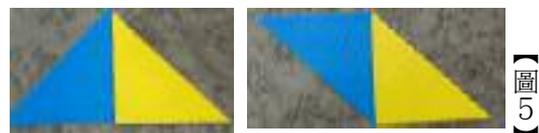
圖形種類	3 種等腰直角三角形 (1、4、5 號板)、正方形(2 號板)、平行四邊形(3 號板)
邊長關係	僅有四種長度的邊 ( $2.5\sqrt{2}$ cm、5cm、 $5\sqrt{2}$ cm、10cm) →再縮小範圍來說也就是只有 2 種長度的變化衍伸，即 $2.5\sqrt{2}$ cm 及 5cm。
角度關係	僅有三種角度 (45 度、90 度、135 度) →再縮小範圍來說也就是只有 1 種角度的變化衍伸，即 45 度角。
面積關係	2 號 = 3 號 = 4 號，1 號為 2 號(3、4 號)的二倍，5 號為 2 號(3、4 號)的 $\frac{1}{2}$ 倍

**活動二實驗結果：**

(一)以相同的兩塊巧板進行組合，所能產生的平面圖形有以下幾種：【圖 4】

1. 二片 1 號巧板可組成的平面圖形有 3 種。

- (1) 當 10cm 與 10cm 的邊搭配時，再翻轉圖形依舊不變 (因為是線對稱圖形，且以斜邊中點和直角點的連線為軸進行翻轉，圖形還是不變)，所以 10cm 接上 10cm 時，產生的圖形只有 1 種 (圖 4)。



【圖 5】

- (2) 當  $5\sqrt{2}$  cm 與  $5\sqrt{2}$  cm 的邊搭配時，再翻轉圖形則會產生 2 種不同的平面圖形 (圖 5)，此時翻轉是以直角三角形的一股為軸來翻轉，翻轉後的圖形剛好上下顛倒)。

- (3) 當  $5\sqrt{2}$  cm 與 10cm 的邊搭配時，邊長無法完全疊合，在本活動中不予考慮。

2. 二片 2 號巧板可組成的平面圖形僅有 1 種。：【圖 6】

2 號巧板是正方形，只有一種邊長，即使 2 塊搭配成長方形後再翻轉，圖形還是不變。



3. 二片 3 號巧板可組成的平面圖形有 4 種。

平行四邊形並不是線對稱圖形，所以翻轉後所產生的圖形與原圖不相同 (斜向已改變)，所以每一種邊長組合經過水平或垂直翻轉後，又可以有另一種組合。



【圖 7】

- (1) 當 5cm 與 5cm 的邊搭配時，再翻轉圖形則會產生 2 種不同的平面圖形 (圖 7)。

- (2) 當  $2.5\sqrt{2}$  cm 與  $2.5\sqrt{2}$  cm 的邊搭配時，再翻轉圖形則又會產生 2 種不同的平面圖形 (圖 8)。

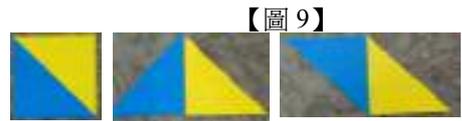


【圖 8】

4. 二片 4 號巧板可組成的平面圖形有 3 種 (圖

9)。

由於4號巧板也是屬於等腰直角三角  
所以組成的平面圖形和1號巧板相同，有3  
種樣式，只是組成的圖形是小一號了。

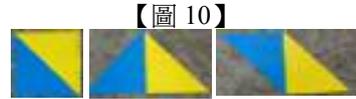


【圖9】

形，  
種樣

5. 二片5號巧板可組成的平面圖形有3種(圖10)。

由於5號巧板也是屬於等腰直角三角形，所以組成  
平面圖形和1號巧板相同，有3種樣式，只是組成的  
形更是小一號了。



【圖10】

的  
圖

(二)以不同的兩塊巧板進行組合，能產生的平面圖形有以下幾種：(如【表2】)

為了不遺漏任何一組搭配方式，因此我們決定以表格來呈現。 【表2】

	1號	2號	3號	4號	5號
1號		因為邊長不同 無法組成	因為邊長不同無 法組成		因為邊長不同無法組 成
2號				因為邊長不同無法組 成	
3號					
4號					
5號					

由表中我們可以發現以兩種不同的巧板可以組合成9種平面圖形，其中1號  
& 4號的組合圖形和4號&5號組合的圖形相同，因為這三種巧板形體是一樣  
的，只是大小不相同；又4號&1號、5號&2號、5  
& 3號、5號&4號皆可組合成直角梯形；4號&3  
號、5號&3號皆可以組合成等腰梯形，這對我們下一  
活動很有幫助，因為兩個全等的直角梯形或等腰梯形就  
可以組合成一個長方形，而長方形即是一種鑲嵌圖形。



號  
個  
可

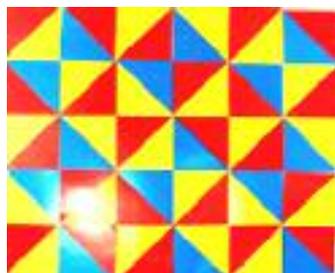
另外3種沒提到的圖形(3號&2號、4號&3號、5號&3號)，經我們查  
證結果是屬於凹多邊形，因為其有一內角超過180度。

結論：基本上平行四邊形，等腰直角三角形，正方形，長方形都是鑲嵌圖形，所以在  
活動二的【方法一】中組合出來的圖形也必為鑲嵌圖形，所以在此我們將繼續  
往下探究活動二的【方法二】組合出來的圖形是否可以成為鑲嵌圖形？

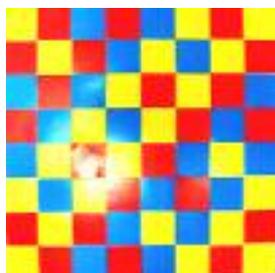


**活動三實驗結果：**

1. 由下列組合中，我們發現七巧板的任一塊巧板皆可以鋪滿整個平面，所以皆為鑲嵌圖形。(註：因為1號、4號及5號板皆是等腰直角三角形，所以我們直接取4號巧板來作拼貼組合)



由4號巧板拼貼而成



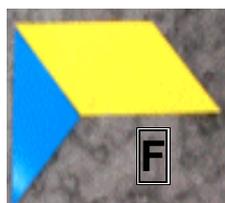
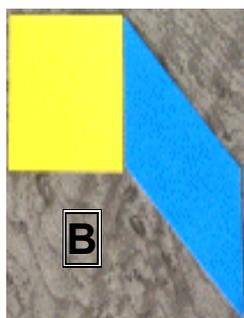
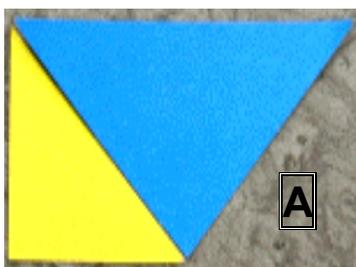
由2號巧板拼貼而成



由3號巧板拼貼而成

2. 由活動二之【方法二】所組合的九種平面圖形為基本單位作圖形的拼貼，發現皆可以鋪滿整個平面，所以這個九個平面圖形也都是鑲嵌圖形。

(1) 先將九種平面圖形進行編號 (A、B、C、D、E、F、G、H、I)。



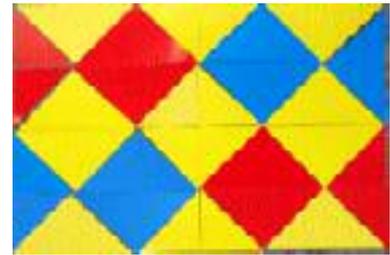
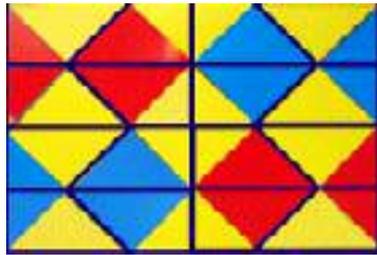
- (2) 拼貼的結果，我們發現這九種圖形都可以鋪滿整個平面 (其中 A 圖和 I 圖形是同樣形體的組合，只是大小不同罷了，所以我們只以 A 組來作拼貼觀察)。而且在拼貼過程中，運用水平翻轉、垂直翻轉及旋轉的對稱原理也可以創造出很多種變化哦～，以下列出我們拼貼出來的幾種造形：

**基本形—A 圖形 (直角梯形：由4號巧板&5號巧板組成)：**

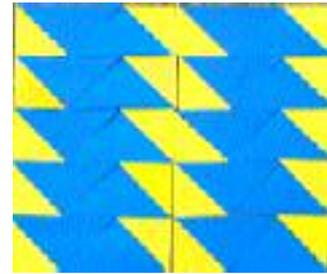
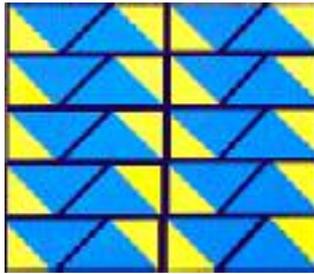
創作 A-1：



創作 A-2 :

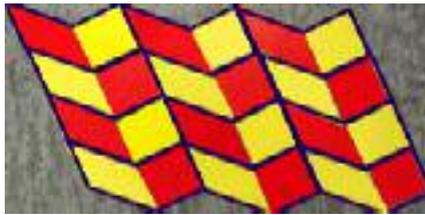
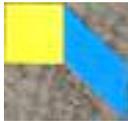


創作 A-3 :

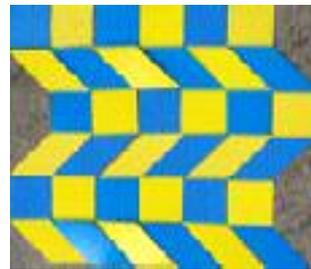
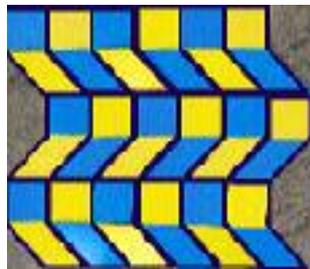
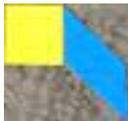


基本形-B 圖形 (內凹六邊形: 由 2 號巧板 & 3 號巧板組成):

創作 B-1 :

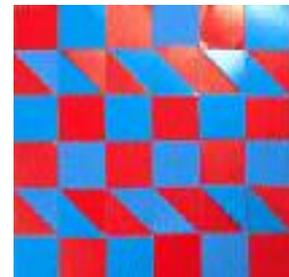
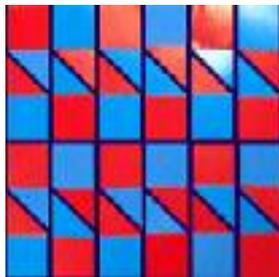


創作 B-2 :



基本形-C 圖形 (直角梯形: 由 2 號巧板 & 5 號巧板組成):

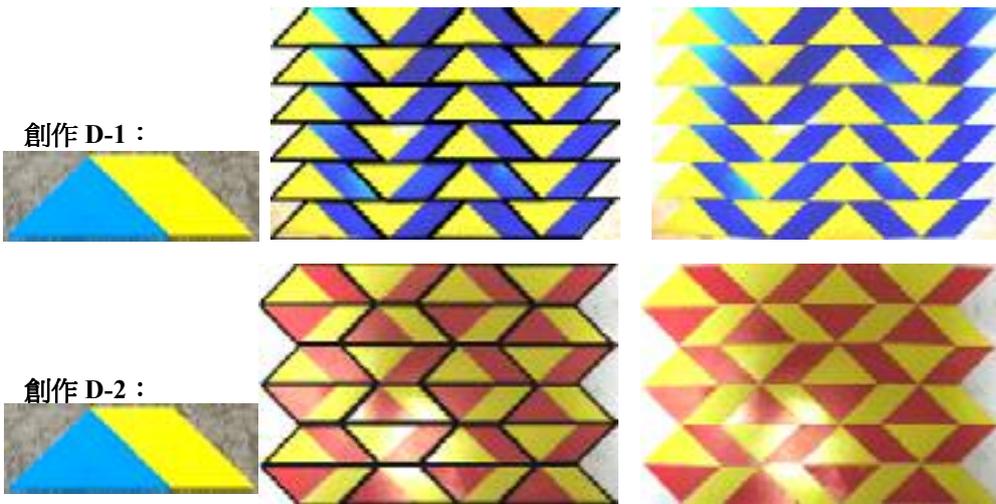
創作 C-1 :



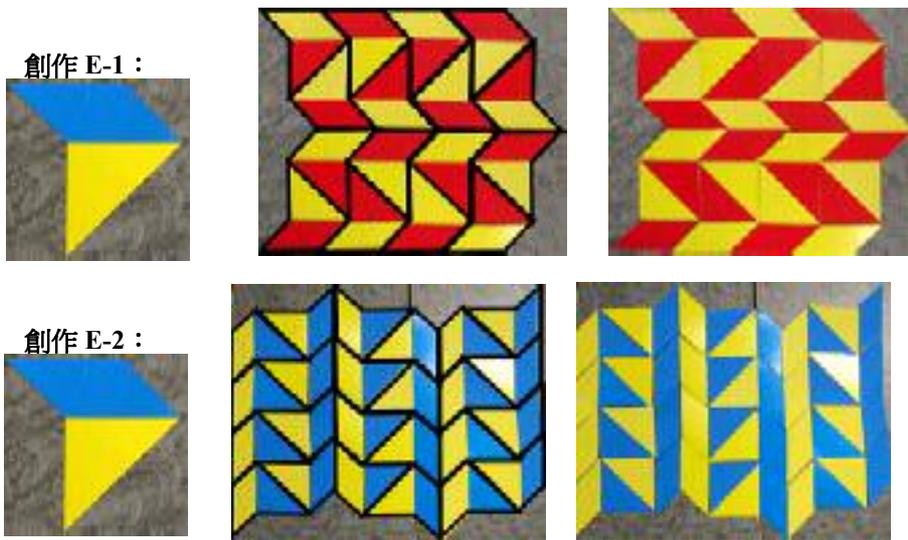
創作 C-2 :



基本形—D 圖形（等腰梯形：由 3 號巧板 & 4 號巧板組成）：



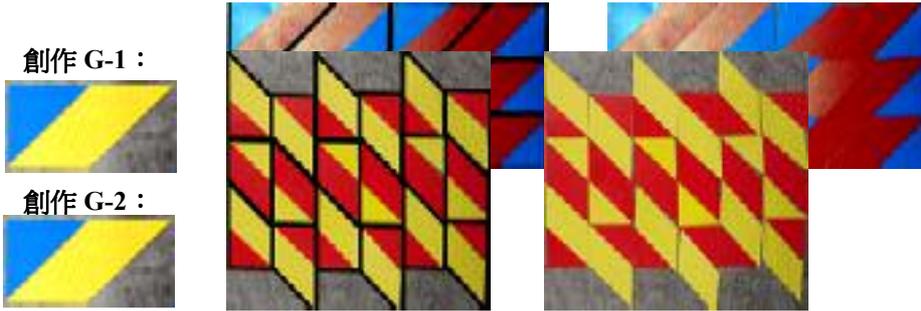
基本形—E 圖形（內凹五邊形：由 3 號巧板 & 4 號巧板組成）：



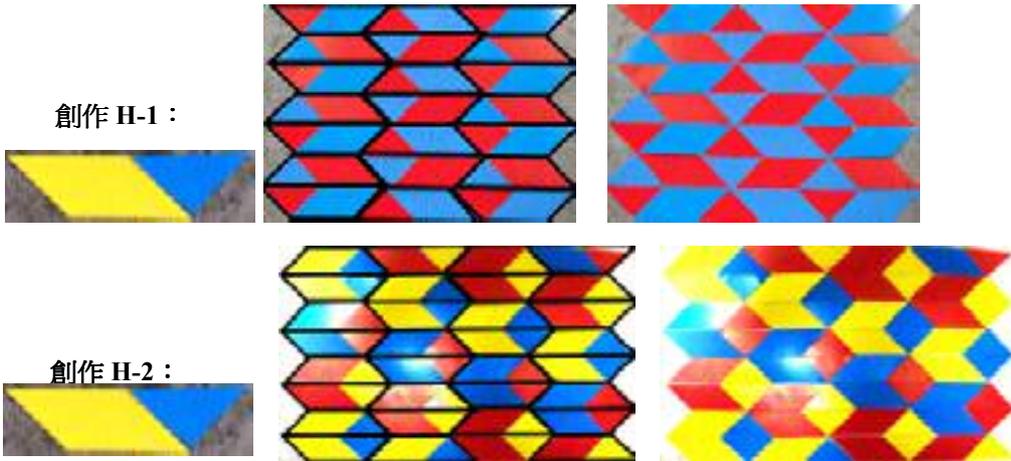
基本形—F 圖形（內凹五邊形：由 3 號巧板 & 5 號巧板組成）：



基本形—G 圖形（直角梯形：由 3 號巧板 & 5 號巧板組成）：



基本形—H 圖形（等腰梯形：由 3 號巧板 & 5 號巧板組成）：

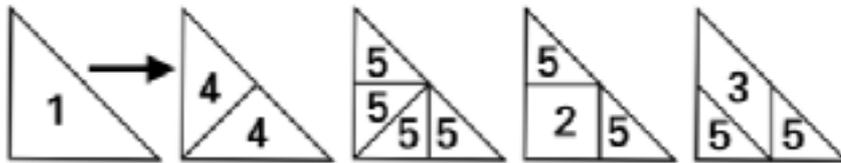


活動四實驗結果：

1. 單一巧板的變化組合：

因為七巧板的每塊巧板之間面積都呈倍數關係，所以都可以做不同的變化組合，歸納如下：

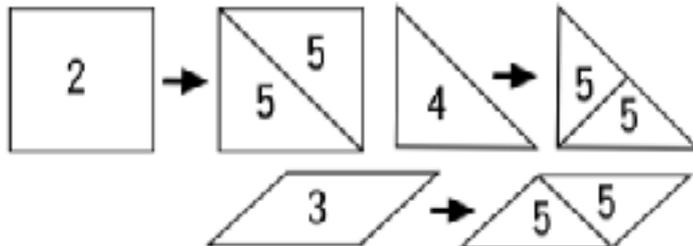
1 號巧板 → 4 號巧板 × 2 → 5 號巧板 × 4 → 2 號巧板 × 1 & 5 號巧板 × 2  
 → 3 號巧板 × 1 & 5 號巧板 × 2



2 號巧板 → 5 號巧板 × 2

3 號巧板 → 5 號巧板 × 2

4 號巧板 → 5 號巧板 × 2

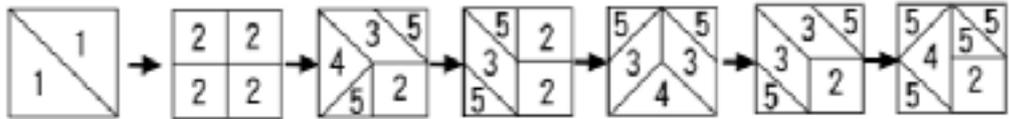


2. 雙巧板的變化組合：

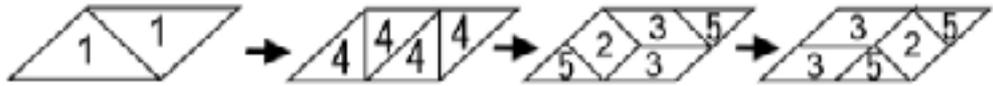
我們綜合活動二所拼出的兩兩圖形組合作變化組合（變化的方式有很多種，若是單一圖形內的變化，我們就不重複了，如：1 號 → 4 號 × 2。

【相同兩塊巧板的組合】

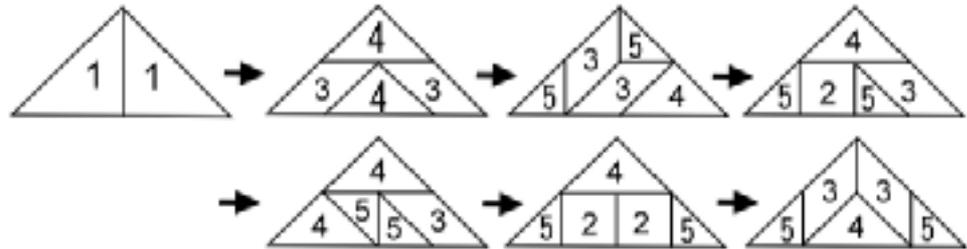
1 號巧板 & 1 號巧板



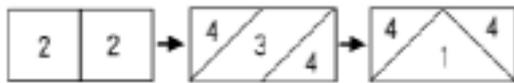
1 號巧板 & 1 號巧板



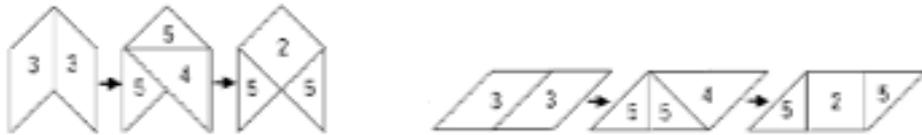
1 號巧板 & 1 號巧板



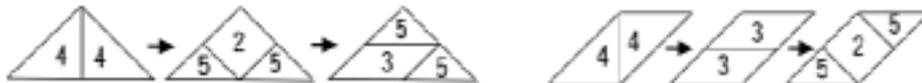
2 號巧板 & 2 號巧板



3 號巧板 & 3 號巧板



4 號巧板 & 4 號巧板

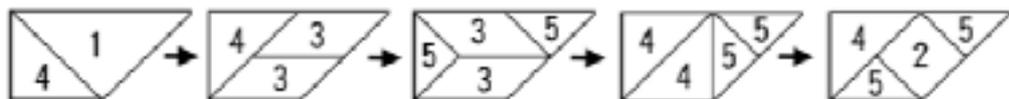


※ 5 號巧板 & 5 號巧板的組合無法用其它巧板來變化(因為 2 個 5 號板即為 4 號、3 號或 2 號)。※

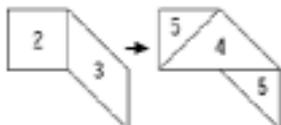
【相異兩塊巧板的組合】

以活動二所組合出來的九種圖形來做變化組合的探究。

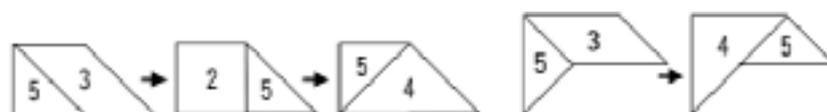
1 號巧板 & 4 號巧板



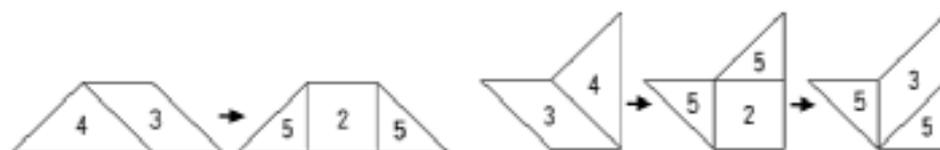
2 號巧板 & 3 號巧板



3 號巧板 & 5 號巧板、2 號巧板 & 5 號巧板、4 號巧板 & 5 號巧板



3號巧板 & 4號巧板



**活動五實驗結果：**

1. 五種巧板任意搭配，依照組合原理，共有以下 26 組：

(1) 任 2 個一組的組合有 10 組：

- (1, 2)、(1, 3)、(1, 4)、(1, 5)、(2, 3)、
- (2, 4)、(2, 5)、(3, 4)、(3, 5)、(4, 5)。

(2) 任 3 個一組的組合有 10 組：

- (1, 2, 3)、(1, 2, 4)、(1, 2, 5)、(1, 3, 4)、(1, 3, 5)、
- (1, 4, 5)、(2, 3, 4)、(2, 3, 5)、(2, 4, 5)、(3, 4, 5)。

(3) 任 4 個一組的組合有 5 組：

- (1, 2, 3, 4)、(1, 2, 3, 5)、(1, 2, 4, 5)、(1, 3, 4, 5)、
- (2, 3, 4, 5)。

(4) 5 個一組的組合有 1 組：

- (1, 2, 3, 4, 5)。

2. 在 26 組的配對組合中，各種組合裡各取 n 塊來組成正方形，當找到前幾組面積較小的正方形後，依其規律遞增邊長往下預測 14 組正方形，一一列表，然後再以方格紙作圖來檢驗預測結果是否正確？(預測及檢驗資料如附件一)

註:a.以 5 號巧板為一個面積單位

b.下表僅列出面積較小的前五組正方形組合

【表 3】

配對組合		第一組	第二組	第三組	第四組	第五組
(1, 2)	邊長	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	$12.5\sqrt{2}$	20	$15\sqrt{2}$
	面積單位	18	32	50	64	72
(1, 3)	邊長	$10\sqrt{2}$	20	$15\sqrt{2}$		
	面積單位	32	64	72		
(1, 4)	邊長	$5\sqrt{2}$	10	$10\sqrt{2}$	15	20
	面積單位	8	16	32	36	64
(1, 5)	邊長	$5\sqrt{2}$	10	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15
	面積單位	8	16	18	32	36
(2, 3)	邊長					
	面積單位					
(2, 4)	邊長	10	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15	$12.5\sqrt{2}$
	面積單位	16	18	32	36	50
(2, 5)	邊長	$5\sqrt{2}$	10	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15

	面積單位	8	16	18	32	36
(3, 4)	邊長	10	$10\sqrt{2}$	15	20	$15\sqrt{2}$
	面積單位	16	32	36	64	72
(3, 5)	邊長	$5\sqrt{2}$	10	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15
	面積單位	8	16	18	32	36
(4, 5)	邊長	5	$5\sqrt{2}$	10	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$
	面積單位	4	8	16	18	32
(1, 2, 3)	邊長	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	$12.5\sqrt{2}$	20	$15\sqrt{2}$
	面積單位	18	32	50	64	72
(1, 2, 4)	邊長	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15	$12.5\sqrt{2}$	20
	面積單位	18	32	36	50	64
(1, 2, 5)	邊長	$5\sqrt{2}$	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15	$12.5\sqrt{2}$
	面積單位	8	18	32	36	50
(1, 3, 4)	邊長	$10\sqrt{2}$	15	20	$15\sqrt{2}$	
	面積單位	32	36	64	72	
(1, 3, 5)	邊長	$5\sqrt{2}$	10	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15
	面積單位	8	16	18	32	36
(1, 4, 5)	邊長	$5\sqrt{2}$	10	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15
	面積單位	8	16	18	32	36
(2, 3, 4)	邊長	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15	$12.5\sqrt{2}$	20
	面積單位	18	32	36	50	64
(2, 3, 5)	邊長	$5\sqrt{2}$	10	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15
	面積單位	8	16	18	32	36
(2, 4, 5)	邊長	$5\sqrt{2}$	10	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15
	面積單位	8	16	18	32	36
(3, 4, 5)	邊長	$5\sqrt{2}$	10	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15
	面積單位	8	16	18	32	36
(1, 2, 3, 4)	邊長	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15	$12.5\sqrt{2}$	20
	面積單位	18	32	36	50	64
(1, 2, 3, 5)	邊長	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15	$12.5\sqrt{2}$	20
	面積單位	18	32	36	50	64
(1, 2, 4, 5)	邊長	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15	$12.5\sqrt{2}$	20
	面積單位	18	32	36	50	64
(1, 3, 4, 5)	邊長	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15	$12.5\sqrt{2}$	20
	面積單位	18	32	36	50	64
(2, 3, 4, 5)	邊長	10	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15	$12.5\sqrt{2}$
	面積單位	16	18	32	36	50
(1, 2, 3, 4, 5)	邊長	10	$7.5\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	15	$12.5\sqrt{2}$
	面積單位	16	18	32	36	50

分析一：在預測 15 組的數據後（如附件一），我們做第一次的篩選，發現只要邊長是整數加上帶有根號的數字，則無法組合出圖形，因為如此所形成的正方形面積將為無理數，由於我們的面積都可以換算成以 5 號巧板為單位，且 5 號巧板的面積為 6.25 平方公分，是個有理數，再幾個 5 號巧板拼起來仍會是有理數。

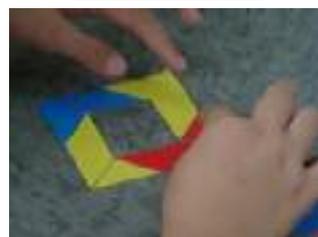
分析二：經過實際組合拼排，很明顯 2 號巧板 & 3 號巧板之組合無法拼出正方形，探究其原因是正方形與平行四邊形一組合，角度變為 135 度，無法成為正方形所需要的角度 90 度。



\*拼貼正方形\*



\*拼貼正方形\*



\*拼貼正方形\*

3. 在 26 組的配對組合中，各種組合裡各取 n 塊來組成長方形，當找到前幾組面積較小的長方形後，依其規律遞增邊長往下預測 14 組長方形，一一列表，然後再以方格紙作圖來檢驗預測結果是否正確？(預測及檢驗資料如附件二)

註:a.以 5 號巧板為一個面積單位

b.下表僅列出面積較小的前五組長方形組合

c.在此的排列樣式是指面積固定不同的長寬組合樣式。

【表 4】

配對組合		第一組	第二組	第三組	第四組	第五組
(1, 2)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	1 種	2 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(1, 3)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	3 種	1 種
	面積單位	12	16	20	24	28
(1, 4)	排列樣式	2 種	1 種	3 種	1 種	3 種
	面積單位	8	12	16	20	24
(1, 5)	排列樣式	2 種	2 種	3 種	1 種	2 種
	面積單位	8	12	16	18	20
(2, 3)	排列樣式					
	面積單位					
(2, 4)	排列樣式	1 種	2 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(2, 5)	排列樣式	1 種	1 種	3 種	1 種	3 種
	面積單位	4	6	8	10	12
(3, 4)	排列樣式	1 種	2 種	3 種	1 種	2 種
	面積單位	8	12	16	18	20
(3, 5)	排列樣式	1 種	1 種	3 種	1 種	3 種
	面積單位	4	6	8	10	12
(4, 5)	排列樣式	2 種	1 種	3 種	1 種	3 種
	面積單位	4	6	8	10	12
(1, 2, 3)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	2 種	1 種
	面積單位	16	18	20	24	28

(1, 2, 4)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(1, 2, 5)	排列樣式	1 種	2 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(1, 3, 4)	排列樣式	1 種	2 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(1, 3, 5)	排列樣式	1 種	1 種	2 種	1 種	1 種
	面積單位	8	12	16	18	20
(1, 4, 5)	排列樣式	2 種	2 種	3 種	1 種	2 種
	面積單位	8	12	16	18	20
(2, 3, 4)	排列樣式	1 種	2 種	1 種	2 種	2 種
	面積單位	18	24	30	32	36
(2, 3, 5)	排列樣式	1 種	2 種	3 種	1 種	2 種
	面積單位	8	12	16	18	20
(2, 4, 5)	排列樣式	2 種	2 種	3 種	1 種	2 種
	面積單位	8	12	16	18	20
(3, 4, 5)	排列樣式	1 種	2 種	3 種	1 種	2 種
	面積單位	8	12	16	18	20
(1, 2, 3, 4)	排列樣式	2 種	1 種	2 種	2 種	2 種
	面積單位	24	30	32	36	40
(1, 2, 3, 5)	排列樣式	1 種	2 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(1, 2, 4, 5)	排列樣式	1 種	2 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(1, 3, 4, 5)	排列樣式	1 種	2 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(2, 3, 4, 5)	排列樣式	1 種	2 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(1, 2, 3, 4, 5)	排列樣式	1 種	2 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24

分析一：在預測 15 組的數據後（如附件二），我們實際拼排做檢驗，並在方格紙上繪製記錄，發現 2 號巧板 & 3 號巧板之搭配組合永遠無法組成長方形，其道理同前。

4. 在 26 組的配對組合中，各種組合裡各取 n 塊來組成平行四邊形，當找到前幾組面積較小的平行四邊形後，依其規律遞增邊長往下預測 14 組平行四邊形，一一列表，然後再以方格紙作圖來檢驗預測結果是否正確？(預測及檢驗資料如附件三)

註:a.以 5 號巧板為一個面積單位

b.下表僅列出面積較小的 前五組平行四邊形組合

c.在此的排列樣式是指面積固定不同的長短邊組合樣式。

【表 5】

配對組合		第一組	第二組	第三組	第四組	第五組
(1, 2)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	2 種	1 種
	面積單位	12	16	20	24	28
(1, 3)	排列樣式	2 種	2 種	1 種	2 種	4 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(1, 4)	排列樣式	1 種	1 種	2 種	1 種	3 種
	面積單位	8	12	16	20	24
(1, 5)	排列樣式	1 種	2 種	2 種	1 種	2 種

	面積單位	8	12	16	18	20
(2, 3)	排列樣式					
	面積單位					
(2, 4)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	2 種	1 種
	面積單位	12	16	20	24	28
(2, 5)	排列樣式	1 種	1 種	2 種	1 種	3 種
	面積單位	4	6	8	10	12
(3, 4)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	2 種	1 種
	面積單位	6	8	10	12	14
(3, 5)	排列樣式	1 種	1 種	2 種	1 種	3 種
	面積單位	4	6	8	10	12
(4, 5)	排列樣式	1 種	1 種	2 種	1 種	3 種
	面積單位	4	6	8	10	12
(1, 2, 3)	排列樣式	1 種	1 種	2 種	1 種	1 種
	面積單位	16	20	24	28	30
(1, 2, 4)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(1, 2, 5)	排列樣式	1 種	2 種	2 種	1 種	2 種
	面積單位	8	12	16	18	20
(1, 3, 4)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(1, 3, 5)	排列樣式	1 種	2 種	2 種	1 種	2 種
	面積單位	8	12	16	18	20
(1, 4, 5)	排列樣式	1 種	2 種	2 種	1 種	2 種
	面積單位	8	12	16	18	20
(2, 3, 4)	排列樣式	1 種	2 種	2 種	1 種	2 種
	面積單位	18	24	30	32	36
(2, 3, 5)	排列樣式	1 種	2 種	2 種	1 種	2 種
	面積單位	8	12	16	18	20
(2, 4, 5)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	2 種	1 種
	面積單位	6	8	10	12	14
(3, 4, 5)	排列樣式	1 種	2 種	2 種	1 種	2 種
	面積單位	8	12	16	18	20
(1, 2, 3, 4)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	3 種	1 種
	面積單位	16	18	20	24	28
(1, 2, 3, 5)	排列樣式	2 種	2 種	1 種	2 種	4 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(1, 2, 4, 5)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(1, 3, 4, 5)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(2, 3, 4, 5)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	1 種	3 種
	面積單位	12	16	18	20	24
(1, 2, 3, 4, 5)	排列樣式	1 種	1 種	1 種	3 種	1 種
	面積單位	16	18	20	24	28

分析一：當我們排出第一組面積最小的平行四邊形後（如附件三），發現相鄰的二邊長必為一個整數，一個無理數，因為平行四邊形的面積是底 $\times$ 高，而並非相鄰兩邊的乘積，所以這點與正方形及長方形不同。在預測 15 組的數據後，我們實際拼排做檢驗，並在方格紙上繪製記錄。

由上述三種表格，我們發現因為 1 號、4 號及 5 號巧板之間皆是相似形，且面積皆以 2 倍擴張，所以所排列出來的圖形組合，1 號& 4 號或是 4 號及 5 號的組合圖形皆是

相同的，只是排出的圖形大小有不同罷了，



\*拼貼正方形\*



\*檢驗數據\*



\*討論數據的合理性\*

### 活動六實驗結果：

以各種配對方式組成的不同大小正方形、長方形及平行四邊形作為鑲嵌的基模，再配合水平翻轉、垂直翻轉及複製拼貼，所能創作出的圖案就有上百種，甚至上千種，因為每種形體有 26 種配對方式，每一種配對方式又可以排出各種大小不同的正方形（如附件四）、長方形（如附件五）或平行四邊形（如附件六），再者每種形體若再加上三種顏色的變化，那就相當驚人了。以下就每一種配對方式，選擇相鄰兩邊的長度比例數值在 1 與 2 之間的圖形來作為密鋪的基模，所有拼貼成果展示在附件七、八、九中，在此每種圖形我們僅列出代表的十件創意作品供各位做拼貼地板的參考。

#### 1. 【正方形】的鑲嵌圖形

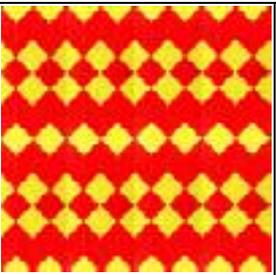
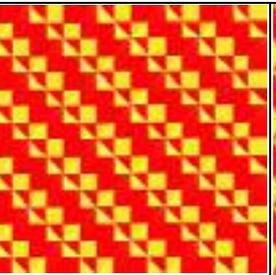
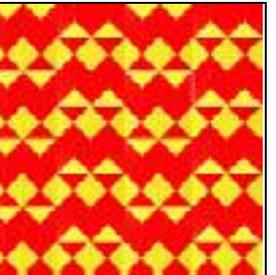
##### 創作一

基本形：



組合方式：3號(8塊)&4號(8塊)

面積：32個單位面積

			
複製	垂直翻轉	旋轉複製	垂直翻轉交錯複製

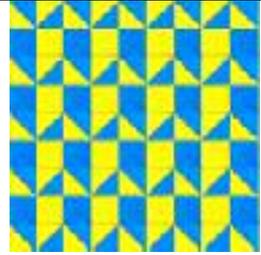
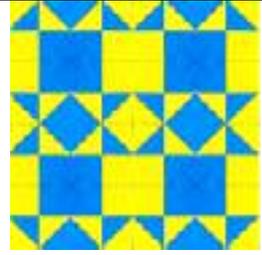
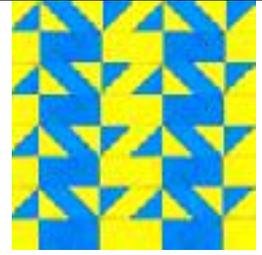
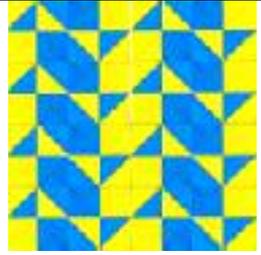
##### 創作二

基本形：



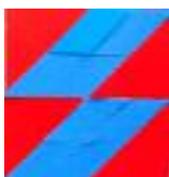
組合方式：4號(6塊)&5號(4塊)

面積：16個單位面積

			
複製	水平及垂直翻轉	旋轉交錯複製	旋轉複製

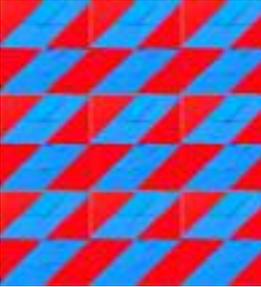
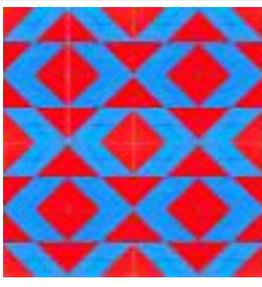
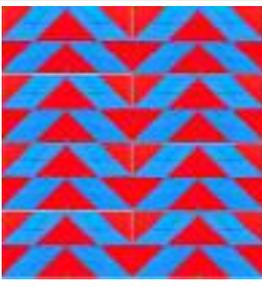
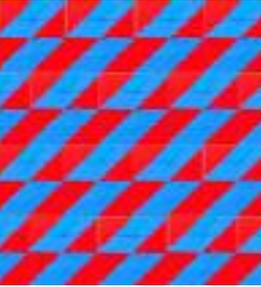
創作三

基本形：



組合方式：1號(4塊)&3號(8塊)

面積：32個單位面積

			
複製	水平及垂直翻轉	水平翻轉	交錯複製

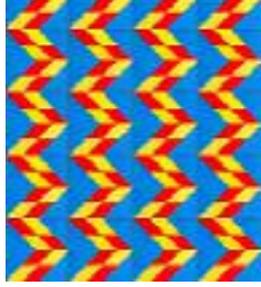
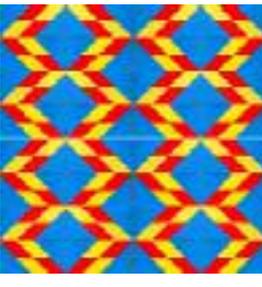
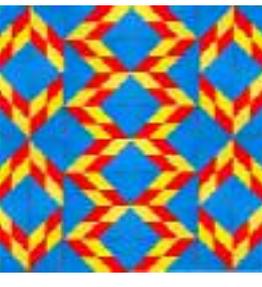
創作四

基本形：



組合方式：1號(4塊)&3號(8塊)

面積：32個單位面積

			
複製	水平翻轉	旋轉及垂直翻轉	交錯複製

創作五

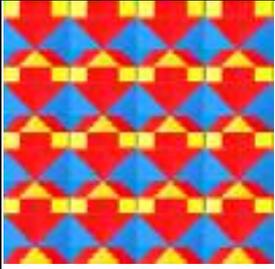
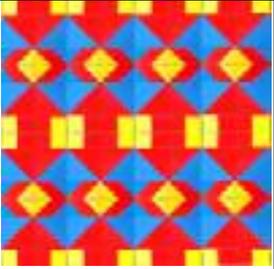
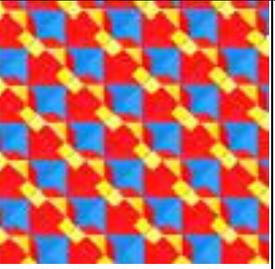
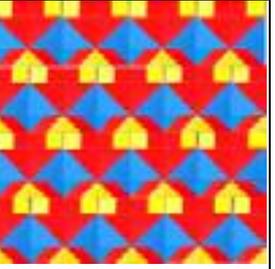
基本形：



組合方式：1號(4塊)&2號(4塊)&3號(2塊)&

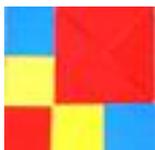
5號(4塊)

面積：32個單位面積

			
複製	垂直翻轉	旋轉複製	交錯複製

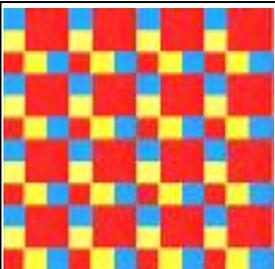
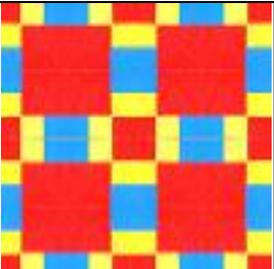
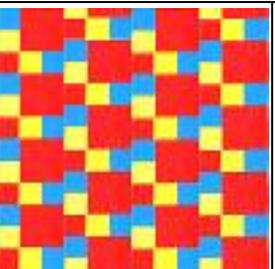
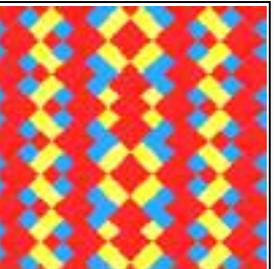
創作六

基本形：



組合方式：1號(1塊)& 2號(5塊)& 4號(2塊)

面積：18個單位面積

			
複製	水平及垂直翻轉	交錯複製	旋轉及垂直翻轉

創作七

基本形：



組合方式：1號(3塊)& 3號(8塊)& 4號(2塊)

面積：32個單位面積

			
複製	水平翻轉 1	交錯複製	水平翻轉 2

創作八

基本形：



組合方式：2號(3塊)& 3號(1塊)& 4號(3塊)& 5號(2塊)

面積：16個單位面積

複製	水平及垂直翻轉	水平翻轉交錯複製	交錯複製

創作九

基本形：



組合方式：2號(1塊)&3號(4塊)&4號(2塊)

5號(4塊)

面積：18個單位面積

複製	水平翻轉	旋轉及垂直翻轉	交錯複製

創作十

基本形：



組合方式：3號(4塊)&4號(4塊)

面積：16個單位面積

複製	水平翻轉	水平翻轉交錯複製	旋轉交錯複製

2. 【長方形】的鑲嵌圖形

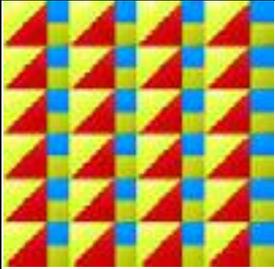
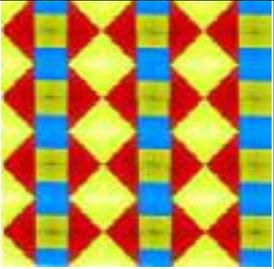
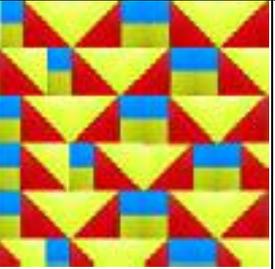
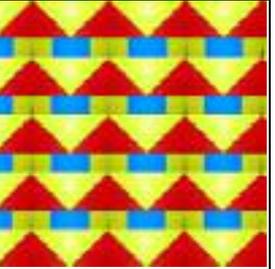
創作一

基本形



組合方式：1號(2塊)&2號(2塊)

面積：12個單位面積

			
複製	垂直翻轉	水平翻轉交錯複製	旋轉及水平翻轉

創作二

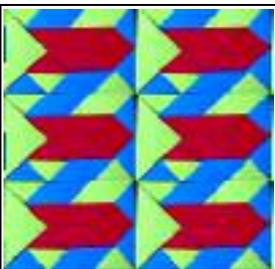
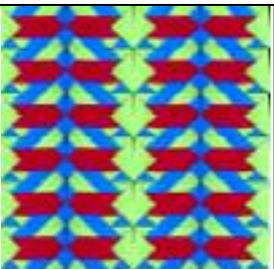
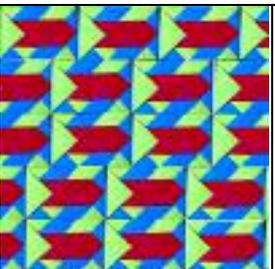
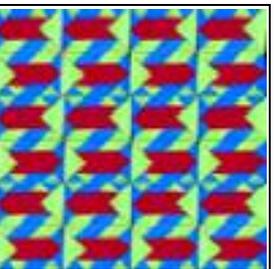
基本形：



組合方式：1號(1塊)& 2號(1塊)& 3號(5塊)

5號(8塊)

面積：24個單位面積

			
複製	水平翻轉 1	交錯複製	水平翻轉 2

創作三

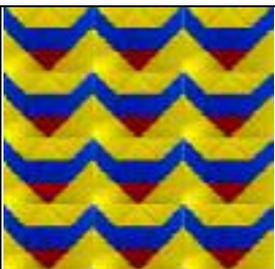
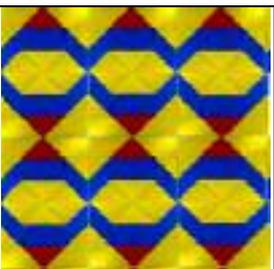
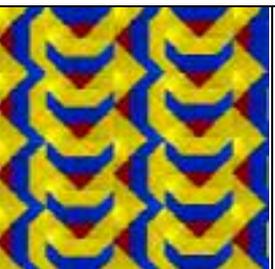
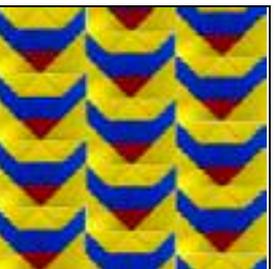
基本形：



組合方式：1號(2塊)& 2號(2塊)& 3號(2塊)

4號(4塊)

面積：24個單位面積

			
複製	垂直翻轉	水平翻轉	交錯複製

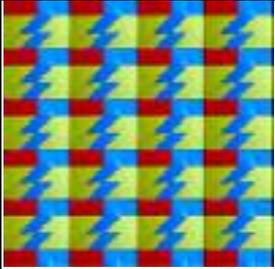
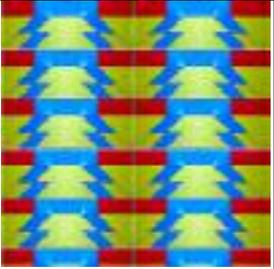
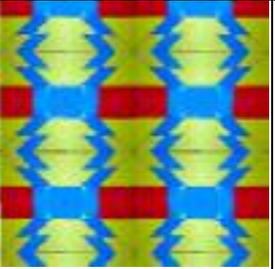
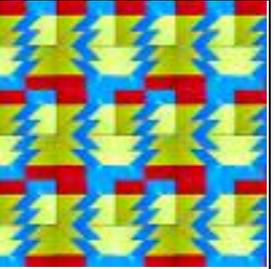
創作四

基本形：



組合方式：1號(2塊)& 2號(4塊)& 3號(4塊)

面積：24個單位面積

			
複製	水平翻轉	垂直翻轉	水平翻轉及旋轉

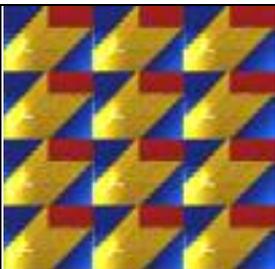
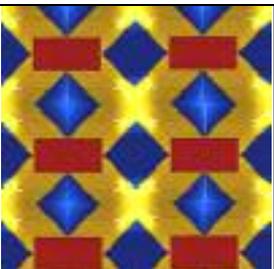
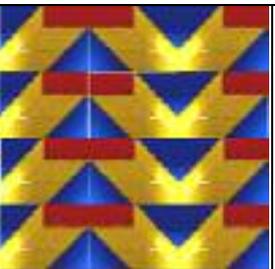
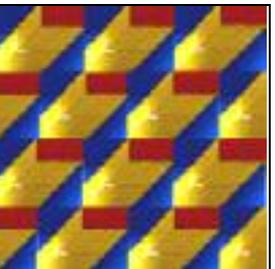
創作五

基本形：



組合方式：1號(2塊)&2號(2塊)&3號(6塊)

面積：24個單位面積

			
複製	水平垂直翻轉	水平翻轉	交錯複製

創作六

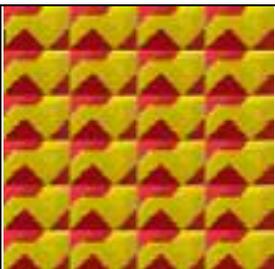
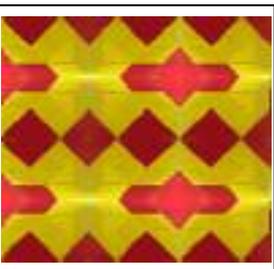
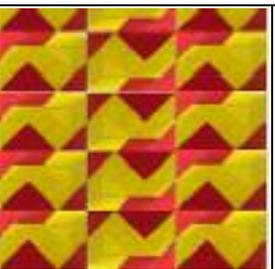
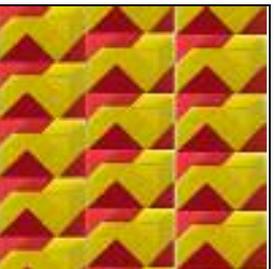
基本形：



組合方式：1號(1塊)&2號(2塊)&3號(4塊)

4號(4塊)

面積：24個單位面積

			
複製	水平及垂直翻轉	旋轉複製	交錯複製

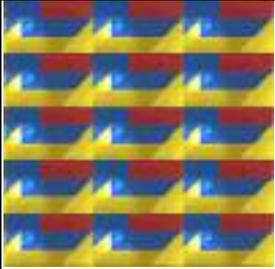
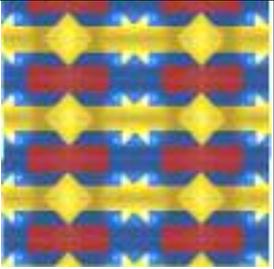
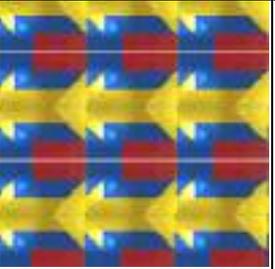
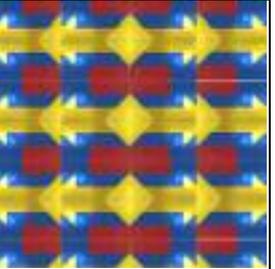
創作七

基本形：



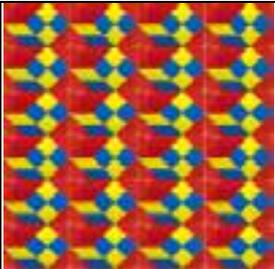
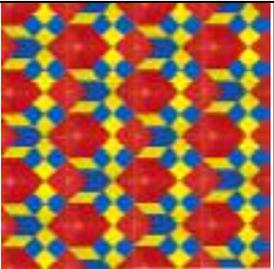
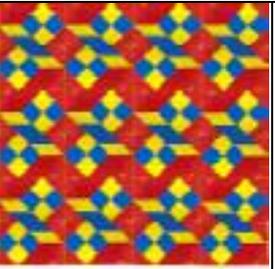
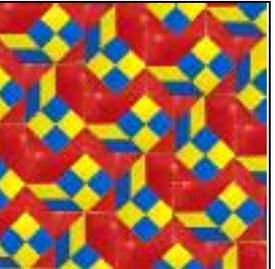
組合方式：1號(2塊)&2號(3塊)&3號(8塊)

面積：30個單位面積

			
複製	水平垂直翻轉 1	垂直翻轉	水平垂直翻轉 2

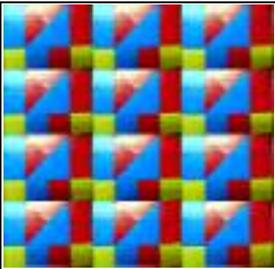
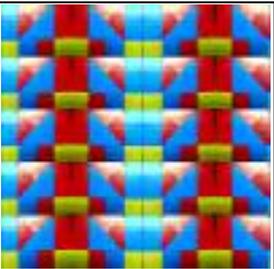
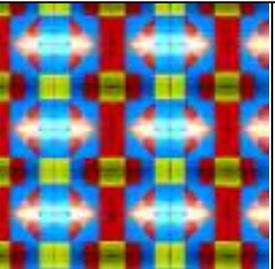
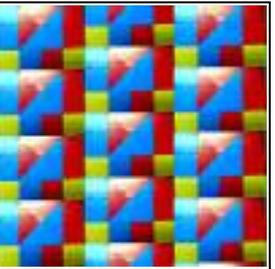
創作八

基本形： 組合方式：1 號(1塊)& 2 號(4塊)& 3 號(2塊)& 4 號(4塊)  
面積：24 個單位面積

			
複製	垂直翻轉	旋轉複製 1	旋轉複製 2

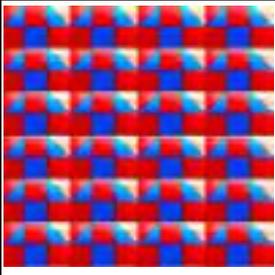
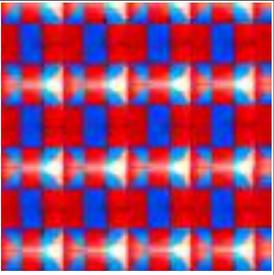
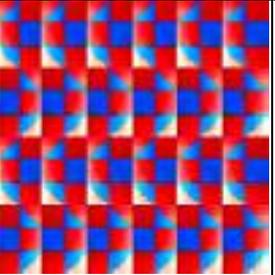
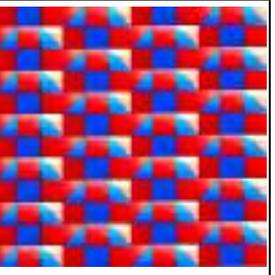
創作九

基本形： 組合方式：2 號(8塊)& 4 號(4塊)  
面積：24 個單位面積

			
複製	水平翻轉	水平及垂直翻轉	交錯複製

創作十

基本形： 組合方式：2 號(3塊)& 5 號(6塊)  
面積：12 個單位面積

			
複製	水平及垂直翻轉	水平翻轉旋轉複製	旋轉交錯複製

3. 【平行四邊形】的鑲嵌圖形

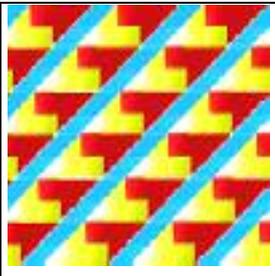
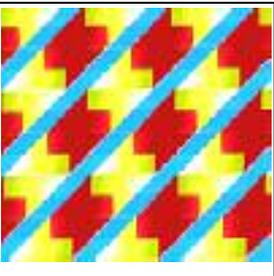
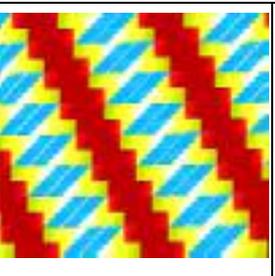
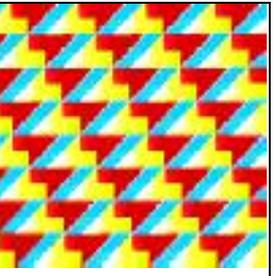
創作一

基本形：



組合方式：1號(2塊)& 2號(2塊)& 3號(2塊)

面積：16個單位面積

			
複製	旋轉複製	水平翻轉交錯複製	交錯複製

創作二

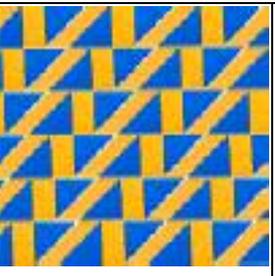
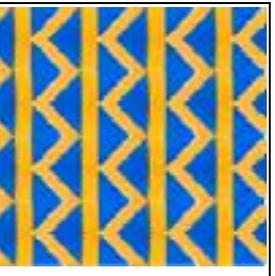
基本形：



組合方式：1號(1塊)& 2號(2塊)& 3號(2塊)

4號(2塊)

面積：16個單位面積

			
複製	水平翻轉	交錯複製	垂直翻轉

創作三

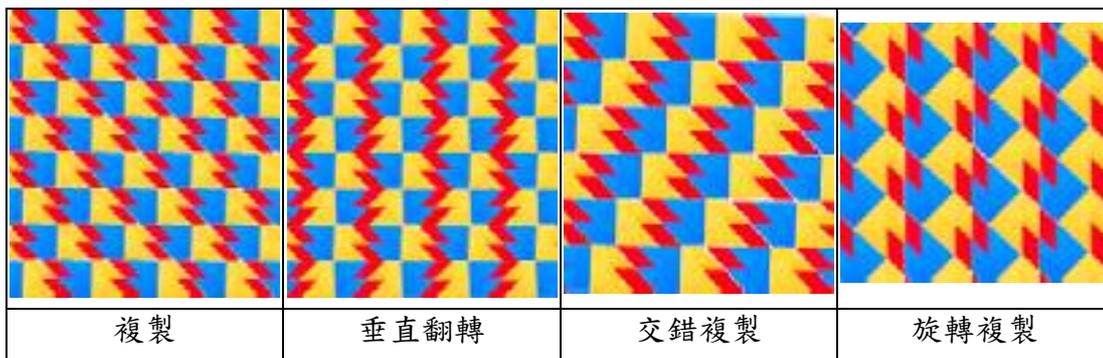
基本形：



組合方式：1號(2塊)& 2號(2塊)& 3號(1塊)

4號(2塊)

面積：18個單位面積



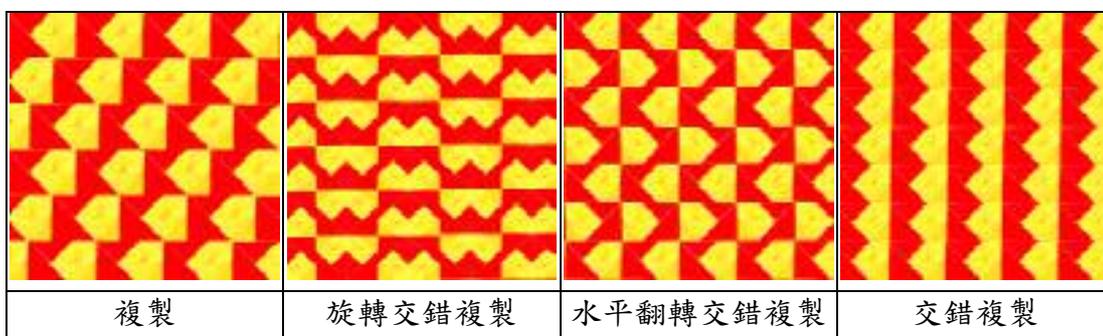
創作四

基本形：



組合方式：1號(1塊)&4號(2塊)&5號(4塊)

面積：12個單位面積



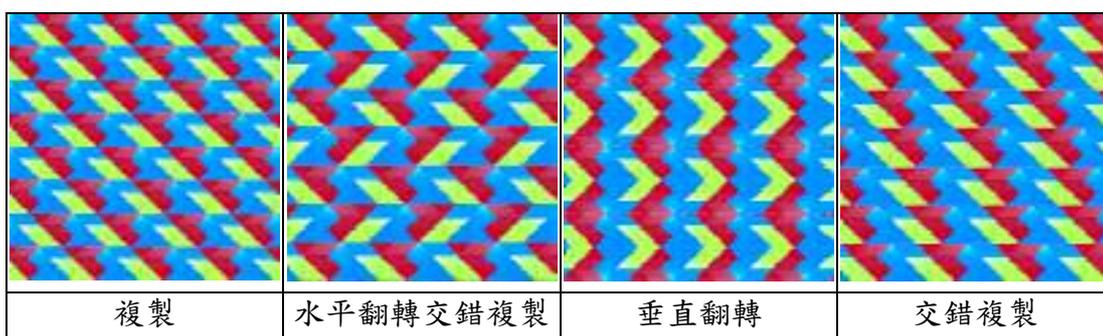
創作五

基本形：



組合方式：2號(1塊)&3號(2塊)&4號(5塊)&5號(2塊)

面積：18個單位面積



創作六

基本形：



組合方式：2號(2塊)&3號(3塊)&4號(4塊)

面積：18個單位面積

複製	水平翻轉	旋轉複製	旋轉交錯複製

創作七

基本形：



組合方式：2號(2塊)&3號(2塊)&5號(4塊)

面積：12個單位面積

複製	垂直翻轉	交錯複製	水平翻轉交錯複製

創作八

基本形：



組合方式：1號(2塊)&2號(2塊)&3號(4塊)

面積：20個單位面積

複製	垂直翻轉	水平翻轉交錯複製	垂直翻轉交錯複製

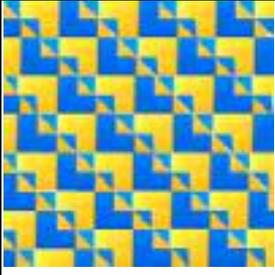
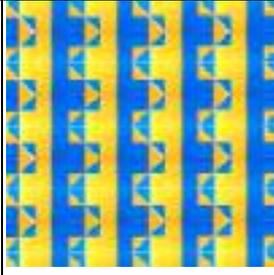
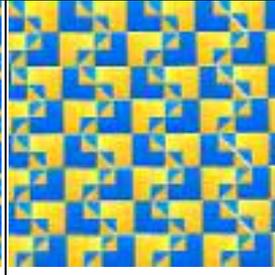
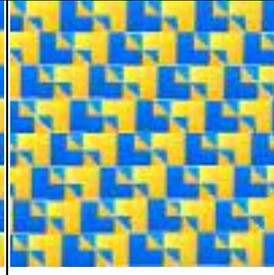
創作九

基



組合方式：2號(6塊)&5號(4塊)

面積：16個單位面積

			
複製	水平翻轉	垂直翻轉	交錯複製

創作十

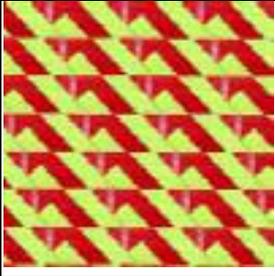
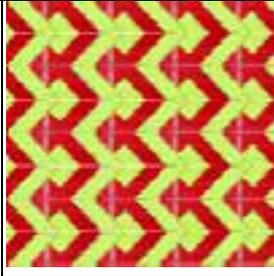
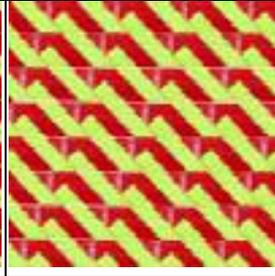
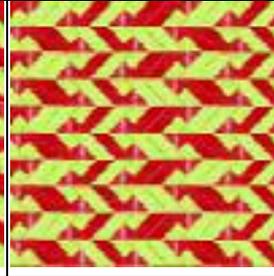
基本形：



組合方式：2號(1塊)&3號(6塊)&4號(1塊)

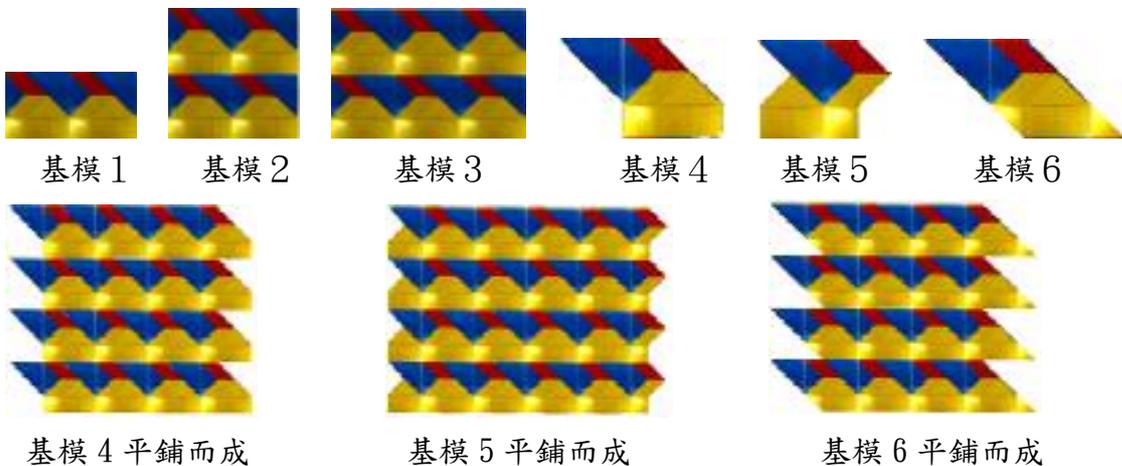
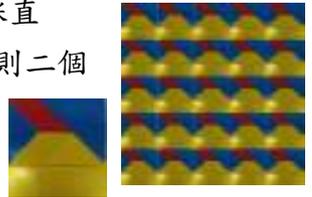
5號(2塊)

面積：18個單位面積

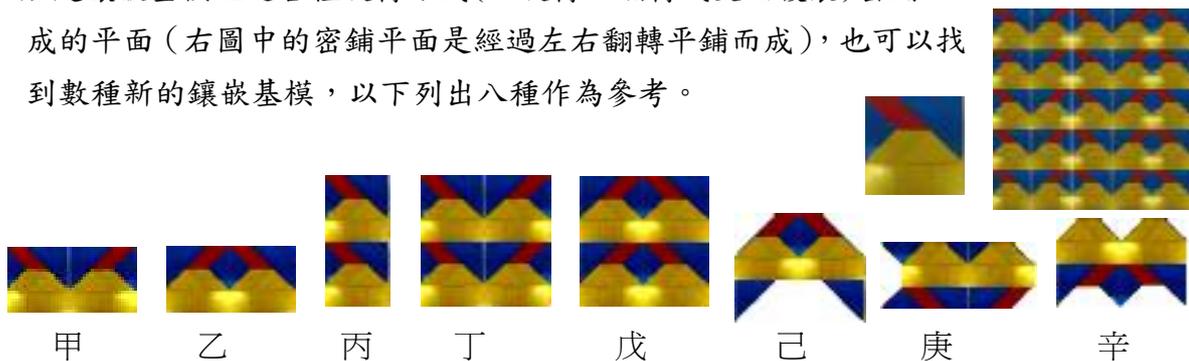
			
複製	水平翻轉	交錯複製	水平垂直翻轉

活動七實驗結果：

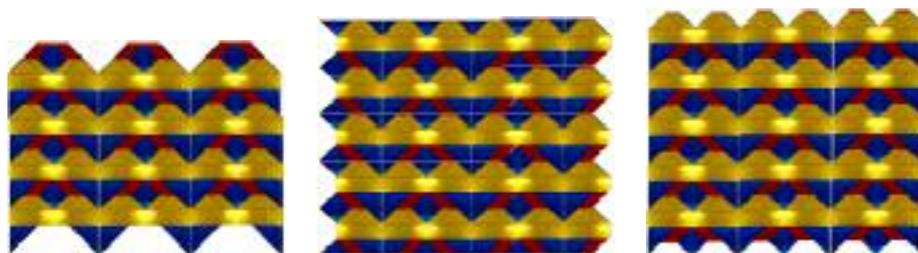
1. 以幾何圖形為主的密鋪平面可以找出數種鑲嵌基模，若圖形是採直接平鋪的方式（也就是未經過旋轉、翻轉或交錯複製的過程），則二個以上就可合併為一個新的鑲嵌基模來密鋪整個平面，所密鋪的平面還是與原平面相同。以右圖的圖例中，我們可以合併 N 個產生新的基模，甚至也可以利用幾何圖形的不規則切割來產生新基模，其產生的新基模及密鋪後的結果如下：



2. 若是鑲嵌基模經過各種旋轉方式(如旋轉、翻轉或交錯複製)密鋪成的平面(右圖中的密鋪平面是經過左右翻轉平鋪而成),也可以找到數種新的鑲嵌基模,以下列出八種作為參考。



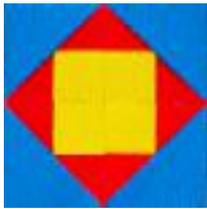
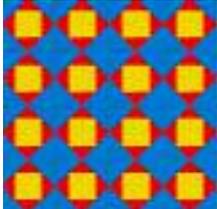
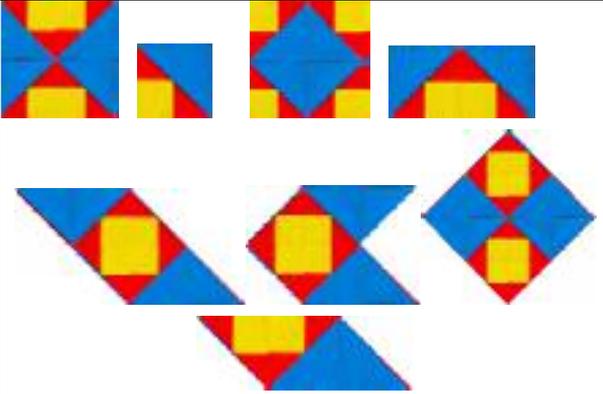
由上圖己、庚、辛所密鋪的平面圖形如下,皆與原圖形相同:

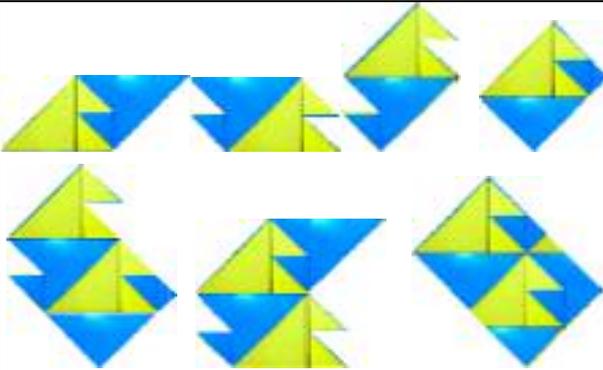


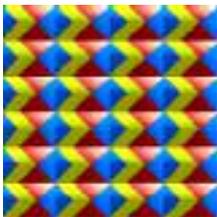
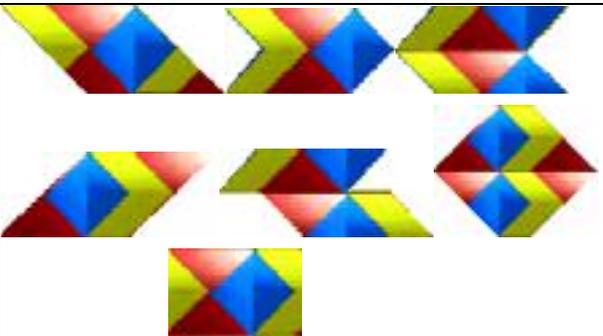
3. 從活動六鋪排出的各種密鋪平面中,各選3個圖形,嘗試尋找圖形中另外新的鑲嵌基模,結果如下:

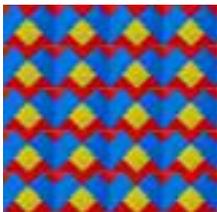
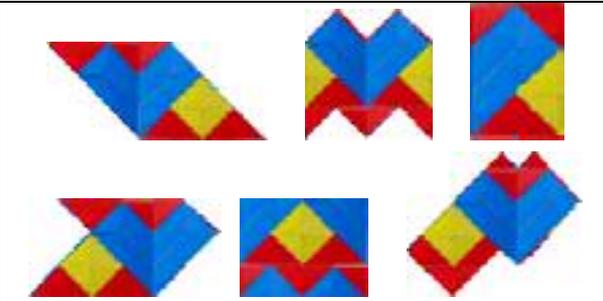
正 方 形			
	鑲嵌基模	密鋪平面	新的鑲嵌基模

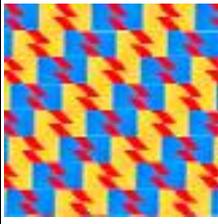
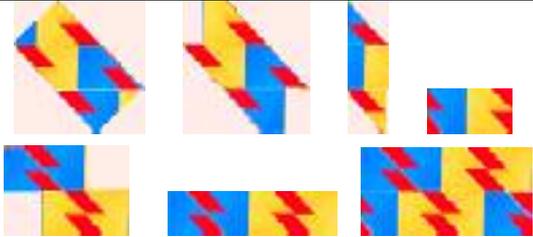
正 方 形			
	鑲嵌基模	密鋪平面	新的鑲嵌基模

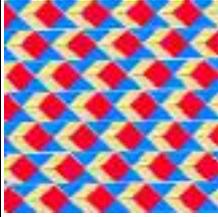
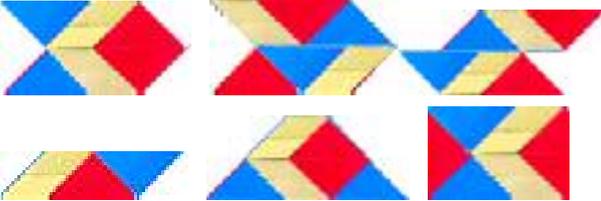
正方形			
	鑲嵌基模	密鋪平面	新的鑲嵌基模

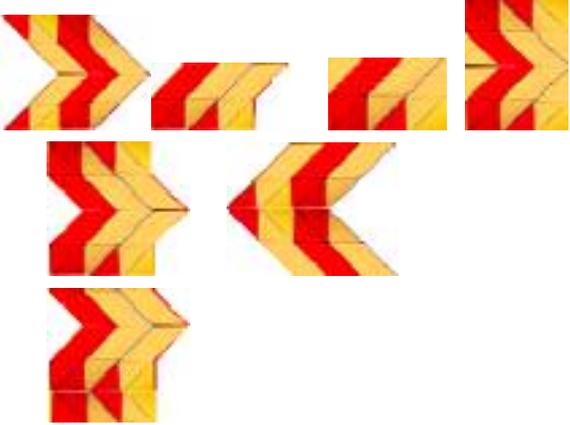
長方形			
	鑲嵌基模	密鋪平面	新的鑲嵌基模

長方形			
	鑲嵌基模	密鋪平面	新的鑲嵌基模

長方形			
	鑲嵌基模	密鋪平面	新的鑲嵌基模

平行四邊形			
	鑲嵌基模	密鋪平面	新的鑲嵌基模

平行四邊形			
	鑲嵌基模	密鋪平面	新的鑲嵌基模

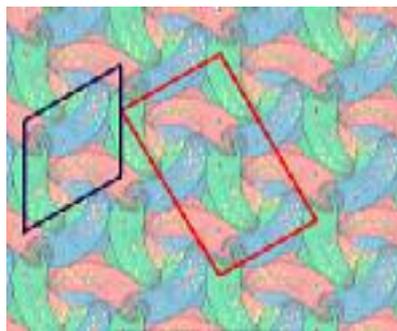
平行四邊形			
	鑲嵌基模	密鋪平面	新的鑲嵌基模

3. 日常生活中常見的密鋪圖形，包括包裝紙、服飾布料之紋路、磁磚拼貼，以及搜尋網路上的密鋪圖形或名畫等等，利用重複圖形的固定點連線，找到其鑲嵌基模，並利用電腦繪圖軟體檢驗複製鑲嵌基模後是否與原圖形相符，結果皆與原圖相符。

圖例 1~畫作



此幅以相同的魚交錯排列而成

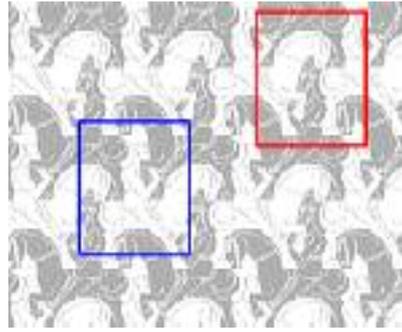


利用同一條魚的眼珠作為四角定點連線，所成的四邊形即為此幅畫的一個鑲嵌基模之一。

圖例 2～畫作



此幅以騎士騎馬黑白交錯而成

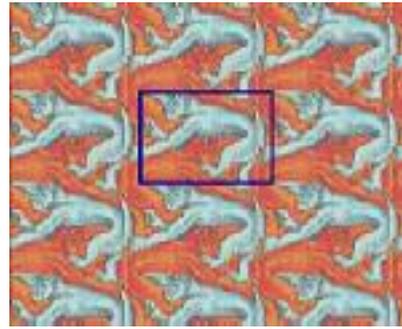


可以以騎士的眼珠為定點圍成一個矩形框，亦可以馬兒彎曲的前蹄尖端為定點，皆可找到

圖例 3～畫作



此幅以兩色怪獸交錯排列而成

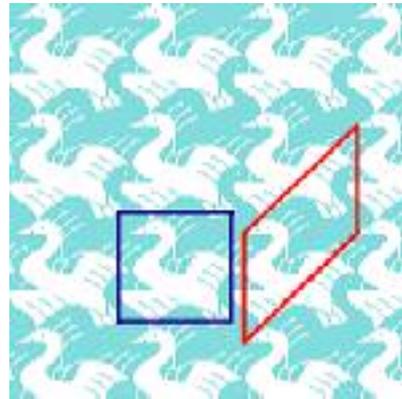


以怪獸的鼻尖為定點圍成一個矩形框，即可找到鑲嵌基模。

圖例 4～畫作



此幅以兩色天鵝交錯排列而成

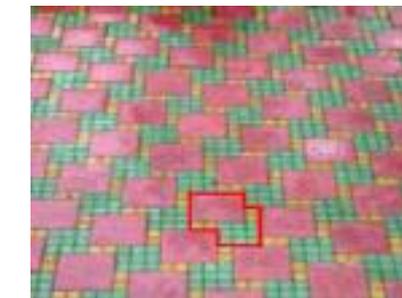


以天鵝的尾翅為定點或是天鵝的嘴尖圍成一個矩形框，皆可找到鑲嵌基模。

圖例 5～地板



此圖為校園的中庭廣場



可以看出是一個紅色大方形磚、4個小黃色磚及9個綠色磚所組成的鑲嵌基模。

圖例 6～地板



此圖為宛廷家的地板

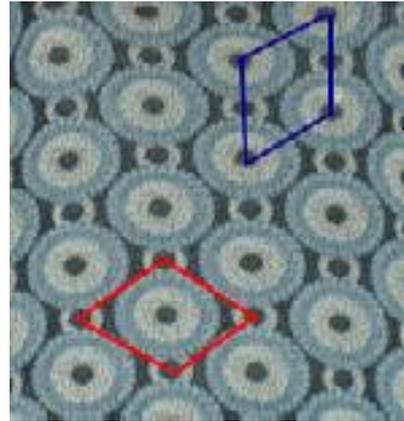


由4塊長方形的藍綠色磁磚及4塊長方形的白色磁磚所組成的方塊鑲嵌基模。

圖例 7～服飾



此圖為媽媽的裙子圖案

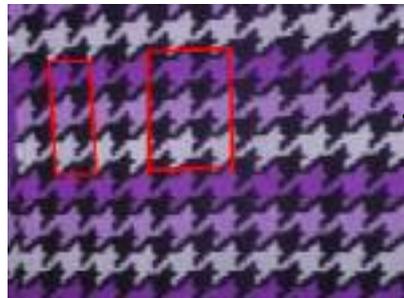


選取4個重複圖形的圓點中心所圍成的四邊形即為此圖形的鑲嵌基模。

圖例 8～服飾



此圖為媽媽的衣服圖案

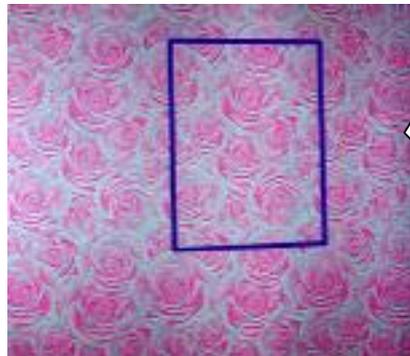


選取4個重複圖形的尖端為頂點所圍成的四邊形即為鑲嵌基模（有很多畫法）。

圖例 9～包裝紙



此圖為玫瑰花紋的包裝紙

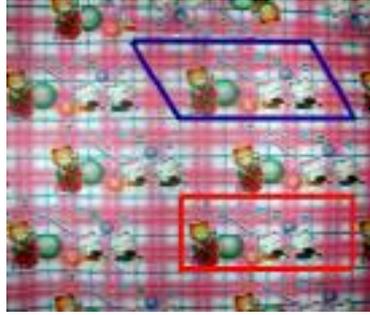


此圖較不好找，當我們找到重複的玫瑰花，即以花瓣邊上的一點為連接的固定點。

圖例 10～包裝紙



此圖為卡通圖案的包裝紙

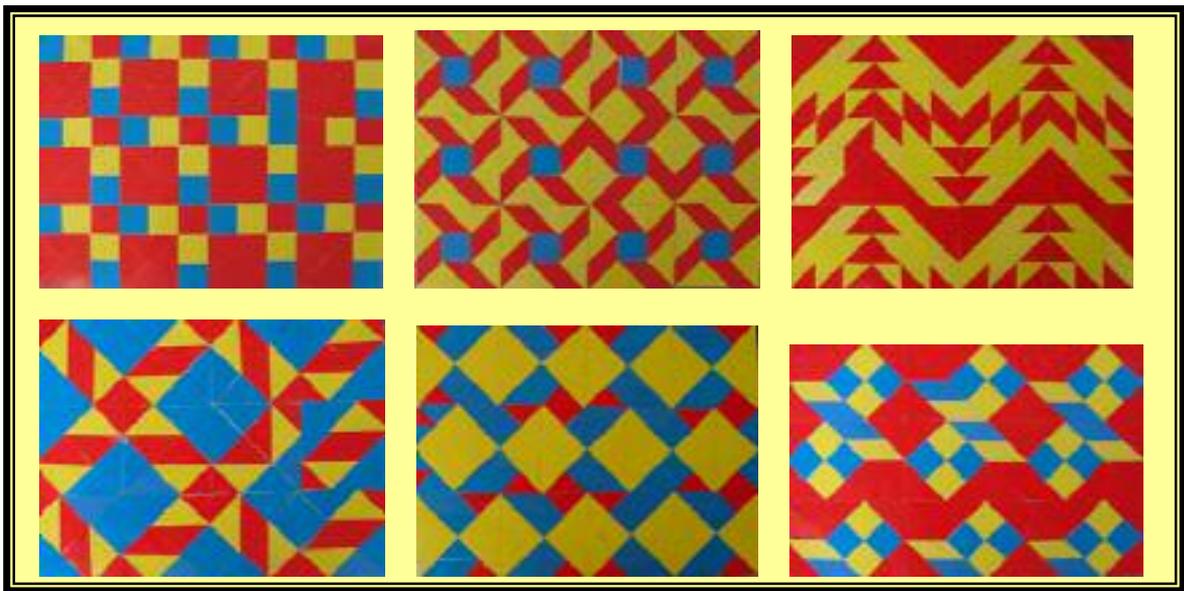


選取4個重複圖形的尖端為頂點所圍成的四邊形即為鑲嵌基模（有很多畫法）。

**活動八實驗結果：**

1. 密鋪平面的對稱性有其規律可尋，當我們將一個鑲嵌圖形依固定規律來排時，看起來是很“順眼”的，但是當我們將一小區塊動了手腳（即跳脫規律）時，則怎麼看總是覺得有不太對勁之處。各位看官，你們是否能從這些“有瑕疵的作品”中找到問題所在呢？考驗一下你們的敏感度囉～

2.  你看得出下列每張圖中哪裡出了差錯



3. 另外我們也做出了數張的半成品的密鋪平面，你們是否能看出排列的規律性而繼續完成它呢？

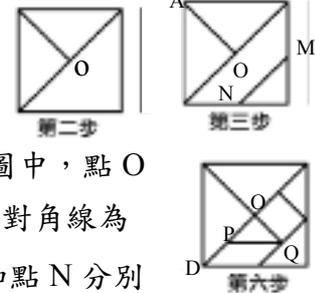
你能幫我完成下列未完成的任務嗎？





## 陸、討論建議

- (1) 從七巧板基本形體的探究中，發現邊長及角度之所以僅是以 2 種邊長及一種角度作衍伸，是因為七巧板的

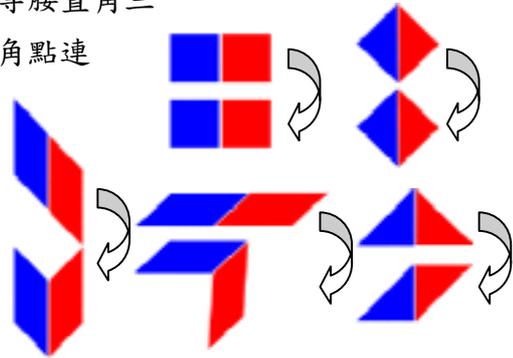


切割方式皆是以二等分為原則，例如：右圖第二步切割圖中，點 O 將正方形的對角線平分一半（若正方形邊長為 10cm，則對角線為  $10\sqrt{2}$ ），即為  $5\sqrt{2}$  cm，又如右圖第三步切割圖中，點 M 和點 N 分別

平分正方形的邊長，即為 5cm，角度亦是相同，線段 AO 將 90 度角 A 平分為二，成為兩個底角各是 45 度的等腰直角三角形；又第六步線段 BQ 將平角 OBD 切分成二個角度，即為 45 度及 135 度，可以看出 45 度是七巧板的基本角。

- (2) 在活動二【探究兩兩配對所能形成的簡易幾何圖形種類】的拼排中，若沒有依規律來拼排，常會遺漏掉一些可以組合的圖形，例如在拼排 2 塊 3 號巧板時，原先我們以為只有 2 種組合，結果在後來檢驗時又發現了一組，因為我們察覺到當我們拼出一種圖形後，再利用翻轉的動作常又可以產生另一種圖形，尤其是翻轉平行四邊形時。另外當等腰直角三角形的股邊接合時，若進行翻轉，也可以產生另一種不一樣的平面圖形。因此我們發現正方形是線對稱圖形，等腰直角三

角形也是線對稱圖形（當以斜邊中點及直角點連線為軸時），所以翻轉後的圖形依舊沒變；但是平行四邊形並非是線對稱圖形，所以翻轉後圖形與原圖形的斜向就不相同了，而等腰直角三角形若沒有沿對稱軸翻轉時，則翻轉後的圖形也會不一樣。



- (3) 在進行活動二【探究兩兩配對所能形成的簡易幾何圖形種類】兩種圖形組合配對時，若盲目拿起兩個圖形就組合，很容易遺漏掉一些組合，所以配對組合也是一種學問，我們先由 1 號分別跟 2 號、3 號、4 號、5 號配對，然後再換 2 號來和 3 號、4 號、5 號配對，依序進行，剛好有十組，在原先猜應該是有 20 種組合，但是我們發現其中有一半是重複的，因此我們推出一個公式，若有  $n$  個圖形要兩兩配對，即用  $(n-1) \times n \div 2$  就可以找出有幾種配對方式了，這似乎與我們數學課室中，在圓周上取 5 點，可以連成幾條直線的問題是相同的。

(4)在活動二中因為時間有限，我們僅探討到選用二塊相同或不同的巧板所能拼成的圖形有哪些？其實可以再繼續深入探究若使用三塊相同或不同的巧板又能拼出哪些圖形呢？四塊？五塊呢？相信也一定很有趣。



(5)當我們熟悉活動四【尋找常見圖形的替代方式】的圖形轉換組合時，對我們設計鑲嵌圖形是很有幫助的，因為它可以有很多的替代方式，再搭配色彩的變化就能有不一樣的美感。



\*苦思拼排的過程\*

(6)我們發現在排列平行四邊形時，其角度只有 45 度及 135 度的組合，因為五種巧板中只有 3 種角度，扣除平角及直角的組合外，只剩 45 度及 135 度角了，剛好足以形成平行四邊形的相鄰角，因此在組合圖形時，朝向角度這方面去想，常常很快就能排出所要的平行四邊形。



拼排過程須具創意

(7) 2 號巧板與 3 號巧板之所以無法組成正方形、長方形及平行四邊形，其原因是因為角度的關係，因為正方形四個角皆為 90 度，而平行四邊形二種角度為 45 度及 135 度，



一接合起來，所呈現的角度為 135 度及 225 度，所以永遠不可能搭成我們要的圖形，所以平行四邊形在此受限比較多，它需要搭配 4 號巧板或 5 號巧板才有辦法拼貼出我們要的圖形，另外 5 號巧板可以說是人人愛的，它不管和哪一種圖形搭配都可以配組成功，因為所有的圖形都是由 5 號巧板拼成的。

【表六】

(8)當我們在找尋各種巧板搭配組成正方形、長方形及平行四邊形時，我們發現一旦找出最小的幾組面積後，就可以依照對稱的原理找出其它組的數據（如表六），且可以看出整組數據是一個等差級數的數列，具規律性（請參閱附件一、二、三）。

	1	2	3	4	5	6	7
1	×	×	×	×	×	×	×
2	×	×	×	×	×	×	×
3	12	24	36	48	60	72	84
4	16	32	48	64	80	96	112
5	20	40	60	80	100	120	140
6	24	48	72	96	120	144	168
7	28	56	84	112	140	168	196

(9) 在活動五【任意搭配巧板能否組成基本的平面圖形】

的拼排檢驗工作中，我們察覺有時不需一一去拼排，直接從邊長的倍數關係中即可判斷能否拼成功，例如右表中（用1號板及3號板拼成長方形），當第(1)組能拼成功時，那麼(5)(7)(13)

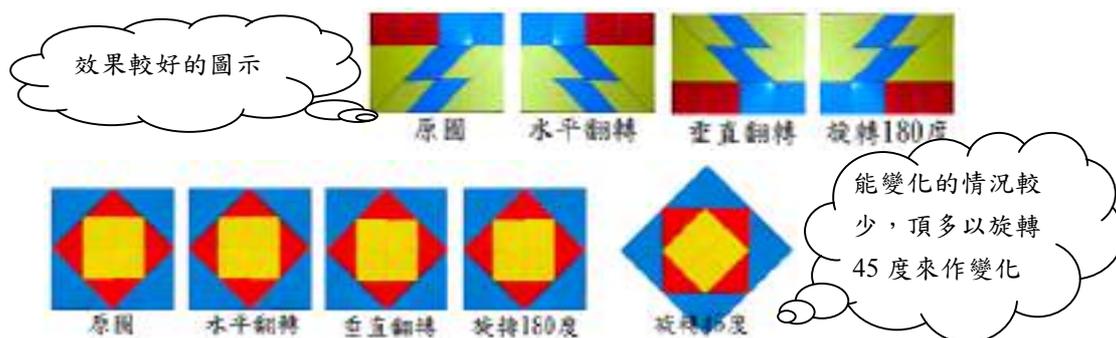
$2.5\sqrt{2} * 3$	$2.5\sqrt{2} * 2$	V
$2.5\sqrt{2} * 4$	$2.5\sqrt{2} * 2$	V
$2.5\sqrt{2} * 3$	$2.5\sqrt{2} * 3$	X
$2.5\sqrt{2} * 5$	$2.5\sqrt{2} * 2$	V
$2.5\sqrt{2} * 4$	$2.5\sqrt{2} * 3$	V
$5 * 3$	$5 * 2$	V
$2.5\sqrt{2} * 6$	$2.5\sqrt{2} * 2$	V
$2.5\sqrt{2} * 7$	$2.5\sqrt{2} * 2$	V
$2.5\sqrt{2} * 5$	$2.5\sqrt{2} * 3$	X
$2.5\sqrt{2} * 4$	$2.5\sqrt{2} * 4$	V
$5 * 4$	$5 * 2$	V
$2.5\sqrt{2} * 8$	$2.5\sqrt{2} * 2$	V
$2.5\sqrt{2} * 6$	$2.5\sqrt{2} * 3$	V
$2.5\sqrt{2} * 9$	$2.5\sqrt{2} * 2$	V
$5 * 3$	$5 * 3$	V

(14)也一定可以拼成，因為邊長有倍數關係，且連(4)(8)也能拼成，因為長邊多了 $5\sqrt{2}$ ，剛好符合1號板的邊長，當(2)組能拼成功時，那麼(7)(12)也能拼成功，因為多了 $5\sqrt{2}$ ，且(10)是(2)的兩倍。所以(10)也可以拼成。

(10) 最常見也最常用的鑲嵌圖形是正三角形、正方形及長方形，但由於七巧板中的基本圖形並沒有正三角形，加上各種巧板也無法組成正三角形（角度之故），所以在本活動我們就不探討正三角形，而只以正方形為主軸，但由於長方形及平行四邊形也非常適合用來

當鑲嵌圖形，所以我們也利用巧板來組合長方形及平行四邊形，並且排除一些邊長比例相差太大的，因為那樣所組合出來的鑲嵌圖形會非常細長型，不方便作翻轉來拼貼組合。

(11) 在活動六中，要將一個鑲嵌圖形作各種水平翻轉、垂直翻轉或旋轉時，遇到屬於又是線對稱圖形又是點對稱圖形者（指圖形的線條顏色都是對稱），通常變化就較少了。同時，在翻轉的過種中我們也發現了一些有趣的規律：【水平翻轉+旋轉180度=垂直翻轉】、【垂直翻轉+旋轉180度=水平翻轉】、【水平翻轉+垂直翻轉=旋轉180度】

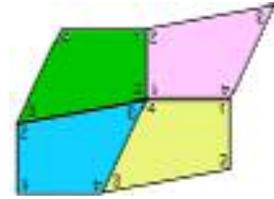


(12) 在顏色的使用上，我們使用三原色（紅藍黃）來作搭配，所搭配出來的顏色非常鮮艷，但也非常的刺眼，所以若真的運用在居家地板或牆壁的拼貼上，則建議使用較柔的色彩，例如：淺鵝黃、淡藍、淡粉紅或是淡草綠……等等，整體搭配上會感覺較溫馨些。

(13) 為了作平鋪以看出鑲嵌圖形所拼出來的效果，我們利用電腦 PhotoImpact 影像處理軟體中水平翻轉、垂直翻轉、旋轉複製的功能（甚至利用桌布的並置顯示再擷取桌面圖示的技巧，減輕複製上的麻煩）來幫助我們的處理，減少人工拼貼中的失誤或是

粗糙。

- (14) 由活動中我們發現一個密鋪平面可以找到的鑲嵌基模可能不只一種，最簡單的方式是找到相同規律的4個圖形後，固定圖形中的一個點，所圍成的四邊形必為鑲嵌基模，因為只要是四邊形必能成為鑲嵌圖形（四個角度可合為360度，如圖）。而且一個由鑲嵌基模所密鋪而成的平面必有其規律性及對稱之美。



- (15) 對稱是一種美，也是一種協調，當我們利用鑲嵌圖形鋪滿一個平面時，若其中有一個圖形擺放的不正確，整個圖形看起來就感覺有瑕疵，很容易感受到它的不對稱。



## 柒、參考資料

- (1) 十萬個為什麼？ 陽明書局 p147~148
- (2) 中華民國中小學科學展覽優勝作品專輯 國立臺灣科學教育館編印 p201~211
- (3) 無所不在的數學 光復書局 p22~27
- (4) 巧奪天工 大地地理 p243~253
- (5) 國小康軒數學教學指引第十一冊
- (6) 數學教學方法 九章出版社
- (7) 歡迎光臨！數學美術館 益智工房
- (8) 鑲嵌圖形網站([http://dns.lkjh.tpc.edu.tw/~chingnan/Q1-3 鑲嵌圖形.htm](http://dns.lkjh.tpc.edu.tw/~chingnan/Q1-3%20鑲嵌圖形.htm))
- (9) 平面鑲嵌圖案網站([http://www.nssh.tpc.edu.tw/math/教學設計/戴育文/new\\_page\\_12\\_2.htm](http://www.nssh.tpc.edu.tw/math/教學設計/戴育文/new_page_12_2.htm))



\*以電腦輔助拼貼過程\*



\*拼排正方形\*



\*拼排長方形\*



\*拼排正方形\*



\*數位相機搭配電腦使用\*



\*拼排長方形\*



\*拼排平行四邊形\*



\*電子計算機助資料檢驗\*



\*拼排長方形\*

## 評語

- 1.題材生活化，應用價值高。
- 2.利用幾何基本圖形，融入組合概念，變化出多樣圖案，頗具巧思。