

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國小組

數學科

科別：數學科

組別：國小組

作品名稱：最佳全翻位的探討

關鍵詞：最佳全翻位、最佳 K 值、最佳全翻位翻必模式

編號：080408

學校名稱：

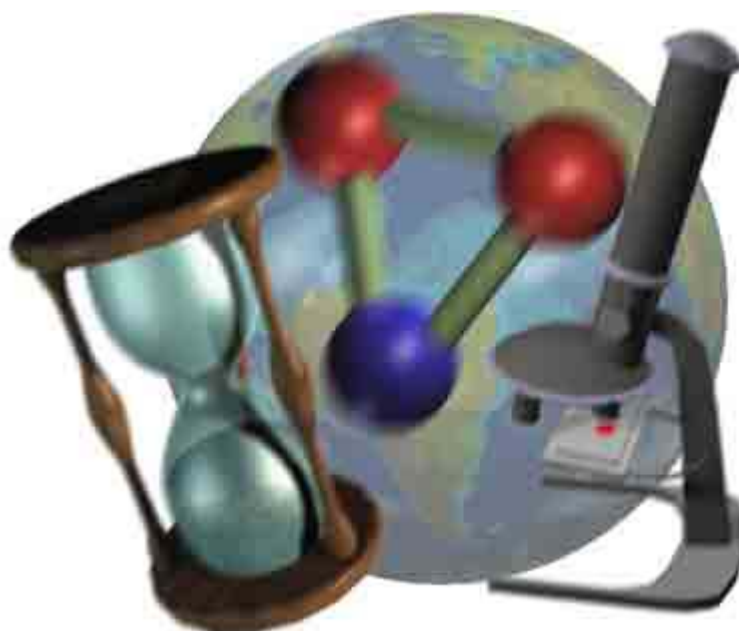
國立科學工業園區實驗高級中學

作者姓名：

林昱誼、黃中道

指導老師：

劉如加



摘要

本文進行最佳全翻位的研究。所謂「全翻位」係指 N 枚正面朝上的硬幣，每次將其中 M 枚翻面 ($M \leq N$)，若干次後，使所有 N 枚正面朝上的硬幣，全部反面朝上。

本文的目的除了作全翻位的研究，亦企圖找到如何以最少次達成全翻位，亦即進行「最佳全翻位」的研究。更有進者，我們最終完成「包含所有狀況」（即針對任何 N 值及 M 值）的最佳全翻位研究。

在我們的研究中，作者針對最佳全翻位，將所有狀況歸納成 5 種模式，並詳列各種模式的使用時機及操作模式，並且推導出 5 個最佳全翻位的公式，分別對應 5 種模式 7 種使用時機。

研究的過程雖曾遭遇不少難題，然而能完成這份完整的報告，委實令人感到興奮，也期望對數學教育有些許貢獻。

壹、研究動機

我們在「使人聰明的智力遊戲」一書中，看到一個全翻位的數學遊戲，遊戲方式如下：『桌面上有六枚硬幣，全部正面朝上，如果每次同時將五枚硬幣翻面，問需要翻幾次，才能把所有的硬幣翻成反面（全翻位）？』，我們很好奇也試著翻翻看，並深入探討。書上寫著「14 枚硬幣每次翻 5 個，共需 6 次才能完成全翻位」，結果，我們嘗試了各種翻法，竟然找到只需 4 次，就能完成全翻位的方法，證明書上所寫並非最佳全翻位（用最少次數完成全翻位的方法），因此興起我們做最佳全翻位研究的興趣；此外，經實驗，我們還發現，書上記載計算全翻位的公式，不能包含全部狀況，只是部分結果，因此我們想要找到包含全部狀況的最佳全翻位的公式。

貳、研究目的

找出 N 個硬幣、每次同時翻 M 個硬幣，包含全部狀況的最佳 K 值（完成全翻位的最少翻幣次數）與最佳全翻位的翻幣模式。

參、名詞解釋

全翻位：將全部正面朝上的硬幣，每次固定翻數枚硬幣，直到將全部硬幣翻成反面，稱為全翻位。

最佳全翻位：使用最少次數，完成全翻位的方法

肆、文獻探討

（張遠南著 使人聰明的智力遊戲 九章出版社 第 63-64 頁）

如果硬幣數為 n ($n \geq 5$)，每次同時翻 5 枚硬幣，翻動 m 次後，剩下的正面硬幣的個數為 $i = n - 5m$ ， $m = \lfloor n/5 \rfloor$ ，其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 為高斯符號，即 $\lfloor x \rfloor$ 為小於 x 的最大整數。繼續翻動 $f(i)$ 次，就能讓全部的硬幣被翻成反面，從而實現「全翻位」。

上述把 n 枚硬幣，每次同時翻 5 枚硬幣，達到全翻位的翻動次數為：

$$F(n) = m + f(i) = \lfloor n/5 \rfloor + f(5 - n \lfloor n/5 \rfloor)$$

例如， $n=14$ ，此時 $\lfloor n/5 \rfloor = 2$ ， $i=4$ ， $f(4) = 4$ ，

$$F(14) = 2 + f(4) = 2 + 4 = 6。$$

即將 14 枚硬幣，每次同時翻 5 枚硬幣，達到「全翻位」，只需要 6 次。

【註】：本研究，此狀況只需 4 次就可完成全翻位（見 p. 5 模式三（1）公式三）

伍、研究過程

一、 N 枚硬幣，每次同時翻 M 個硬幣，最少需翻 K 次，才能把所有的硬幣翻成反面：

1、實驗操作，找出 N 個硬幣，每次同時翻 M 個硬幣，完成最佳全翻位的方法 及最佳全翻位的 K 值。過程如附錄一，發現如下：

2、 M 、 N 與 K 之關係表：

（表一）

$M \backslash N$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	×	(1)								
4	(2)	(4)	(1)							
5	×	(3)	×	(1)						
6	(3)	(2)	(3)	(6)	(1)					
7	×	3	×	(3)	×	(1)				
8	(4)	4	(2)	4	(3)	(8)	(1)			
9	×	(3)	×	3	×	(3)	×	(1)		
10	(5)	4	3	(2)	3	4	(3)	(10)	(1)	
11	×	5	×	3	×	3	×	(3)	×	(1)
12	(6)	(4)	3	6	(2)	4	3	4	(3)	(12)

說明：×表示無法翻成全翻位

結果：僅能從紀錄表的（）的數字中，發現一些規則

3、發現：由 M 、 N 可預測 K 之部分規則如下表：

（表二） K 之部分規則

$M \backslash N$	N	K
M	$N = \text{奇數}$	$N = \text{偶數}$
$M = \text{奇數}$	1、當 $N - M = 2$ 時， $K = 3$ 2、當 $N = M \times P$ 時， $K = P$	1、當 $N - M = 1$ 時， $K = N$ 2、當 $N = M \times P$ 時， $K = P$
$M = \text{偶數}$	無法翻成全翻位	1、當 $N - M = 2$ 時， $K = 3$ 2、當 $N = M \times P$ 時， $K = P$

4、從上述之部分規則，我們將可預測 K 之部分數值，並將表一擴展成下表：

表格說明：空白部分為無法預測的數字

×：為無法翻成全翻位的情形

(表三) K 之部分數值表

N \ M	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	×	1								
4	2	4	1							
5	×	3	×	1						
6	3	2	3	6	1					
7	×	3	×	3	×	1				
8	4	4	2	4	3	8	1			
9	×	3	×	3	×	3	×	1		
10	5	4	3	2	3	4	3	10	1	
11	×	5	×	3	×	3	×	3	×	1
12	6	4	3	4	2	4	3	4	3	12
13	×		×		×		×		×	3
14	7					2				
15	×	5	×	3	×		×		×	
16	8		4				2			
17	×		×		×		×		×	
18	9	6			3			2		
19	×		×		×		×		×	
20	10		5	4					2	
21	×	7	×		×	3	×		×	
22	11									2
23	×		×		×		×		×	
24	12	8	6		4		3			
25	×		×	5	×		×		×	

【討論】：

- 1、因從表一和表三看出，還有部分（未括號部分及空白部分），尚未找出規則，所以，以下我們將進一步探討這部分規則。
- 2、在探討過程中我們歸納出 5 種模式，並推導出最佳 K 值的 5 個公式，使用時機 7 項。茲將推導過程按 5 種模式分別詳述如下：

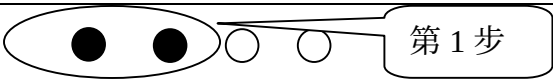
【使用代號說明】

N：硬幣總數 M：每次翻硬幣個數 K：翻幣次數 P：倍數（整數）
R：餘數 L：參數 Q：翻幣第 P+1 次後之硬幣正面數

二、模式一：當 $N=M \times P$ 時

- 1、翻幣方式舉例說明如下：

例 1：N=4，M=2， $\Rightarrow R=2$ ，P=2

步驟說明	實驗模型
第 1 步	
第 2 步完成全翻位	

2、觀察最佳 K 值的規則：

N	4	6	8	8	10	12	12	12	12	14
M	2	3	2	4	5	2	3	4	6	7
K	2	2	4	2	2	6	4	3	2	2

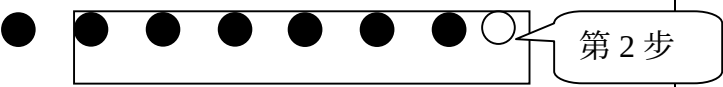
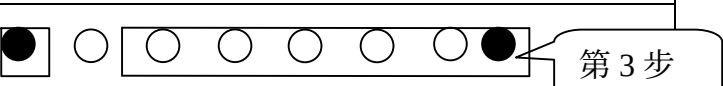
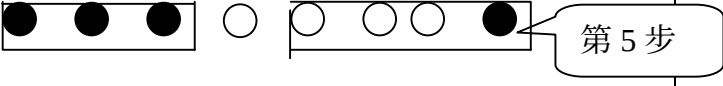
2、結論一：

當 $N=M \times P$ 時， $K=P$ (公式一)

三、模式二：當 $N-M=1$ 時

1、翻幣方式舉例說明如下：

例 2： $N=8, M=7 \Rightarrow R=1, P=1$

步驟說明	實驗模型
第 1 步，翻 7 個硬幣	
第 2 步，錯開一個位置，繼續翻 7 個硬幣，即方框內的硬幣	
第 3 步，錯開一個位置，繼續翻 7 個硬幣，即方框內的硬幣	
第 4 步，依此類推	
第 5 步，依此類推	
第 6 步，依此類推	
第 7 步，依此類推	
第 8 步，依此類推	
8 步完成最佳全翻位	

2、觀察最佳 K 值的規則

N	4	6	8	10	12	14
M	3	5	7	9	11	13
K	4	6	8	10	12	14

發現：當 $N-M=1$ ， $N=$ 偶數才能完成最佳全翻位，且 $K=N$

因為若 $N =$ 奇數 而 $N-M=1 \therefore M=$ 偶數，

但偶數的總和 $\neq$ 奇數， $\therefore N \neq$ 奇數

2、結論二：

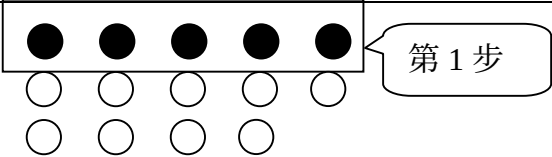
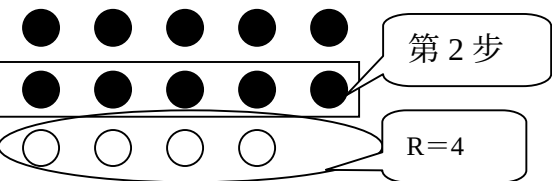
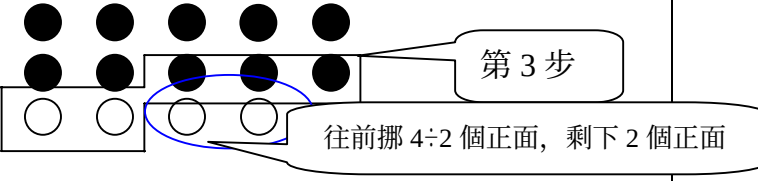
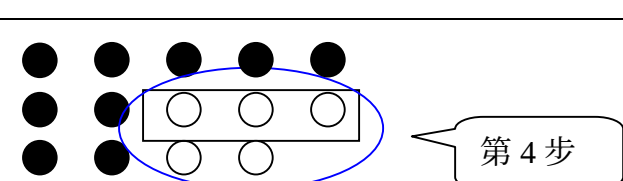
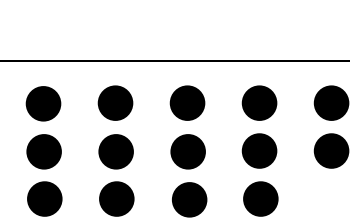
當 $N-M=1$ ($N=$ 偶數) 時， $K=N$ (公式二)

四、模式三：

(一)、模式三：(1) 當 $M=$ 奇數， $R=$ 偶數時

1. 翻幣方式舉例說明如下：

例 3：當 $N=14$ ， $M=5 \Rightarrow R=4$ ， $P=2$

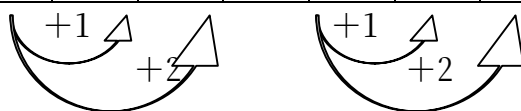
步驟說明	實驗模型
第 1 步，翻 5 個正面	
第 2 步，再翻 5 個正面 翻完第 2 步，剩下 4 個正面未翻	
第 3 步，翻幣範圍往前挪 ($4 \div 2 = 2$) 2 個位置，往回翻 5 個硬幣，即是方框內的硬幣 剩下 ($4 \div 2 = 2$) 2 個正面未翻，即是圓圈內的硬幣	
剩下未翻的 2 個正面加上新產生的 3 個正面(方框內的硬幣) 可湊成 5 個正面，即是圓圈內的硬幣	
第 4 步完成最佳全翻位	

2. 最佳 K 值的推論過程如附錄二，最佳 K 值的規則整理如下，結論如公式三。

3. 觀察最佳 K 值的規則：

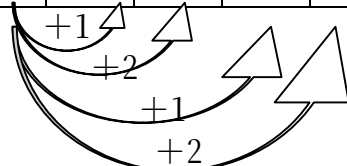
(1) $M=3$ ：

N	6	7	8	9	10	11	12
K	2	3	4	3	4	5	4



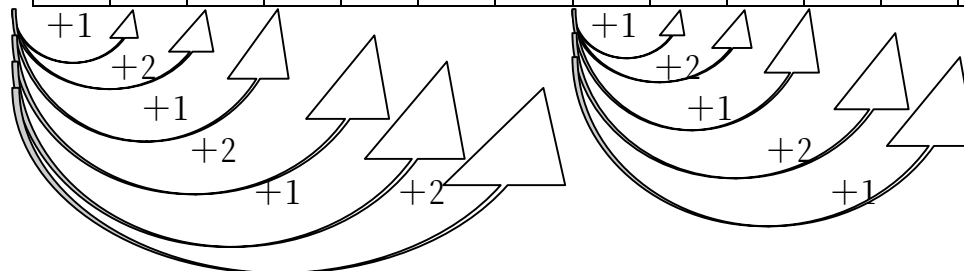
(2) $M=5$ ：

N	10	11	12	13	14
K	2	3	4	3	4



(3) $M=7$ ：

N	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
K	2	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	4



4. 結論三：

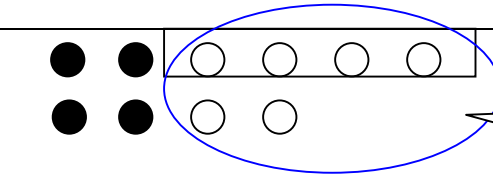
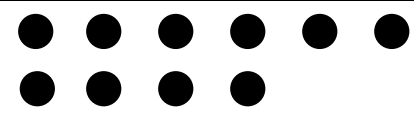
當 $M=$ 奇數, $R=$ 偶數時, $K=P+2$ (公式三)
 $P=N/M$ 的整數部分

(二)、模式三：(2) 當 $M=$ 偶數, $R=$ 偶數, $M \leq N \leq M \times 2$ 時

1、翻幣方式舉例說明如下：

例 4： $N=10$, $M=6$ $\Rightarrow R=4$, $P=1$

步驟說明	實驗模型
第 1 步, 翻 6 個正面 剩 4 個正面未翻	
第 2 步, 翻幣範圍往前挪 ($4 \div 2 = 2$) 2 個位置 往回翻 6 個硬幣, 即是方框內的硬幣 可剩下 ($4 \div 2$) 2 個正面未翻, 即是圓圈內的硬幣	

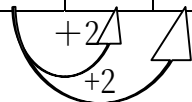
新產生的 4 個正面，即是方框內的硬幣 加上剩下 2 個正面剛好湊成 6 個正面，即是圓圈內的硬幣	 第 3 步
第 3 步完成最佳全翻位	

3、最佳 K 值的推論過程如附錄三，最佳 K 值的規則整理如下，
結論如公式三。

4、觀察最佳 K 值的規則：

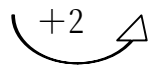
(1) $M=6$ ：

N	6	8	10
K	1	3	3



(2) $M=4$ ：

N	4	6
K	1	3



3. 結論四：

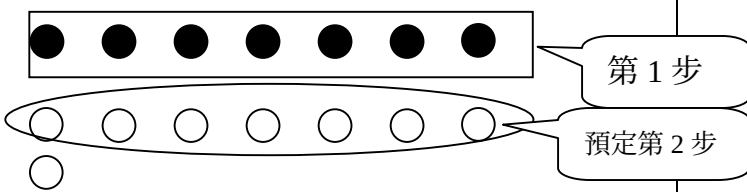
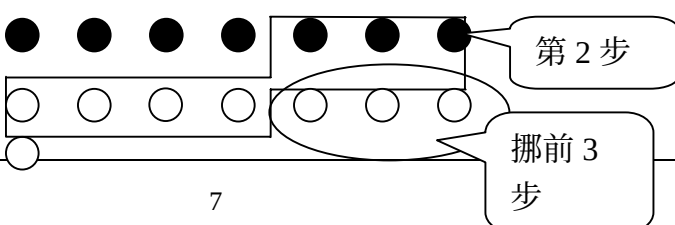
當 M =偶數， R =偶數，且 $M \leq N \leq M \times 2$ 時， $K=P+2$ (公式三)
 $P=N/M$ 的整數部分

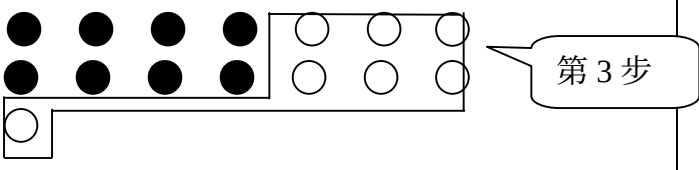
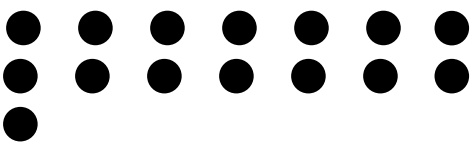
五、模式四：

(一)、模式四：(1) 當 M =奇數， R =奇數，且 $N \geq M \times 2$ 時

1、翻幣方式舉例說明如下：

例 5： $N=15$ ， $M=7$ ， $\Rightarrow R=1$ ， $P=2$

步驟說明	實驗模型
第 1 步，將 7 個正面翻成反面	
若同時將 7 個正面翻成反面，翻 2 次，會剩 1 個正面未翻，因此當要湊 7 個正面時，會不足 $7-1=6$ 個正面	

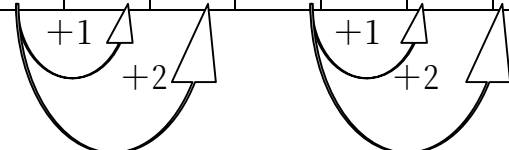
所以, 第 2 步, 將翻幣範圍往前挪 $(7-1) \div 2 = 3$ 個位置 (即是圓框內的硬幣範圍), 翻方框內的硬幣	
剩下的正面數加上新產生的正面數, 可湊成 7 個正面, 即方框內的硬幣	
第 3 步完成最佳全翻位	

2、最佳 K 值的推論過程如附錄四, 最佳 K 值的規則整理如下, 結論如公式四。

3、觀察最佳 K 值的規則：

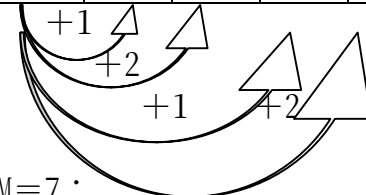
(1) $M=3$ ：

N	6	7	8	9	10	11	12
K	2	3	4	3	4	5	4



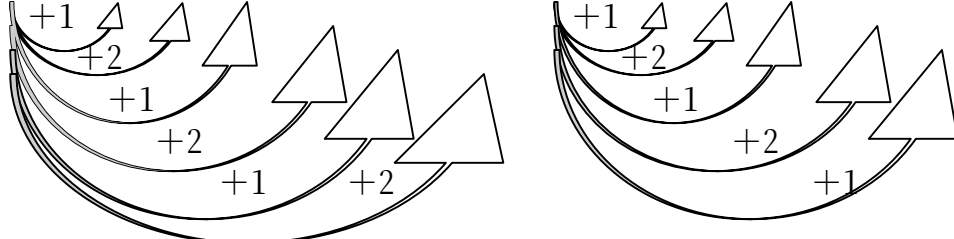
(2) $M=5$ ：

N	10	11	12	13	14
K	2	3	4	3	4



(3) $M=7$ ：

N	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
K	2	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	4



4、結論五：

當 M = 奇數, R = 奇數時, $K = P + 1$ (公式四)
 $P = N/M$ 的整數部分

(二)、模式四：(2) 當 $M=偶數$ ， $R=偶數$ ，且 $N \geq M \times 2$ 時

1、翻幣方式舉例說明如下：

例 6： $N=14$ ， $M=6$ ， $=>R=2$ ， $P=3$

步驟說明	實驗模型
第 1 步，翻 4 個正面	
第 2 步，再翻 4 個正面	
第 3 步，將翻幣範圍往前挪 $(4-2) \div 2$ 個位置，即是方框內的硬幣範圍	
剩下的 3 個正面加上新產生的 1 個正面共可湊成 4 個正面，即方框內的硬幣	
第 4 步完成全翻位	

2、最佳 K 值的推論過程如附錄五，最佳 K 值的規則整理如下，結論如公式四。

3、觀察最佳 K 值的規則：

(1) $M=6$ ：

N	12	14	16	18	20	22	24	26	28
K	2	3	3	3	4	4	4	5	5

(2) $M=4$ ：

N	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
K	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7

4、結論六：

當 $M=偶數$ ， $R=偶數$ ，且 $N \geq M \times 2$ 時， $K=P+1$ (公式四)

$P=N/M$ 的整數部分

六、模式五：當 $M=奇數$ ， $R=奇數$ ，且 $M \leq N \leq M \times 2$ 時

1、翻幣方式舉例說明如下：

例 7： $N=10$ ， $M=7$ ， $\Rightarrow R=3$ ， $P=1$

步驟說明	實驗模型
第 1 步，先翻 7 個正面	第 1 步
第 2 步，從尾端往回翻 7 個硬幣，即是方框內的硬幣	第 2 步，從尾端往回翻，新產生 4 個正面
產生 4 個正面，即是方框內的硬幣。 第 3 步，將翻幣範圍往前挪 2 (即 $4 \div 2$) 個正面，翻 7 個硬幣，即是多邊形內的硬幣	第 3 步，往前挪 2 個位置並從後面補 2 個，湊 7 個
產生 $(7 - 4 \div 2)$ 個正面，加上原來剩下的 $4 \div 2$ 個正面，共有 7 個正面，只需再 1 次便可完成全翻位	原來的 2 個正面加上新產生 5 個正面共 7 個正面，再翻 1 次，即第 4 步，就 ok
第 4 步完成最佳全翻位	

2、最佳 K 值的推論過程如附錄六，最佳 K 值的規則整理如下，結論如公式五

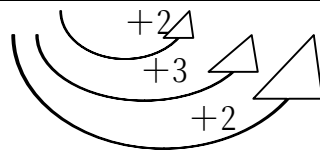
3、觀察最佳 K 值的規則：

(1) $M=3$

N	3	4	5	6
K	1	4	3	2

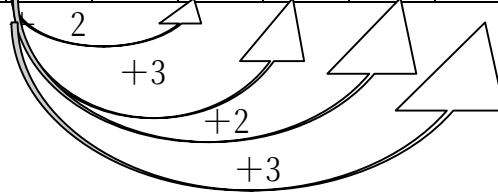
(2) $M=5$

N	5	6	7	8	9	10
K	1	6	3	4	3	2



(3) $M=7$

N	7	8	9	10	11	12	13
K	1	8	3	4	3	4	3



4、結論七：

當 M =奇數， R =奇數，且 $M \leq N \leq M \times 2$ 時， $K=P+3$ （公式五）

$P=N/M$ 的整數部分

七、最佳 K 值表：（表四）

N \ M	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	×	1								
4	2	4	1							
5	×	3	×	1						
6	3	2	3	6	1					
7	×	3	×	3	×	1				
8	4	4	2	4	3	8	1			
9	×	3	×	3	×	3	×	1		
10	5	6	3	2	3	4	3	10	1	
11	×	5	×	3	×	3	×	3	×	1
12	6	4	3	4	2	4	3	4	3	12
13	×	4	×	5	×	3	×	3	×	3
14	7	6	4	4	3	2	3	4	3	4
15	×	5	×	3	×	3	×	3	×	3
16	8	6	4	4	3	4	2	4	3	4
17	×	7	×	5	×	5	×	3	×	3
18	9	6	5	4	3	4	3	2	3	4
19	×	8	×	5	×	3	×	3	×	3
20	10	8	5	4	4	4	3	4	2	4
21	×	7	×	5	×	3	×	3	×	3

22	11	8	6	6	4	4	3	4	3	2
23	×	9	×	5	×	5	×	3	×	3
24	12	8	6	6	4	4	3	4	3	4
25	×	9	×	5	×	5	×	3	×	3
26	13	10	7	6	5	4	4	4	3	4

說明：1、當 $N = \text{奇數}$ ， $M = \text{偶數}$ ，以 $\times$ 表示無法完成全翻位

理由：偶數的總和 $\neq$ 奇數

2、 N 及 M 可擴大至任意值

陸、結論

一、我們發現，要找出 N 個硬幣、每次同時翻 M 個硬幣，有不同的方法，在尚未找到最佳全翻位的翻幣秘訣前，要找出最佳 K 值是可遇不可求的。因此在實驗過程中，因為發現最佳全翻位的 K 值，使我們不斷修正已完成的紀錄，真是既高興又惶恐的事！在不斷的操作中，我們找到 5 種最佳全翻位的翻幣模式（表六~九），預測全翻位的最佳 K 值之使用時機 7 項（表七），以及可包含全部狀況的最佳全翻位的公式 5 項（表五）。完全修正文獻資料，我們好興奮喔！

※使用代號說明：

N ：硬幣總數 M ：每次翻硬幣個數 K ：翻幣次數 P ：倍數（整數）
 R ：餘數 L ：參數 Q ：（模式五）翻幣第 $P+1$ 次後之硬幣正面數

二、預測 N 個硬幣、每次同時翻 M 個硬幣的最佳 K 值，方法是，只要根據 M 為奇數或偶數、 N 的範圍（與 M 的關係）、以及餘數 R 奇數或偶數，交叉組合，選用適當的公式便可求出最佳 K 值。【詳見研究過程之結論一~七】。求最佳 K 值的公式如（表五）：

(表五) 最佳 K 值的公式

類型	最佳 K 值	參數 L	使用時機
公式一	$K=P$		當 $N=M \times P$
公式二	$K=N$		當 $N-M=1$ (N =偶數)
公式三	$K=P+L$ $P=N/M$ 的整數 部分 $R=N/M$ 的餘 數	$L=2$	(1) M =奇數, R =偶數 (2) M =偶數, R =偶數, $M \leq N \leq M \times 2$
公式四		$L=1$	(1) M =奇數, R =奇數, $N \geq M \times 2$ (2) M =偶數, R =偶數, $N \geq M \times 2$
公式五		$L=3$	M =奇數, R =奇數, $M \leq N \leq M \times 2$

三、N 個硬幣、每次同時翻 M 個硬幣，最佳全翻位的翻幣模式：

(表六)

因素	N 的範圍	R=奇數	R=偶數
M = 奇數	$N-M=1$ (N =偶數)	模式二	X
	$M \leq N \leq M \times 2$	模式五	模式三
	$N \geq M \times 2$	模式四	模式三
M = 偶數	$M \leq N \leq M \times 2$	X	模式三
	$N \geq M \times 2$	X	模式四

 $R=N/M$ 的餘數

四、五種模式的使用時機一覽表：

(表七)

模式	使用時機	最佳 K 值
模式一	當 $N=M \times P$	$K=P$ (公式一)
模式二	當 $N-M=1$ (N =偶數)	$K=N$ (公式二)
模式三	(1) 當 M =奇數, R =偶數 (2) 當 M =偶數, R =偶數, 且 $M \leq N \leq M \times 2$	$K=P+2$ (公式三)
模式四	(1) 當 M =奇數, R =奇數, 且 $N \geq M \times 2$ (2) 當 M =偶數, R =偶數, 且 $N \geq M \times 2$	$K=P+1$ (公式四)
模式五	當 M =奇數, R =奇數, 且 $M \leq N \leq M \times 2$	$K=P+3$ (公式五)

 $P=N/M$ 的整數部分

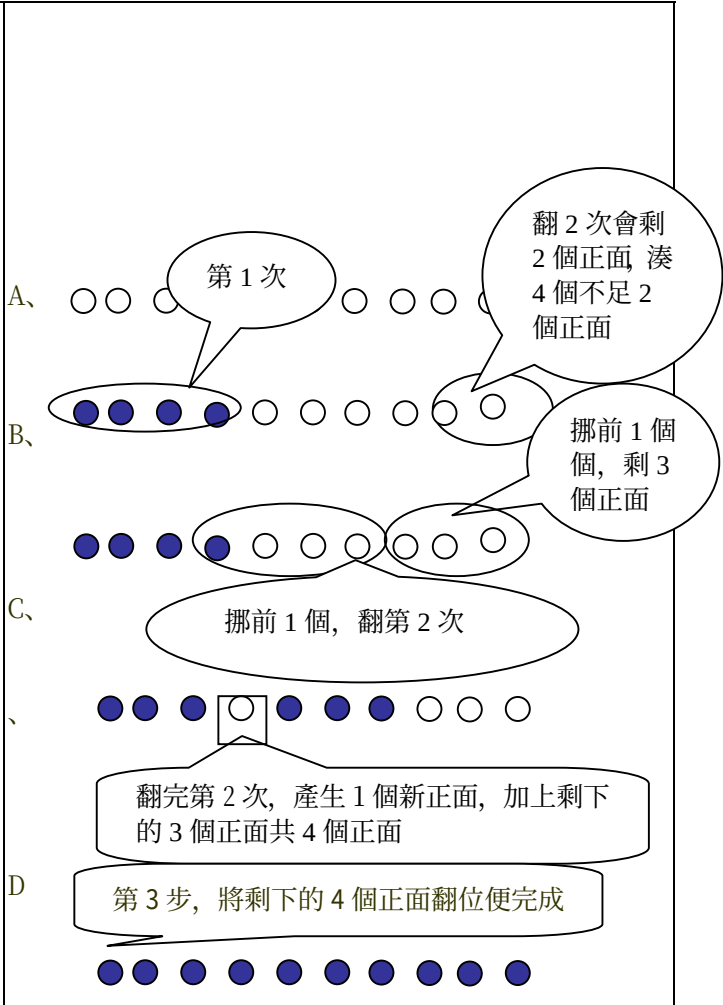
五、五種模式操作步驟整理說明如下：

(表八)

模式	操作步驟	實驗模型舉例
模式一	錯開 M 個位置, 翻 M 個硬幣。翻 P 次便成功。	
模式二	秘訣：錯開 1 個位置，翻 M 個硬幣。 每翻完一次，向後挪一步再翻 M 個硬幣，使正面變反面，反面變正面。在第奇數次，會產生奇數個正面；在第 M 次，會產生 M 個正面。再翻 1 次便完成全翻位。所以總次數 = $M + 1 = N$ 次	
模式三	A、先算出 N 個硬幣，同時翻 M 個硬幣，可翻 P 次剩 R 個正面未翻 B、倘若在翻第 P+1 次硬幣時，將翻幣範圍往前挪 $R \div 2$ 個位置，便可剩下 $R \div 2$ 個正面未翻 C、翻第 P+1 次硬幣後，又會產生 $M - R \div 2$ 個正面 D、$(M - R \div 2 \text{ 個正面}) + (R \div 2) \text{ 個正面} = M \text{ 個正面}$，此時只需再翻 1 次便完成全翻位 所以總次數 = $P + 2$ 次	N=8 M=3 所以 R=2, P=2

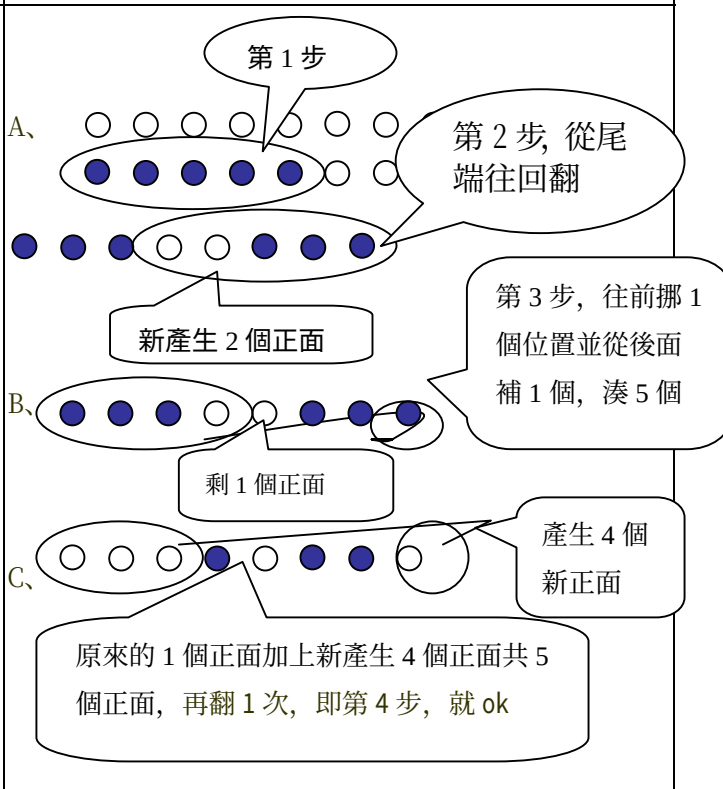
模式四

- A、先算出 N 個硬幣，同時翻 M 個硬幣，可翻 P 次，剩 R 個正面未翻，因此當要湊 M 正時，會不足 $M - R$ 個正面
- B、倘若在翻第 P 次硬幣時，將翻幣範圍往前挪 $(M - R) \div 2$ 個位置，便可剩下 $(M - R) \div 2 + R$ 個正面未翻
- C、翻第 P 次硬幣後，又會產生 $(M - R) \div 2$ 個正面
- D、 $(M - R) \div 2 + R + (M - R) \div 2$ 個正面
 $= (M - R) + R$ 個正面
 $= M$ 個正面
- 此時只需再翻 1 次，便完成全翻位，
 所以總次數 $= P + 1$ 次



模式五

- A、先算出 N 個硬幣，同時翻 M 個硬幣，可翻 P 次，剩數個正面未翻。在翻第 $P + 1$ 次時，從尾端往前翻 M 個硬幣，產生 Q 個正面未翻。
- B、倘若在翻第 $P + 2$ 次硬幣時，將翻幣範圍從正面區往前挪 $Q \div 2$ 個位置 (不足 M 個從後面補足)，便可剩下 $Q \div 2$ 個正面未翻。
- C、翻第 $P + 2$ 次硬幣後，又會產生 $M - Q \div 2$ 個正面
- D、 $(M - Q \div 2 \text{ 個正面}) + (Q \div 2) \text{ 個正面} = M$ 個正面，此時只需再翻 1 次便完成全翻位所以總次數 $= P + 3$ 次



六、模式三、四、五操作步驟之比較：

(表九)

	相同或相異處	模式	方式說明
相同	目標	使用最少次數產生 M 個正面，再翻一次就是全翻位	
不同	1、先將正面硬幣（每次翻 M 個硬幣）翻成反面的次數	模式三	先翻 P 次
		模式四	先翻 P-1 次
		模式五	先翻 P 次 在第 P+1 次從尾端往前翻 M 個硬幣
	2、在翻第幾次時，要往前挪，使部份已翻成反面硬幣再翻成正面	模式三	第 P+1 次
		模式四	第 P 次
		模式五	第 P+2 次
	3、往前挪移（使部份已翻成反面硬幣再翻成正面）的硬幣數量	模式三	$R \div 2$
		模式四	$(M-R) \div 2$
		模式五	$Q \div 2$
	4、最佳 K 值	模式三	P+2 次（公式三）
		模式四	P+1 次（公式四）
		模式五	P+3 次（公式五）

柒、附錄

1、附錄一：

表格代號說明： +：硬幣正面 -：硬幣反面 空白格：狀態沒有改變

1、M=5：

(1) N=7

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-			2	5
第二步		+	+	+	+	-		5	2
第三步		-	-	-	-		-	0	7
3 步完成									

(2) N=8

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-				3	5
第二步				+	+	-	-	-	2	6

第三步	+	+	+	-		+			5	3
第四步	-	-	-		-	-			0	7
4 步完成										

(3) N=14

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-										9	5
第二步						-	-	-	-	-					4	10
第三步								+	+	+	-	-			5	9
第四步								-	-	-				-	0	14
4 步完成																

2、M=3：

(1) N=4

起始狀態	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-		1	3
第二步		+	+	-	2	2
第三步	+		-	+	3	1
第四步	-	-		-	0	4
4 步完成						

(2) N=5

起始狀態	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-			2	3
第二步		+	+	-		3	2
第三步		-	-		-	0	5
3 步完成							

(3) N=6

起始狀態	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-				3	3
第二步				-	-	-	0	6
3 步完成								

(4) N=7

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-					4	3
第二步			+	-	-			3	4
第三步			-			-	-	0	7
3 步完成									

(5) $N=10$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-								7	3
第二步				-	-	-					4	6
第三步						+	-	-			1	9
第四步						-			-	-	2	8
4 步完成												

3. $M=4$:

(1) $N=6$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-			2	4
第二步		+	+	+	-		4	2
第三步		-	-	-		-	0	6
3 步完成								

(2) $N=8$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-					4	4
第二步					-	-	-	-	0	8
2 步完成										

(3) $N=10$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-							6	4
第二步				+	-	-	-				4	6
第三步				-				-	-	-	0	10
3 步完成												

4. $M=6$:

(1) $N=8$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-	-			2	6
第二步		+	+	+	+	+	-		6	2
第三步		-	-	-	-	-		-	0	8
3 步完成										

(2) $N=10$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-	-					4	6
第二步			+	+	+	+	-	-			6	4
第三步			-	-	-	-			-	-	0	10
4 步完成												

(3) $N=12$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-	-							6	6
第二步							-	-	-	-	-	-	0	12
2 步完成														

5. $M=7$:

(1) $N=8$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-	-	-		1	7
第二步		+	+	+	+	+	+	-	6	2
第三步	+		-	-	-	-	-	+	3	5
第四步	-	-		+	+	+	+	-	4	4
第五步	+	+	+		-	-	-	+	5	3
第六步	-	-	-	-		+	+	-	2	6
第七步	+	+	+	+	+		-	+	7	1
第八步	-	-	-	-	-	-		-	0	8
8 步完成										

(2) $N=9$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-	-	-			2	7
第二步		+	+	+	+	+	+	-		7	2
第三步		-	-	-	-	-	-		-	0	9
3 步完成											

(3) $N=11$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-	-	-				4	7
第二步			+	+	+	+	+	-	-		7	4
第三步			-	-	-	-	-			-	0	11
3 步完成												

6. $M=8$:

(1) $N=10$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-	-	-	-			2	8
第二步		+	+	+	+	+	+	+	-		8	2
第三步		-	-	-	-	-	-	-		-	0	10
3 步完成												

(2) $N=12$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-	-	-	-					4	8
第二步			+	+	+	+	+	+	-	-			8	4
第三步			-	-	-	-	-	-			-	-	0	12
3 步完成														

附錄二：

模式三 (1) 當 $M=$ 奇數, $R=$ 偶數時, 最佳 K 值推論過程：

1、 $M=3$

(1) 最佳 K 值表

N	6	7	8	9	10	11	12
K	2	3	4	3	4	5	4

(2) 觀察 N 與 K 的關係

分析	餘數 R	次數 K
$6 \div 3 = 2$	0	2
$7 \div 3 = 2 \dots 1$	1	$3 = 2 + 1$
$8 \div 3 = 2 \dots 2$	2	$4 = 2 + 2$
$9 \div 3 = 3$	0	3
$10 \div 3 = 3 \dots 1$	1	$4 = 3 + 1$
$11 \div 3 = 3 \dots 2$	2	$5 = 3 + 2$

(3) 根據觀察結果預測最佳 K 值

N	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
K	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9

(4) 驗證：實驗結果和預測結果相同

(5) 發現： $M=3$, $K = \lfloor N/3 \rfloor + L$

$\lfloor N/3 \rfloor = N/3$ 的整數部分

若 $R=1$, $L=1$; 若 $R=2$, $L=2$

2、 $M=5$ ：

(1) 最佳 K 值表：

N	10	11	12	13	14
K	2	3	4	3	4

(2) 觀察 N 與 K 的關係：

分析	餘數	次數
$10 \div 5 = 2$	0	2
$11 \div 5 = 2 \dots 1$	1	$3 = 2 + 1$
$12 \div 5 = 2 \dots 2$	2	$4 = 2 + 2$
$13 \div 5 = 2 \dots 3$	3	$3 = 2 + 1$
$14 \div 5 = 2 \dots 4$	4	$4 = 2 + 2$

(3) 預測最佳 K 值

N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
K	3	4	5	4	5	4	5	6	5	6	5

(4) 驗證：實驗結果和預測結果相同

(5) 發現： $M=5$ $K = \lfloor N/5 \rfloor + L$

$\lfloor N/5 \rfloor = N/5$ 的整數部分

若 R=奇數, $L=1$; 若 R=偶數, $L=2$

2、 $M=7$ ：

(1) 預測之最佳 K 值：

(1) 方法：利用 $M=5$ 翻出最小 K 值的方式，來預測 $M=7$ 的最小 K 值

N	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
K	2	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	4



(2) 驗證：實驗結果和預測結果相同：

(3) 發現： $M=7$ $K = \lfloor N/7 \rfloor + L$

$\lfloor N/7 \rfloor = N/7$ 的整數部分

若 R=1, $L=1$; 若 R=2, $L=2$

結論三：

當 $M=$ 奇數, $R=$ 偶數時, $K=P+2$ (公式三)

$P=N/M$ 的整數部分

附錄三：

模式三 (2) 當 $M=偶數$, $R=偶數$, 且 $M \leq N \leq M \times 2$ 時, 最佳 K 值推論過程』

1、 $M=6$ ：

(1) $N=10$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-	-					4	6
第二步			+	+	+	+	-	-			6	4
第三步			-	-	-	-			-	-	0	10
3 步完成												

(2) $N=8$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-	-			2	6
第二步		+	+	+	+	+	-		6	2
第三步		-	-	-	-	-		-	0	8
3 步完成										

(3) 將實驗結果整理如下表

N	6	8	10
K	1	3	3

(4) 發現：

當 $1 \leq N \div M < 2$ $M=6$

$K = \lfloor N/6 \rfloor + 2$ ($\lfloor N/6 \rfloor$ 表示 $N/6$ 的整數部分)

2. $M=4$ 個：

(1) 方法：利用 $M=6$ 翻出最小 K 值的方式,
來預測 $M=4$ 的最小 K 值

(2) 將預測結果整理如下表：

N	4	6
M	2	3

(3) 發現：

A、預測值與實驗值完全相同

B、當 $1 \leq N \div M < 2$ $M=4$

$K = \lfloor N/4 \rfloor + 2$

結論四：

當 $M=偶數$, $R=偶數$, 且 $M \leq N \leq M \times 2$ 時, $K=P+2$ (公式三)

$P=N/M$ 的整數部分

附錄四：

模式四 (1) 當 $M=$ 奇數, $R=$ 奇數, 且 $N \geq M \times 2$ 時最佳 K 值推論過程：

1、 $M=3$

(1) 最佳 K 值表

N	6	7	8	9	10	11	12
K	2	3	4	3	4	5	4

(2) 觀察 N 與 K 的關係

分析	餘數 R	次數 K
$6 \div 3 = 2$	0	2
$7 \div 3 = 2 \dots 1$	1	$3 = 2 + 1$
$8 \div 3 = 2 \dots 2$	2	$4 = 2 + 2$
$9 \div 3 = 3$	0	3
$10 \div 3 = 3 \dots 1$	1	$4 = 3 + 1$
$11 \div 3 = 3 \dots 2$	2	$5 = 3 + 2$

(3) 根據觀察結果預測最佳 K 值

N	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
K	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9

(4) 驗證：實驗結果和預測結果相同

(5) 發現： $M=3$, $K = \lfloor N/3 \rfloor + L$

$\lfloor N/3 \rfloor = N/3$ 的整數部分

若 $R=1$, $L=1$; 若 $R=2$, $L=2$

2、 $M=5$ ：

(1) 最佳 K 值表：

N	10	11	12	13	14
K	2	3	4	3	4

(2) 觀察 N 與 K 的關係：

分析	餘數	次數
$10 \div 5 = 2$	0	2
$11 \div 5 = 2 \dots 1$	1	$3 = 2 + 1$
$12 \div 5 = 2 \dots 2$	2	$4 = 2 + 2$
$13 \div 5 = 2 \dots 3$	3	$3 = 2 + 1$
$14 \div 5 = 2 \dots 4$	4	$4 = 2 + 2$

(3) 預測最佳 K 值

N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
K	3	4	5	4	5	4	5	6	5	6	5

(4) 驗證：實驗結果和預測結果相同

(5) 發現： $M=5$ $K = \lfloor N/5 \rfloor + L$

$\lfloor N/5 \rfloor = N/5$ 的整數部分

若 R=奇數, $L=1$; 若 R=偶數, $L=2$

2、 $M=7$ ：

(1) 預測之最佳 K 值：

(1) 方法：利用 $M=5$ 翻出最小 K 值的方式，來預測 $M=7$ 的最小 K 值

N	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
K	2	3	4	3	4	3	4	3	4	5	4	5	4



(2) 驗證：實驗結果和預測結果相同：

(3) 發現： $M=7$ $K = \lfloor N/7 \rfloor + L$

$\lfloor N/7 \rfloor = N/7$ 的整數部分

若 R=1, $L=1$; 若 R=2, $L=2$

結論五：

當 $M=$ 奇數, $R=$ 奇數, $K=P+1$ (公式四)

$P=N/M$ 的整數部分

附錄五：

模式四 (2) 當 $M=$ 偶數, $R=$ 偶數, 且 $N \geq M \times 2$ 時最佳 K 值推論過程』

1、 $M=6$ ：

(1) $N=14$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-	-									8	6
第二步					+	+	-	-	-	-					6	8
第三步					-	-					-	-	-	-	0	14
3 步完成																

(2) $N=16$

起始狀態	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	正面數	反面數
第一步	-	-	-	-	-	-										10	6
第二步						+	-	-	-	-	-					6	10
第三步						-						-	-	-	-	0	16
3 步完成																	

(3) 將實驗結果整理如下表

N	12	14	16	18	20	22	24	26
K	2	3	3	3	4	4	4	5

(4) 發現：

當 $N \div M \geq 2$ $M=6$

$K = \lfloor N/6 \rfloor + 1$ ($\lfloor N/6 \rfloor$ 表示 $N/6$ 的整數部分)

2. $M=4$ ：

(1) 方法：利用 $M=6$ 翻出最小 K 值的方式，
來預測 $M=4$ 的最小 K 值

(2) 將預測結果整理如下表：

N	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
M	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7

(3) 發現：

A、預測值與實驗值完全相同

B、當 $N \geq M \times 2$ $M=4$

$K = \lfloor N/4 \rfloor + 1$ ($\lfloor N/4 \rfloor = N/4$ 的整數部分)

結論六：

當 $M=$ 偶數， $R=$ 偶數，且 $N \geq M \times 2$ $K=P+1$ (公式四)

$P=N/M$ 的整數部分

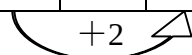
附錄六：

模式五當 $M=$ 奇數， $R=$ 奇數且 $M \leq N \leq M \times 2$ 時最佳 K 值推論過程：

1、 $M=3$

(1) 最佳 K 值表

N	3	4	5	6
K	1	4	3	2



(2) 觀察 N 與 K 的關係

分析	餘數 R	次數 K
$3 \div 3 = 1$	0	1
$4 \div 3 = 1 \dots 1$	$N - M = 1$	$N = 4$
$5 \div 3 = 1 \dots 2$	2	$3 = 1 + 2$

(3) 發現：

A、 $M=3$ $K = \lfloor N/3 \rfloor + 2$

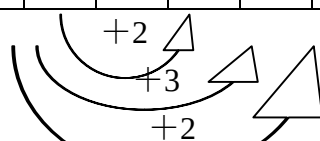
$\lfloor N/3 \rfloor = N/3$ 的整數部分

B、例外：當 $N - M = 1$ 時， $K = N$

2、 $M=5$ ：

(1) 最佳 K 值表：

N	5	6	7	8	9	10
次數	1	6	3	4	3	2



(2) 觀察 N 與 K 的關係：

分析	餘數 R	次數 K
$5 \div 5 = 1$	0	1
$6 \div 5 = 1 \dots 1$	$N - M = 1$	$N = 6$
$7 \div 5 = 1 \dots 2$	2	$3 = 1 + 2$
$8 \div 5 = 1 \dots 3$	3	$4 = 1 + 3$
$9 \div 5 = 1 \dots 4$	4	$3 = 1 + 2$

(3) 發現：

A、 $M=5$ $K = \lfloor N/5 \rfloor + L$

$\lfloor N/5 \rfloor = N/5$ 的整數部分

若 $R = \text{奇數}$ ， $L=3$ ；若 $R = \text{偶數}$ ， $L=2$

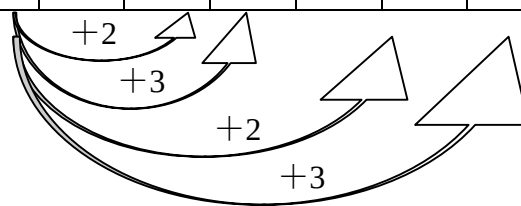
B、例外：當 $N - M = 1$ 時， $K = N$

3、 $M=7$ ：

(1) 預測最佳 K 值：

方法：利用 $M=5$ 翻出最小 K 值的方式，來預測 $M=7$ 的最小 K 值

N	7	8	9	10	11	12	13
K	1	8	3	4	3	4	3



(2) 驗證：實驗結果和預測結果相同：

(3) 發現： $M=7$ $K = \lfloor N/7 \rfloor + L$

$R = \text{奇數}, L=3$; $R = \text{偶數}, L=2$

結論七：

當 $M = \text{奇數}$, $R = \text{奇數}$, 且 $M \leq N \leq M \times 2$ $K = P + 3$ (公式五)

$P = N/M$ 的整數部分

玖、參考資料：

張遠南著 使人聰明的智力遊戲 九章出版社 第 63-64 頁

評語

透過實例分析，檢驗預測，歸納出最佳全翻位五種模式，對國小學童而言實屬不易。