

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國小組

數學科

科別：數學科

組別：國小組

作品名稱：四連珠－贏的策略

關鍵詞：四連珠、對局遊戲

編號：080407

學校名稱：

台北市大安區私立復興國民小學

作者姓名：

林奕君、邱柏榮、江易凡、林欣慧

指導老師：

陳俊佑、張慎



摘 要

一開始，我們是先玩 7×6 的棋盤，想要找出遊戲的最佳策略。在這過程中，發現了：有人已經連成三子形成一個「待贏」的連線時，等待連線的第四個空格的位置就很重要。因此我們提出了「有用空格」這個概念。而我們也利用這個概念稍為分析了勝負可能的情況。研究 7×6 的棋盤一陣子後，我們猜想後手贏的機會較大，但因為 7×6 的棋盤要分析的情況太多，所以我們決定先研究 4×4 棋盤的最佳策略。

起初先玩 4×4 平面四連珠，但它實在太容易和棋了，所以我們就把棋盤捲起來成了 4×4 滾筒四連珠，它可以增加連線機會，研究結果也證實 4×4 滾筒四連珠產生連線的機會比 4×4 平面四連珠大，但和棋的機率也很高。

在近五千盤的研究後，我們發現在 4×4 滾筒四連珠中，有 15 種盤面在第 5 步棋時就可以判斷先、後手的輸贏。利用這些資訊，我們也找出後手的最佳策略，保證必贏或必和。

壹、研究動機

在收拾房間時，看到小時後的玩具「四連珠」。記得以前玩的結果大部分是二姊贏我，我贏媽媽。在一次『鬥智遊戲之最佳策略』的課堂上，我突然想起那我要贏二姊，就想找同學一起研究，看是否能找到贏的方法或不輸的方法。

貳、研究目的

- 一、找出玩四連珠可能的有利策略。
- 二、找出提前判定遊戲勝負的準則。
- 三、研究出必勝或是不敗法則。

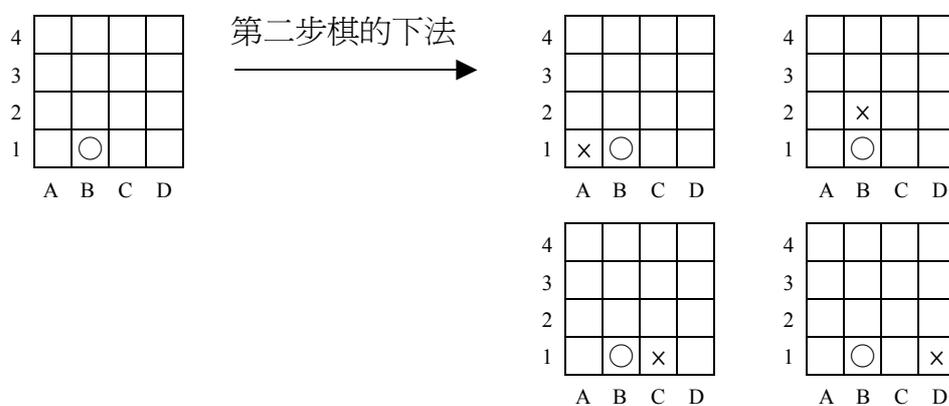
參、研究器材

兩種顏色的筆、格子紙、電腦、標有數字的棋子、剪刀。

肆、遊戲規則

一、4 × 4 平面四連珠的遊戲規則：

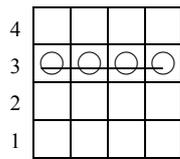
- (一) 先手的棋子用○代表，先手必須從第一列 A1、B1、C1、D1 開始下第一步棋；後手的棋子用x代表，後手必須下在先手的上方，或第一列的空白格。



- (二) 每一步棋都必須由下往上下，不能跳空，也不能下在已有棋子的格子。

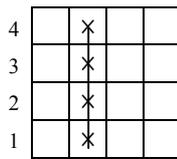


(三) 哪一方先四個棋連線，就獲勝。下完 16 子若沒有任何一方連線，則表示和棋。



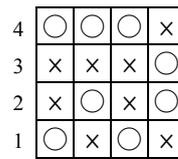
A B C D

先手贏



A B C D

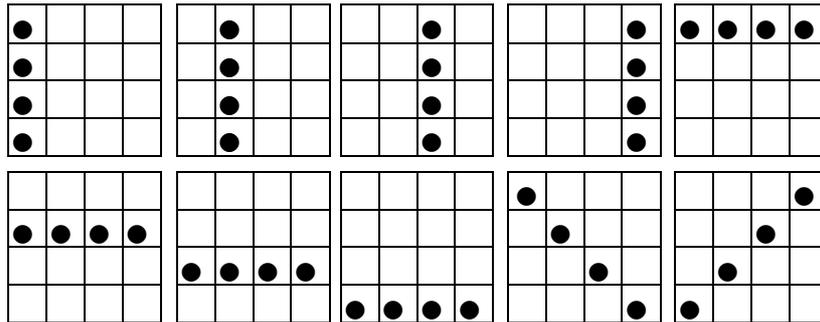
後手贏



A B C D

和棋

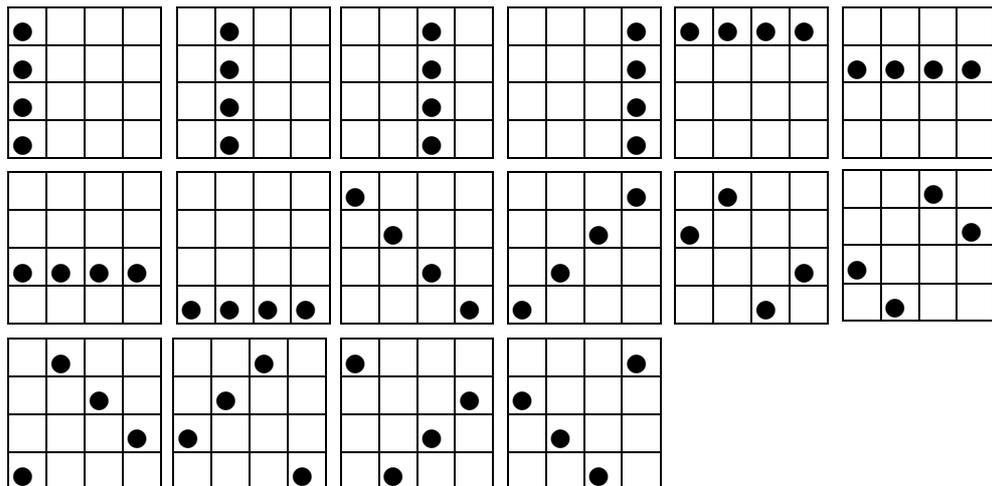
(四) 4 x 4 平面四連珠獲勝的盤面共有下面列舉的 10 種。



二、4 x 4 滾筒四連珠的遊戲規則：

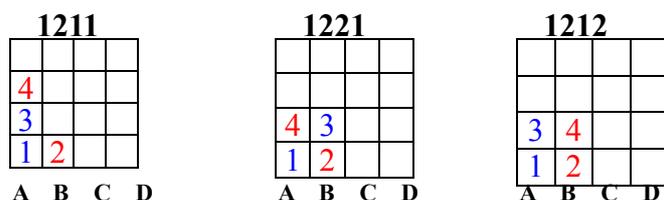
(一) 滾筒四連珠與平面四連珠的落子的戲規則是一樣的，差別只是在於連線的情況有所改變。我們會設計滾筒四連珠的遊戲，是因為平面四連珠的遊戲和局的機會太高，因此我們將平面 4 x 4 的棋盤捲起來，也就是把 A 行和 D 行連接起來。像是一個空心的滾筒狀，稱為滾筒四連珠。

(二) 4 x 4 滾筒四連珠獲勝的盤面共有下面列舉的 16 種。



伍、符號定義

- 一、在遊戲中及研究過程中，如果不記錄落子的順序時，先手的棋子用○代表，後手的棋子用×代表。在棋盤格子中標明的數字 x 指的是第 x 手下的位置，先手—奇數棋用藍色，後手—偶數棋用紅色。這樣連線比較容易看出來。
- 二、另外我們會再用 1234，四個編號，來記錄每一手所下的行數。這邊我們把 A 行又稱第 1 行，B 行又叫第 2 行，C 行又叫第 3 行，D 行又叫第 4 行。例如：12312...，代表第 1 手在第 1 行(A 行)、第 2 手在第 2 行(B 行)、第 3 手在第 3 行(C 行)、第 4 手在第 1 行(A 行)、第 5 手在第 2 行(B 行)……如此類推。因為落子的時候是從下方往上，所以並不需要記錄下在該行的第幾列。下面有另外幾個例子。

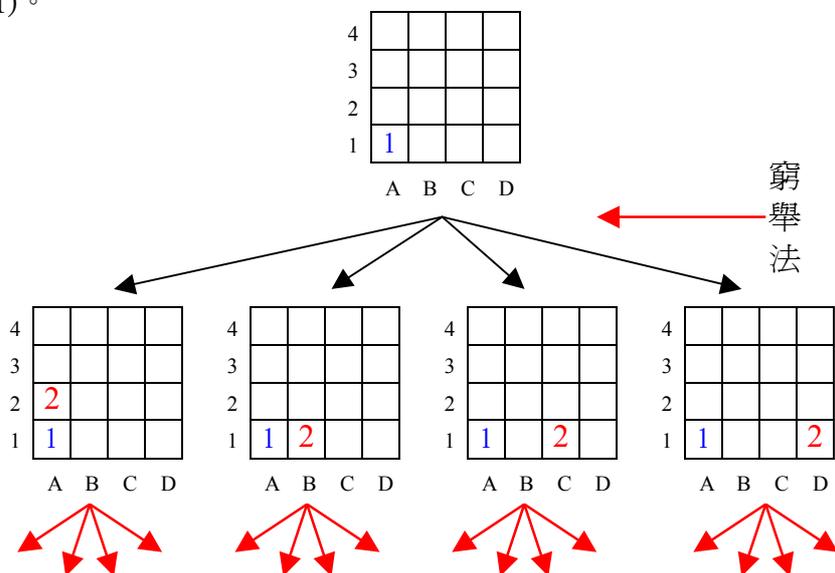


陸、研究過程與結果

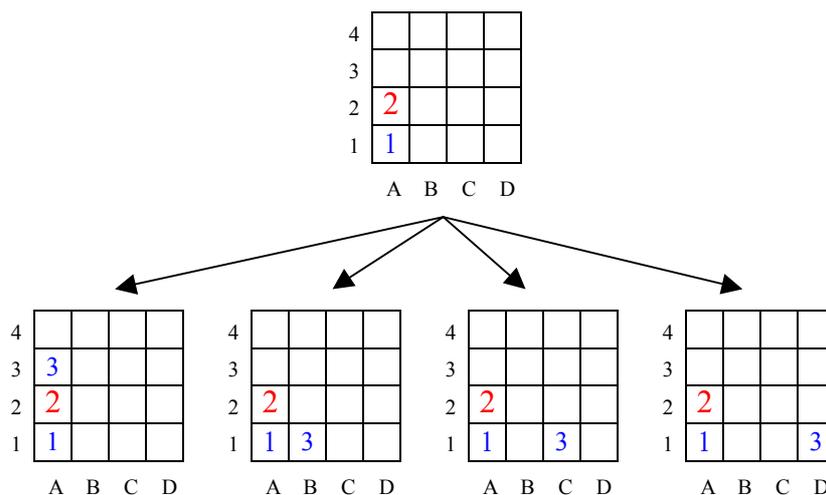
我們先將前四子的組合排列出來，因為第一手固定在 A1，第二手到第四手每手都有 4 種可能，共有 64 種盤面。在 4×4 滾筒四連珠遊戲中，把相同盤面歸類後，有 1111、1112、1113、1121、1122、1123、1124、1131、1132、1133、1211、1212、1213、1214、1221、1222、1223、1224、1232、1234、1242、1243、1311、1313、1331、1332、1333，共 27 不同盤面組合。

一、隨機下法

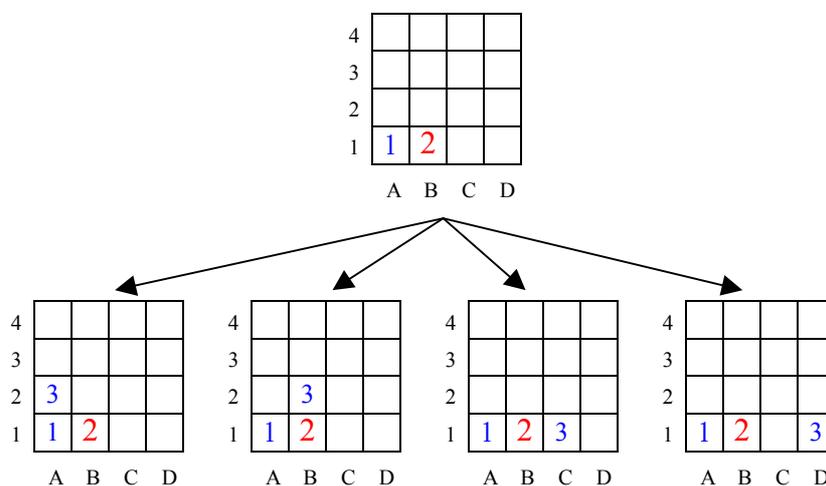
- (一) 所謂的隨機下法，就是繼續用窮舉法的方式，並利用 Excel 剪貼的便利性，有系統的填入數字。不失一般性的設 1 位於(A,1)則 2 的位置有四種(A,2)、(B,1)、(C,1)、(D,1)。



當第 1 手位於(A,1)、第 2 手位於(A,2)→第 3 手的位置有四種(A,3)、(B,1)、(C,1)、(D,1)



當第 1 手位於(A,1)、第 2 手位於(B,1)→第 3 手的位置有四種(A,2)、(B,2)、(C,1)、(D,1)



依此類推：

當第 1 手位於(A,1)、第 2 手位於(C,1)→第 3 手的位置有四種(A,2)、(B,1)、(C,2)、(D,1)

當第 1 手位於(A,1)、第 2 手位於(D,1)→第 3 手的位置有四種(A,2)、(B,1)、(C,1)、(D,2)

當第 1 手位於(B,1)時→第 1 手的位置有四種(A,1)、(B,2)、(C,1)、(D,1)

當 1 位於(B,1)、2 位於(A,1)→3 的位置有四種(A,2)、(B,2)、(C,2)、(D,1)

當 1 位於(B,1)、2 位於(B,2)→3 的位置有四種(A,2)、(B,1)、(C,1)、(D,2)

當 1 位於(B,1)、2 位於(C,1)→3 的位置有四種(A,2)、(B,1)、(C,2)、(D,1)

當 1 位於(B,1)、2 位於(D,1)→3 的位置有四種(A,2)、(B,1)、(C,1)、(D,2)

當 1 位於(C,1)時→2 的位置有四種(A,1)、(B,1)、(C,2)、(D,1)

⋮

⋮

(二) 我們先固定前四手的手順為 1133，把所有可能都列出來之後，分別以平面四連珠和滾筒四連珠的判別連線上式，去檢視每一盤的勝負情況，並分別統計平面四連珠和滾筒四連珠的先、後手獲勝或和棋的機率。

(三) 結果：1133 的盤面共有 856 盤，先、後手獲勝跟和棋的盤數與機率如表 1 和表 2。

表 1 4 × 4 平面四連珠—1133 盤面

	先手獲勝	後手獲勝	和棋
盤數	42	69	745
機率	4.9%	8.1%	87.0%

表 2 4 × 4 滾筒四連珠—1133 盤面

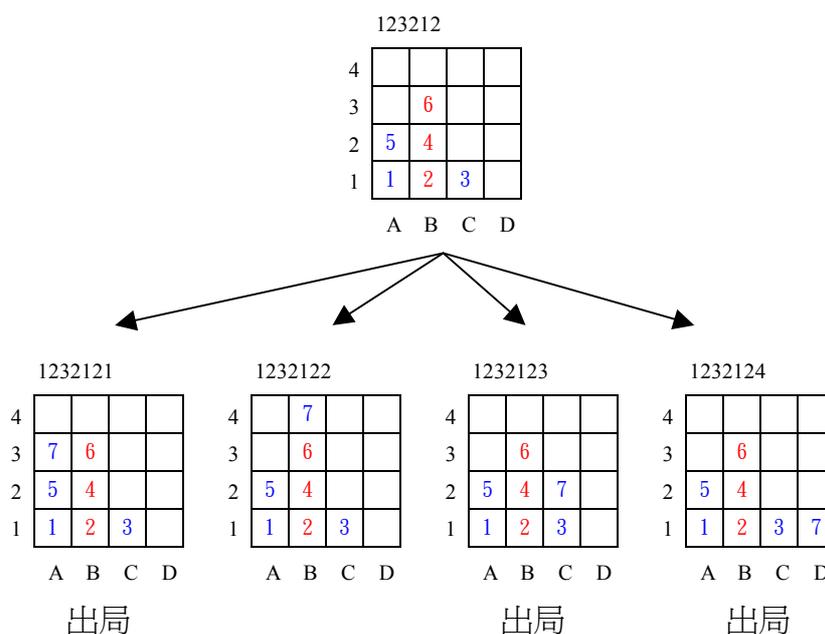
	先手獲勝	後手獲勝	和棋
盤數	321	395	140
機率	37.5%	46.1%	16.4%

(四) 1133 的盤面，4 × 4 滾筒四連珠和棋的機率比 4 × 4 平面四連珠小的多，而不管是滾筒四連珠或是平面四連珠，後手獲勝的機率都比先手大。因此對 1133 盤面而言，兩個初學者，不會多考慮的人對局時，拿後手是比較有利的。

(五) 隨機下法的方式就好像兩個人矇住眼睛在下棋，只負責把棋子往下丟，落到哪一行就下在哪邊，這是很不合理的下法。而且，估計用這種實驗方法，我們要處理的盤數太多，因此我們決定捨棄隨機下法，而採用非隨機下法。

二、非隨機下法

所謂的非隨機下法是指當我們在用窮舉法列出所有可能的時候，當遇到該擋而不擋的棋盤都算出局而加以排除。例如下圖 123212 的後手應下在 (B、4) 的位置，所以下在 (A、3)、(C、2)、(D、1) 的棋盤都算出局，因此稱為非隨機下法。接著第九手之後自己下，用人工判讀的方式去看每一種盤面的勝負。(這裡是指當雙方都掌握最佳策略時的勝負情形)



(一) **滾筒四連珠各盤面獲勝機率結果**：我們把下完的結果統計於**表 3**，其中包括了加權以後 64 種盤邊的平均。

表 3 4 × 4 滾筒四連珠各盤面獲勝機率

盤面 編號	總盤數	先手獲勝		後手獲勝		和 棋		相同盤面
		盤數	機率%	盤數	機率%	盤數	機率%	
1111	69	22	32	8	11	39	57	—
1112	188	36	19	31	17	121	64	1114
1113	186	33	15	14	6	139	79	—
1121	106	14	13	28	27	64	60	1141
1122	113	13	12	21	18	79	70	1144
1123	221	39	18	54	24	128	58	1143、1244、1321、1341、1422
1124	232	47	20	48	21	137	59	1142、1241、1322、1344、1421
1131	104	3	3	11	10	90	87	—
1132	233	13	6	34	14	185	80	1134、1231、1233、1431、1433
1133	121	10	8	28	23	83	69	—
1211	185	9	5	60	32	116	63	1411
1212	142	10	7	16	11	116	82	1414
1213	153	47	31	40	26	66	43	1312、1314、1413
1214	159	21	13	8	5	130	82	1412
1221	240	17	7	16	7	207	86	1441
1222	180	13	7	55	31	112	62	1444
1223	213	38	18	15	7	160	75	1443
1224	216	112	52	33	15	71	33	1442
1232	196	23	12	18	9	155	79	1434
1234	234	48	21	24	10	162	69	1432
1242	193	50	26	41	21	102	53	1323、1343、1424
1243	234	55	23	38	16	141	61	1324、1342、1423
1311	189	48	25	125	66	16	9	—
1313	197	36	18	30	15	131	67	—
1331	203	35	17	22	10	146	72	—
1332	216	35	16	42	20	139	64	1334
1333	177	55	31	37	21	85	48	—
總合	4887	864	18	891	18	3132	64	
平均	181	32	18	33	18	116	64	
加權	12078	2224	18	2301	19	7553	63	

由上表知道，4 × 4 滾筒四連珠的和棋機率還是不低，而前八手如果不想太多，只考慮該擋要擋的策略下，先、後手獲勝贏的機率差不多。代表這個遊戲對兩個初學者，只會擋該擋的連線的情況下，是相當公平的。

(二) 4 × 4 平面四連珠各盤面獲勝機率

從下完的各盤面中，找出符合平面四連珠連線的先、後手獲勝的盤面，統計於表 4。

表 4 4 × 4 平面四連珠各盤面獲勝機率

盤面 編號	總盤數	先手獲勝		後手獲勝		和 棋	
		盤數	機率%	盤數	機率%	盤數	機率%
1111	69	10	14	5	7	54	79
1112	188	30	16	16	9	142	75
1113	186	22	12	8	4	156	84
1121	106	2	2	7	7	91	91
1122	113	6	5	13	12	94	83
1123	221	16	7	17	8	188	85
1124	232	34	15	13	5	185	80
1131	104	0	0	7	7	97	93
1132	233	8	3	9	4	216	93
1133	121	9	7	16	13	96	79
1211	185	8	4	36	20	141	76
1212	142	0	0	3	2	139	98
1213	153	35	23	16	10	102	67
1214	159	10	6	8	5	141	89
1221	240	5	2	15	6	220	92
1222	180	10	5	48	27	122	68
1223	213	36	17	10	5	167	78
1224	216	97	45	27	12	92	43
1232	196	7	4	7	4	182	92
1234	234	28	12	18	8	188	80
1242	193	21	11	12	6	160	83
1243	234	33	14	11	5	190	81
1311	189	52	28	60	32	77	40
1313	197	41	21	37	19	119	60
1331	203	37	18	31	15	135	67
1332	216	40	19	47	21	129	60
1333	177	17	10	33	18	128	72
平均	181	22	12	20	11	139	77

比較表 3 與表 4 後知道，平面四連珠的和棋機率較高，而兩種遊戲對於只考慮該擋要擋的初學者來說，先手、後手獲勝機率是差不多相等的。

三、贏的策略

(一) 資料分析

1. 統計滾筒四連珠每一盤面四珠連線最後一棋所在位置及盤數。結果統計於表 5。

表 5 四珠連線最後一棋所在位置及盤數

盤面 編號	先手獲勝最後一棋的位置及盤數										後手獲勝最後一棋的位置及盤數											
	A3	B3	C3	D3	A4	B4	C4	D4	C2	D2	A4	B4	C4	D4	B2	C2	D2	A1	A3	B3	C3	D3
1111		2	6	1		8		5				1	4	1		2						
1112		7	7	16		5				1			14	4		5	6					2
1113		9	6	12		1							2		2		7					1
1121			6	8								9	8	5			5			1		
1122			3	9		1						1	5	3		5	6	1				
1123		1	9	18	2	4		5				4	7	19	1		21				1	1
1124		6	39	2								2	2	34	1		9					
1131			1	2								1	1	2	3			1		1	1	1
1132		1	5	6				1				1	2	26			5					
1133		1		5		4						6	1	10	1	4		3		1		2
1211		6	3										20	6	31			3				
1212			6				4					1	1	1	13							
1213		14	7	15			5	5		1		2	11	1	24			2				
1214			21									6					2					
1221			15							2		4	1	11								
1222			13									29	1	8	16		1					
1223			14	4								9	2		2			2				
1224	18		8	4				8	2			8	3	11	4		3					
1232	9		7	6						1		3		7	4			4				
1234	16	2	24	4				2				12		4	2			6				
1242	3		39	4			3					13		15	7		6					
1243	5	28	17	5								12	10	6	9							
1311	2	11	35									3	62	5	55							
1313	4	12	15			4				1				17	11			2				
1331		20	12	3								1	3	14	3	1						
1332	1		24	3			5	2				3	2	1	29			7				
1333		29		24		1				1		23	1		13							
總數	58	159	342	151	2	28	17	28	2	7	127	138	219	260	8	38	75	1	1	2	2	7

* 空格中沒有填數字者為 0

由表 5 可看出四珠連線，先手最後一棋通常會在奇數列，後手最後一手通常會在偶數列。除了驗證「有用空格」的概念，還可以知道佈局的方向。關於有用空格，我們將於討論詳加解釋。

2. 連線方式的統計：根據表 5 中，四珠連線最後一棋所在位置統計連線的方式及盤數於表 6-1。

表 6-1 先手四珠連線的方式及盤數

盤面 編號	連線 總盤數								* 其他
1111	22	8			1	2			11
1112	36	27		1	3	1			4
1113	33	17		3		5		5	3
1121	14				4	2		5	3
1122	13	3			2			8	
1123	39	5		1	3	5		14	11
1124	47	14		4	12	17			
1131	3				1				2
1132	13	10			1	2			
1133	10	9							1
1211	9		3	3	1	2			
1212	10		4		6				
1213	47	20	3	2	5		6		11
1214	21					10	11		
1221	17	4			1	12			
1222	13				3	10			
1223	38	19		9	2				8
1224	112	25	14		17	40	24		2
1232	23	7			6				10
1234	48	12			8	10			18
1242	50	24			20				6
1243	55	18	11	9	2	10			5
1311	48	36	5				7		
1313	36	30					1		5
1331	35	30	2				3		
1332	35	28							7
1333	55	47	4		2				2
總數	892	393	46	32	100	128	52	32	109

空格中沒有填數字者為 0

* 根據表 5 先手四珠連線最後一棋所在位置以 B3、C3、D3 最多，故統計連線方式以最後一棋落在 B3、C3、D3 者為主；四珠連線最後一棋落在其他位置者，則列為其他。

表 6-2 後手四珠連線的方式及盤數

盤面 編號	連線 總盤數											* 其他		
1111	8	1						3				2	2	
1112	31	1						7	6			3	11	
1113	14							1	2				13	
1121	28					9			5		1	7	6	
1122	21	1							6		1	4	9	
1123	54	2				6			7		17		22	
1124	48				4			26				10	8	
1131	11				1			1	1			4	4	
1132	35							17	8			5	5	
1133	28			5	1			5	5			2	10	
1211	60	1				8					12	36	3	
1212	16	3			1						12			
1213	40	18	1			7	3				2	2	5	2
1214	8		4	2										2
1221	16								11			5		
1222	55	1	15						6			33		
1223	15				1	4						10		
1224	33	1	8			6			2			9	7	
1232	18	4			3			7					4	
1234	24		8				6					10		
1242	41	2			15			15			5		4	
1243	38				11	4		5			7	11		
1311	125	49	3			57		5		7		4		
1313	30	18						4	2	3		1	2	
1331	22	13			1		1	3				3	1	
1332	42	18			1			1			13	9		
1333	37	27				1					9			
總數	898	160	44	41	102	10	97	64	12	79	173	116		

空格中沒有填數字者為 0

* 根據表 5 後手四珠連線最後一棋所在位置以 A4、B4、C4、D4 最多，故統計連線方式以最後一棋落在 A4、B4、C4、D4 者為主；四珠連線最後一棋落在其他位置者，則列為其他。

(二) 提前判定勝負的局面

1. 我們的研究是希望能夠知道，在佈局時，先手和後手應該朝向怎樣的情勢發展，經由表 6-1 可以看出，先手贏的策略，由表 6-2 可看出後手贏的策略。如果前八手出現下面的情勢，我們可以知道是先手獲勝或是後手獲勝。

(1) 先手贏的策略

4				X
3				
2				
1	X			
	A	B	C	D

4				10
3		X	11	9
2		△	△	X
1	△	△	△	X
	A	B	C	D

△：可以是先手也可以是後手
(A、B、C、D 行上的子可整行調動)

(2) 後手贏的策略

4				
3				
2				
1				
	A	B	C	D

4	○			
3	○			
2	△	△	△	△
1	△	△	△	△
	A	B	C	D

* 在前八棋下到此局面，且 3、4 列沒有其他棋。
(A、B、C、D 行上的子可整行調動)

2. 但我們不以此為滿足，所以回頭去檢視原始資料，希望能夠在更早就能判斷勝負情況，後來我們發現在 27 個盤面中的 8 個盤面(或說 64 種盤面中的 15 種盤面)，在第 5 手就可以判定勝負。

- (1) 1121 盤面 (同 1141)：第 5 棋先手一定要下 A4，則先手贏的機率很高；5 若下 B2 或 D1，則後手一定贏。

4	5			
3	4			
2	2			
1	1	3		
	A	B	C	D

5 下 A4

4	5	11	13	
3	4	10	12	5
2	2	6	9	14
1	1	3	7	8
	A	B	C	D

6 下 B2
先手贏

4	5	11	13	
3	4	9	12	5
2	2	8	7	14
1	1	3	6	10
	A	B	C	D

6 下 C1
先手贏

4	5	16	13	11
3	4	15	12	10
2	2	14	8	9
1	1	3	7	6
	A	B	C	D

6 下 D1
和棋

5 下 B2
6 一定下 A4
後手贏

4	6	12	14	16
3	4	11	13	15
2	2	5	10	9
1	1	3	7	8
	A	B	C	D

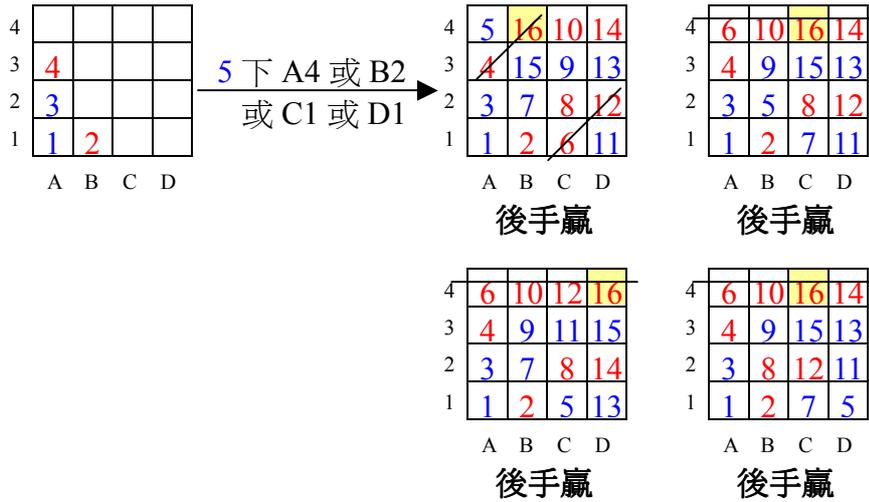
5 下 C1
7 一定下 A4
和棋

4	7	16	10	13
3	4	15	9	12
2	2	14	8	11
1	1	3	5	6
	A	B	C	D

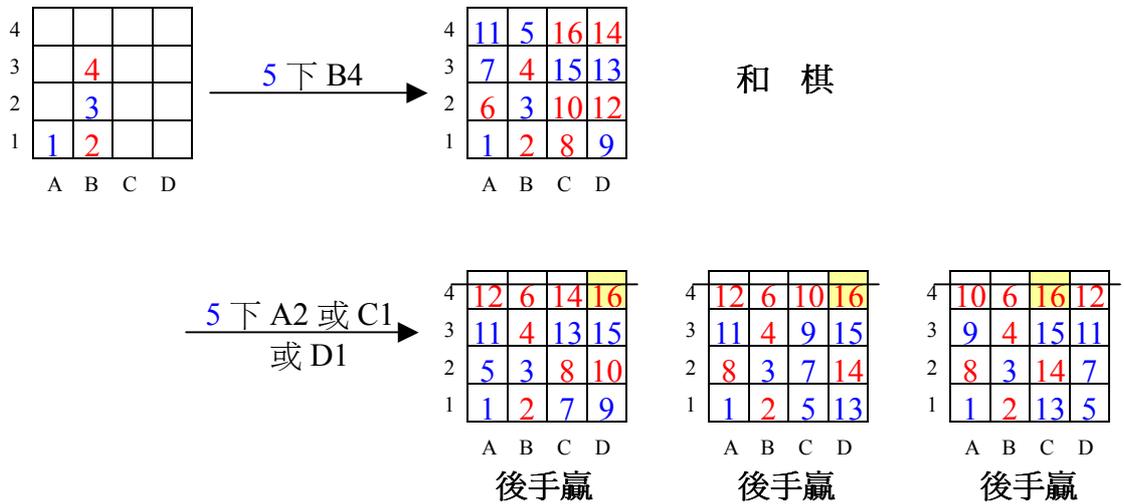
5 下 D1
後手贏

4	7	14	12	16
3	4	13	11	15
2	2	8	10	9
1	1	3	6	5
	A	B	C	D

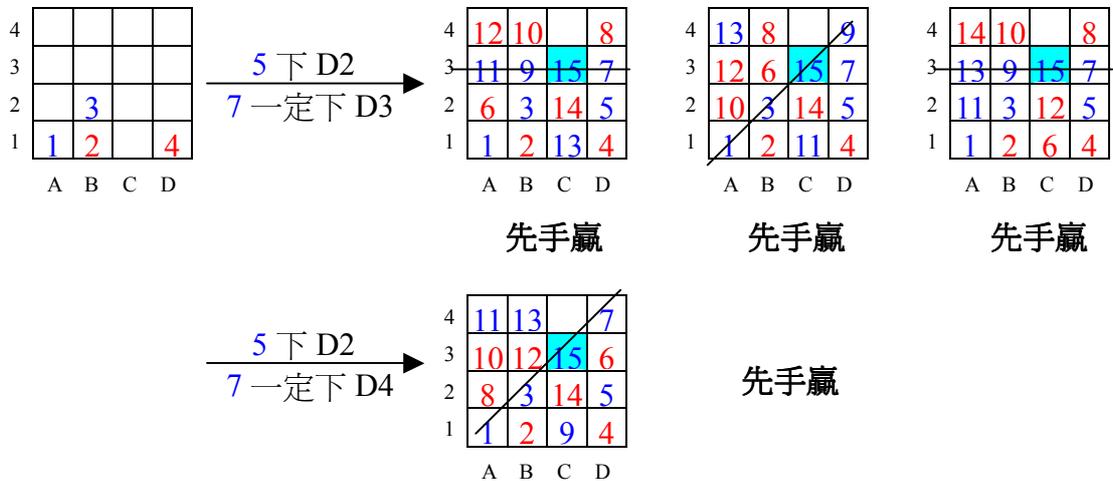
(2) 1211 盤面 (同 1411) : 後手一定贏。



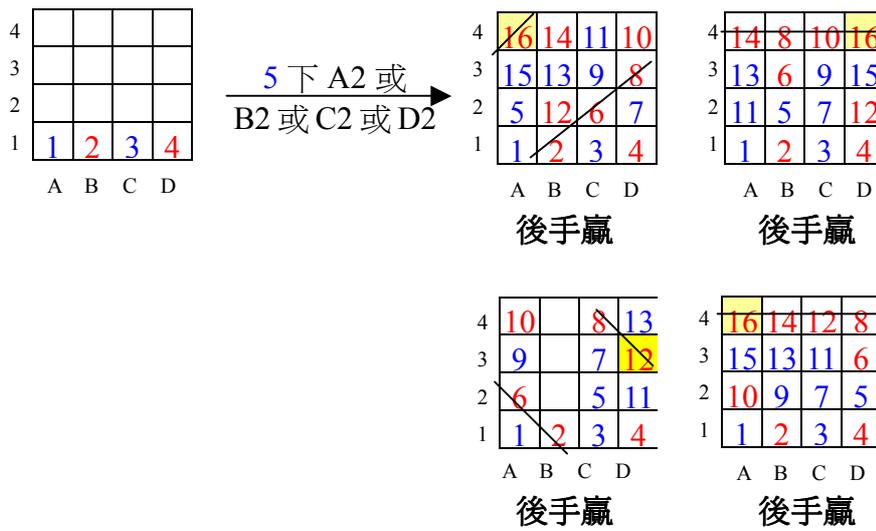
(3) 1222 盤面 : 第 5 棋先手要下 B4 , 則有機會和棋 ; 否則後手必贏。



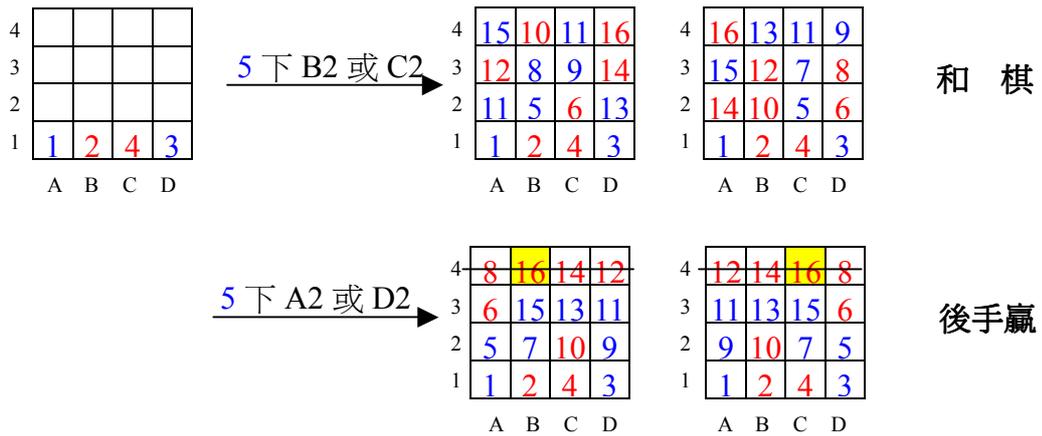
(4) 1224 盤面 (同 1442) : 第 5 棋先手下在 D2 , 則先手一定贏。



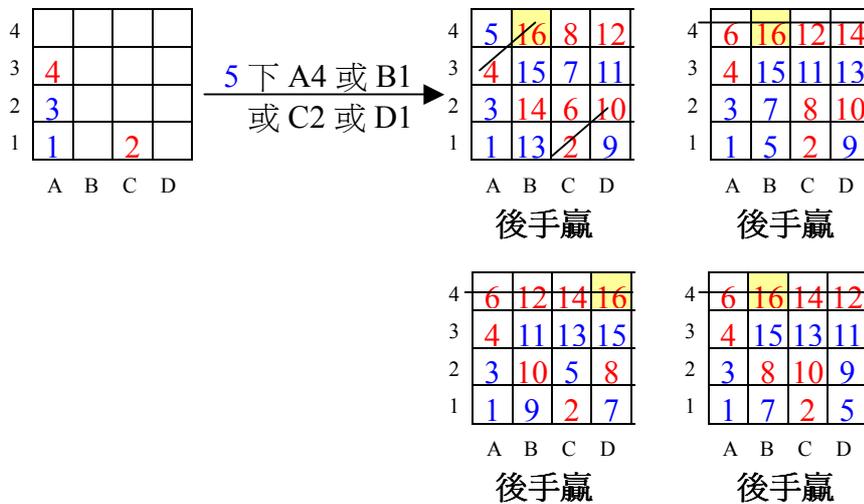
(5) 1234 盤面 (同 1432) : 不管第 5 棋下哪, 最後都是後手必贏。



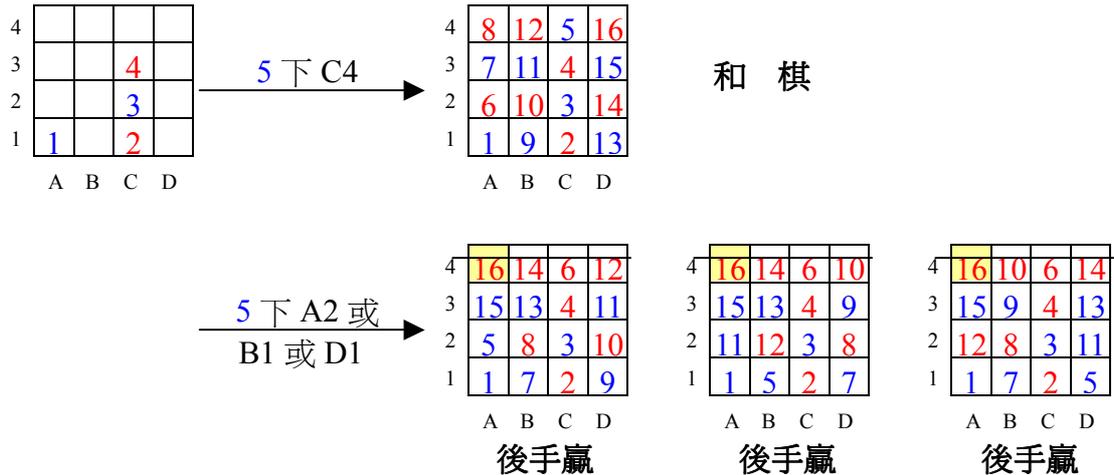
(6) 1243 盤面 (同 1324、1342、1423) : 第 5 棋先手要下 B2 或 C2, 則有機會和棋;
若下在 A2 或 D2 則後手必贏。



(7) 1311 盤面 : 不管第 5 手下哪, 後手一定贏。



(8) 1333 盘面：第 5 棋先手要下 C4，則有機會和棋；否則後手必贏。

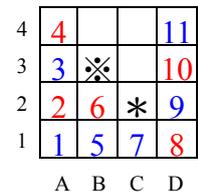


(三) 提出不敗的策略

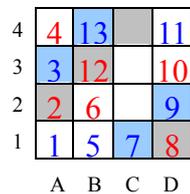
1. 後手必和法

我們後來發現有一個方法，只要在兩個地方小心一點，就可以保證下後手的不會輸。這個方法就是，**後手的每次落子，都下在前一手對方子的上方**。只有在兩個地方需要注意。

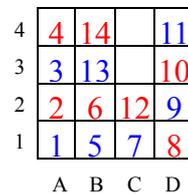
- (1) 如右圖，2 落在 1 的上方，4 落在 3 的上方，只有在對方於第一列有三子時，要記得去擋對方，像右圖中的 8 要去阻檔對方於第一列的連線。這是第一個要注意的地方。
- (2) 另一個要注意的地方是，當下完 11 手形成右圖的局勢時，第 12 手的位置要下在 * 而不是※的地方。



我們可以比較兩種下法，下在※的位置是贏在灰色的那一條連線。因為 C4 的空格最後一定是輪到後手下，可是沒想到卻幫先手鋪好路。如果在下 * 的位置則可以保證和棋。



先手贏



和 棋

因為這樣下法，在 A、B、C、D 四行中有三行都是先手下在奇數格，後手下在偶數格，另一行則是先手下在偶數格，後手下在奇數格，如此一定會形成和棋。在這邊，有一個很好玩的情況：**不管是先手或後手，只要存心守和，大概就輸不了；如果想要贏，反而會不注意而替別人創造機會。**

2. 後手最佳策略：

我們不甘心於這種必和的方法，所以再去檢視 8 個能提前判定勝負的盤面，有一個令人欣喜的結果。那就是後手有一個獲勝機會約為 13/16 的策略。

假設第一手下在 A1，第二手就下在 B2(或 D2)，則對第三手的位置加以討論：

- (1) 第 3 手下在 A2，第 4 手就下在 A3 會形成 1211 盤面，如此是後手必勝。
- (2) 第 3 手下在 B2，第 4 手就下在 B3 會形成 1222 盤面，如此當第 5 手下在 B4 時會形成和局，若第 5 手下在其它位置，則最後是後手獲勝。
- (3) 第 3 手下在 C1，第 4 手就下在 D1 會形成 1234 盤面，如此是後手必勝。
- (4) 第 3 手下在 D1，第 4 手就下在 C1 會形成 1243 盤面，如此當第 5 手下在 B2 或是 C2 時，最後會是和棋，如果是下在 A2 或是 D2，最後是後手獲勝。

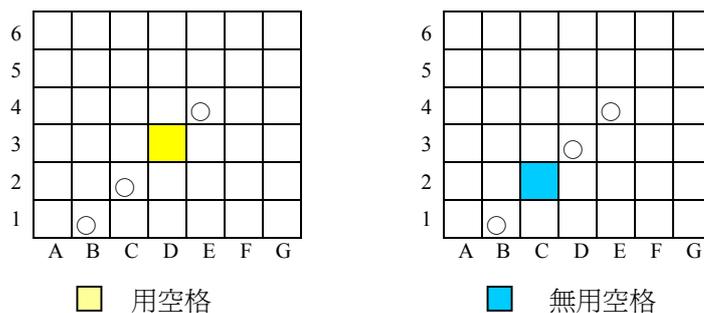
3. 第 2 手如果下在 C1，也是不錯的選擇，因為之後的發展會形成 1333 或 1311 或 1234 這三種盤面，後手也都有不敗的方法。如果第 2 手下在 A2，則可以選擇後手必和法。因此，這個遊戲也如同井字遊戲一樣被完全破解，如果知道這些策略的人在下，後手是不會輸的。

柒、延伸討論—7×6 棋盤的討論

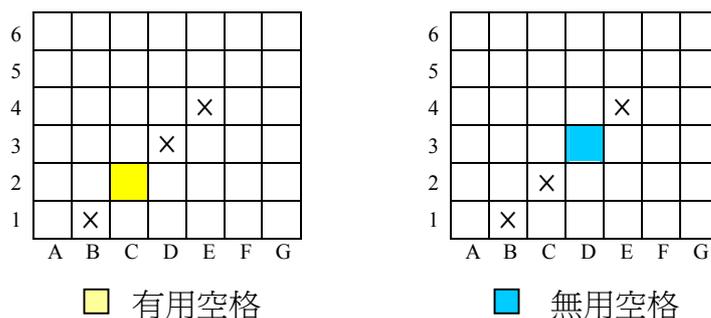
事實上，對於 4 x 4 平面四連珠和 4 x 4 滾筒四連珠這個題目，我們是先玩 7 × 6 的棋盤，但因為要分析的情況太多，所以我們把棋盤縮小。但在研究 7 × 6 的棋盤時，我們發現了一個有用的概念，那就是「有用空格」。

一、「有用空格」是指等待連線的第四空格最後一定會被下到的空格。

(一) 當先手已連三棋，等待連線的第四空格如果是在奇數列，則有機會獲勝。



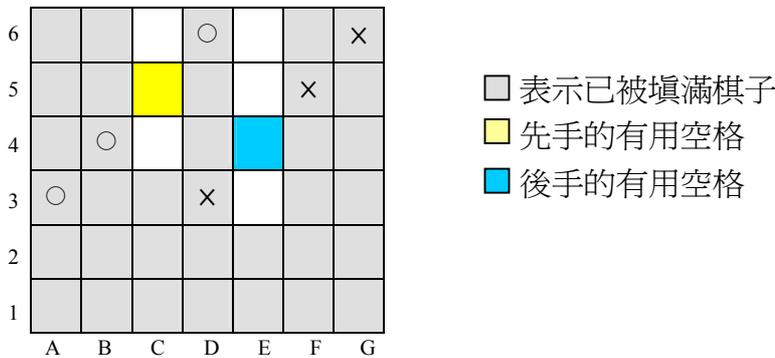
(二) 當後手已連三棋，等待連線的第四空格如果是在偶數列，則有機會獲勝。



所以在佈棋時應注意最後一棋是否為「有用空格」，才能獲勝。「有用空格」對先手要而言是在奇數列，對後手來說偶數列。為什麼我們會說這些空格是有用空格呢？因為對先手來說，當他只差一格就可以連出一線時(以下簡稱待贏)，那一格和其下方一格是不安全的。當其它安全空格下完之後，有人就被迫要下在不安全空格的那一行，我們只要計算已下過子的奇偶數，或計算剩餘格數的奇偶數，就可以知道待贏的那一個格子會是屬於誰的。因此，我們才會說，奇數列是先手的有用空格，偶數列是後手的有用空格。

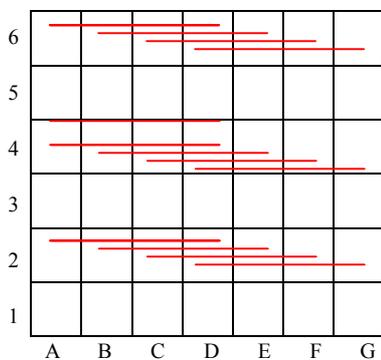
二、當雙方都各有一條待贏（都留下有用空格）的線路時，且這兩格不在同一行，則先手會獲勝。若在同一行，則很容易知道，空格在下方的會獲勝，因為空格在下方的那個人可以先達成連線的情況。

如果兩格不在同一行的話，我們看看下面這個例子：雙方各有一條待贏，並且都把待贏的空格留在有用空格，當一些安全的格子都被填滿時，已下了 35 手(一定是奇數)，所以輪到後手下。後手不是下 E3 就是下 C4，下 C4 就輸了，所以下 E3。但下完 E3 後，雙方輪流下把 E 那行填滿之後，又是輪到後手下，所以後手會輸。

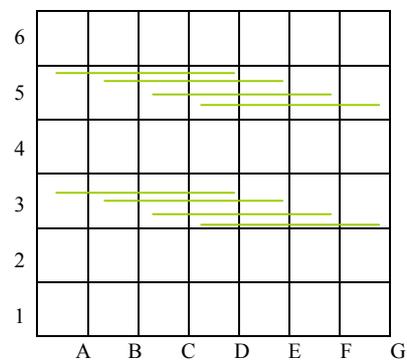


三、後手贏的機會較大。

後手四珠連線的最後一棋會在偶數列，先手四珠連線的最後一棋會在奇數列，雖然橫線各有三列，但奇數列的第一列通常沒有機會所以後手連線比先手多了 4 條。若再考慮斜線的情況，可以知道後手要達成待贏的局面的機會比先手更大。



後手橫線連線的所有位置



先手橫線連線的所有位置

四、兩個人的對戰策略大概是這樣的：後手的人會先得到一條待贏；這時先手的人要努力去製造一條待贏的連線，而後手的人要去阻擋；當先手的人也製造出一條待贏的連線時，就輪到後手要去製造第二條連線，不過這時空格會空在奇數格，先手的人則是要去阻擋。兩個人就這樣輪流攻守。

捌、結論

一、4 x 4 滾筒四連珠先手、後手獲勝的機率都高於 4 x 4 平面四連珠，且和棋機率較低，較能分出勝負。

	先手獲勝機率	後手獲勝機率	和棋機率
4 x 4 平面四連珠	12%	11%	77%
4 x 4 滾筒四連珠	18%	18%	64%

二、佈棋時應注意最後一棋是否為「有用空格」，才能獲勝。

「有用空格」對先手而言是在奇數列，對後手來說是在偶數列。

三、後手的每次落子，都下在前一手對方子的上方，則後手必贏或和棋。

四、不管是先手或後手，只要存心守和，大概就輸不了；如果想要贏，反而會不注意而替別人創造機會。

五、目前發現有 15 種盤面在第 5 步棋就可以判斷先、後手的輸贏。其中 1224 和 1442 的盤面先手只要不犯錯則一定贏；1211、1311、1411、1234 的盤面後手只要不犯錯則一定贏。

六、因此我們知道，對於滾筒四連珠，第二手下在第一手的旁邊，後手有 13/16 的機會會獲勝。同樣的策略對於平面四連珠也適用，只是獲勝機會降到 9/16。

玖、參考資料

一、國民小學數學科 6 上 / 五、百分圖與發生的可能性 / 國立編譯館出版 / 48—59 頁

二、國民小學數學科 5 上 / 八、座標與眾數、平均數 / 國立編譯館出版 / 86—94 頁

三、劉哲志 林順喜 / 2001 年 9 月 / 如何用電腦求「四子棋」遊戲之解 / 科學月刊 / 第 32 卷第 9 期 / 810—815 頁

附 錄

在縣市科展比賽的時候，評審問了我們一個問題：如果真的用隨機下法把所有可能的盤面列出來，那所有的盤面會有多少？因此我們就去想這個問題。以下分別是計算下到第六手、第八手、第十手及第十六手的盤數。這樣的計算會比實際的盤數多很多，因為如 1213141 這樣的字串，先手已經在 A 行有一個連線，遊戲應該終止，但我們並沒有辦法光從字串就去判斷是否還要繼續用窮舉法列出往後發展的盤面。這個問題在前七手並不會發生，在下到第八手時，需要扣掉的盤數也不會太多。

下到第六手有幾盤？

當第一子固定出現 1 時，第一手到第六手共有五個數字需要記錄，設其中出現了 a 個 1、b 個 2、c 個 3、d 個 4，則 $a+b+c+d=5$ ，將可能的組合情況列於組和欄(同一個數字最少可能出現 0 次、最多可能出現 4 次)，組合欄中紅色字體為不合理的組合(1 出現 5 次)。

第一子	a+b+c+d=5	組合欄				計算	盤數
1	4100	11112	11113	11114	12222	$5! \div 4! \times 9$	45
		22223	22224	13333	23333		
		33334	14444	24444	34444		
1	3200	11122	11133	11144	11222	$5! \div (3! \times 2!) \times 12$	120
		22233	22244	11333	22333		
		33344	11444	22444	33444		
1	3110	11123	11124	11134	12223	$5! \div 3! \times 12$	240
		12224	22234	12333	13334		
		23334	12444	23444	13444		
1	2210	11223	11224	11233	11244	$5! \div (2! \times 2!) \times 12$	360
		11334	11344	22334	12233		
		12244	22344	13344	23344		
1	2111	11234	12234	12334	12344	$5! \div 2! \times 4$	240

以 2111 為例：因為第一手固定,所以還剩下五手可以考慮，則 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 種(可以寫成 $5!$) 有兩個數相同，因此交換後答案一樣，則除以 $2!$ ；有 4 種不同組合情況，則乘以 4。因此到第六手 2111 的總盤數 $= 5! \div 2! \times 4 = 240$ 以此類推。可將計算表列。

所以全部下到第六手共有： $45+120+240+360=1005$ 盤。

下到第八手有幾盤？

當第一子固定出現 1 時，到第八手共有七個數字， $a+b+c+d=7$ 。將可能的組合情況列於組和欄 (同一個數字最少可能出現 0 次、最多可能出現 4 次)，組合欄中紅色字體為不合理的組合 (1 出現 5 次)。

第一子	$a+b+c+d=7$	組合欄				計算	盤數
1	4300	1111222	1111333	1111444	1112222	$7! (4! \times 3!) \times 9$	315
		2222333	2222444	1113333	2223333		
		3333444	1114444	2224444	3334444		
1	4210	1111223	1111224	1111233	1111334	$7! \div (4! \times 2!) \times 18$	1890
		1111244	1111344	1122223	1122224		
		1222244	1222233	2222344	2222334		
		1123333	1133334	1333344	1223333		
		2333344	2233334	1124444	1134444		
1	3310	1112223	1112224	1113444	1113334	$7! \div (3! \times 3!) \times 12$	1680
		1112333	1112444	2223444	2223334		
		1222333	1222444	2333444	1333444		
1	3220	1112233	1112244	1113344	1122233	$7! \div (3! \times 2! \times 2!) \times 12$	2520
		1122244	2223344	1122333	1133344		
		2233344	1122444	1133444	2233444		
1	4111	1111234	1222234	1233334	1234444	$7! \div 4! \times 3$	630
1	2221	1122334	1122344	1123344	1223344	$7! \div (2! \times 2! \times 2!) \times 4$	2520
1	3211	1112234	1112334	1112344	2221134	$7! \div (3! \times 2!) \times 12$	5040
		2221334	2221344	3331124	3331224		
		3331244	4441124	4441224	4441244		

以 2221 為例：因為第一手固定，所以還剩下七手可以考慮，則 $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 種 (可以寫成 $7!$)；有 3 種兩個數相同，因此交換後答案一樣，則除以 $2! \times 2! \times 2!$ ；有 4 種不同組合情況，則乘以 4。

因此到第八手 2221 的總盤數 $= 7! \div (2! \times 2! \times 2!) \times 4 = 2520$ 以此類推。可將計算表列。

所以全部下到第八手共有： $315 + 1890 + 2520 + 630 + 2520 + 5040 = 14595$ 盤。

下到第十手有幾盤？

當第一子固定出現 1 時，到第十手共有九個數字， $a+b+c+d=9$ 。將可能的組合情況列於組和欄 (同一個數字最少可能出現 0 次、最多可能出現 4 次)，組合欄中紅色字體為不合理的組合 (1 出現 5 次)。

第一子	$a+b+c+d=9$	組合欄			計算	盤數
1	4410	122224444	122223333	222234444	$9! \div (4! \times 4!) \times 6$	3780
		222233334	133334444	233334444		
1	4320	111222233	111222244	112222444	$9! \div (4! \times 3! \times 2!) \times 18$	22680
		112222333	222233444	222233344		
		111223333	111333344	113333444		
		112223333	223333444	222333344		
		111224444	111334444	113334444		
		112224444	223334444	222334444		
1	3330	111222333	111222444	111333444	$9! \div (3! \times 3! \times 3!) \times 4$	6720
		222333444				
1	4311	111122234	111123334	111123444	$9! \div (4! \times 3!) \times 9$	22680
		122223334	122223444	123333444		
		111233334	122233334	123334444		
		111234444	122234444	111222234		
1	4221	122223344	112222334	112222344	$9! \div (4! \times 2! \times 2!) \times 9$	34020
		112333344	122333344	112233334		
		122334444	112334444	112234444		
1	3222	111223344	112223344	112233344	$9! \div (3! \times 2! \times 2! \times 2!) \times 4$	30240
		112233444				
1	3321	111222334	111222344	111223334	$9! \div (3! \times 3! \times 2!) \times 12$	60480
		111223444	111233444	111233344		
		112223334	112223444	112333444		
		122333444	122233444	122233344		

以 3321 為例：因為第一手固定，所以還剩下九手可以考慮，則 $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 種 (可以寫成 $9!$)；有 1 種兩個數相同，因此交換後答案一樣，則除以 $2!$ ，有 2 種三個數相同，交換後答案一樣，則除以 $3! \times 3!$ ；有 12 種不同組合情況，則乘以 12。

因此到第十手 3321 的總盤數 $= 9! \div (3! \times 3! \times 2! \times 1!) \times 12 = 60480$ 以此類推。可將計算表列。

所以全部下到第十手共有： $3780 + 22680 + 6720 + 22680 + 34020 + 30240 + 60480 = 180600$ 盤。

下到第十六手有幾盤？

當第一子固定出現 1 時，到第十手 $a+b+c+d=15$ 代表其他同一個棋子出現的次數，將可能的組合情況列於組和欄(同一個數字最少可能出現 0 次、最多可能出現 4 次)。

第一子	$a+b+c+d=15$	分組
1	4443	111222233334444

因為第一手固定,所以還剩下十五手可以考慮，就只有 3444 的分配方式，則 $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ 種(可以寫成 $15!$)；有 3 種四個數相同，因此交換後答案一樣，則除以 $4!4!4!$ ，有 1 種三個數相同，交換後答案一樣，則除以 $3!$ ；有 1 種不同組合情況，則乘以 1。

所以全部下到第十六手有： $15! \div 3! \times 4! \times 4! \times 4! \times 1 = 15765750$ 盤。

這邊我們可以看到下到第 8 手的盤面總數，平方以後差不多是下完 16 手的盤面總數，也驗證了我們用非隨機下法時，利用電腦排到第 8 手之後用人工判讀是一個不錯的選擇。如果排到第 6 手，則人工判讀的難度會增加很多，因為每一個盤面往後的發展有太多可能；如果排到第 10 手，則需要判讀的盤數會約為排到第 8 手的盤數的 10 倍，光列印資料就是一件很可怕的事情。

評語

富趣味性、唯僅為經驗的歸納，學術性或實用性的價值不高。但團隊間的合作與默契十足。