

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

國小組

數學科

科別：數學科

組別：國小組

作品名稱：公因數的妙用

關鍵詞：最大公因數、互質、整數解

編號：080405

學校名稱：

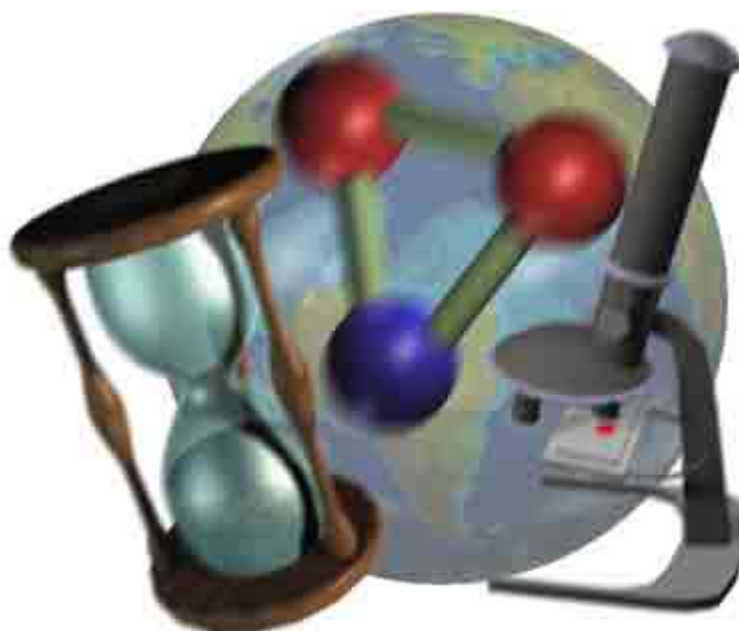
高雄市三民區愛國國民小學

作者姓名：

陳閔鈺、鐘博宇、劉翰穎、邱鈺庭、陳秉謙

指導老師：

曹秀美、王雅芳



摘要

本研究在探討任意二個正整數 a, b 的最大公因數與 $a - b$ 、 b (或 a) 的關係；並將公因數的觀念應用於解決日常生活中的數學問題。

一、結果發現：

- (一) 若 a, b 不互質，即 $(a, b) = d > 1$ ，則必須 d 為 c 的因數， $ax + by = c$ 才有 x, y 的整數解。並且找出如何得到 x, y 的整數解的具體方法。
- (二) 若 a, b 互質且 α, β 是 $ax + by = c$ 的一組整數解，那麼 x 的任意整數解就可表成是 $\alpha + bk$ ， y 的任意整數解就可表成是 $\beta - ak$ 。其中 k 為任意整數(或 x 的解是 $\alpha - bk$ ， y 的解是 $\beta + ak$ 亦可)。

二、在公因數的應用上則得出：

- (一) 任意給定二個容量為 a, b 的容器時，可先判斷能否量出容量為 c 大小的溶液；若能量出，則由 $ax + by = c$ 的整數解，就可以有一相對應的準則，能很有規律地倒出容量為 c 的步驟與方法。
- (二) 如果要將一容量平分成二等分，第一步驟仍要先判斷是否有解；有解之後，再求出一整數解，然後再仿(一)的方法進行平分動作。
- (三) 利用求整數解的過程，也順道解決了：某整數 x 除以 m 餘 a ，除以 n 餘 b ，但 $m - a \neq n - b$ 時，我們找到至少一組求出整數 x 的方法。

壹、研究動機

一、有一次，老師要我們去算二個數 675 與 100 的最大公因數，但我一時糊塗卻把 675 看成是 575，心想這下一定完蛋了，可是沒想到，咦！答案竟然一樣都是 25 耶！

因為 675 與我看錯的數字 575 恰好相差 100，也就是剛好要求最大公因數的另外那一個數字，於是我就興起一個念頭：任意二個正整數 a, b 的最大公因數，是否必等於 $a - b$ 與 b (或 a) 的最大公因數？

二、有一次實驗課，老師給了我們兩個容量為 3 公升與 5 公升的大小寶特瓶，要我們去量出 4 公升，我們費了好大的功夫，來來回回亂倒一通才得出 4 公升的水容量。才過沒多久，我們就已經把剛才如何得出 4 公升的方法忘掉了，等下一組的人要倒時，我們也沒法作經驗傳承。於是就興起一個念頭，想要去探討：該如何找出一固定倒的方法來，而不會盲目浪費掉許多手續？於是我就把這個疑問去問老師，就在老師的帶領下，開始探討這個有趣的數學問題。

貳、研究目的

- 一、探討任意二個正整數 a, b 的最大公因數與 $a - b, b$ (或 a) 的關係。
- 二、將公因數的觀念應用於日常生活中，解決日常生活中的數學問題。

參、研究過程與方法

- 一、找出任意二個正整數 a, b 的最大公因數與 $a - b, b$ (或 a) 的關係。

(一)驗證任意二個正整數 a, b 的最大公因數，是否必等於 $a - b$ 與 b (或 a) 的最大公因數？

【例 1】675 與 100： $(675, 100) = (675 - 100, 100) = (575, 100) = 25$

【例 2】32 與 24： $(32, 24) = (32 - 24, 24) = (8, 24) = 8$

【例 3】72 與 132： $(72, 132) = (72, 132 - 72) = (72, 60) = 12$

…… 等等，屢試不爽，於是我們整理出如下的定理：

定理一：對任意兩正整數 a, b ，若 $a > b$ ，則必 $(a, b) = (a - b, b)$

(二)既然得知 $(a, b) = (a - b, b)$ ，我們可再次使用定理一，繼續減一次 b ，即 $(a - b, b) = (a - b - b, b) = (a - 2b, b)$

重複這個步驟，一直到減掉最多次的 b ，而還能保持 $a - kb$ 該數是正的為止，由定理一知道這二數的最大公因數仍然不變。於是由定理一，就可以衍生出如下的定理：

定理二：對任意兩正整數 a, b ，若 $a > b$ 且 k 為整數使 $a - kb > 0$ ，則

$$(a, b) = (a - kb, b)$$

【例 4】利用定理二，求 $(264, 84)$

【解】由於 $264 - 3 \times 84 = 264 - 252 = 12$

$$\text{故 } (264, 84) = (12, 84) = 12$$

(三)由於被除數 = 除數 $\times$ 商數 + 餘數，故當 $a \div b$ ，商數是 k ，餘數為 r 時，則其關係為 $a = bk + r \Rightarrow a - bk = r$ ，也就是說：

$$(a, b) = (r, b), \text{ 其中 } r \text{ 為 } a \text{ 除以 } b \text{ 之餘數}$$

真正在作數字較大的運算時，其實我們也可以重複地使用定理二，就可以不斷地降低數字大小，以方便我們求出最大公因數。

【例 5】重複利用定理二，求 $(870, 319)$

【解】由於 $870 = 319 \times 2 + 232 \Rightarrow (870, 319) = (232, 319)$

$$\text{又因 } 319 = 232 \times 1 + 87 \Rightarrow (232, 319) = (232, 87)$$

$$\text{又因 } 232 = 87 \times 2 + 58 \quad \Rightarrow \quad (232, 87) = (58, 87)$$

$$\text{又因 } 87 = 58 \times 1 + 29 \quad \Rightarrow \quad (87, 58) = (29, 58)$$

最後因 58 為 29 之倍數，故兩數之最大公因數為 29

$$\text{於是我們得知 } (870, 319) = 29$$

以上的例子總共經過四次步驟才決定出其最大公因數，我們將此四式再整理一遍，現在就是要利用這四個等式來求出整數解。為了解說方便，我們把每個等式作記號：

$$870 = 319 \times 2 + 232 \quad \text{--- (\#)}$$

$$319 = 232 \times 1 + 87 \quad \text{--- (\$)}$$

$$232 = 87 \times 2 + 58 \quad \text{--- ()}$$

$$87 = 58 \times 1 + 29 \quad \text{--- (\&)}$$

由 (\&) 開始，移項後得

$$29 = 87 - 58 \times 1 = 87 - (232 - 87 \times 2) \times 1$$

由 () 移項後而得
 $232 - 87 \times 2 = 58$

$$= 3 \times 87 - 1 \times 232 = 3 \times (319 - 232 \times 1) - 1 \times 232$$

由 (\\$) 移項後而得
 $319 - 232 \times 1 = 87$

$$= 3 \times 319 - 4 \times 232 = 3 \times 319 - 4 \times (870 - 2 \times 319)$$

由 (\#) 移項後而得
 $870 - 2 \times 319 = 232$

$$= 870 \times (-4) + 319 \times 11$$

也就是說，我們在找二數 870 與 319 的最大公因數過程中，順道找到了二整數 -4 與 11，使得這些整數組合起來恰成為其最大公因數，即：

$$870 \times (-4) + 319 \times 11 = 29$$

這兩個整數是由除法一步步除完後，再每次都把餘數替換掉後得出來的，所以對其他任意兩個整數也都能找得到，於是我們又得出如下的定理：

定理三：對任意兩正整數 a, b ，必可找到兩整數 x, y ，使得

$$ax + by = (a, b)$$

【例 6】找出二整數 x, y ，使得 $207x + 81y = (207, 81)$

【解】 由 $207 = 81 \times 2 + 45$ ----- (#)，即 $(207, 81) = (81, 45)$

$$81 = 45 \times 1 + 36 \text{ ----- } (\$), \text{ 即 } (81, 45) = (45, 36)$$

$$45 = 36 \times 1 + 9 \text{ ----- } (), \text{ 即 } (45, 36) = (36, 9) = 9$$

$$\text{故 } (207, 81) = 9$$

$$\text{從 } () \text{ 開始，移項後得 } 9 = 45 - 36 \times 1$$

$$= 45 - (81 - 45 \times 1) \times 1$$

$$= 45 \times 2 - 81$$

$$= (207 - 81 \times 2) \times 2 - 81$$

$$= 207 \times 2 + 81 \times (-5)$$

故取 $x = 2, y = -5$ 即為所求

(四)定理三是保證我們一定可以找到這樣的兩個整數會滿足該條件而已，但這組

答案非唯一的，例如像 $x = 11, y = -28$ 也可滿足上式，即 $207 \times 11 + 81 \times (-28) = 9$

接下來我們要探討的狀況是：對任意的兩正整數 a, b ，是否可以找到二整數 x, y ，使得 $ax + by = c$ ，其中 c 為任意整數而非 (a, b) ？針對這問題，仍然可以由定理三加以深入，便可解決。結論如下：

1. 若 a, b 互質，即 $(a, b) = 1$ ：

此時由定理三，知必有兩整數 m, n ，使得 $am + bn = 1$

兩邊同時乘上 c ： $amc + bnc = c$

將 x 視為 mc, y 視為 nc 即可

【例 7】求兩整數 x, y ，使得 $13x + 8y = 3$

【解】 因 $(13, 8) = 1$ ，故先找滿足 $13x' + 8y' = 1$ 的整數解 x', y'

$$13 = 8 \times 1 + 5, 8 = 1 \times 5 + 3, 5 = 1 \times 3 + 2, 3 = 1 \times 2 + 1$$

$$\text{由 } 1 = 3 - 1 \times 2 = 3 - (5 - 1 \times 3) = 2 \times 3 - 5$$

$$= 2 \times (8 - 5) - 5 = 2 \times 8 - 3 \times 5$$

$$= 2 \times 8 - 3 \times (13 - 8) = 13 \times (-3) + 8 \times 5$$

$$\text{取 } x' = -3, y' = 5$$

$$\text{接著將該式全部各乘上 } 3 \text{ 得：} 13 \times (-9) + 8 \times 15 = 3$$

故取 $x = -9, y = 15$ 即為所求的一組整數解

2. 若 a, b 不互質，設 $(a, b) = d > 1$ ：

由於 d 是 a, b 的最大公因數，也就是說 a, b 均為 d 之倍數，可設 $a = dh$ ， $b = dk$ ，其中 h, k 為互質的正整數（否則會跟 d 是 a, b 的最大公因數矛盾，因為可以找到一個比 d 更大的公因數），將之代入 $ax + by = c$ 中得：

$$dhx + dky = c \Rightarrow d(hx + ky) = c \Rightarrow hx + ky = \frac{c}{d}$$

因 h, k, x, y 均為整數，所以 $hx + ky$ 亦必為整數，故 $\frac{c}{d}$ 為

整數，因此唯一的可能就是 c 必須是 d 的倍數，才有可能有整數解。綜合以上的討論，我們又可歸納得如下定理：

定理四：對任意兩正整數 a, b ，若 (a, b) 是 c 的因數，則必可找到二整數 x, y ，滿足 $ax + by = c$

有了以上這些定理，我們就可以將其應用到其他領域裡：

二、將公因數的觀念應用於實際層面，以解決日常生活中的數學問題。

(一)討論至此，我們已經把主要的問題解決了，今任給兩個沒有刻度，容量分別為 a, b 的不同容器，應如何才能量出我們所需的容量 c ？首先當然是先根據定理四判斷是否能量出，可以量出後，再根據定理三的方法求出二組整數解 x, y ，然後根據 x, y 的解，照此方式來來回回的倒就可完成啦！且看以下實例：

【例 8】有二個容器分別為 9 公升和 5 公升，利用他們來量出 2 公升

【解】因 9, 5 互質，即 $(9, 5) = 1$ 且 1 為 2 的因數，故必有滿足 $5x + 9y = 2$ 的整數解 x, y 。即必可量出 2 公升的容量：

$$\text{由 } 9 = 5 \times 1 + 4 \quad ; \quad 5 = 4 \times 1 + 1$$

$$\text{故 } 1 = 5 - 4 \times 1 = 5 - (9 - 5) \times 1 = 5 \times 2 + 9 \times (-1)$$

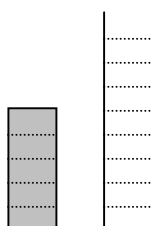
$$\text{各乘上 2 得 } 2 = 5 \times 4 + 9 \times (-2)$$

取 $x = 4, y = -2$ ；亦即 5 公升的容器必須倒滿過 4 次，9 公升的容器必須倒出過 2 次，所以遵循以下原則去倒：

(1) 5 公升的容器隨時將之補滿，而在補滿前，若有殘餘溶液，先將該容器淨空，也就是倒入 9 公升的容器中。

(2) 9 公升容器的溶液來源，均來自於 5 公升的容器，一直到填滿為止，滿了，就將之倒掉或倒出至其他暫存的容器中。

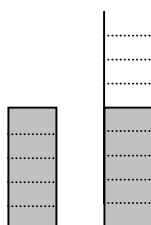
按此準則依序倒，必可完成目標。為方便說明，我們將之繪圖如下：(容器內的虛線為方便解說之用)



【因 $x=4$ ，即 5 公升的容器必須倒滿過四次，此為第一次】



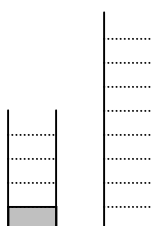
【因 $y=2$ ，即 9 公升的容器必須倒出二次，而倒出前須先補滿，故將 5 公升容器的溶液倒進來】



【5 公升的容器必須倒滿過四次，此為第二次】



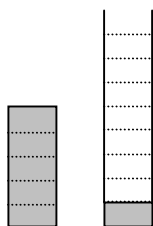
【9 公升的容器必須倒出二次，而倒出前需先補滿，故將 5 公升容器溶液倒 4 公升過來】



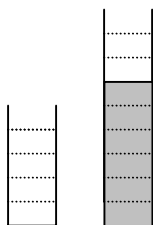
【9 公升的容器必須倒出二次，此為第一次】



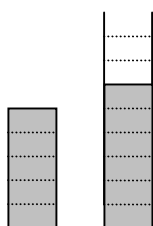
【5 公升的容器裝滿前，先將其淨空】



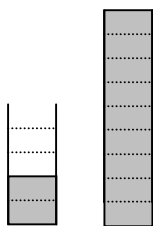
【5 公升的容器必須倒滿過四次，此為第三次】



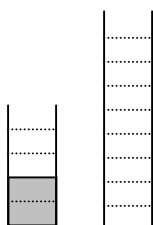
【9 公升的容器必須倒出二次，而倒出前盡量將其補滿】



【5 公升的容器必須倒滿過四次，此為第四次】



【從 5 公升容器倒 3 公升到 9 公升的容器以補滿之】



【將 9 公升的容器倒掉，就大功告成啦！】

為了更清楚倒的順序，我們將兩容器內的容量變化列表如下，就可以更明瞭來來回回的步驟而不會手忙腳亂了。

	第一次倒滿		第二次倒滿				第三次倒滿		第四次倒滿	
5 公升容器	5	0	5	1	1	0	5	0	5	2
9 公升容器	0	5	5	9	0	1	1	6	6	9
	第一次倒出								第二次倒出	

只要掌握此要領，便可得知有怎樣的整數解，就相對應一種倒的方法，最後必可得出所要的容量大小。什麼要領呢？也就是得出正整數解的那個容器，一空下來，就立刻將之補滿，且在補滿前要先將之淨空，而淨空的方法就是先倒到另一容器中；此外，得出負整數解的那個容器，必須盡其所能的將其補滿後倒到其他暫存的緩衝容器中(或倒掉)。

【例 9】有二個容器為 12 公升和 8 公升，利用他們來量出 5 公升。

【解】由於 $(12, 8) = 4$ 而 4 又不是 5 的因數，故絕不存在二整數 x, y 使得 $12x + 8y = 5$ ，故再如何來來回回的倒取，都不可能利用 12 公升和 8 公升來量出 5 公升。

【例 10】利用容量為 10 公升和 16 公升的容器來量出 4 公升

【解】由於 $(10, 16) = 2$ 而 2 又是 4 的因數，故由定理四知存在二整數 x, y 使得 $10x + 16y = 4$

各除 2 得 $5x + 8y = 2$

仿照例 8 的方法可以很快獲得 $x = 2, y = -1$ ；

即 $5 \times 2 + 8 \times (-1) = 2 \Rightarrow 10 \times 2 + 16 \times (-1) = 4$

(二)雖然已經大致能夠解決一些問題了，但是我們又發現了這種解法有一個很大的缺陷。

如以 9 公升和 7 公升的容器要量出 4 公升為例，若我們

以上面的方法，會得到如下的整數解：

由於 $9 = 7 \times 1 + 2$ ； $7 = 2 \times 3 + 1$

故 $1 = 7 - 2 \times 3 = 7 - (9 - 7) \times 3 = 7 \times 4 + 9 \times (-3)$

再各乘上 4 後得： $4 = 7 \times 16 + 9 \times (-12)$

故取 $x = 16, y = -12$

哇！好大的一組解，而事實上，我們如果以簡單的心算，就可得知其實只要 $x = -2, y = 2$ 就可以了，即 $4 = 7 \times (-2) + 9 \times 2$ ，這不是簡單多了嗎？為什麼透過求最大公因數的方法，反而更麻煩呢？

這是因為有二個未知數，而只有一個關係式，其解本來就是有無限多個，因此接下來的問題，就是要找出哪一組解，才是使我們操作次數最少、最能滿足我們需求的整數解。

首先我們從較簡單的數字出發，考慮如下的方程式： $3x + 2y = 1$ ，很容易就可以將所有滿足該方程組的所有解列出如下：

x	1	3	5	7	
y	-1	-4	-7	-10	

以上可發現， x 的解往右每次都增加 2，而 2 恰好就是方程式 $3x+2y=1$ 中 y 的係數；上表中 y 的解往右每次都減少 3，而 3 恰好就是方程式 $3x+2y=1$ 中 x 的係數。試過幾次後，我們發現都有這樣的規律。

另外我們還發現這個規律必須要在 x, y 的係數是互質的條件才會成立，若 x, y 不互質，就必須先把其最大公因數除掉才會成立。以 $6x+4y=2$ 為例，若不將 $(6, 4)=2$ 除掉，則可知 $6x+4y=2$ 的整數解列表如下為：

x	1	5	9	13		(每次增加 4)
y	-1	-7	-13	-19		(每次減少 6)

事實上， $x=3, y=-4$ 仍可滿足 $6x+4y=2$ ，但在上表中卻漏掉了！於是我們將以上的發現寫成更一般化的結論為：

若 a, b 互質且 α, β 為 $ax+by=c$ 的一組整數解，則 x 的解可為 $\alpha+bk$ ，而 y 的解可為 $\beta-ak$ ，也就是隨著整數 k 的變化，每一個 k 都可以得到滿足方程式的一組整數解 x, y ；亦即 x 的解每次都會增加一固定間隔 b （即 y 的係數），而 y 的解每次都會減少一固定間隔 a （即 x 的係數）。因此我們只要利用定理四，先找出滿足 $ax+by=c$ 的一組原始整數解，就可以利用此解，找到符合我們需求的整數解，我們用一個例子整個統合如下：

【例 11】用 12 公升與 7 公升的容器量出 3 公升

【解】 先找方程組 $12x+7y=3$ 的一組整數解：

$$\text{因 } 12 = 7 \times 1 + 5 \quad ; \quad 7 = 5 \times 1 + 2 \quad ; \quad 5 = 2 \times 2 + 1$$

$$\text{故 } 1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2 \times (7 - 5) = 3 \times 5 - 2 \times 7$$

$$= 3 \times (12 - 7) - 2 \times 7 = 12 \times 3 + 7 \times (-5)$$

$$\text{各乘以 3 得 } 3 = 12 \times 9 + 7 \times (-15), \text{ 取 } x=9, y=-15$$

接著 x 的其他解會每次增加 7（即 y 的係數）；而 y 的其他解會

每次減少 12（即 x 的係數），將之列表如下：

x	2	9	16	23		(每次增加 7)
y	-3	-15	-27	-39		(每次減少 12)

由表可知，取 $x=2, y=-3$ 應是最佳的一組整數解，接著利用

例 8 的要領，即可簡單快速的量出 3 公升。

接著我們再以一個數字較大的例子，來說明我們所找到的方法，的確是可行且是非常方便的：

【例 12】用 55 公升與 32 公升的容器量出 13 公升

【解】 先找方程組 $55x + 32y = 13$ 的一組整數解：

$$\text{因 } 55 = 32 + 23 \quad ; \quad 32 = 23 + 9 \quad ; \quad 23 = 2 \times 9 + 5 \quad ;$$

$$9 = 5 + 4 \quad ; \quad 5 = 4 + 1$$

$$\text{故 } 1 = 5 - 4 = 5 - (9 - 5) = 2 \times 5 - 9 \times 1 = 2 \times (23 - 9 \times 2) - 9 \times 1$$

$$= 2 \times 23 - 5 \times 9 = 2 \times 23 - 5 \times (32 - 23) = 7 \times 23 - 32 \times 5$$

$$= 7 \times (55 - 32) - 32 \times 5 = 55 \times 7 + 32 \times (-12)$$

$$\text{各乘以 13 得 : } 13 = 55 \times 91 + 32 \times (-156)$$

取 $x = 91, y = -156$ 為其原始的一組整數解。

而其他的各組整數解為：

x	91	59	27	-5	-37		(每次減少 32)
y	-156	-101	-46	9	64		(每次增加 55)

由表可知， x 每次都會減少 32，而 y 每次都必須增加 55。其他的整數解都會造成我們倒的次數太多。所以最理想的整數解應是：

$x = -5, y = 9$ 。由於畫出倒的過程太佔篇幅，故我們只以表格代表每執行一個步驟後，兩容器目前所裝的溶液量，由此應可看出完成的整個過程：

55 公升	0	32	32	55	0	9	9	41	41	55	0	18	18	50
32 公升	32	0	32	9	9	0	32	0	32	18	18	0	32	0

55 公升	50	55	0	27	27	55	0	4	4	36	36	55	0	
32 公升	32	27	27	0	32	4	4	0	32	0	32	13	13	

由以上兩容器內溶液量的數字變化，可知其依然堅守前面說過的原則：

因 $13 = 55 \times (-5) + 32 \times 9$ ，故 55 公升要被倒掉 5 次，而每次倒掉前一定要先補滿再倒；另外 32 公升要被倒滿過 9 次，而要倒滿前若容器內有剩餘的溶液，要先淨空，而淨空的方法是一律放入 55 公升的容器中。如此一步步便可完成工作了。

(三)接著，我們要探討利用二容器將一固定容量平分成二等份的問題。而這個問題與前面問題的差別在於溶液不能無限制地供應，只能就目前現有的三個容器去來來回回的倒，然而解決的第一步驟仍是先判斷是否有解；有解之後再進行第二步驟，即先求出一整數解，再依此整數解進行平分的動作。且看下列：

【例 13】用 9 公升與 4 公升的容器將裝滿 14 公升水的容器二等分

【解】 14 公升的一半是 7 公升，故我們要先量出 7 公升。

由於 9 與 4 互質，故必有滿足 $9x + 4y = 7$ 的 x, y 整數解

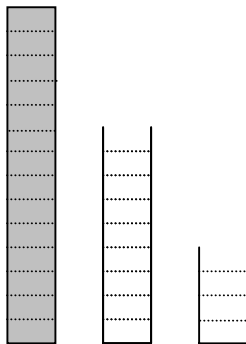
因 $9 = 2 \times 4 + 1 \Rightarrow 1 = 9 \times 1 + 4 \times (-2)$

各乘上 7 得： $7 = 9 \times 7 + 4 \times (-14)$

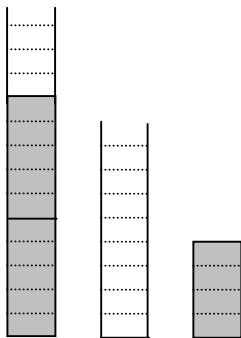
取 $x = 7, y = -14$ 為原始整數解，但因數字太大，故考慮下表：

x	7	3	-1		(每次減少 4)
y	-14	-5	4		(每次增加 9)

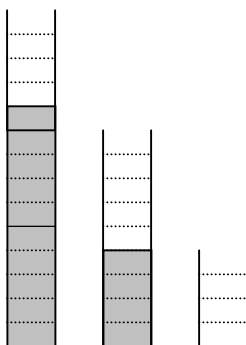
可知取 $x = -1, y = 4$ 為最理想的解，其對應的倒法，繪圖如下：



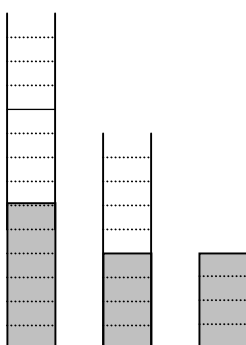
【初始狀態】



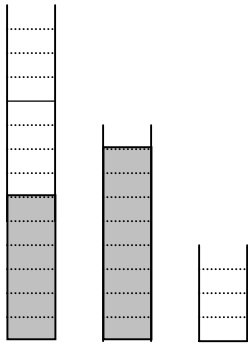
【因 $y = 4$ ，故 4 公升需倒滿過 4 次，此為第一次】



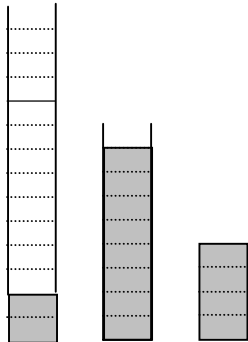
【因 $x = -1$ ，故 9 公升需倒掉 1 次，故需先倒滿後再倒出】



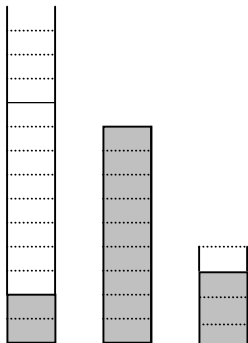
【此為第二次將 4 公升容器倒滿】



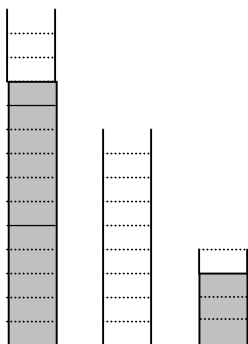
【為要倒掉一次 9 公升容器，需先將之漸漸倒滿】



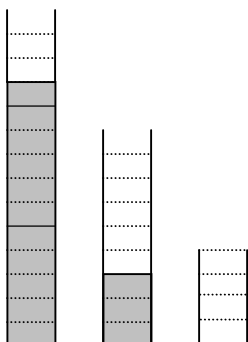
【此為第三次將 4 公升容器倒滿】



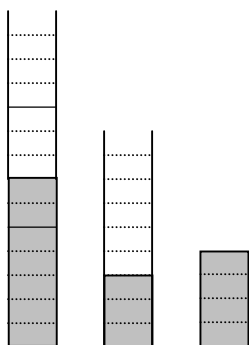
【為要倒掉一次 9 公升容器，需先將之倒滿】



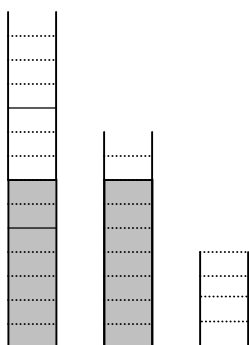
【將 9 公升容器倒掉了】



【暫且以 9 公升容器為緩衝器】



【此為第四次將 4 公升容器倒滿】



【完成工作了！】

由於溶液不能無限制的供應，只能就現有的容量去二等分，故即使求出整數解後，要依照解去來來回回的倒，也要特別注意其順序，方能完成使命！

(四)最後，我們要利用以上所得的知識，來探討當餘數與除數的差，並非一固定常數時，如何求被除數及新餘數的問題。

【例 14】有一次小明生日，他帶了一包糖果到學校請同學，當他進教室時，班上共有 5 個人，當把糖果平均分給每人後會剩下 3 個；這時又進來了 3 人共有 8 人，若把糖果收回後重新平均分配，會剩下 1 個；最後全班同學共 40 人全部都進到教室了！這時若再收回後重新分配一次，該會剩下幾個呢？

【解】由於第一次分給 5 人是剩下 3 個，所以糖果數可設是 $5x + 3$ 又第二次分給 8 人是剩下 1 個，所以糖果數可設是 $8y + 1$

因糖果總數都相等，設糖果數 $n = 5x + 3 = 8y + 1$ ----- (\$)

由上式移項得 $5x - 8y = -2$

由於 $8 = 1 \times 5 + 3$ ； $5 = 1 \times 3 + 2$ ； $3 = 1 \times 2 + 1$

$\Rightarrow 1 = 3 - 1 \times 2 = 3 - 1 \times (5 - 3) = 2 \times 3 - 1 \times 5$

$= 2 \times (8 - 1 \times 5) - 1 \times 5 = 5 \times (-3) - 8 \times (-2)$

各乘上 -2 得 $-2 = 5 \times 6 - 8 \times 4$

取 $x = 6, y = 4$ 為其原始整數解，而其他整數解為：

x	-2	6	14		(每次減少 -8)
y	-1	4	9		(每次增加 5)

即 x 的解每次均減少 -8 (增加 8) ; y 的解每次均增加 5

故 x 的解可表為 $x = 6 - (-8)t = 6 + 8t$

y 的解可表為 $y = 4 + 5t$

將 $x = 6 + 8t$ (或 $y = 4 + 5t$ 亦可) 代入 (\$) 式可得

$$n = 5x + 3 = 5(6 + 8t) + 3 = 40t + 33$$

這便告訴我們 , 糖果數量可以寫成為 $40t + 33$ 的形式 , 每一個整數 t , 就有一個對應的整數解 n , 而這樣的 n 必能滿足除以 5 會餘 3 且除以 8 會餘 1 ; 將之表列如下 :

t	0	1	2	3	
n	33	73	113	153	

所以小明只要告訴我們他買的那一包糖果數量大約是多少 , 我們就可以告訴他確實的數量 , 若是 100 顆左右 , 那就是 113 顆 ; 若是 150 顆左右 , 那就是 153 顆。而不管是幾顆 , 把這些糖果全部分給全班 40 個人 , 都會剩下 33 顆。

肆、結論

- 一、 對任意兩正整數 a, b , 若 $a > b$ 且 k 為整數使 $a - kb > 0$, 則 $(a, b) = (a - kb, b)$ 。
- 二、 對任意兩正整數 a, b , 可以有一固定而準確的方法 , 必可找到兩整數 x, y , 使得 $ax + by = (a, b)$ 。
- 三、 若 a, b 不互質 , 即 $(a, b) = d > 1$, 則必須 d 為 c 的因數(即 c 是 d 的倍數) , $ax + by = c$ 才有 x, y 的整數解。
- 四、 若 a, b 互質且 α, β 是 $ax + by = c$ 的一組整數解 , 那麼 x 的任意整數解就可表成是 $\alpha + bk$, y 的任意整數解就可表成是 $\beta - ak$ 其中 k 為任意整數(或 x 的解是 $\alpha - bk$, y 的解是 $\beta + ak$ 亦可)。
- 五、 任意給定二個容量為 a, b 的容器 ,
 - (1)可判斷能否量出容量為 c 大小的溶液。
 - (2)若能量出 , 則由 $ax + by = c$ 的整數解 , 就可以有一相對應的準則 , 能很有規律地倒出容量為 c 的步驟與方法。

- 六、 如果要將一容量平分成二等分，第一步驟仍要先判斷是否有解；有解之後，再求出一整數解，然後再進行平分動作。
- 七、 利用求整數解的過程，也順道解決了：某整數 x 除以 m 餘 a ，除以 n 餘 b ，但 $m - a \neq n - b$ 時，我們找到至少一組求出整數 x 的方法。

伍、參考書目

- 一、查孟華譯：數學推敲。新竹市：凡異出版社。46-48 頁，民 85。
- 二、何珍梅等編：國小數學課本第九冊。91 年 8 月新版。台南市：南一書局。11-18 頁，民 91。

陸、心得與展望

- 一、 經過三、四個月的討論與研究，我們發揮團結合作的精神，並運用大家的腦力，終於完成研究內容，我們發現只要用心去探索，數學就會變得很有趣。
- 二、 經過這次的研究，我們在液體(如果汁)或糖果的分配上就沒有煩惱了，即使是沒有刻度的杯子，要量出所需的容量、要平分一杯果汁或分糖果時餘數不規則等，我們都把它們變得容易多了。



評語

將觀察嘗試之結果視為定理，不符合科學方法，唯能將理論應用於容器之測量與容量評分上，適合融入公因數之應用教材。