中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯
高中組

數學科

科別：數學科

組別：高中組

作品名稱：將錯就錯的 Knuth 河內塔

關鍵詞：Knuth 河內塔、對稱點、費波那契數真分數排序

編號：040418

學校名稱：

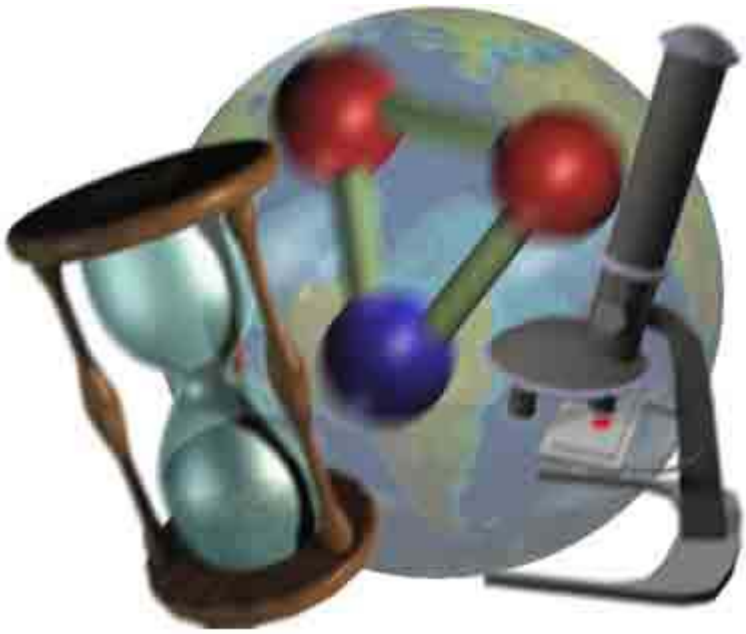
台北市立建國高級中學

作者姓名：

余相莆、李安盛

指導老師：

游森棚、簡晏仔



摘要

在這篇報告中，我們探索了「將錯就錯的 Knuth 河內塔」問題。這個問題和原始高中課程的河內塔問題非常相似，起因於數學家 Knuth 的一次筆誤(詳細問題的定義見內文)。在這個新的規則之下，我們意外發現有深刻的數學內涵及令人意外的數學連結：與電腦演算法、正整數的分割、數列的同餘、分子分母皆為費波那契數的真分數之排序都有密切的關係。我們做出了以下結果(分別為內文中的三大段)：

(一) **結構分析。**移動環所需要的次數，如何移動環並分析每一次動作所動的環，及每個環何時被動到並給出演算法。

(二)**正整數的分割。**所有的移動步驟將將正整數做了一個新的分割(Partition)；此分割模 k 之後有良好的循環性質。

(三)**費波那契真分數的排序。**這個正整數的分割形成一張表，這張表恰好就是分子分母皆為費波那契數的真分數之排序。

壹、研究動機及目的

在最近的一篇論文[1]中，Stanford 大學著名的數學家 Donald E. Knuth 以如下的敘述說明在高中課本中我們所熟知的河內塔問題：

> 「*Do people know the 'Tower of Hanoi's problem? You have 3 pegs, and you have disks of different sizes. You're supposed to transfer the disk from one peg to another, and the disks have to be sorted so that the biggest is always at the bottom. You can move only disk at a time.*」
>
> 「你們知道河內塔問題嗎？你有 3 根柱子和一些不同尺寸的環，你應該要將這些環從一根柱子移到另一根柱子上，而且這些環必須要把**最大**的環排在最下面。你一次只能動一個環。」

這顯然是 Knuth 的筆誤。因為原本河內塔的規則是，在任何地方、任何時候，**較大**的環都不能在較小的環上面。這個筆誤被 Stanford 大學的 J. McCarthy 教授發現，他問了一個有趣的問題：

「將錯就錯按照 Knuth 的規則，河內塔問題會變得如何？」

這篇報告就是對於這個將錯就錯的 Knuth 河內塔問題做一個全面的探討。

貳、研究設備及器材

(一) 紙 非常多張
(二) 筆 很多枝
(三) 電腦 一台
(四) Math Type 5.1 一套
(五) Microsoft Word XP 一套

參、研究過程及方法

（零）Knuth 河內塔

我們在此重新敘述 Knuth 河內塔問題：一開始有 3 根柱子和一些不同尺寸的環，這些環由小到大、由上到下排列在一根柱子上，現在要將這些環全部移到另一根柱子並由小到大、由上到下排列。每次只能移動一個環，但是在移動的過程中，每根柱子上**最大**的環必須在最下面。在這個規則之下，河內塔問題會變得如何？

我們首先舉一個 5 個環的例子（$m=5$）。在這裡框代表柱子，數字編號代表環，編號越大代表環的直徑越大。

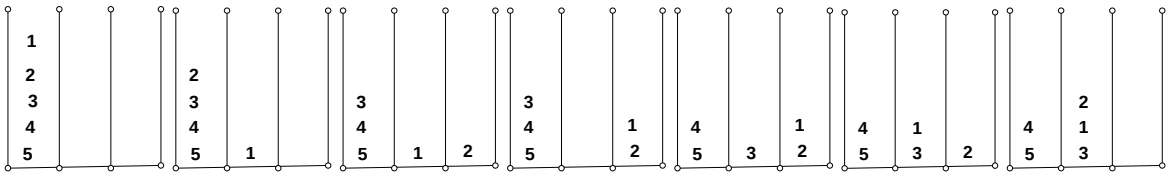


fig1 fig2 fig3 fig4 fig5 fig6 fig7

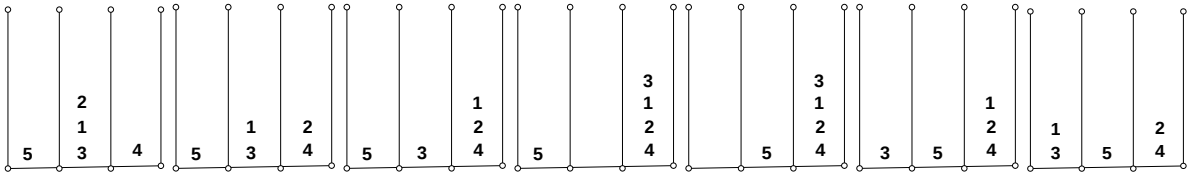


fig8 fig9 fig10 fig11 fig12 fig13 fig14

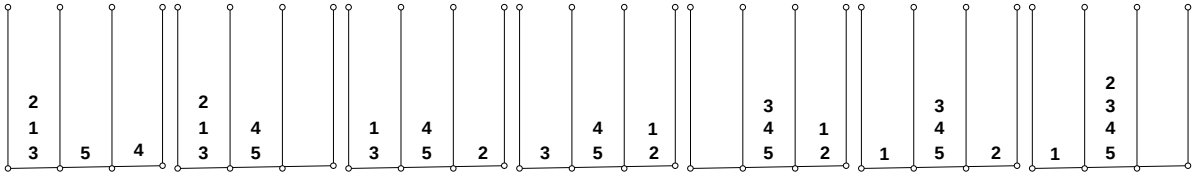
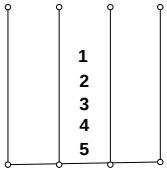


fig15 fig16 fig17 fig18 fig19 fig20 fig21



共需 21 次動作。

fig22

我們要在此強調 Knuth 河內塔規則和高中課本中熟知的河內塔規則非常相似，但完全不同。按照 Knuth 河內塔規則，它只需要 21 次動作，而在原本河內塔規則中卻需要 $2^5-1=31$ 次動作。

以下我們分三節來討論

(一) **Knuth 河內塔結構分析**

(二) **正整數的分割**

(三) **費波那契真分數的排序**

(一) Knuth 河內塔結構分析

1、 移動所有環所需要的次數

一開始我們如同原來的河內塔一樣，先計算移動所有環所需要的次數，我們的策略是觀察移動環的過程，找出一般的規律，並給出遞迴式計算移動所有環所需要的次數。

觀察第零節五個環的例子，會發現：在動第 5 環之前，為了動某個環，必須將所有小於欲動的環，移到其中一根柱子上，例如：第零節中 fig5 到 fig7，為了動第 4 環，必須將第 1、2、3 環全部移到一根柱子上。另外在第零節中 fig11 到 fig12，最大的環移動之後，為了將所有的環再依序排到最大的環上面，只須逆操作 fig1 到 fig11 的動作，也就是 fig13 到 fig22 的動作 (以下稱為對稱性) ，在經過多次的實驗之後，我們猜測這樣的移動方法是最快的方法。

首先得知這樣的操作一定會成功(因為對稱性)，又過程中為了動某個環，必須將所有小於欲動的環移到其中一根柱子上，所以每一個動作都是必要的動作，得到結論：這樣的操作是最快的操作。之後我們將以這種操作方式進行討論。

接下來為了計算移動所有環所需要的次數，先證明下列引理：

引理一：

定義b_n為 n 個環以新規則，換到另一根柱子的步數(只要求最大的環在最下面)。且定義a_n為 n 個環以新規則，換到另一根柱子的步數(環由上而下，從小而大)，可寫出下列遞迴關係式：

$$b_n = b_{n-1} + n \ , \quad b_1 = 1$$
$$a_n = 2b_{n-1} + 1$$

證明：

(1). $b_n = b_{n-1} + n \ , \quad b_1 = 1$

在欲將 n 個環按照新規則移到另一根柱子的過程中，必須先將所有小於 n 的環放到同一根柱子上，再移動第 n 環，接下來只要把所有小於 n 的環直接移到放第 n 環的那根柱子上即可，所以共需

$$b_n = b_{n-1} + (n-1) + 1 = b_{n-1} + n$$

步。

(2). $a_n = 2b_{n-1} + 1$

在移動過程中欲將 n 個環按照大小排列移到另一根柱子，必須先將所有小於 n 的環放到同一根柱子上，再移動第 n 環，接下來只要把所有小於 n 的環以新規則移到放第 n 環的那根柱子上(逆操作)，所以共需

$$a_n = b_{n-1} + 1 + b_{n-1} = 2b_{n-1} + 1$$

步。

QED

定理一：

n 個環移動到另一根柱子所需的次數

$$a_n = n^2 - n + 1 = 2C_2^n + 1$$

證明：

根據引理一，我們可以求出a_n的遞迴式

$$\begin{aligned} a_n &= 2b_{n-1} + 1 \\ &= 2[b_{n-2} + (n-1)] + 1 \\ &= 2b_{n-2} + 1 + 2(n-1) \\ &= a_{n-1} + 2n - 2 \end{aligned}$$

解遞迴得到a_n一般式

$$a_n = n^2 - n + 1 = 2C_2^n + 1$$

QED

2、 搬動環的順序所成的數列及演算法

定義：$L_m(n)$為 m 個環的移動過程中，由搬動環的順序所成的數列。

由第一節的操作方法，我們列出以下幾個例子：

$L_2(n)$ 1 [2] 1

$L_3(n)$ 1 [2] 1 [3] 1 [2] 1

$L_4(n)$ 1 [2] 1 [3] 1 2 [4] 2 1 [3] 1 [2] 1

$L_5(n)$ 1 [2] 1 [3] 1 2 [4] 2 1 3 [5] 3 1 2 [4] 2 1 [3] 1 [2] 1

$L_6(n)$ 1 [2] 1 [3] 1 2 [4] 2 1 3 [5] 3 1 2 4 [6] 4 2 1 3 [5] 3 1 2 [4] 2 1 [3] 1 [2] 1

觀察以上結果，可以發現$L_m(n)$數列不斷地對新出現的數字作對稱，因此我們定義每一個數字x第一次出現時，就稱x為**對稱點，**如$L_3(n)$中的 2,3 皆為對稱點。符號P_x表示到達對稱點x的步數，如$L_3(n)$中的$P_3=4$。

因此我們有了以下的定理：

定理二：

出現 x(對稱點)的步數為

$$P_x=\frac{x^2-x+2}{2}=C_2^x+1$$

證明：

整個數列的結構由前面可知，每出現一個新的數字x，則x前的$x-1$項對x作對稱，所以在出現x前已經動過

$$1+2+3+\cdots\cdots+(x-1)=\frac{x(x-1)}{2}$$

步了，再加上新的數字「x」，總共$\frac{x(x-1)}{2}+1$步，也就是

$$\frac{x^2-x+2}{2}=C_2^x+1$$

步。

QED

根據定理二及第(一)-1 節中逆操作所產生對稱的觀念，可以設計出下列演算法：

---

1. Algorithm $L(m,n)$

2. {
3. $L(m,1):=1$
4. *if* $n>\frac{m^2-m+2}{2}$ then $n\leftarrow m^2-m+2-n$
5. for i := 1 to n
6. $L(m,\frac{i^2-i+2}{2})\leftarrow i$
7. for $j:=i-1$ to 1 step -1
8. $L(m,\frac{i^2-i+2}{2}+j)\leftarrow L(m,\frac{i^2-i+2}{2}-j)$
9. next j
10. next i
11. }

Algorithm $L(m,n)$ 分析：

Statement	Steps	說明
1. Algorithm $L(m,n)$	$O(0)$	此演算法是得出 $L_m(n)$ 的非遞迴演算法。 作法： 定義第 1 步為 1, 且找出所有的對稱點, 第 i 個對稱點前 $i-1$ 個數對第 i 個對稱點作對稱，以此得到整串數列。
2. {	$O(0)$	
3. $L(m,1):=1$	$O(1)$	
4. *if* $n>\frac{m^2-m+2}{2}$ then $n\leftarrow m^2-m+2-n$	$O(1)$	
5. for i := 1 to n	$O(n)$	
6. $L(m,\frac{i^2-i+2}{2})\leftarrow i$	$O(1)$	
7. for $j:=i-1$ to 1 step -1	$O(\frac{n(n+1)}{2})$	
8. $L(m,\frac{i^2-i+2}{2}+j)\leftarrow L(m,\frac{i^2-i+2}{2}-j)$	$O(1)$	
9. *next i*	$O(1)$	
10. *next j*	$O(1)$	
11. }	$O(0)$	
Total	$O(\frac{n(n+1)}{2})$	

3、 第 n 步的動作

在這一節中，我們主要探討第 n 步動作所動的環(以下所討論的環皆為無限多，因為若環的個數為有限個，則在最大環之後的動作皆可經由一次對稱得知，故討論無限個環的狀況)，我們將會分兩個方面去討論：

(1) 演　算　法：主要利用對稱性，設計出演算法。

(2) 數學一般式：利用對稱性再推導出 $L_m(n)$ 的另外性質，接著再引出一個和 $L_m(n)$ 中對稱點 x 後 $x-1$ 項相同的函數，所以只要利用夾擊求出 n 之前最大的對稱點，即可求出第 n 次動作所動的環。

(1)演算法

---

1. Algorithm *L*-2(n)
2. {
3. for $i := 1$ to n
4. if $\frac{i^2-i+2}{2}$:=n then
5. Return i
6. exit for
7. else if $\frac{i^2-i+2}{2}$ > n then
8. $symmetry \leftarrow i$ -1
9. exit for
10. end if
11. $n \leftarrow (n-(n-\frac{symmetry^2-symmetry+2}{2}))$
12. Algorithm L-2(n)
13. }

演算法分析：

Statement	Steps	說明
1. Algorithm L-2(n)	$O(0)$	此演算法為求出第 n 步動作的遞迴演算法。 作法： 先找出 n 之前最大的對稱點。接下來將 n 依序對之前的對稱點作對稱，當停在某個對稱點上，則第 n 次動作就是動那個環。
2. {	$O(0)$	
3. for $i := 1$ to n	$O(n)$	
4. if $\frac{i^2-i+2}{2}$:=n then	$O(1)$	
5. Return i	$O(1)$	
6. exit for	$O(1)$	
7. else if $\frac{i^2-i+2}{2}$ > n then	$O(1)$	
8. $symmetry \leftarrow i$ -1	$O(1)$	
9. exit for	$O(1)$	
10. end if	$O(1)$	
11. $n \leftarrow (n-(n-\frac{symmetry^2-symmetry+2}{2}))$	$O(1)$	
12. Algorithm L-2(n)	$O(n^2)$	
13. }	$O(0)$	
Total	$O(n^2)$	

接下來利用數學的方法慢慢導出 $L_m(n)$：我們回憶一下 $L_m(n)$ 為有 m 個環移動過程中，搬動環的順序所成的數列。經過一些觀察，我們的策略是：

首先找出在第 n 步之前最大的對稱點，再構造等於 $L_m(n)$ 中對稱點 x 之後的 $x-1$ 項的數列 $T(x,i)$，就可以得到第 n 步動作所動的環。

引理二：

給定 n 值，求出最近的對稱點為 x 環

$$x=\left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8(n-1)}}{2} \right\rceil +1$$

證明：

$$P_x \le n < P_{x+1} \qquad \text{利用夾擊找出最近的對稱點x}$$

$$\frac{x^2-x+2}{2} \le n < \frac{x^2+x+2}{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1+8(n-1)}}{2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{1+8(n-1)}}{2} \\ x > \dfrac{-1+\sqrt{1+8(n-1)}}{2} \bigcup x < \dfrac{-1-\sqrt{1+8(n-1)}}{2} \end{cases}$$

$$\frac{-1+\sqrt{1+8(n-1)}}{2} < x \le \frac{1+\sqrt{1+8(n-1)}}{2}$$

$$x = \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8(n-1)}}{2} \right\rfloor + 1$$

QED

接下來構造一個新的數列$T(x,i)$，此數列共有$x-1$項，前$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$項為 x 不斷的減 2，後$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$項則依據 x 的奇偶性，分別從 0($x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$)或-1($x \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$)不斷加 2。

引理三：

數列$T(x,i)$如以下形式：

x-2、x-4、x-6、……、1、2、4、8、……、x-1，　當 x 為奇數時

x-2、x-4、x-6、……、2、1、3、5、……、x-1，　當 x 為偶數時

$$T(x,i) = |x-2i| + \left\lfloor \frac{i}{\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor} \right\rfloor$$

證明：

因為$T(x,i)$前$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$項為不斷的減 2，後$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$項則為不斷加 2，所以前$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$項的奇偶性恰好和後$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$項是相反的，也就是說，只需要對於 x 不斷的減 2，第幾項就減幾個 2，當出來的值為負值時就取絕對值(因為$+k \equiv -k (\mathrm{mod}\, 2)$)，但是我們知道當出來的值為負值時表示已經到了後$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$項，所以奇偶性需要改變，而改變的方法就是加 1(利用高斯的特性)。

QED

定理三：

$T(x,i)$ 符合原先 $L_m(n)$ 中對稱點 x 後的 x-1 項

證明：

由 Knuth 河內塔的移動過程著手，說明在 $L_m(n)$ 中具有數列 $T(x,i)$ 的特性。

數列 $T(x,i)$ 特性：

(1) $T(x,i)>2$ ， $|T(x,i)-T(x,i-1)|=2$

在移動過程中，為了移動下一個第 n 環，必須將所有小於 n 的環先移到 n-1 環上，再將第 n 環移到空的柱子上(fig24 的動作)，接著為了動第 n+1 環，必須將小於 n 的環全部移到 n 環的上面，這個動作的最後一步，是動第 n-1 環，接下來就要動第 n+1 環了，由此可知，動完第 k 環，接下來不是動第 k+2 環，就是動第 k-2 環，(因為對稱性)，可知任意兩步之間，環的編號差 2。

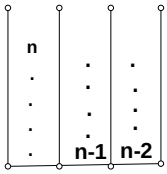


fig23

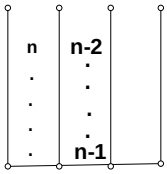


fig24

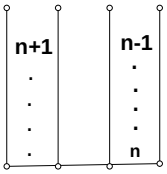


fig25

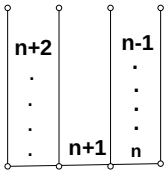


fig26

(2) $T(x,i)=1\rightarrow T(x,i+1)=2$ ，當 x 為奇數時

$T(x,i)=2\rightarrow T(x,i+1)=1$，當 x 為偶數時

這和一開始的移動有關，第一步動第 1 環，第 2 步動第 2 環，這是移動過程中唯一不是差 2 的部分，可由(1)知道這只是數列中的一個特例。

經由以上兩點我們可以知道數列 $L_m(n)$ 對稱點 x 後的 x-1 項列為 $T(x,i)$ 。

定理四：

x 為最靠近第 n 步之對稱點， $L_m(n)$ 即為所求：

$$L_m(n)=|x-2i|+\left\lfloor\frac{i}{\left\lceil\frac{x+1}{2}\right\rceil}\right\rfloor\ ,\quad x=\left\lceil\frac{-1+\sqrt{1+8(n-1)}}{2}\right\rceil+1\ ,\ i=n-P_x\ ,\quad P_x=C_2^x+1$$

證明：
給定 n 值之後，利用引理二找出最近的對稱點 x，再利用定理二求出 x 的步數 P_x，再算出 n 到 P_x 的差距 i，最後利用定理三及引理三即可求出

$$L_m(n) = \left|x - 2i\right| + \left\lfloor \frac{i}{\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor} \right\rfloor$$

QED

因為數學的一般式已經做出來了，如果用這個一般式寫成演算法的話，時間複雜度為何呢？

---

1. Alogorithm $L-1(n)$
2. {
3. $x \leftarrow \mathrm{Int}([(-1)+\mathrm{Sqrt}(1+8*(n-1))]/2)+1$
4. $i \leftarrow n - x*(x-1)/2 - 1$
5. $L\text{-}1(n) \leftarrow \mathrm{Abs}(x-2*i) + \mathrm{Int}(i/\mathrm{Int}((x+1)/2))$
6. }

演算法分析：

Statement	Steps	說明
1. Alogorithm $L-1(n)$	$O(0)$	經由數學方法的導證之後，將同樣一個動作從$O(n^2)$簡化為$O(1)$，在此可見數學威力之一斑。
2. {	$O(0)$	
3. $x \leftarrow \mathrm{Int}([(-1)+\mathrm{Sqrt}(1+8*(n-1))]/2)+1$	$O(1)$	
4. $i \leftarrow n - x*(x-1)/2 - 1$	$O(1)$	
5. $L\text{-}1(n) \leftarrow \mathrm{Abs}(x-2*i) + \mathrm{Int}(i/\mathrm{Int}((x+1)/2))$	$O(1)$	
6. }	$O(0)$	
Total	$O(1)$	

4、 第 m 環何時被動到

用定理二可以先找出第一次動第 m 環是第幾步，接下來因為此數列不斷的以下一個新出現的環作對稱點，所以再找出第 m+1 環第一次出現的步數，以此作對稱，求得下一次動 m 環的步數。以此做下去，即可得到第 m 個環何時被動到，依此可寫出下列演算法：

---

1. Algorithm $g(m,n)$
2. {

3. $g(m,1) \leftarrow \frac{m^2 - m + 2}{2}$

4. *for* $i := m+1$ to n

5. $symmetry \leftarrow \frac{i^2 + i + 2}{2}$

6. $g(m, i-m+1) \leftarrow symmetry + symmetry - g(m, i-m)$

7. next

8. }

演算法分析：

Statement	Steps	說明
1. Algorithm $g(m,n)$	$O(0)$	此演算法為求出第 m 環第 n 次動到是第幾步的非遞迴演算法。 作法： 已知第 m 環第一次動的步數，再對 m 之後的對稱點作對稱即可。
2. {	$O(0)$	
3. $g(m,1) \leftarrow \frac{m^2 - m + 2}{2}$	$O(1)$	
4. *for* $i := m+1$ to n	$O(n)$	
5. $symmetry \leftarrow \frac{i^2 + i + 2}{2}$	$O(1)$	
6. $g(m, i-m+1) \leftarrow symmetry + symmetry - g(m, i-m)$	$O(1)$	
7. next	$O(1)$	
8. }	$O(0)$	
Total	$O(n)$	

(二)Knuth 河內塔與新的正整數分割

1、 新的正整數分割

對於第 m 個環在何時移動，有另外的想法，首先舉一個 10 個環的例子：

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	***1***	***2***	***4***	***7***	***11***	***16***	***22***	***29***	***37***	***46***
2	***3***	***6***	***10***	***15***	***21***	***28***	***36***	***45***	***55***	
3	***5***	***8***	***12***	***17***	***23***	***30***	***38***	***47***		
4	***9***	***14***	***20***	***27***	***35***	***44***	***54***	63		
5	***13***	***18***	***24***	***31***	***39***	***48***	56			
6	***19***	***26***	***34***	***43***	***53***	62	70			
7	***25***	***32***	***40***	***49***	57	64				
8	***33***	***42***	***52***	61	49	76				
9	***41***	***50***	58	65	71					
10	***51***	60	68	75	81					
11	59	66	72	77						
12	67	74	80	85						
13	73	78	82							
14	79	84	88							
15	83	86								
16	87	90								
17	89									
18	91									

表一(第 m 環第 n 次移動到的步數)

注意：這一節中我們所討論的表，只有表一斜體加粗字的部分。也就是討論無限多環的情形。

定義符號 $g(m,n)$ 為第 m 環第 n 次被移動到的步數，接下來我們試著求出 $g(m,n)$ 一般式：

首先將表一中相鄰兩欄之差列成表二和表三：

1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9	10	
3	4	5	6	7	8	**9**		
5	6	7	8	9	***10***	9		
5	6	7	8	9	8			
7	8	9	***10***	7	8			
7	8	***9***	8	7				
9	8	9	8	5				
9	8	7	6					
9	6	7	6					
7	6	5						
7	4	5						
5	4							
5	4							
3								
3								

表二

1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	4	5	6	7	8	9		
3	4	5	6	7	8			
5	6	7	8	9				
5	6	7	8					
7	8	9						
7	8							
9								
9								
9	8							
7	8	7						
7	6	7	10					
5	6	5	8	9				
5	4	5	8	7	10			
3	4	3	6	7	8	9		
3	4	3	6	5	8	9	10	

表三(表二組成)

先看表二的部分，除了第一列是 123456…外，接下來第二列就是第一列加 2，第三列等於第二列，第四列又等於第三列+2，由此猜測以下關係式：

第 2s 列= 第 2s-1 列+2

第 2s+1 列= 第 2s 列

為了證明以上這個關係式，我們必須先證明一個引理，構造

$T(x,i)=m$ 的反函數 $\rightarrow T^{-1}(x,m)=i$

引理四：

$T(x,i)=m$ 的反函數→$T^{-1}(x,m)=i$

$$T^{-1}(x,m)=\begin{cases}[\frac{x}{2}]-[\frac{m}{2}], x\equiv m \pmod 2\\ [\frac{x}{2}]+[\frac{m}{2}], x\equiv m+1 \pmod 2\end{cases}$$

證明：

根據引理三，得知若 $x\equiv m \pmod 2$，則 m 出現在前 $\left[\frac{x}{2}\right]$ 內，又因為 $T(x,i)$ 前 $\left[\frac{x}{2}\right]$ 項不斷的減 2，所以得知

$$T^{-1}(x,m)=\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{m}{2}\right], x\equiv m(\mathrm{mod}\,2)$$

根據引理三，得知若 $x\equiv m+1(\mathrm{mod}\,2)$，則 m 會出現在後 $\left[\frac{x}{2}\right]$ 項，又因為 $T(x,i)$ 後 $\left[\frac{x}{2}\right]$ 項不斷的減 2，所以得知

$$T^{-1}(x,m)=\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{m}{2}\right], x\equiv m+1(\mathrm{mod}\,2)$$

QED

定理五：

定義 $t_{p\to p+1}$ 為第 t 環動第 $p+1$ 次和動第 p 次的步數差，k 為對稱點

$$(t+1)_{p\to p+1}-t_{p\to p+1}=\begin{cases}2, k\equiv t \pmod 2\\ 0, k\equiv t+1 \pmod 2\end{cases}$$

$$k=t+p-1$$

證明：

我們將任意對稱點 x 後 $x-1$ 項當作一組，這種分組方式可以讓我們知道任意環當時的移動次數(經由對稱性)。在每次移動第 t 環時，若第 t 環為第 p 次移動，則第 t 環之前最近的對稱點為第 $(t+p-1)$ 環，也就是 $k=t+p-1$。

並且我們知道關係式

第 2s 列= 第 2s-1 列+2

第 2s+1 列= 第 2s 列

和定理五是一樣的意思。

因為關係式可表示如下：

$$\begin{aligned}&[g(t+1,p+1)-g(t,p+1)]-[g(t+1,p)-g(t,p)]\\ &=[g(t+1,p+1)-g(t+1,p)]-[g(t,p+1)-g(t,p)]\\ &=(t+1)_{p\to p+1}-t_{p\to p+1}\end{aligned}$$

首先將 $L_m(n)$ 數列中一段寫於下圖 fig27，k 表示對稱點 k，**t** 表示第 t 環，**p** 表示第 t 環動了第 p 次。

$L_m(n)$數列：……k……**t**…*t+1*…　k+1…*t+1*…**t**……　k+2……**t**…*t+1*…

使用次數：　**p**　*p-1*　*p*　**p+1**　**p+2**　*p+1*

fig27

分兩種情形討論：

(1)$k \equiv t \pmod 2$時

$L_m(n)$中取一段出來，如 fig27，分別計算出$t_{p\to p+1}$和$(t+1)_{p\to p+1}$，並計算兩者之差，計算過程中利用引理四可以算出步數之差。

$$t_{p\to p+1} = k + T^{-1}(k+1,t) + 1 - T^{-1}(k,t) - 1$$

$$(t+1)_{p\to p+1} = (k+1) + T^{-1}(k+2,t+1) + 1 - T^{-1}(k+1,t+1) - 1$$

$$(t+1)_{p\to p+1} - t_{p\to p+1} = (k+1+\left[\frac{k+2}{2}\right]+\left[\frac{t+1}{2}\right]+1-\left[\frac{k+1}{2}\right]+\left[\frac{t+1}{2}\right]-1)$$
$$-(k+\left[\frac{k+1}{2}\right]+\left[\frac{t}{2}\right]+1-\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{t}{2}\right]-1)$$

$$(t+1)_{p\to p+1} - t_{p\to p+1} = \left[\frac{k+2}{2}\right]+2\left[\frac{t+1}{2}\right]-2\left[\frac{k+1}{2}\right]-2\left[\frac{t}{2}\right]+\left[\frac{k}{2}\right]+1$$

$t \equiv 0 \pmod 2$

$$(t+1)_{p\to p+1} - t_{p\to p+1} = \frac{k+2}{2} + t - k - t + \frac{k}{2} + 1$$
$$= 2$$

$t \equiv 1 \pmod 2$

$$(t+1)_{p\to p+1} - t_{p\to p+1} = \frac{k+1}{2} + (t+1) - (k+1) - (t-1) + \frac{k-1}{2} + 1$$
$$= 2$$

$L(n)$數列：……k……**t+1**…*t*…　k+1…*t*…**t+1**……　k+2……**t+1**…*t*…

使用次數：　**p-1**　*p*　*p+1*　**p**　**p+1**　*p+2*

fig28

(2)$k \equiv t+1 \pmod 2$時

$L_m(n)$中取一段出來，如 fig28，分別計算出$t_{p\to p+1}$和$(t+1)_{p\to p+1}$，並計算兩者之差，計算過程中利用引理二可以算出步數之差。

$$t_{p\to p+1}=k+T^{-1}(k+1,t)+1-T^{-1}(k,t)-1$$
$$(t+1)_{p\to p+1}=(k+1)+T^{-1}(k+2,t+1)+1-T^{-1}(k+1,t+1)-1$$
$$(t+1)_{p\to p+1}-t_{p\to p+1}=(k+1+\left[\frac{k+2}{2}\right]+\left[\frac{t+1}{2}\right]+1-\left[\frac{k+1}{2}\right]+\left[\frac{t+1}{2}\right]-1)$$
$$-(k+\left[\frac{k+1}{2}\right]+\left[\frac{t+1}{2}\right]+1-\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{t}{2}\right]-1)$$
$$=2\left[\frac{k+1}{2}\right]+2\left[\frac{t+1}{2}\right]-\left[\frac{k}{2}\right]-\left[\frac{k+2}{2}\right]-2\left[\frac{t}{2}\right]-1$$

$t\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$

$$(t+1)_{p\to p+1}-t_{p\to p+1}=k+t+2-\frac{k}{2}-\frac{k+2}{2}-(t-1)-1$$
$$=0$$

$t\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$

$$(t+1)_{p\to p+1}-t_{p\to p+1}=k+(t+2)-\frac{k}{2}-\frac{k+2}{2}-(t-1)-1$$
$$=0$$

經由上述繁瑣的計算及討論後得知

$$(t+1)_{p\to p+1}-t_p=\begin{cases}2, k\equiv t & (\mathrm{mod}\,2)\\ 0, k\equiv t+1 & (\mathrm{mod}\,2)\end{cases}$$

QED

定理六：

第 m 環第 n 次被移動的步數公式：

1. $g(m,n)=\frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2}+1+\left[\frac{n+m-1}{2}\right]+(-1)^n\left[\frac{m}{2}\right]$

2. $g(m,n)=\frac{n(n-1)}{2}+[\frac{n}{2}]+1+\frac{(2n+m-2)(m-1)}{2}+\frac{(m-1)[1+(-1)^n]}{2}$

證明：

我們先求出 $g(1,n)$ 的公式：

首先觀察第 1 環每次動到的步數差：2,2,4,4,6,6,8,8,10……

並由此推測移動第 1 環的步數公式：

$$g(1,n)=\frac{n(n-1)}{2}+[\frac{n}{2}]+1$$

$g(1,n)$ 的證明：

在每次動到第 1 環時，若第 1 環之前最近的對稱點為 n，則第一環為第 n 次移動。對稱點 n 的步數為

$$\frac{n(n-1)}{2}+1$$

且第 1 環離對稱點 n 的步數為

$$T^{-1}(n,1)=\left[\frac{n}{2}\right]+(-1)^n\left[\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{n}{2}\right]$$

兩者相加即為第 1 環第 n 次移動的步數。

QED

接下來，我們利用兩種作法求出 $g(m,n)$，兩種做法的表示方式也有所差異：

定理六-1：

第 m 環第 n 次被移動的步數公式

$$g(m,n)=\frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2}+1+\left[\frac{n+m-1}{2}\right]+(-1)^n\left[\frac{m}{2}\right]$$

證明：

因為在每次移動第 m 環時，若第 m 環之前最近的對稱點為第 $(n+m-1)$ 環，則第 m 環為第 n 次移動。而對稱點步數為

$$\frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2}+1$$

且第 m 環離最近對稱點 $(n+m-1)$ 的步數為

$$T^{-1}(n+m-1,m)$$

關於 $T^{-1}(n+m-1,m)$，我們可將本來分奇偶性討論的地方合併為一項：

$$T^{-1}(n+m-1,m)=\left[\frac{n+m-1}{2}\right]+(-1)^n\left[\frac{m}{2}\right]$$

最後將兩者相加得到

$$g(m,n)=\frac{(n+m-1)(n+m-2)}{2}+1+\left[\frac{n+m-1}{2}\right]+(-1)^n\left[\frac{m}{2}\right]$$

QED

定理六-2：

第 m 環第 n 次被移動的步數公式

$$g(m,n)=\frac{n(n-1)}{2}+[\frac{n}{2}]+1+\frac{(2n+m-2)(m-1)}{2}+\frac{(m-1)[1+(-1)^n]}{2}$$

證明：

已知 $g(1,n)$ 的公式和定理五、定理二之後，我們可以利用遞推的方式將 $g(m,n)$ 一般式寫出來，對於以上的情形有下列的遞迴關係式：

$$g(m,n)=g(m-1,n)+n+(m-2)+\frac{1+(-1)^n}{2}$$

遞迴式證明：

$$g(1,n)=\frac{n(n-1)}{2}+[\frac{n}{2}]+1$$

$$g(2,n)=g(1,n)+n+\left(\frac{1^n+(-1)^n}{2}\right)$$

$$g(3,n)=g(2,n)+(n+1)+\left(\frac{1^n+(-1)^n}{2}\right)$$

……

$$g(m,n)=g(m-1,n)+(m+n-2)+\left(\frac{1^n+(-1)^n}{2}\right)$$

首先我們由定理二，求出第 m 環與第 $m-1$ 環第一次移動的步數差為 $m-1$，可以得到

$$g(m,1)=g(m-1,1)+(m-1)$$

的關係，且再經由定理五，並將分奇偶討論的地方合併後得到

$$g(m,n)=g(m-1,n)+(m+n-2)+\left(\frac{1^n+(-1)^n}{2}\right)$$

最後解遞迴式得到 $g(m,n)$ 一般式：

$$g(m,n)=\frac{n(n-1)}{2}+[\frac{n}{2}]+1+\frac{(2n+m-2)(m-1)}{2}+\frac{(m-1)[1+(-1)^n]}{2}$$

QED

我們最後再來探討表一的結構：

n \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	***1***	***2***	***4***	***7***	***11***	***16***	***22***	***29***	***37***	***46***
2	***3***	***6***	***10***	***15***	***21***	***28***	***36***	***45***	***55***	
3	***5***	***8***	***12***	***17***	***23***	***30***	***38***	***47***		
4	***9***	***14***	***20***	***27***	***35***	***44***	***54***	63		
5	***13***	***18***	***24***	***31***	***39***	***48***	56			
6	***19***	***26***	***34***	***43***	***53***	62	70			

7	***25***	***32***	***40***	***49***	57	64				
8	***33***	***42***	***52***	61	49	76				
9	***41***	***50***	58	65	71					
10	***51***	60	68	75	81					
11	59	66	72	77						
12	67	74	80	85						
13	73	78	82							
14	79	84	88							
15	83	86								
16	87	90								
17	89									
18	91									

請注意斜體加粗字，並請斜斜的看，他是由右上至左下，在左下至右上的排列，每次跳一格，並完全佈滿了正整數。

其實當 m 極大的時候，由 1 到 m 的環被動的步數，必為正整數，而且他將正整數劃分成了 m 類；同理，將此表的斜體加粗字做另一種分類，第 i 環的動作稱做數列 $< m = i >$，第 j 步的動作稱做數列 $< n = j >$。(以上所有定義的數列僅包括斜粗體字，討論 m 無限多的時侯)在下一個段落中我們將討論它的特殊性質。

2、 模的性質和證明

接下來我們再看看一個例子，當環無限多時，我們將過程作成像表一的樣子，再取出斜線加深部分做成表四，這一部分就是我們所定義的新的正整數分割，為了探討它的性質，將整張表模 5 之後得到表五：

1	2	4	7	11	16	22	29	37	46
3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
5	8	12	17	23	30	38	47	57	68
9	14	20	27	35	44	54	65	77	90
13	18	24	31	39	48	58	69	81	94
19	26	34	43	53	64	76	89	103	118
25	32	40	49	59	70	82	95	109	124
33	42	52	63	75	88	102	117	133	150
41	50	60	71	83	96	110	125	141	158
51	62	74	87	101	116	132	149	167	186
61	72	84	97	111	126	142	159	177	196
73	86	100	115	131	148	166	185	205	226
85	98	112	127	143	160	178	197	217	238
99	114	130	147	165	184	204	225	247	270
113	128	144	161	179	198	218	239	261	284
129	146	164	183	203	224	246	269	293	318
145	162	180	199	219	240	262	285	309	334
163	182	202	223	245	268	292	317	343	370
181	200	220	241	263	286	310	335	361	388
201	222	244	267	291	316	342	369	397	426

表四

1	2	4	2	1	1	2	4	2	1
3	1	0	0	1	3	1	0	0	1
0	3	2	2	3	0	3	2	2	3
4	4	0	2	0	4	4	0	2	0
3	3	4	1	4	3	3	4	1	4
4	1	4	3	3	4	1	4	3	3
0	2	0	4	4	0	2	0	4	4
3	2	2	3	0	3	2	2	3	0
1	0	0	1	3	1	0	0	1	3
1	2	4	2	1	1	2	4	2	1
1	2	4	2	1	1	2	4	2	1
3	1	0	0	1	3	1	0	0	1
0	3	2	2	3	0	3	2	2	3
4	4	0	2	0	4	4	0	2	0
3	3	4	1	4	3	3	4	1	4
4	1	4	3	3	4	1	4	3	3
0	2	0	4	4	0	2	0	4	4
3	2	2	3	0	3	2	2	3	0
1	0	0	1	3	1	0	0	1	3
1	2	4	2	1	1	2	4	2	1

表五—左表 mod 5 之後

在以上的表格中，我們發現了一些規律：直行為 10 項一循環，橫列為 5 項一循環。經過多次的實驗(模不同的值)，發現這並不是一個巧合，而且這是必然的結果，因此我們有了以下的定理：

定理七：

1．將數列 $< n = j >$ 中每一項 $\bmod p$ (p 任意大於 2 之整數)，則其結果每 p 項循環。

2．將數列 $< m = i >$ 中每一項 $\bmod k$ (k 任意大於 2 之整數)，則其結果每 $2k$ 項循環。

為了證明模之後會循環，我們需要一個引理：

引理五：

對於 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ， a, b, c 為整數時，

$$f(x) \equiv f(x + p) \pmod{p}$$

證明：

$$0 \equiv 2apx + ap^2 + bp \pmod{p}$$
$$ax^2 + bx + c \equiv (ax^2 + bx + c) + 2apx + ap2 + bp \pmod{p}$$
$$ax^2 + bx + c \equiv a(x+m)^2 + b(x+m) + c \pmod{p}$$
$$f(x) \equiv f(x+p) \pmod{p}$$

QED

定理七-1：
將數列$< n = j >$中每一項 mod p（p 任意大於 2 之整數），則其結果每 p 項循環。

證明：
固定 n，分成 2r 和 2r-1 兩類，代入 $g(m,n)$ 公式中，
$n = 2r$ -1時：

$$g(m,n) = 2r^2 - 2r + 1 + \frac{(4r-4+m)(m-1)}{2} = \frac{m^2 + (4r-5) + 4r^2 - 8r + 6}{2}$$

$n = 2r$ 時：

$$g(m,n) = 2r^2 + 1 + \frac{(4r+m)(m-1)}{2} = \frac{m^2 + (4r-1)m + 4r^2 - 4r + 2}{2}$$

因為 $g(m,n) \in$ □ 又

$$m^2 + (4r-5) + 4r^2 - 8r + 6$$

$$m^2 + (4r-1)m + 4r^2 - 4r + 2$$

上面兩式都是整係數二次多項式，所以會產生每 p 個數一循環。

QED

定理七-2：
將數列$< m = i >$中每一項 mod k（k 任意大於 2 之整數），則其結果每 $2k$ 項循環。

證明：
同定理八-2 的證明方式，固定 m 討論，但是因為結果會產生分母為 2 的高斯項，所以模之後會 $2k$ 循環。

QED

(三)Knuth 河內塔與費氏數列

經過了仔細的觀察，我們發現上述的正整數分割和分子分母皆為費波那契數的真分數排序有著驚人的連結。

讓我來看看一個清楚的例子：

令 $n=8$，費氏數列的前 8 項分別為：

$$1,1,2,3,5,8,13,21$$

把分子分母都是以上這 8 個數的真分數由小排到大，我們得到以下的數列：

$$\frac{1}{21}<\frac{1}{13}<\frac{2}{21}<\frac{1}{8}<\frac{3}{21}<\frac{2}{13}<\frac{1}{5}<\frac{3}{13}<\frac{5}{21}<\frac{2}{8}<\frac{1}{3}<\frac{3}{8}<\frac{8}{21}<\frac{5}{13}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{8}{13}<\frac{13}{21}<\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$$

我們發現了以下驚人的結果！！！

以 F(8) 為分母的數，序號為 1、3、5、9、13、19，恰好是正整數分割中的 $g(1,n)$

以 F(7) 為分母的數，序號為 2、6、8、14、18，恰好是正整數分割中的 $g(2,n)$

……

而以另一種角度來看：

以 F(3) 為分子的數，序號為 3、6、10、15、21，恰好是正整數分割中的 $g(m,1)$

以 F(2) 為分子的數，序號為 1、2、4、7、11、16，恰好是正整數分割中的 $g(m,2)$

……

對於這些驚人的結果，我們整理出以下的定理：

定理八：

給定 n 值（$n\geq 3$），並定義函數 $Q(i,j)=\dfrac{F(i)}{F(j)}$，且 $n\geq j>i\geq 2$。

對所有符合條件的 $Q(i,j)$ 由小到大排序，並寫出序號，則：

$Q(i,j)$（j 為定值）之序號為 $g(n-j+1,j)$ 數列

$Q(i,j)$（i 為定值）之序號為 $g(i,i-1)$ 數列

這一節將說明 Knuth 河內塔等價於分子分母皆為費波那契數的真分數排序。

1、 觀察

為了要證明以上的定理，我們希望兩者之間的本質是相同的即可。所以我們做了以下的觀察：

我們再來看一次以下的排列：

$$\frac{1}{21}<\frac{1}{13}<\frac{2}{21}<\frac{1}{8}<\frac{3}{21}<\frac{2}{13}<\frac{1}{5}<\frac{3}{13}<\frac{5}{21}<\frac{2}{8}<\frac{1}{3}<\frac{3}{8}<\frac{8}{21}<\frac{5}{13}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{8}{13}<\frac{13}{21}<\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$$

這一次我們僅觀察分母的順序

$$21,13,21,8,21,13,5,13,21,8,3,8,21,13,5,2,5,13,21,8,3$$

$$F(8),F(7),F(8),F(6),F(8),F(7),F(5),F(7),F(8),F(6),F(4),$$
$$F(6),F(8),F(5),F(7),F(3),F(7),F(5),F(8),F(6),F(4)$$

把上一行中的$F(i)$的i單獨寫出來得到

8,7,8,6,8,7,5,7,8,6,4,6,8,7,5,3,5,7,8,6,4,

將上一排數字根據第幾大，寫下幾(如 8 是第 1 大，則寫 1)得到

1,2,1,3,1,2,4,2,1,3,5,3,1,2,4,6,4,2,1,3,5

此串數列恰好為上一節$L_m(n)$中正整數分割的部分。

觀察以上的結果，我們猜測它是對的，但是要把 Knuth 河內塔和費氏數列做一個連接，我們遇到了困難，因為我們雖然猜測費氏數列的這一種特殊排列就等價於 Knuth 河內塔，但是我們連此種費氏數列的構造方法都是利用很原始的慢慢排序，所以想直接證明他和 Knuth 河內塔的關係難度極高。

之後我們會以$L_m(n)$的新構造法及$Q(i,j)$排序的構造方式來證明這兩者是等價的。

2、 $L_m(n)$的新構造法及費氏數列排序

我們以另一種方式來構造$L_m(n)$，在這裡以$L_7(n)$為例：

(步驟 1)先寫出最大的數字 7。
(步驟 2)經由對稱性可知 6 必須對 7 對稱，所以我們可放入 6。
(步驟 3)同樣地，5 對 6 對稱，放入 5。
(步驟 4)放入 4 時對 5 對稱，但因對稱性可知 4 必須在 5 和 6 之間的序列作對稱，放入 4。
(步驟 5)在 4 和 5 之間的序列放入 3 且對 4 對稱。
(步驟 6)在 3 和 4 之間的序列放入 2 且對 3 對稱。
(步驟 7)在 2 和 3 之間的序列放入 1 且對 2 對稱。完成$L_7(n)$。

(1) 7
(2) 676
(3) 5657565
(4) 4546457546454
(5) 3435346435753464353433
(6) 2324235324642357532464235324232
(7) 1213124213531246421357531246421353124213121

fig27

在此我們利用$L_m(n)$之中的已知對稱性質來構造$L_m(n)$，先放入最大的數 m，再利用基本的對稱性質由大到小依序將小於 m 的數填入，並也基於對稱性給出限制，如在放入 k 時，必須要在$k+1$、$k+2$之間的序列作對稱，這個構造法對定理的證明極有幫助。

接下來我們要構造分子分母皆為費波那契數的真分數排序，需藉由下面的引理：

引理六：

對於任意正整數 $a>b, c>d$ 且 $\frac{b}{a}<\frac{d}{c}$，則 $\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$

證明：

$$\text{因為}\frac{b}{a}<\frac{d}{c}\text{，所以}bc<ad$$

$$ab+bc<ab+ad\rightarrow\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}$$

$$cd+bc<cd+ad\rightarrow\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$$

$$\frac{b}{a}<\frac{b+d}{a+c}<\frac{d}{c}$$

QED

接下來我們利用引理六來構造 $Q(i,j)$ 排序：

(步驟 1)先寫出 $\frac{0}{1}$ 及 $\frac{1}{1}$，且 $\frac{0}{1}<\frac{1}{1}$。

(步驟 2)所有的 $Q(i,3)$，有 $Q(2,3)=\frac{1}{2}$，利用引理六：

$$\text{因為}\frac{0}{1}<\frac{0+1}{1+1}<\frac{1}{1}\text{，所以}\frac{0}{1}<\frac{1}{2}<\frac{1}{1}$$

得到 $n=3$ 時排序。

(步驟 3) 所有的 $Q(i,4)$，有 $Q(2,4)$、$Q(3,4)$，各為 $\frac{1}{3}$、$\frac{2}{3}$，利用引理六：

$$\text{因為}\frac{0}{1}<\frac{0+1}{1+2}<\frac{1}{2}<\frac{1+1}{2+1}<\frac{1}{1}\text{，所以}\frac{0}{1}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{1}{1}$$

得到 $n=4$ 時排序。

(步驟 4) 所有的 $Q(i,5)$，有 $Q(2,5)$、$Q(3,5)$、$Q(4,5)$ 各為 $\frac{1}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$，利用引理四：

$$\text{因為}\frac{0}{2}<\frac{0+1}{2+3}<\frac{1}{3}<\frac{1+1}{3+2}<\frac{1}{2}<\frac{1+2}{2+3}<\frac{2}{3}<\frac{1}{1}$$

$$\text{所以}\frac{0}{2}<\frac{1}{5}<\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{1}{1}$$

得到 $n=5$ 時排序。

(1) $\frac{0}{1}<\frac{1}{1}$

(2) $\frac{0}{1}<\frac{1}{2}<\frac{1}{1}$ $n=3$

(3) $\frac{0}{1}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{1}{1}$ $n=4$

(4) $\frac{0}{2}<\frac{1}{5}<\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{1}{1}$ $n=5$

(5) $\frac{0}{3}<\frac{1}{8}<\frac{1}{5}<\frac{2}{8}<\frac{1}{3}<\frac{3}{8}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{5}{8}<\frac{2}{3}<\frac{1}{1}$ $n=6$

……

fig28

以此類推，我們可得到給定 n 時，所有 $Q(i,j)$ 的排序。

這個構造法的原理是不斷利用引理六，直到做到我們所要的 n 為止，即得出所有 $Q(i,j)$ 的排序。

此外需注意兩點：

(1) 步驟 1 寫出的 $\frac{0}{1}$、$\frac{1}{1}$ 並不符合 $Q(i,j)$ 的定義，所以在排序時並不將其計入，我們只是利用它們使得整個構造過程更完整呈現。

(2) 當我們新排入 $Q(i,j)$ 時(j 為定值)，原先的 0 要改成 $\frac{0}{F(j-2)}$，目的也是為了要使整個構造過程更完整。

3、 定理證明

定理八：

給定 n 值（$n\geq 3$），並定義函數 $Q(i,j)=\frac{F(i)}{F(j)}$，且 $n\geq j>i\geq 2$。

對所有符合條件的 $Q(i,j)$ 由小到大排序，並寫出序號，則：

$Q(i,j)$ （j 為定值）之序號為 $g(n-j+1,j)$ 數列

$Q(i,j)$ （i 為定值）之序號為 $g(i,i-1)$ 數列

證明：

我們比較上述兩種構造法的特性，並證明兩者等價：

（1） $L_m(n)$ 的新構造方式

利用對稱性，在放入某數 k 時，必須對 $k+1$ 對稱，且要放在 $k+1$、$k+2$ 序列之間對稱。

（2）費氏數列的特殊排序的構造法

A.利用引理二，在放入 $Q(i,j)$ 時（ j 為定值），可以得知 $Q(i,j)$ 必須放在 $Q(i,j-1)$、$Q(i,j-2)$ 之間（因 $F(j)=F(j-1)+F(j-2)$）。

我們在此可以知道（1）、(2)-A 兩者等價，因為這兩者的構造方式是一樣的，都是當放入一個新數字 t，必須放在差 1，差 2 的數字之間。舉出 $L_5(n)$ 及分子分母皆為費波那契數的真分數排序 $n=6$ 的例子：

$L_5(n)$　12131242135312421312 1　取對稱點 5(最大的對稱點)的前半段

⇨　1213124213

$n=6$　$\frac{1}{8}<\frac{1}{5}<\frac{2}{8}<\frac{1}{3}<\frac{3}{8}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$

容易看出若令 $Q(i,6)$ 為第 1 環，$Q(i,5)$ 為第 2 環，$Q(i,4)$ 為第 3 環，$Q(i,3)$ 為第 4 環，這時兩者是相同的。在此我們證明了 $Q(i,j)$ 之序號為 $g(n-j+1,j)$ 數列。

B.在放入 $Q(i,j)$ 時（ j 為定值），可利用 A.，找出排列 $Q(i,j)$ 的位置，再依序將 $Q(1,j)$、$Q(2,j)$、$Q(3,j)$、…、Q(j-1,j) 填入位置中以完成排序，這種做法與引理二的構造法顯然是相同的。

經由 A..的證明我們知道 $Q(i,j)$ （j 為定值）之序號為 $g(n-j+1,j)$ 數列，且依照 B. 特性，知道 $Q(1,j)$ 為第 $(n-j+1)$ 環第 1 次被動到、$Q(2,j)$ 為第 $(n-j+1)$ 環第 2 次被動到，…，$Q(j-1,j)$ 為第 $(n-j+1)$ 環第 $(j-1)$ 次被動到，故得知 $Q(i,j)$ （i 為定值）為第 j 環第 $(i-1)$ 次動到的步數數列，在此我們證明了 $Q(i,j)$ （i 為定值）之序號為 $g(i,i-1)$ 數列。一樣舉出 $L_5(n)$ 及分子分母皆為費波那契數的真分數排序 $n=6$ 的例子：

$L_5(n)$　12131242135312421312 1　取對稱點 5(最大的對稱點)的前半段

⇨　1213124213

$n=6$　$\frac{1}{8}<\frac{1}{5}<\frac{2}{8}<\frac{1}{3}<\frac{3}{8}<\frac{2}{5}<\frac{1}{2}<\frac{3}{5}<\frac{5}{8}<\frac{2}{3}$　經由 A.性質

⇨　1　2　1　3　1　2　4　2　1　3

容易看出 $Q(i,j)$ 分子的數字代表該環的移動次數。在此證明了 $Q(i,j)$ （i 為定值）之序號為 $g(i,i-1)$ 數列。

肆、其他

如果將 Knuth 河內塔的起始狀態加以改變會有什麼樣的結果？

假設一開始這 m 個環就隨意的擺在三根柱子上，但是依舊要依照最先的規定(隨時，任意根柱子中最大的環一定要在最下面，其餘無限制)，則有沒有一般的解法？

首先，我們先計算他總共有幾種，這裡就扯到排列組合中，一個極度困難的問題了：「m 個相同的球放在 n 個相同的箱子裡，有幾種放法」，對於這個題目，我們依照不同的想法給了兩個遞迴式

先介紹一下符號 $S\begin{smallmatrix}a\\b\\c\end{smallmatrix}$ 代表 a 個球放到 c 個箱子裡，每個箱子最多擺 b 個球(可不擺)。

$$S\begin{smallmatrix}a\\b\\c\end{smallmatrix} = \sum_{i=0}^{b-1} S\begin{smallmatrix}a-b+i\\b-i\\c-1\end{smallmatrix}$$

說明：

看個 $S\begin{smallmatrix}6\\6\\6\end{smallmatrix}$ 的例子：

6 0 0 0 0 0
5 1 0 0 0 0
4 2 0 0 0 0
4 1 1 0 0 0
3 3 0 0 0 0
3 2 1 0 0 0
3 1 1 1 0 0
2 2 2 0 0 0
2 2 1 1 0 0
2 1 1 1 1 0
1 1 1 1 1 1

可得 $S\begin{smallmatrix}6\\6\\6\end{smallmatrix} = S\begin{smallmatrix}0\\6\\5\end{smallmatrix} + S\begin{smallmatrix}1\\5\\5\end{smallmatrix} + S\begin{smallmatrix}2\\4\\5\end{smallmatrix} + S\begin{smallmatrix}3\\3\\5\end{smallmatrix} + S\begin{smallmatrix}4\\2\\5\end{smallmatrix} + S\begin{smallmatrix}5\\1\\5\end{smallmatrix}$

由此可知遞迴式 $S\begin{smallmatrix}a\\b\\c\end{smallmatrix} = \sum_{i=0}^{b-1} S\begin{smallmatrix}a-b+i\\b-1\\c-1\end{smallmatrix}$

$$S\begin{smallmatrix}a\\a\\c\end{smallmatrix} = \sum_{i=0}^{[\frac{a}{c}]} S\begin{smallmatrix}a-ci\\a-ci\\c-1\end{smallmatrix}$$

說明：

看個 $S\begin{smallmatrix}6\\6\\c\end{smallmatrix}$ 的例子：

$S\begin{matrix}6\\2\end{matrix}6$：６０　５１　４２　３３

$S\begin{matrix}6\\3\end{matrix}6$：〈０００〉＋６００　５１０　４２０　３３０

〈１１１〉＋３００　２１０

〈２２２〉＋０００

$S\begin{matrix}6\\4\end{matrix}6$：〈０００００〉＋$S\begin{matrix}6\\3\end{matrix}6$

〈１１１１〉＋$S\begin{matrix}2\\3\end{matrix}2$

由此可知 $S\begin{matrix}a\\c\end{matrix}a=\sum_{i=0}^{\left[\frac{a}{c}\right]}S\begin{matrix}a-ci\\c-1\end{matrix}a-ci$

注意：

遞迴過程中需遵守幾個條件

if $a=0$ then $S\begin{matrix}a\\c\end{matrix}b=1$

if $b>a$ then $b\leftarrow a$

if $c>a$ then $c\leftarrow a$

if $b\times c<a$ then $S\begin{matrix}a\\c\end{matrix}b=0$

if $b\times c=a$ then $S\begin{matrix}a\\c\end{matrix}b=1$

伍、結論與展望

在這篇報告中，我們對於 Knuth 河內塔做了核心的研究，對於他第幾次動作及哪一個環在何時移動都給了完整的探討，並依照 Knuth 河內塔的核心架構將正整數做了一個分割，及引出一些相關性質，並且證明 Knuth 河內塔等價於分子分母皆為費波那契數的真分數排序，以下是幾個未來的展望：

1、 Knuth 河內塔問題與碎形($L_m(n)$數列)

2、 Knuth 河內塔問題與摺紙(對稱性)

3、 Knuth 河內塔問題與演算法(隨意亂排的恢復演算法)

4、 Knuth 河內塔問題與與圖論(二元根樹-已做出基本結果)

5、 Knuth 河內塔問題與費氏數列特殊排序的代數證法

6、 Knuth 河內塔問題與向量(已作出差不多的結果)

陸、研究心得

最後要感謝指導老師*-*，真正的帶了我們做了研究，過程中難免會 stuck，但是老師總會再後面推你一把，另外要感謝班上同學的熱心幫助。

柒、參考資料及其他

1.林福來、李恭晴、徐正梅、陳冒海、陳順宇，高級中學數學第 1 冊，台南,南一出版社，第 3 章，2001

2.張鎮華，從演算法發現數學-河內塔面面觀，建中演講講稿，2002

3. D. Knuth, All questions answered, *Notice A.M.S.* **49**(3), 318-324，2002

4. David G. Poole,The Towers and Triangle of Professor Claus(or, Pascal Knows Hanoi),**67**(5),323-343，1994

評語

優點：題目新鮮、有趣。指導老師甚能掌握探討該問題的時機。
改進：參考資料不夠完善。