

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

高中組

數學科

科別：數學科

組別：高中組

作品名稱：魔圓陣之研究

關鍵詞：魔圓陣、魔方陣、數字和

編號：040417

學校名稱：

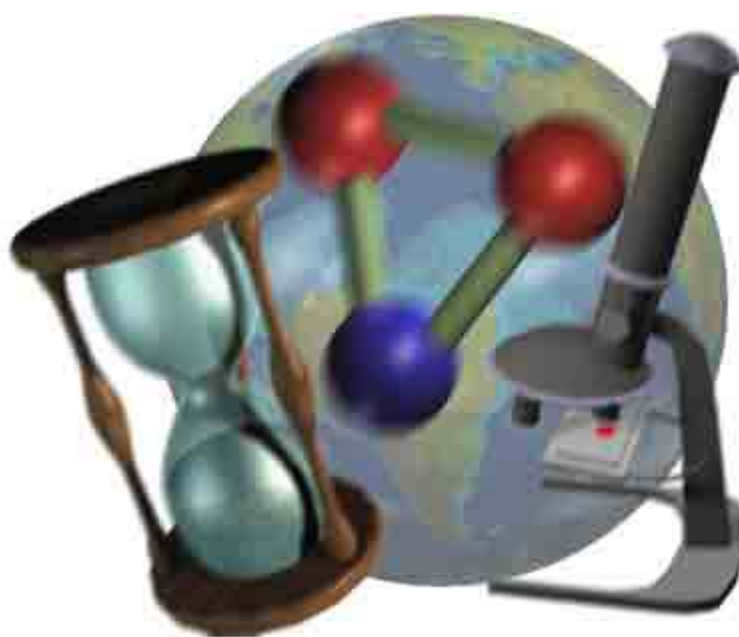
台北市立成淵高級中學

作者姓名：

林旺聖

指導老師：

葉裕益、徐錫賢



摘要

對於平面上 Q 個圓，我們研究了下列三個有趣的課題：

- (一) 各圓之間相交關係的結構性並作分類。
- (二) 各圓相互交會成另一新圖形時，如何設置使各圓上的交點數相同。
- (三) 若(二)中的圖形存在，如何在各交點上放入數字，使每個圓上的數字和皆相等。

對這三個課題的探討我們獲得一些初步的結果。

壹、研究動機

在國小曾經做過九宮格 3×3 上放九個數字，使其直、橫、斜的數字和都相等，這是個很有趣的數學遊戲，上了國中做過 4×4 的十六方格中，使用一至十六再次呈現在直、橫、斜的數字和皆相等，到了國中二年級了解 $4X+2$ 的幻方做法，然後曾經在趙文敏教授的『寓數學於遊戲』看過圓形的魔圓陣，但是裡面只介紹幾種魔圓陣(Magic Circle)，而沒有介紹裡面的原理，所以才會想要研究魔圓陣。

貳、研究目的

了解魔圓陣的規則及結構。我們希望了解當有 Q 個圓，以各個圓的交點數相同為前提下，是否存在使各個圓交點上之數字和相等的排列方式。

參、研究設備器材

紙、筆、計算機、電腦。

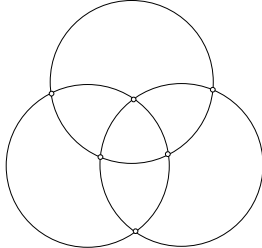
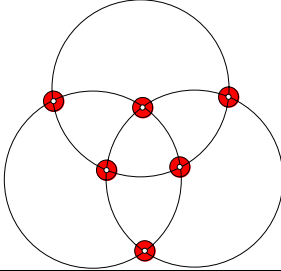
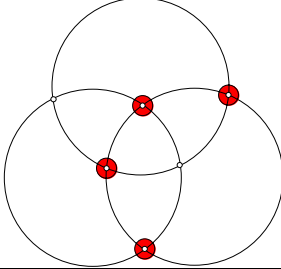
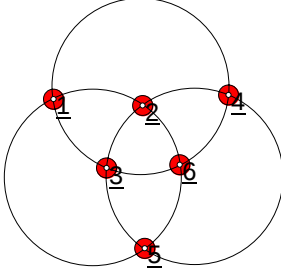
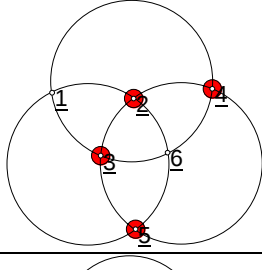
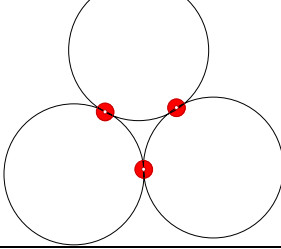
肆、研究過程或方法

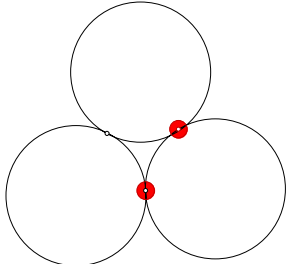
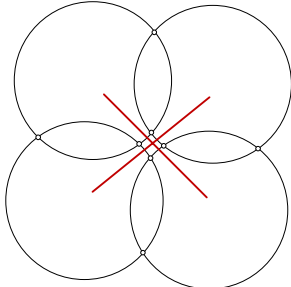
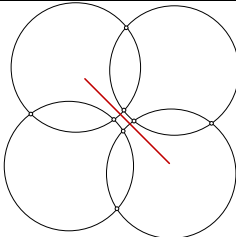
(一)前提假設：

1. 所有圓上的交點數必須相等。
2. 圖形不能中斷。
3. 在交點上放入數字(須為正整數，本研究的結果不因起始值的不同而改變，故固定起始值為 1)後，其總和相等。
4. 每個交點皆由 2 個圓所組成，不可以有 3 個圓以上組成的交點。
5. 圓的個數大於 3。
6. 每個圓的影響類型皆相同。例如：一圖形中，有一圓有 1 個相切的情形，而其他的圓皆有相切的情形。

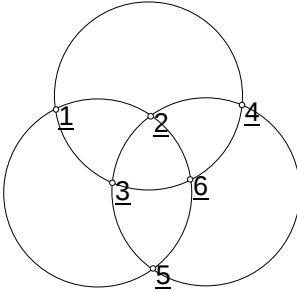
(二)符號表示法

1. 符號定義

項目	符號	定義	圖示	舉例
1	Q	所有圓的個數。		$Q = 3$
2	W	所有圓上的交點個數。		$W = 6$
3	w	一個圓上的交點個數。		$w = 4$
4	E	所有點數的總合。		$E = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
5	e	一個圓的點數總合。		$e = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$
6	Y	所有相切的圓組數[每組兩個圓]。		$Y = 3$

項目	符號	定義	圖示	舉例
7	y	與任意一個圓相切的圓的數目。		$y = 2$
8	R	所有不相交的圓組數[每組兩個圓]。		$R = 2$
9	r	與任意一個圓不相交的圓的數目。		$r = 1$

2. 每一行代表一個圓所有的數字(如下表)

A 圓	B 圓	C 圓	圖示
1+6	1+6		
2+5		2+5	
	3+4	3+4	
14	14	14	

最後一列(14)為單一圓上的數字總和。

(三)研究過程

首先討論兩個圓可能會發生的關係：

類型一：任 2 圓間有 2 個交點。

類型二：存在不相交的情形。

類型三：任 2 圓皆交於 1 點。

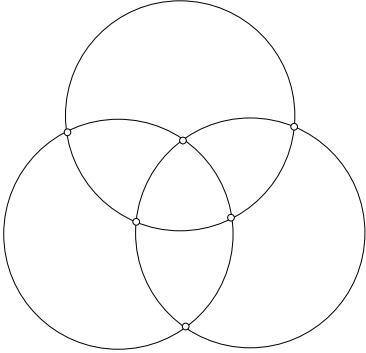
綜合型：類型一、二、三合併。

以下針對這四種類型開始討論：

1. 類型一：任 2 圓間有 2 個交點。

當有 Q 個圓時， W 、 w 、 E 、 e 會有什麼關係？

(1) 當 $Q=3$ 時

	說明	求法	圖示
一個圓的交點 w	任 2 圓皆交於 2 點，每個圓與其他 $Q-1$ 個圓都有 2 個交點	$w = (Q-1) \times 2$ $w = (3-1) \times 2 = 4$	
所有圓的交點 W	當每個圓有 w 個交點時， $w \times Q$ 每個交點皆會重複 1 次	$W = w \times Q \div 2$ $= (Q-1) \times 2 \times Q \div 2$ $= (Q-1) \times Q$ $W = (3-1) \times 3 = 6$	
所有數字的總合 E	梯形面積公式。	$E = (W+1) \times W \div 2$ $= [(Q-1) \times Q + 1] \times (Q-1) \times Q \div 2$ $E = [(3-1) \times 3 + 1] \times (3-1) \times 3 \div 2$ $= (2 \times 3 + 1) \times 2 \times 3 \div 2$ $= 7 \times 3 = 21$	
一個圓的數字總合 e	所有數字都會重覆 2 次。	$e = E \times 2 \div Q$ $= [(Q-1) \times Q + 1] \times (Q-1) \times Q \div 2 \times 2 \div Q$ $= [(Q-1) \times Q + 1] \times (Q-1)$ $e = [(3-1) \times 3 + 1] \times (3-1)$ $= (2 \times 3 + 1) \times 2 = 14$	

排列方式：

$$W = (Q-1) \times Q \quad W \text{ 必為偶數。}$$

我們以最大數字和最小數字為一組，第二大和第二大為一組，如此所得的每組數字和皆相等，以此類推。例如：1+6、2+5、3+4，和皆為7。任兩圓有兩個交點，若我們把這兩個交點排入一組數字，則兩圓上的數字和必定相等。

A 圓	B 圓	C 圓	圖示
1+6	1+6		
2+5		2+5	
	3+4	3+4	
14	14	14	

最後一列(14)為單一圓上的數字總和。

(2)當 $Q=4$ 時

	說明	求法	圖示
一個圓的交點 w	任 2 圓皆交於 2 點，每個圓與其他 $Q-1$ 個圓都有 2 個交點。	$w = (4-1) \times 2 = 6$	
所有圓的交點 W	當每個圓有 w 個交點時， $w \times Q$ 每個交點皆會重複 1 次。	$W = (4-1) \times 4 = 12$	
所有數字的總合 E	梯形面積公式。	$E = 12 \times 13 \div 2 = 78$	
一個圓的數字總合 e	所有數字都會重覆 2 次。	$e = 78 \times 2 \div 4 = 39$	

排列方式：

A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	圖示
1+12	1+12			
2+11		2+11		
3+10			3+10	
	4+9	4+9		
	5+8		5+8	
		6+7	6+7	
39	39	39	39	

最後一列(39)為單一圓上的數字總和。

(3)當 $Q=5$ 時

	說明	求法	圖示
一個圓的交點 w	任 2 圓皆交於 2 點，每個圓與其他 $Q-1$ 個圓都有 2 個交點。	$w = (5-1) \times 2 = 8$	
所有圓的交點 W	當每個圓有 w 個交點時， $w \times Q$ 每個交點皆會重複 1 次。	$W = (5-1) \times 5 = 20$	
所有數字的總合 E	梯形面積公式。	$E = 20 \times 21 \div 2 = 210$	
一個圓的數字總合 e	所有數字都會重覆 2 次。	$e = 210 \times 2 \div 5 = 84$	

排列方式：

A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	圖示
1+20	1+20				
2+19		2+19			
3+18			3+18		
4+17				4+17	
	5+16	5+16			
	6+15		6+15		
	7+14			7+14	
		8+13	8+13		
		9+12		9+12	
			10+11	10+11	
84	84	84	84	84	

最後一列(84)為單一圓上的數字總和。

(4)當 $Q=n$ 時

	說明	求法
一個圓的交點 w	任 2 圓皆交於 2 點，每個圓與其他 $Q-1$ 個圓都有 2 個交點。	$w = (n-1) \times 2$
所有圓的交點 W	當每個圓有 w 個交點時， $w \times Q$ 每個交點皆會重複 1 次。	$W = (n-1) \times n$
所有數字的總合 E	梯形面積公式。	$E = [(n-1) \times n + 1] \times (n-1) \times n \div 2$
一個圓的數字總合 e	所有數字都會重覆 2 次。	$e = [(n-1) \times n + 1] \times (n-1)$

排列方式：

A 圓	B 圓		n-1 圓	n 圓
1+n	1+n			
2+(n-1)				
			$\frac{E}{2} + (\frac{E}{2} + 1)$	$\frac{E}{2} + (\frac{E}{2} + 1)$
$[(n-1) \times n + 1] \times (n+1)$	$[(n-1) \times n + 1] \times (n+1)$	$[(n-1) \times n + 1] \times (n+1)$	$[(n-1) \times n + 1] \times (n+1)$	$[(n-1) \times n + 1] \times (n+1)$

最後一列 $[(n-1) \times n + 1] \times (n+1)$ 為單一圓上的數字總和。

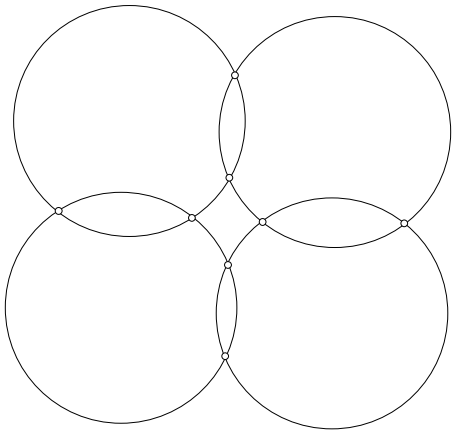
綜合以上，我們得到一定理：

定理一：
當任 2 圓間有 2 個交點時，圖形必存在，數字也可排入，魔圓陣必成立。

2. 類型二：存在不相交的情形。

因為圖形不能中斷，所以沒有任何一個圓和其他圓完全沒有交點。我們好奇的是，有 Q 個圓時 R 最大值為多少？ R 和 Q 之間的關係？
要讓圖形不中斷，每個圓至少要跟其他兩個圓有交點，以下圖排列 R 的最大值就會出現：

我們以 $Q=4$ 時來說明：

	說明	求法	圖示
R 的最大值	每個圓只跟另外兩個圓相交，跟其他 $Q-3$ 個圓不相交， $(Q-3) \times Q$ 會重複一組 R 。	$(Q-3) \times Q \div 2$	
所有圓的交點 W	存在 1 個 R 時，會少掉 2 個 W 。	$W = (Q-1) \times Q - 2R$ $W = (4-1) \times 4 - 2 \times 2$ $= 3 \times 4 - 4 = 8$	
W 最小值	R 最大值減去 W 值。	$(Q-1) \times Q - (Q-3) \times Q \div 2$ $= Q \times (Q-1-Q+3)$ $= 2Q$	

討論出 Q 與 R 之間的關係後 討論當 Q 與 R 出現時 圖形是否存在？

由上面可以知道 R 的最大值為 $(Q-3) \times Q \div 2$

所以現在假設有 $Q=5$ ，其 R 的最大值為 5

若現在 $Q=5$ $R=4$ 或 $Q=5$ $R=3$ 或 $Q=5$ $R=2$ 或 $Q=5$ $R=1$ 圖形是否存在？

一個圓的交點 w ：

$$w = \frac{2W}{Q} = \frac{2[(Q-1) \times Q - 2R]}{Q} = 2(Q-1) - \frac{4R}{Q} \in \square$$

我們可以發現： Q 為 $4R$ 的正因數。

因為任兩圓相交時必有兩個交點，所以 w 必是偶數， $2(Q-1)$ 是偶數， $\frac{4R}{Q}$ 必須是偶數。

我們得到一定理：

定理二：

當 $Q = 2k$ 時， k 是 R 的因數時，必有圖形。

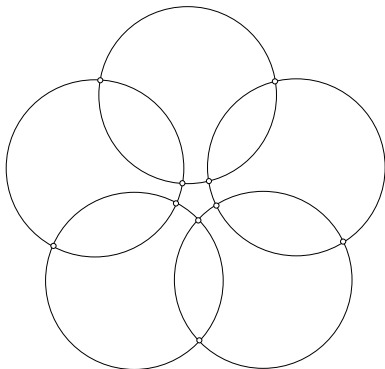
當 $Q = 2k+1$ 時， Q 是 R 的因數時，必有圖形。

由上述定理，我們將舉例說明如下：

(1)當 $Q=2k+1$ 時， Q 是 R 的正因數時，必有圖形。

若 $Q=5=2k+1$ ， $k=2$ ， R 最大值為 $(5-3) \times 5 \div 2 = 5$ ， Q 是 R 的因數， R 則為 5，換言之，將討論 $Q=5$ 、 $R=5$ 的情形，排列方式分述如下：

我們以最大數字和最小數字為一組，第二大和第二大為一組，如此所得的每組數字和皆相等，以此類推。例如：1+10、5+6，和皆為 11。任兩圓有兩個交點，若我們把這兩個交點排入一組數字，則兩圓上的數字和必定相等。

符號	值				圖示
W	(5-1)×5-2×5=10				
e	(10+1)×10÷5=22				
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	
1+10	1+10	3+8	4+7	2+9	
2+9	3+8	4+7	5+6	5+6	
22	22	22	22	22	

最後一列(22)為單一圓上的數字總和。

(2)當 $Q = 2k + 1$ 時， Q 是 R 的因數時，必有圖形。

當 $Q = 2k$ 時， k 是 R 的正因數時，必有圖形。

若 $Q = 8 = 2k$ ， $k = 4$ ， R 最大值為 $(8 - 3) \times 8 \div 2 = 20$ ，

Q 是 k 的倍數時， R 則可以為 4、8、12、16、20，換言之，將討論

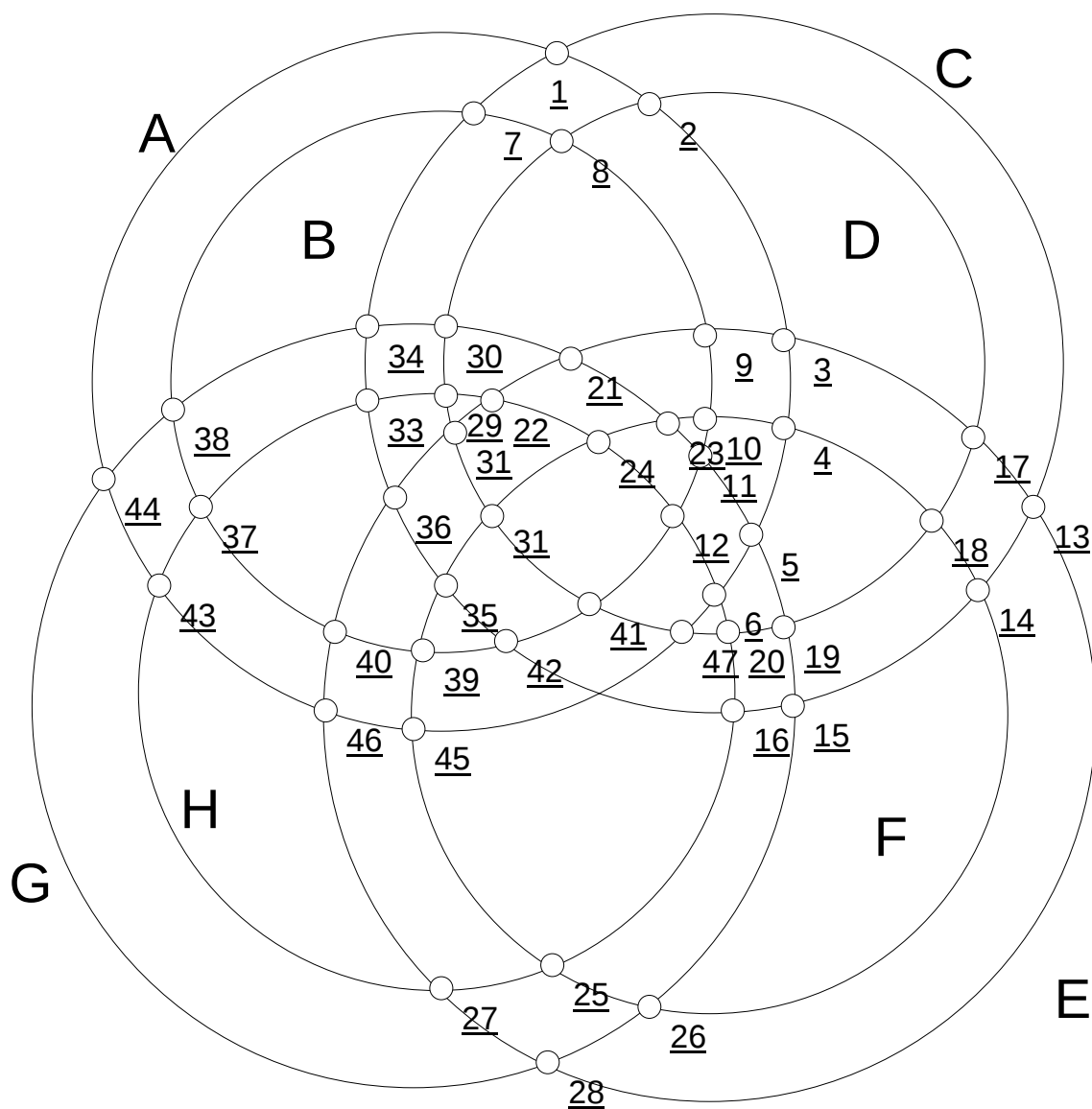
$(Q, R) = (8, 4)$ 、 $(8, 8)$ 、 $(8, 12)$ 、 $(8, 16)$ 、 $(8, 20)$ 共 5 種，分述如下：

A. 當 $Q = 8$ ， $R = 4$ 時

符號				值			
W				$(8 - 1) \times 8 - 2 \times 4 = 48$			
e				$(48 + 1) \times 48 \div 8 = 296$			
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓	G 圓	H 圓
1+48	7+42	1+48	2+47	3+46	4+45	5+44	6+43
2+47	8+41	7+42	8+41	9+40	10+39	11+38	12+37
3+46	9+40	13+36	17+32	13+36	14+35	15+34	16+33
4+45	10+39	14+35	18+31	17+32	18+31	19+30	20+29
5+44	11+38	15+34	19+30	21+28	23+26	21+28	22+27
6+43	12+37	16+33	20+29	22+27	24+25	23+26	24+25
296	296	296	296	296	296	296	296

最後一列(296)為單一圓上的數字總和。

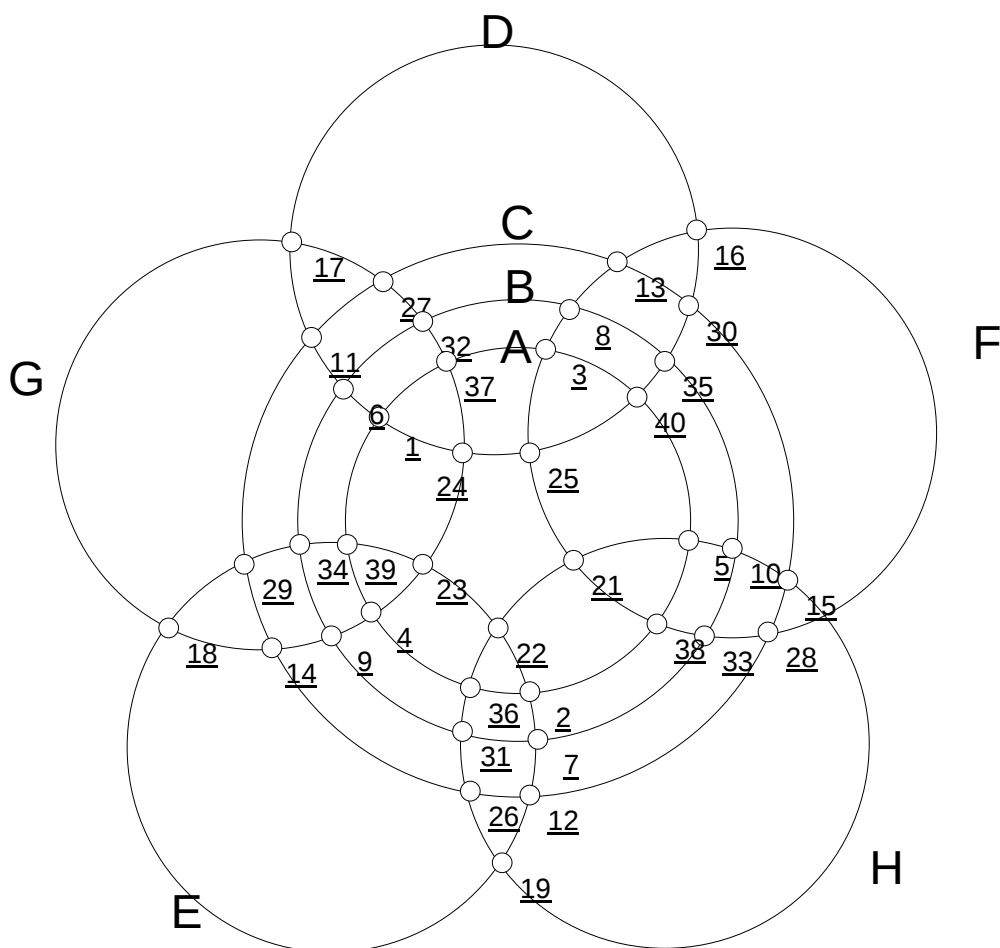
所得魔圖陣如下：



B. 當 $Q=8$, $R=8$ 時

符號				值			
W				$(8-1) \times 8 - 2 \times 8 = 40$			
e				$(40+1) \times 40 \div 8 = 205$			
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓	G 圓	H 圓
1+40	6+35	11+30	1+40	2+39	3+38	4+37	5+36
2+39	7+34	12+29	6+35	7+34	8+33	6+32	10+31
3+38	8+33	13+28	11+30	12+29	13+28	14+27	15+26
4+37	9+32	14+27	16+25	18+23	16+25	17+24	19+22
5+36	10+31	15+26	17+24	19+22	20+21	18+23	20+21
205	205	205	205	205	205	205	205

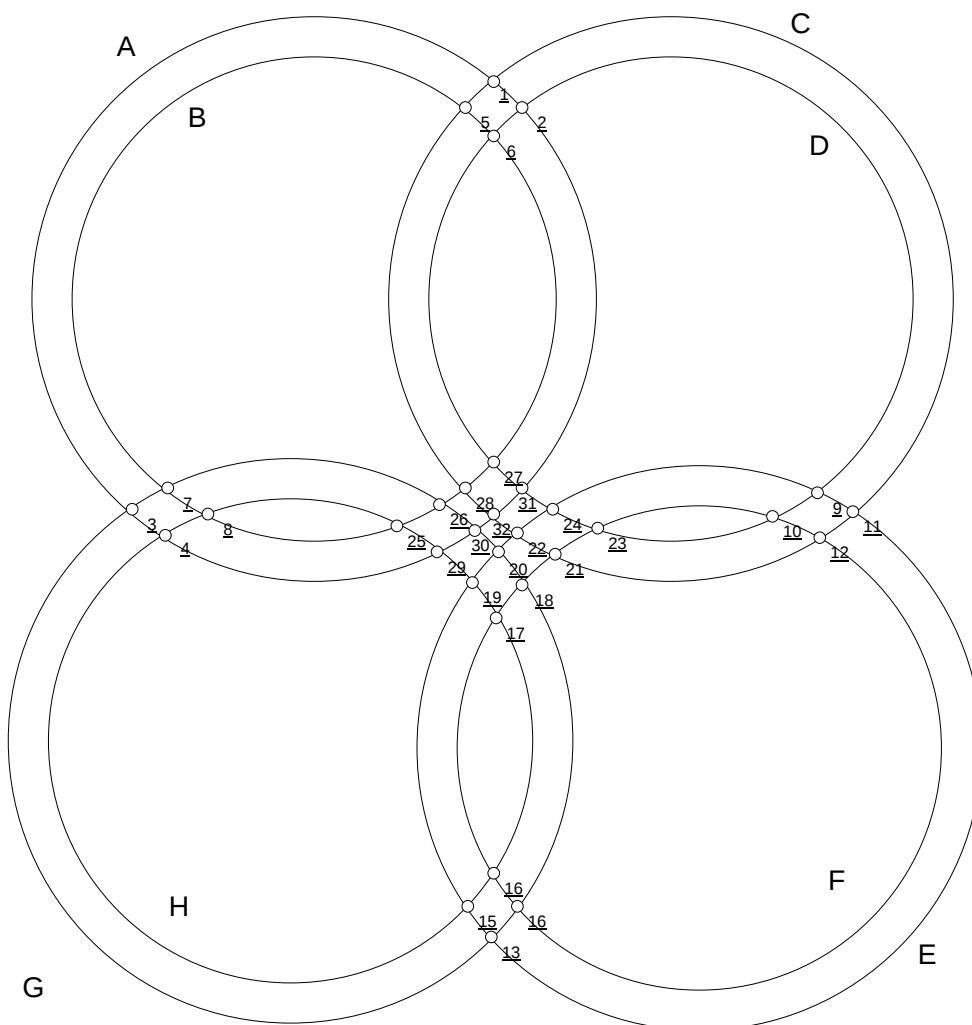
最後一列(205)為單一圓上的數字總和。



C. 當 $Q=8$, $R=12$ 時

符號				值			
W				$(8-1) \times 8 - 2 \times 12 = 32$			
e				$(32+1) \times 32 \div 8 = 132$			
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓	G 圓	H 圓
1+32	5+28	1+32	2+31	6+27	3+30	7+26	4+29
2+31	6+27	8+25	8+25	11+22	9+24	12+21	10+23
3+30	7+26	9+24	11+22	13+20	13+20	15+18	14+19
4+29	8+25	10+23	12+21	14+19	15+18	16+17	16+17
132	132	132	132	132	132	132	132

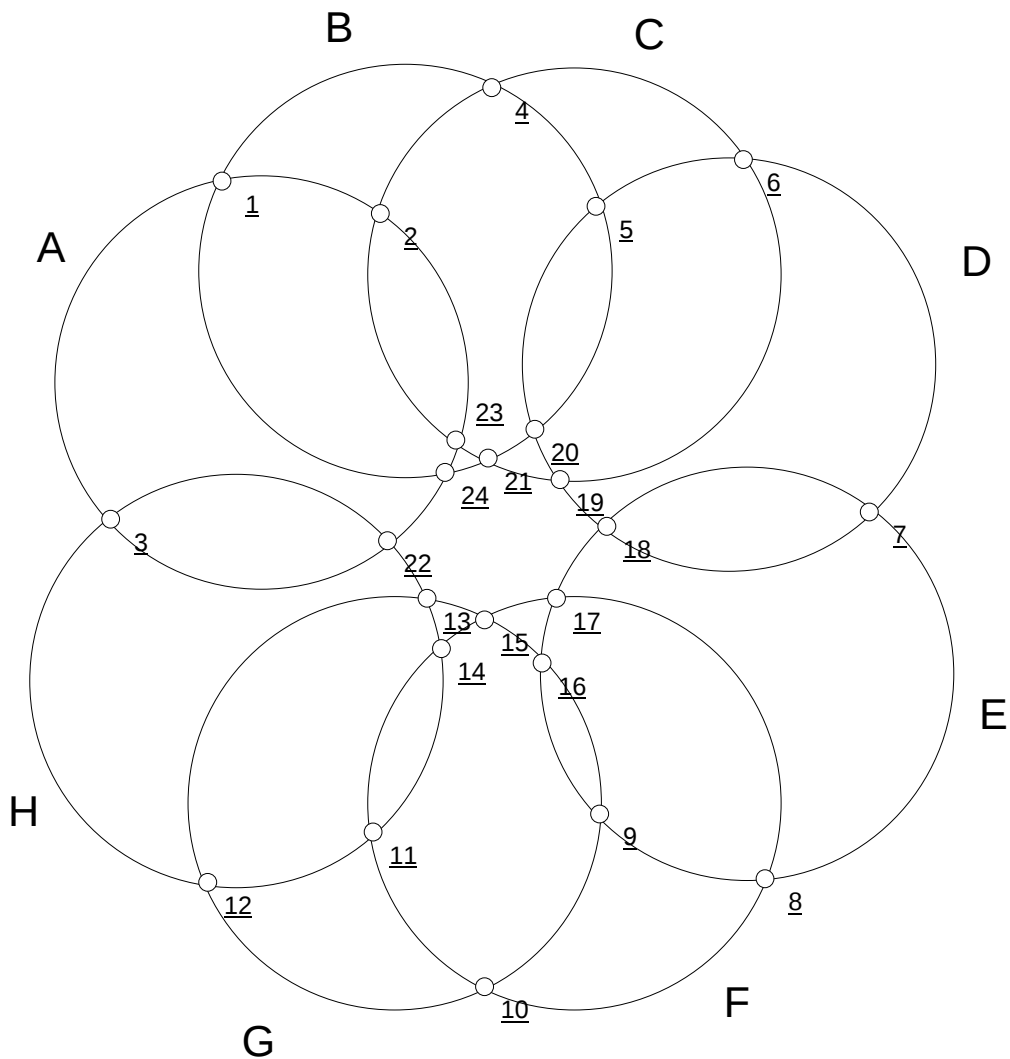
最後一列(132)為單一圓上的數字總和。



D. 當 $Q=8$, $R=16$ 時

符號				值			
W				$(8-1) \times 8 - 2 \times 16 = 24$			
e				$(24+1) \times 24 \div 8 = 75$			
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓	G 圓	H 圓
1+24	1+24	2+23	5+20	7+18	8+17	9+16	3+22
2+23	4+21	4+21	6+19	8+17	10+15	10+15	11+14
3+22	5+20	6+19	7+18	9+16	11+14	12+13	12+13
75	75	75	75	75	75	75	75

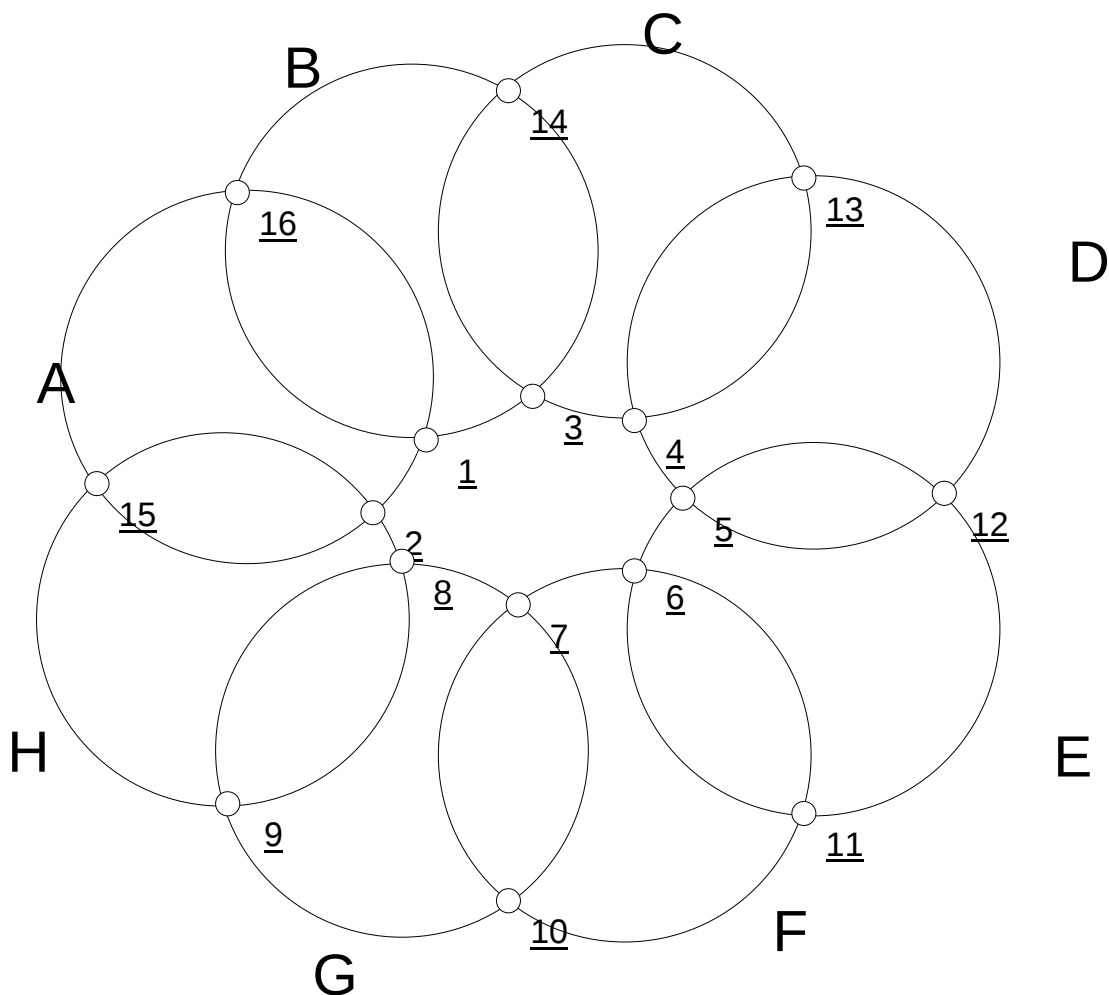
最後一列(75)為單一圓上的數字總和。



E. 當 $Q=8$, $R=20$ 時

符號				值			
W				$(8-1) \times 8 - 2 \times 20 = 16$			
e				$(16+1) \times 16 \div 8 = 34$			
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓	G 圓	H 圓
1+16	1+16	3+14	4+13	5+12	6+11	7+10	2+15
2+15	3+14	4+13	5+12	6+11	7+10	8+9	8+9
34	34	34	34	34	34	34	34

最後一列(34)為單一圓上的數字總和。



(3)Q、R 一般化

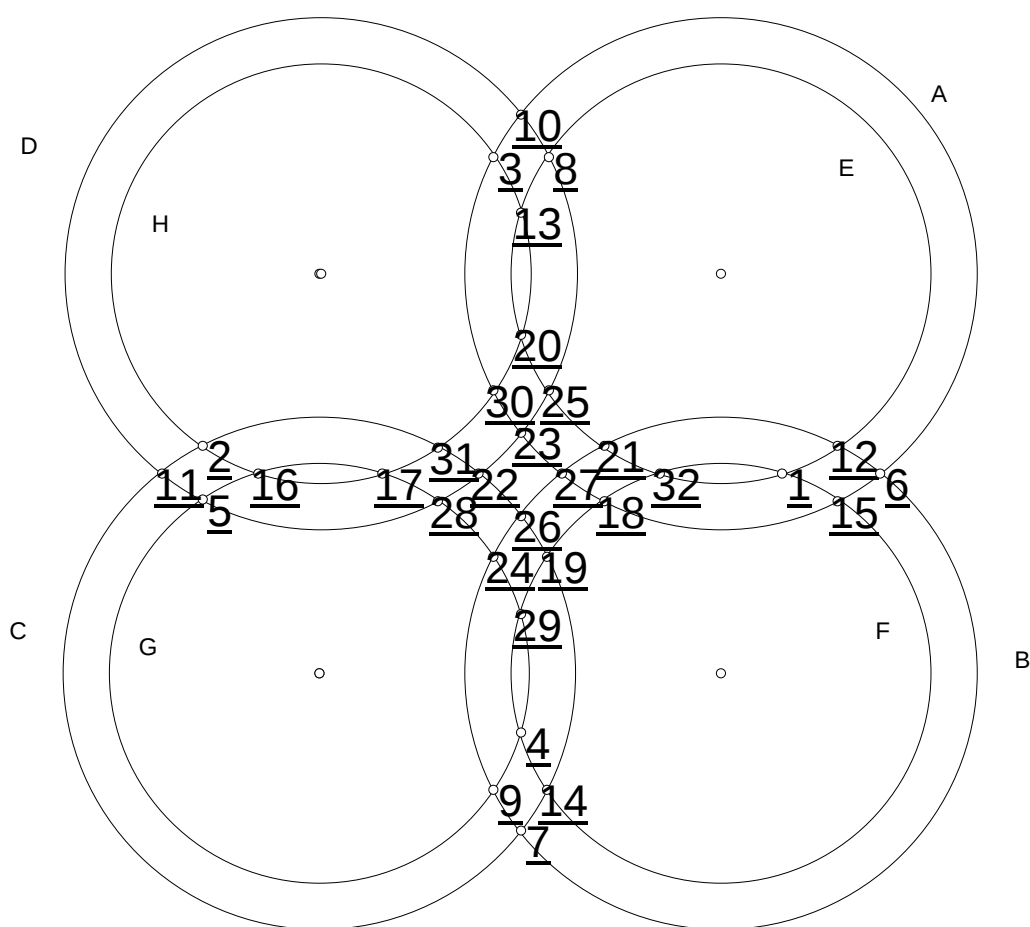
由上述情形，可以將 Q、R 一般化，即可設 $Q=n$ 、 $R=m$ 時，R、W 的求法如下：

	說明	求法
R 的最大值	每個圓至少要交於另兩個圓，一個圓可以不相交 Q-3 個圓， $(Q-3) \times Q$ 會重複一組 R。	$\frac{(Q-3) \times Q}{2}$
所有圓的交點 W	存在 1 個 R 時，會少掉 2 個 W。	$W = (n-1) \times n - 2m$

(4)陣中陣(魔圖陣中有魔方陣)

此外，我們察覺到上述(2)中的C情形中，圖形的中央可以排出一個4階魔方陣，即

4 階魔方陣			
17	31	30	20
28	22	23	25
24	26	27	21
29	19	18	32



由上圖，我們察覺到：

在某種排列下，在魔圖陣之中可以排出平面魔方陣。

因此，我們再尋找出魔圓陣中可以排出魔方陣的情形。
 例如：Q=12、R=18，可以排出六個不同的四階魔方陣。求法如下：

$W=12 \times 11 - 2 \times 18 = 96$ ，即表示共有 96 個交點個數。
 $e=97 \times 96 \div 12 = 776$ ，任一圓上的交點個數字總和為 776。

我們先找出數值最小的 4 階魔方陣，即

數值最小的 4 階魔方陣			
1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

數值最小的 4 階魔方陣每邊和為 34，因而，可求數值最大的 4 階魔方陣每邊和為 $\frac{776}{4} \times 2 - 34 = 354$ 。

並且以 1~16 為最小的 4 階魔方陣之組成元素，再以 17~32 為第二小的 4 階魔方陣之組成元素，以此類推，可求這 6 個魔方陣公差為 64。

所以，六個魔方陣的每邊和分別為 34、98、162、226、290、354。

以下把六個 4 階魔方陣分別列出如下：

每邊和為 34			
1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

每邊和為 98			
17	31	30	20
28	22	23	25
24	26	27	21
29	19	18	32

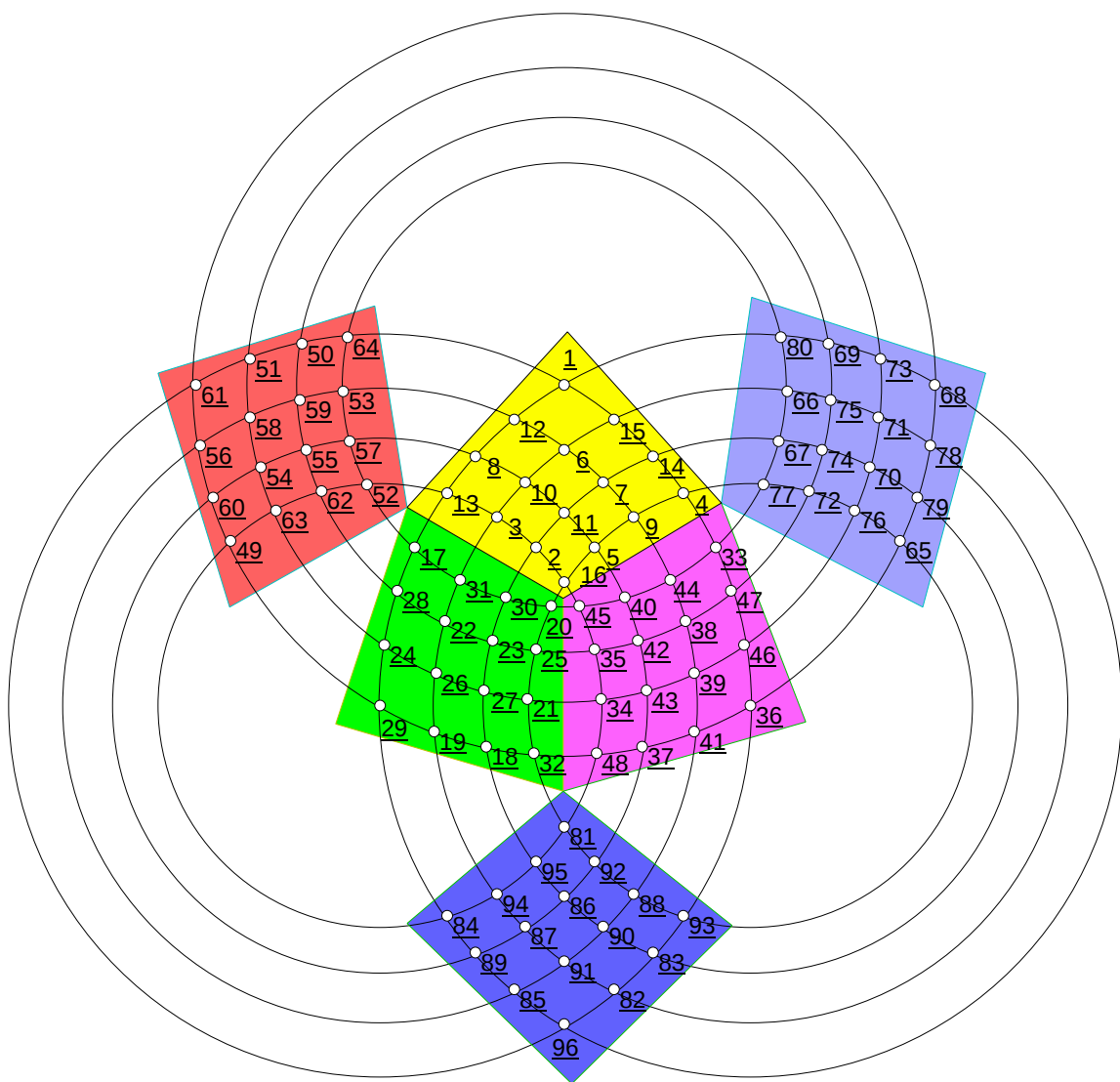
每邊和為 162			
33	47	46	36
44	38	39	41
40	42	43	37
45	35	34	48

每邊和為 226			
61	51	50	64
56	58	59	53
60	54	55	57
49	63	62	52

每邊和為 290			
80	69	73	68
66	75	71	78
67	74	70	79
77	72	76	65

每邊和為 354			
81	92	88	93
95	89	90	83
94	87	91	82
84	89	85	96

而魔圓陣則如下圖：



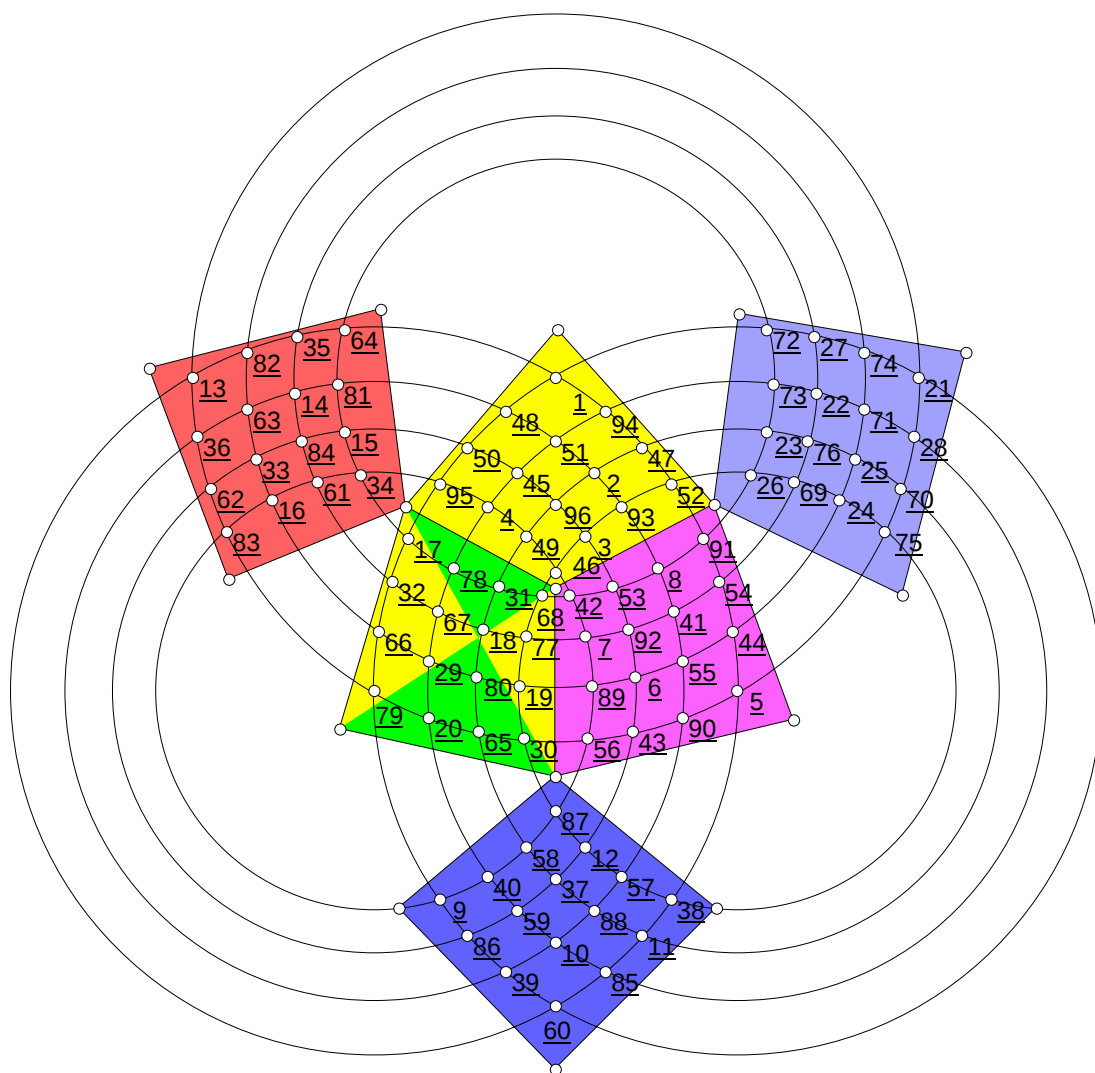
我們亦可利用魔方陣的每邊和為作轉換，使其另一魔方陣的每邊和亦相同，其轉換方式如下：

即把左式轉換成右式。

每邊和為 34				⇒				每邊和為 $34+a+b+c+d$			
1	15	14	4					$1+a$	$15+d$	$14+c$	$4+b$
12	6	7	9					$12+b$	$6+c$	$7+d$	$9+a$
8	10	11	5					$8+d$	$10+a$	$11+b$	$5+c$
13	3	2	16					$13+c$	$3+b$	$2+a$	$16+d$

這 6 個魔方陣每邊和的公差為 0，那 6 個魔方陣的每邊和皆為 196。

求法為 $\frac{34 + 98 + 162 + 226 + 290 + 354}{6} = 196$ 。其魔圓陣圖形如下：



我們察覺到：

在某種排列下，魔圓陣與魔方陣可以同時存在，且排法不唯一。

3. 類型三：任 2 圓皆相切。

若任 2 圓皆相切時， Q 、 Y 之間有何關聯性？

設當 $Q=N$ 、 $Y=h$ 時，其 Y 與 W 的求法說明如下：

	說明	求法
Y 的最大值	任一圓與 $(Q-1)$ 個圓相切。	$(n-1) \times n \div 2$
所有圓的交點 W	存在一個 Y 時，會少掉 1 個 W 。	$(n-1) \times n - h$

分述如下：

(1) 當 $Q=3$ 時

解說	圖示
$W = (3-1) \times 3 - 3 = 3$ 因為 e 必須相等，且數字不重複， 所以當 $O_1=1$ 時，則 $O_2=O_3$ （矛盾）， 圖形成立，但數字不能排入。	

(2) 當 $Q=4$ 時

解說	圖示
$W = (4-1) \times 4 - 6 = 6$ 因為 e 必須相等，且必為整數， $W = 6$ $E = 7 \times 6 \div 2 = 21$ $e = 21 \times 2 \div 4 = 21/2$ (不為整數矛盾)。 圖形成立，但數字不能排入。	

(3)當 $Q = 5$ 時

解說	圖示
而 $Q = 5$ 時，每一個圓要與 4 個圓相切，圖形無法成立。 因為若每個圓有 4 個相切圓，有必定會有相交或不相交的情形。 所以當 $Q = 5$ 時，$Y = 4$ 必 R 值的出現。	不存在

綜合以上，我們得到一定理：

定理三：
當只有相切情形時，圖形成立，但數字無法排入。

4.綜合型：類型一、二、三合併。

(1)若將類型一、二、三合併，那 Q 、 R 、 Y 、 W 、 e 值之間有何關聯性

以下是 Q 、 R 、 Y 、 W 、 e 值的求法與說明：

	說明	求法
R 的最大值	每個圓至少要交於另兩個圓，一個圓可以不相交 $Q-3$ 個圓， $(Q-3) \times Q$ 會重複一組 R 。	$(Q-3) \times Q \div 2$
Y 的最大值	任一圓與 $(Q-1)$ 個圓相切。	$(Q-1) \times Q \div 2$ 註： $Q=5$ 時， $Y=4$ 必 R 值的出現，且 Y 的最大值會小 $(Q-1) \times Q \div 2$
W 的個數	1 個 R 會減去 2 個 W ，1 個 Y 會減去 1 個 W 。	$W = (Q-1) \times Q - (2R + Y)$
w 的個數	加入 R 、 Y 兩個因素。	$e = 2W \div 2$ $= 2[(Q-1) \times Q - 2R - Y] \div Q$
e 值	加入 R 、 Y 兩個因素。	$e = [(Q-1) \times Q - (2R + Y - 1)] \times [(Q-1) \times Q - (2R + Y)] \div Q$

由上表得知 Q 、 R 、 Y 、 W 、 e 值之間的關係如下：

定理四：

1. 當 $Q=5$ ， $Y=4$ 時， $R > 0$ ，且 Y 的最大值會小 $(Q-1) \times Q \div 2$ 。
2. w 的個數， $e = 2[(Q-1) \times Q - 2R - Y] \div Q$ ，所以 $4R$ 為 Q 的倍數（為偶數，在類型二討論過）、 $2Y$ 為 Q 的倍數。
3. w 不可能小於 1，所以 W 必定大於 Q 。 $\therefore W \geq Q$ ， $\therefore (Q-1) \times Q - 2R - Y \geq Q$

(2)若 Q 、 R 、 Y 值存在時，討論圖形的存在性

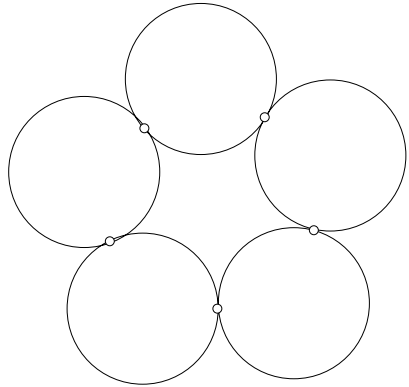
若滿足 Q 、 R 、 Y 、 W 、 e 值之間的關係(上述的 3 個條件)，則圖形是否會存在？若存在，則數字又如何排列？

首先我們先舉例說明：

舉例一：當 $Q=5$ 時

	值	過濾條件	可能的值
R 的最大值	$(5-3) \times 5 \div 2$ $R=0 \sim 5$	$4R/Q$ 必須是偶數。	$R=0$ or 5
Y 估計最大值	$(5-1) \times 5 \div 2$ $Y=0 \sim 10$ (不可為 10)	$2Y$ 為 Q 的倍數。	$Y=0$ or 5
	值	過濾條件	圖形形式
Q=5 的圖形	R0Y0 or R0Y5 or R5Y0 or R5Y5	當 $Q=5$ 時, $Y=4$ 必有 R 值的出現 $R \neq 0$ 。 $\because W \geq Q, \therefore (Q-1) \times Q - 2R - Y \geq Q$	R0Y0 or R5Y0 or R5Y5

當 $Y=0$ 的形態已經在類型一、二時，討論過了。所以，將只討論 R5Y5 的情形，即當 $Q=5$ ，R5Y5 時，分述如下：

解說	圖示
$W = (Q-1) \times Q - (2R+Y)$ $W = 4 \times 5 - 2 \times 5 - 5 = 5$ $w = 2W \div 5 = 2 \times 5 \div 5 = 2$ 當有 Q 個圓 $w=2$ 時， 第一個圓和第二個圓的交點 O_1 ， 第一個圓和第 X 個圓的交點 O_x ， 第二個圓和第三個圓的交點 O_3 ， 當 $O_1=1$ ，而 $O_x=O_3$ (矛盾)， 故此魔圓陣永不成立。	

我們得到一定理：

定理五：
 當 $Q=5$ 時，R5Y5 的圖形存在，但魔圓陣不成立。

舉例二：當 $Q=6$ 時

	值	過濾條件	值
R 的最大值	$(6-3) \times 6 \div 2$ $R=0 \sim 9$	$4R/Q$ 必須是偶數。	$R= 0 \text{ or } 3 \text{ or } 6$ or 9
Y 估計最大值	$(6-1) \times 6 \div 2$ $Y=0 \sim 15$ (不可為 15)	$2Y$ 為 Q 的倍數。	$Y= 0 \text{ or } 3 \text{ or } 6$ or 9 or 12
	值	過濾條件	圖形形式
Q=6 的圖形	R0Y0 or R0Y3 or R3Y0 or R3Y3 or R3Y6 or R3Y9 or R3Y12 or R6Y0 or R6Y3 or R6Y6 or R6Y9 or R6Y12 or R9Y0 or R9Y3 or R9Y6 or R9Y9 or R9Y12	當 $Q=5$ 時, $Y \leq 4$ 必有 R 值的出現 $R \neq 0$ 。 $\because W \geq Q$ $\therefore (Q-1) \times Q - 2R - Y \geq Q$	R0Y0 or R0Y3 or R3Y0 or R3Y3 or R3Y6 or R3Y9 or R3Y12 or R6Y0 or R6Y3 or R6Y6 or R6Y9 or R9Y0 or R9Y3 or R9Y6

當 $Y=0$ 的形態已經在類型一、二時，討論過了。

故將只討論 R0Y3、R3Y3、R3Y6、R3Y9、R3Y12、R6Y3、R6Y6、R6Y9、R9Y3、R9Y6，
總共 10 種圖形。分述如下：

A. 當 $Q=6$, ROY3 時

符號			值		
W			$(6-1) \times 6 - (2 \times 0 + 3) = 27$		
e			$(27+1) \times 27 \div 6 = 126$		
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓
1	1	3	3	2	2
11+20	12+19	14+17	4+27	8+23	4+27
13+18	14+17	5+26	8+23	9+22	5+26
15+16	6+25	9+22	12+19	10+21	6+25
7+24	10+21	15+16	13+18	11+20	7+24
125	125	127	127	126	126
21 $\Leftrightarrow$ 22 24 $\Leftrightarrow$ 25 24+6 $\Leftrightarrow$ 4+27 (紫色)					
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓
1	1	3	3	2	2
11+20	12+19	14+17	6+24	8+23	4+27
13+18	14+17	5+26	8+23	9+22	5+26
15+16	4+27	9+21	12+19	10+21	6+25
7+25	10+22	15+16	13+18	11+20	7+24
126	126	126	126	126	126

最後一列(126)為單一圓上的數字總和。

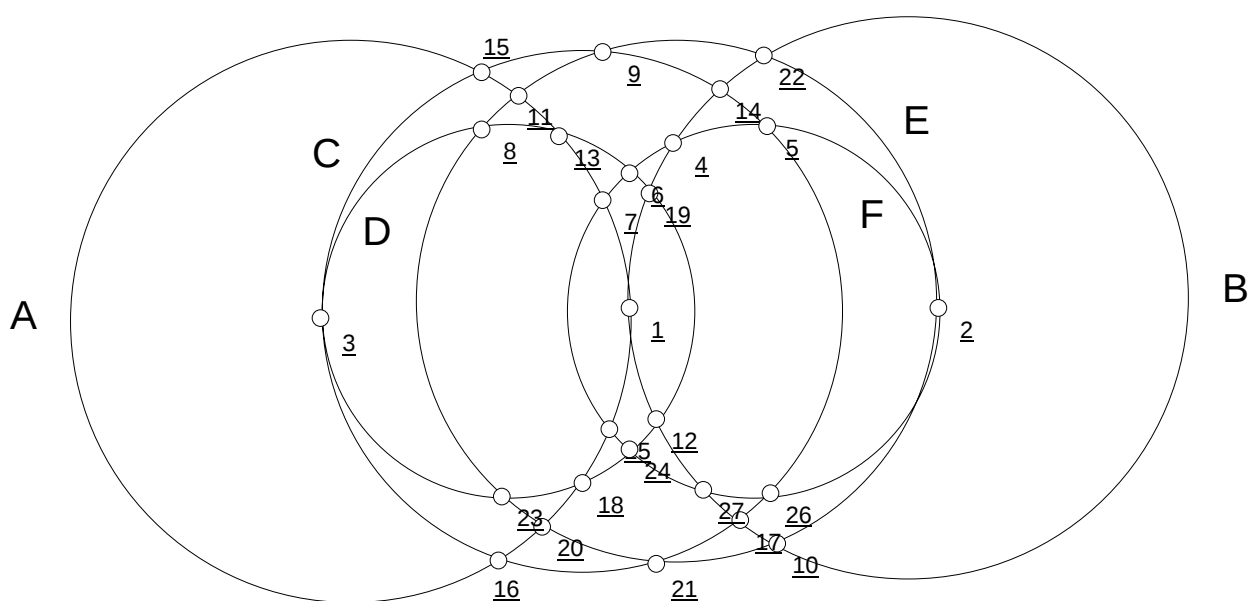
在上表中，紅、藍兩排是一開始就符合數字的，當其他圓裡面，有紅、藍兩色時，紅的數字可和紅的數字互換，藍的數字可和藍的數字互換，但是同一圓裡不可重複數字。

上述排法的原理如下：

當有 5 個圓時，A 圓裡面有 a、b、c、三個數字，A 交於 B、C、D 三圓，當 B 圓裡面的 a 和 C 圓裡面的 b 互換時，A 圓還是交於 B、C、D 三圓，對於排列無影響。

A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓
a	$a \leftrightarrow b$			
b		$b \leftrightarrow a$		
c			c	

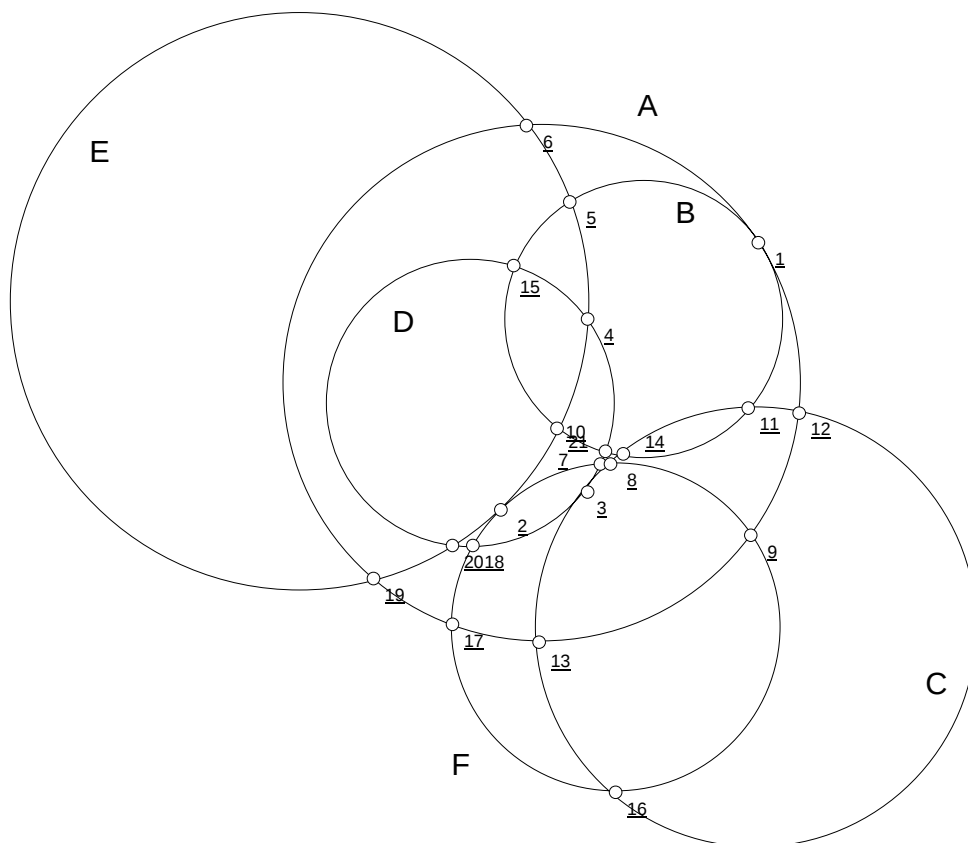
魔圓陣的的圖形如下：



B. 當 $Q=6$, R3Y3 時

符號			值		
W			$(6-1) \times 6 - (2 \times 3 + 3) = 21$		
e			$(21+1) \times 21 \div 6 = 77$		
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓
1	1	3	3	2	2
9+16	10+15	11+14	4+21	7+18	4+21
12+13	5+20	12+13	7+18	8+17	5+20
6+19	11+14	8+17	10+15	9+16	6+19
76	76	78	78	77	77
20 $\leftrightarrow$ 21 16 $\leftrightarrow$ 27					
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓
1	1	3	3	2	2
9+17	10+15	11+14	4+20	7+18	4+21
12+13	5+21	12+13	7+18	8+17	5+20
6+19	11+14	8+16	10+15	9+16	6+19
77	77	77	77	77	77

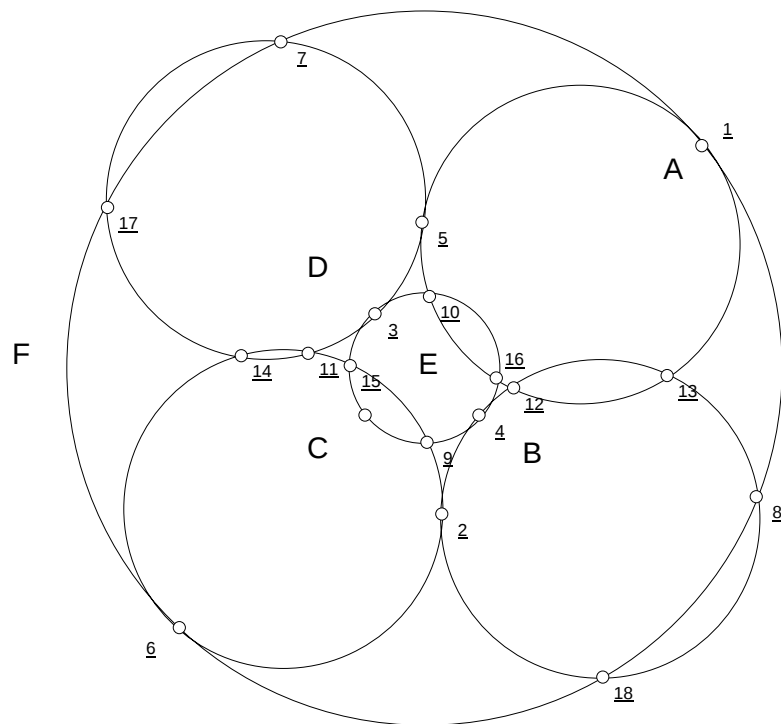
最後一列(77)為單一圓上的數字總和。



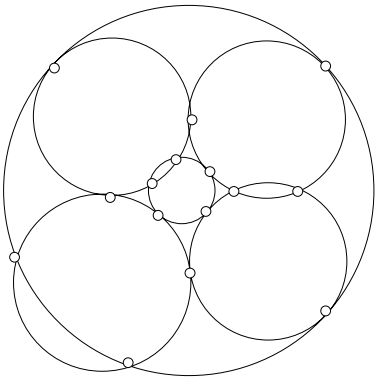
C. 當 $Q=6$, R3Y6 時

符號		值			
W		$(6-1) \times 6 - (2 \times 3 + 6) = 18$			
e		$(18+1) \times 18 \div 6 = 57$			
先將 y 值排列成 1 1 3 3 2 2 的情形，換數字時比較方便					
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓
1+5	2+4	2+6	3+5	3+4	1+6
6	6	8	8	7	7
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓
1+5	2+4	2+6	3+5	3+4	1+6
12+13	11+14	9+16	7+18	9+16	7+18
10+15	8+17	12+13	11+14	10+15	8+17
56	56	58	58	57	57
15 ⇔ 16 17 ⇔ 18					
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓
1+5	2+4	2+6	3+5	3+4	1+6
12+13	12+13	9+15	7+17	9+16	7+18
10+16	8+18	11+14	11+14	10+15	8+17
57	57	57	57	57	57

最後一列(57)為單一圓上的數字總和。



D. 當 $Q=6$, $R3Y9$ 時

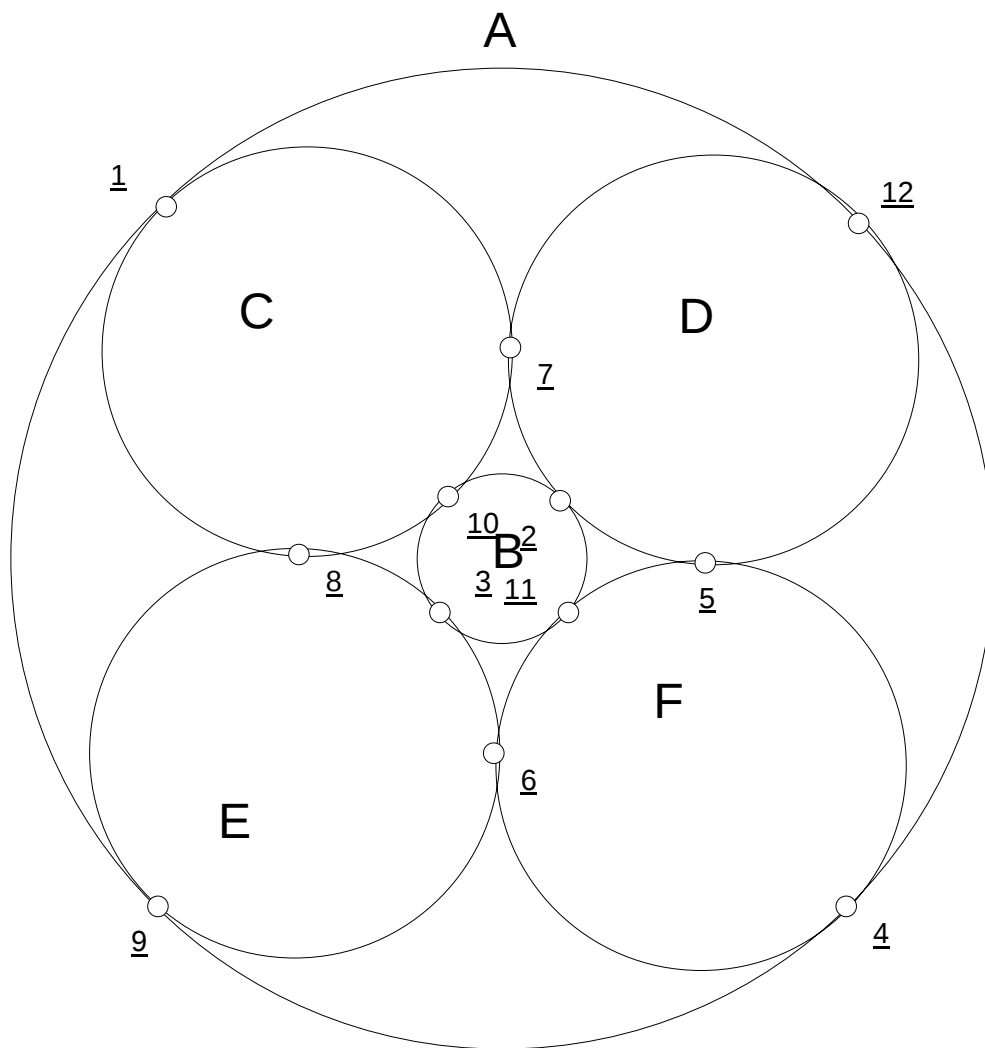
符號			值			圖示
W			$(6-1) \times 6 - (2 \times 3 + 9) = 15$			
e			$(15+1) \times 15 \div 6 = 40$			
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓	
1+5+8	3+4+7	1+6+9	3+5+8	2+4+9	2+6+7	
10+15	12+13	12+13	11+14	11+14	10+15	
39	39	41	41	40	40	
註		會發現無法移動數字而湊出 e 值(40)				

E. 當 $Q=6$, $R3Y12$ 時

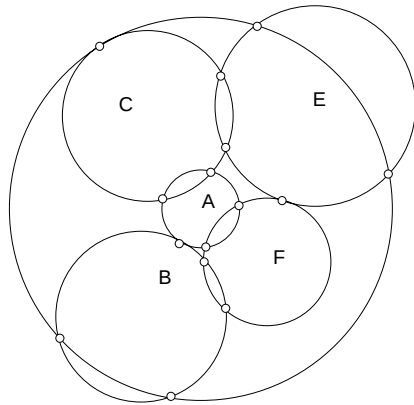
符號			值		
W			$(6-1) \times 6 - (2 \times 3 + 12) = 12$		
e			$(12+1) \times 12 \div 6 = 26$		
先把最大最小為 1 組，找出 4 組					
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓
1+12	2+10	1	2	3	4
4+9	3+11				
C 圓的 1 只能和 10 11 D 圓的 2 只能和 9 12 E 圓的 3 只能和 9 12 F 圓的 4 只能和 10 11					
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓
1+12	2+10	1	2	3	4
4+9	3+11	10	12	9	11
再將 5 6 7 8 排入					
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓
1+12	2+10	1+10	2+12	3+9	4+11
4+9	3+11	7+8	7+5	8+6	5+6
26	26	26	26	26	26

最後一列(26)為單一圓上的數字總和。

魔圓陣的的圖形如下：



F. 當 $Q=6$, $R6Y3$ 時

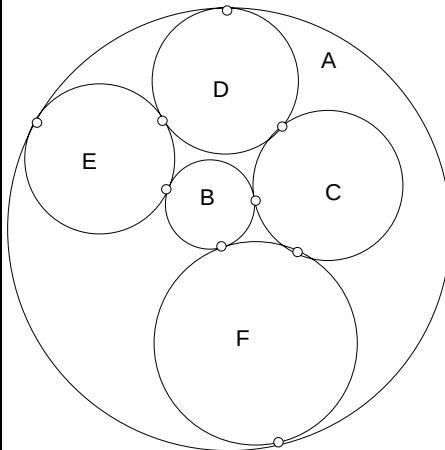
符號			值			圖示
W			$(6-1) \times 6 - (2 \times 6 + 3) = 15$			
e			$(15+1) \times 15 \div 6 = 40$			
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓	
1	1	3	3	2	2	
4+15	5+15	7+12	9+10	6+13	4+15	
9+10	6+13	8+11	8+11	7+12	5+15	
39	39	41	41	40	40	
註		會發現無法移動數字而湊出 e 值(40)				

最後一列(40)為單一圓上的數字總和。

G. 當 $Q=6$, $R6Y6$ 時

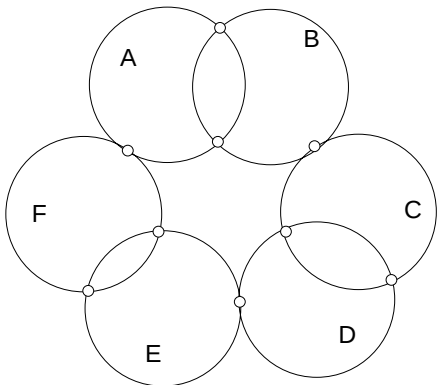
符號			值			圖示
W			$(6-1) \times 6 - (2 \times 6 + 6) = 12$			
e			$(12+1) \times 12 \div 6 = 26$			
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓	
1+5	2+4	2+6	3+5	3+4	1+6	
8+11	7+12	9+10	9+10	8+11	7+12	
25	25	27	27	26	26	
註		會發現無法移動數字而湊出 e 值(26)				

H. 當 $Q=6$, $R6Y9$ 時

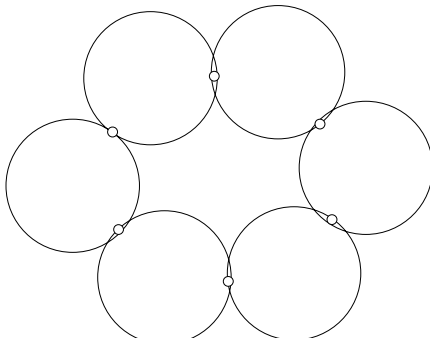
符號			值			圖示
W			$(6-1) \times 6 - (2 \times 6 + 9) = 9$			
e			$(9+1) \times 9 \div 6 = 15$			
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓	
1	2	7	1	5	9	
5	6	3	8	2	6	
9	7	4	4	8	3	
15	15	14	12	15	18	
註		會發現無法移動數字而湊出 e 值(15)				

最後一列(15)為單一圓上的數字總和。

I. 當 $Q=6$, $R9Y3$ 時

符號			值			圖示
W			$(6-1) \times 6 - (2 \times 9 + 3) = 9$			
e			$(9+1) \times 9 \div 6 = 15$			
A 圓	B 圓	C 圓	D 圓	E 圓	F 圓	
1	1	3	3	2	2	
6+7	5+8	6+7	4+9	5+8	4+9	
14	14	16	16	15	15	
註		會發現無法移動數字而湊出 e 值(15)				

J. 當 $Q=6$ ， $R9Y6$ 時

解說	圖示
$w = 2 \times 6 \div 6 = 2$ 當有 Q 個圓 $w = 2$ 時 第一個圓和第二個圓的交點 o_1 第一個圓和第 x 個圓的交點 o_x 第二個圓和第三個圓的交點 o_3 當 $o_1=1$ 而 $o_x=o_3$ (矛盾) 故此魔圓陣永不成立 當 $Q=6$ ， $R6Y9$ ，圖形存在，但圖魔陣不成立	

綜合以上，我們得到一定理：

定理六：

當 Q 、 R 、 Y 符合第 24 頁定理四的情形時，圖形一定存在，但數字未必可以排入，所以圖形存在時，魔圓陣未必成立。

伍、研究結果

發現兩個研究結果如下：

(一)圖形成立的條件

當有 Q 個圓的時候，滿足下列四個條件，則圖形一定存在。

1. $\frac{4R}{Q}$ 為偶數。
2. $2Y$ 為 Q 的倍數。
3. 當 Q 值越大， Y 的最大值會和其上界 $(Q-1) \times Q \div 2$ 差距更大。
4. $\frac{2(Y+R)}{Q} \leq Q-1$ 。

(二)數字排入的方法

當有 Q 個圓、 R 個不相交組、 Y 個相切組，圖形成立時，

1. 不存在兩圓相切的情形時，可以用兩個數字為一組的方式排入。

2. 當兩圓相切或交於兩點時，可以先將交於 1 點的數字排入。再用互換的方式，進行排列。
3. 當 $w=2$ 的時候是無法排入數字的。

(三)魔圓陣與魔方陣之間的關係

在一些特殊的排列下，魔圓陣可以包含魔方陣，例如：如圖($Q=12$ $R=18$ ，第 21 頁)的魔圓陣，在 $Q=12$ 、 $R=18$ 時，這個魔圓陣中可以找到六個 4×4 魔方陣，其中各組魔方陣的每邊和成等差。

陸、討論

(一)如何在魔圓陣中排出魔方陣？

在研究過程中的類型二，最後一部分 $Q=12$ 、 $R=18$ ，根據我們的觀察結果，如果排列方法改變，而每一個子群的數字和不成等差的話，我們似乎可以用這類型的魔圓陣，排出任意階數的魔方陣。這當中的關聯性非常地耐人尋味。

(二)研究過程之中的類型三

1. $R6Y6$ 、 $R3Y9$ 等，目前還沒有找到規律性的排列方式，這是個可以繼續研究的課題。
2. 而 $R3Y12$ 的排列方式是比較牽強的方式，我們猜測若能找到適合的數字，或許存在排入的規則。

(三)魔圓陣的立體結構

本研究只限於平面上的圓系結構，尚未將平面的圓擴充至三維空間的結構，關於此問題值得再深入研究。

柒、結論

這次的研究，發現如果要成立一個魔圓陣，其實要符合很多條件的，變因越多，內容就更加複雜，本研究只有討論到相交、相切及不相交的情形，若是再加入一些其他變因，例如：

1. 多圓交於一點。
2. 每個圓的影響類型不一定相同。

弄清楚這些變因之間的關係，是個值得深入探討的研究方向。

捌、參考資料及其他

寓數學於遊戲(第二輯) 趙文敏 九章 1997

趣味數學魔方陣 李國賢 旭昇 2003

評語

優點：好的科展題目能夠令探討者的靈感源源不絕，每當完成一項發現又忽然冒出好幾項新鮮的研究靈感。本作者在如此美妙的研究題目，深受薰陶。

展望：希望作者能夠朝著球面上的題材鑽研。