中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

高中組

數學科

科別：數學科

組別：高中組

作品名稱：騎士迷蹤

關鍵詞：軸座標公式、座標和公式

編號：040414

學校名稱：

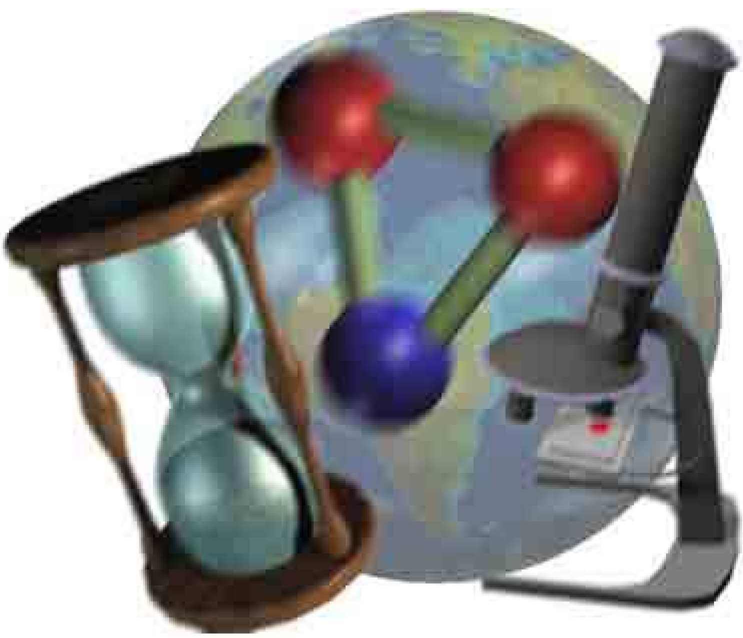
國立彰化高級中學

作者姓名：

施信瑋、吳哲瑋、江孟烜、王澤瑋

指導老師：

林漢良、陳章裕



摘 要

我們定義：騎士的走法，在西洋棋中，依座標來看，如下圖所示。由起點 O(0 , 0)出發，有八種走法如下：A(1 , 2)、B(2 , 1)、C(2 , -1)、D(1 , -2)、E(-1 , -2)、F(-2 , -1)、G(-2 , 1)、H(-1 , 2)。

	H		A	
G				B
		O		
F				C
	E		D	

探討的目的：

一、用騎士走法, 給定一起點, 求出其在棋盤中到每一格的最少步數, 並利用 Visual Basic 6.0 製作輔助程式驗證。接著把所得的數據填入每一格中，推導得每一個步數所形成的圖形公式。

二、藉由研究目的(一)所得的圖形，我們反推求得給定一起點，要到達另一給定終點，所需的最少步數的公式。包括數個判斷公式與使用到高斯函數的對應公式。

三、列舉出不能符合圖形公式與反求步數公式的情況。

進一步討論：

1. 可以進一步討論在給定一起點與一終點，探討其最少步數有幾種走法，並想辦法求得期間最少步數的走法規則。已撰寫出程式供參考，具體結果仍在研究中。
2. 若在一立體空間中給定一起點與一終點，研究騎士走法最少步數的規則及公式。
3. 若騎士有另外的走法譬如由起點 O(0, 0)，騎士走法用(±3, ±4) (±4, ±3)、(±4, ±5) (±5, ±4)…等方法，是否也能走遍棋盤的各個座標點？是否有最少步數的公式存在？

壹、研究動機

在一次下西洋棋的經驗中，我們發現走法最花俏的就是騎士，他的走法對將軍攻擊性強，且難以捉摸。我們開始試著去研究騎士在棋盤上行走的特性。

貳、定義

騎士的走法：在西洋棋中，依座標來看，如圖一所示。由起點 O(0, 0)出發，有八種走法如下：A(1 , 2)、B(2 , 1)、C(2 , -1)、D(1 , -2)、E(-1 , -2)、F(-2 , -1)、G(-2 , 1)、H(-1 , 2)。

	H		A	
G				B
		O		
F				C
	E		D	

圖一 八種走法的情況

參、研究目的

一、 圖形推導：用騎士走法，給定一起點，求出其在棋盤中到每一格的最少步數，並利用 Visual Basic 6.0 製作輔助程式驗證。接著把所得的數據填入每一格中，推導得每一個步數所形成的圖形公式。

二、 反求步數：藉由研究目的(一)所得的圖形，我們反推求得給定一起點，要到達另一給定終點，所需的最少步數的公式。包括數個判斷公式與使用到高斯函數的對應公式。

三、 舉出例外：列舉出不能符合圖形公式與反求步數公式的情況。

肆、研究設備與器材

電腦(包括幾個輔助程式，使用 Visual Basic 6.0)、紙、筆

伍、研究過程及方法

一、　圖形推導

1. 我們定義**(a，b)≡K**，表示將原點 O(0 , 0)當起點，終點為(a , b)時，K 為其最少步數。
2. 我們試著用人工推導出由原點到每一格的 K 值，列成圖表。定一起點，尋找起點可以到達的格子，填入第一步（填入 1），接著判斷已填入 1 的所有格子，再尋找其可以到達的格子，填入第二步（填入 2），依序向下做同樣的步驟，填入 3、4、5．．．，不過已經填過的格子就不可以再填，因為再填入的數字（步數）必定比先前已經填過的數字大，這樣就不會是最少步數的情況，也就是繞路。遵守這樣的法則，我們可以用手動的方式填寫棋盤上的每一個格子，也可以撰寫程式來進行驗證，檢查出此圖表是正確的。所以我們得到圖二。

	0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
1	3	4	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8
2	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6	7	8	7	8
4	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9
5	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	8	7	8
6	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	9
7	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8
8	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9
9	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8
10	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9

11	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10
12	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9	8	9	10	9
13	7	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10
14	8	7	8	7	8	7	8	7	8	9	8	9	10	9	10	11
15	9	8	9	8	9	8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	10

圖二 16x16 的最少步數情況

3. 觀看其圖形，發現它是有規律的。首先，我們發現幾個例外的座標點，例外的座標點如下：(1 , 0) (0 , 1) (1 , 1) (2 , 2)，我們決定先不討論這 4 點。
4. 我們以原點為起點，橫軸為 X 軸，縱軸為 Y 軸。X 軸和 Y 軸的數字一模一樣，規律可從這兩軸來推，所以我們決定先找出這兩軸的規律。(以下就以 X 軸來討論，Y 軸情形相同)
5. 觀察 X 軸如圖三所示。

	0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7	6	7	8	9

圖三 X 軸上最少步數情況

當 K 為偶數時則其座標為偶數；當 K 為奇數時，則反之。且每個數字都會依序出現兩次，在(1，0)的 3 不算。我們定義給定 K 值時 X 軸上所出現的點，依序為 S_1、S_2。

若 K 為偶數則其兩點座標即為 $S_1(2K-2 , 0)$ $S_2(2K , 0)$，K 為奇數則其兩點座標即為 $S_1(2K-3 , 0)$ $S_2(2K-1 , 0)$。

我們試著導出將 K 值代入即可求出 S_1、S_2 兩解的公式。

公式導出過程：

K 為奇數時有兩解：$S_1=2K-3$，$S_2=2K-1$

即 $S_1-2K+3=0$，$S_2-2K+1=0$

$(S_1-2K+3)(S_2-2K+1)=0$

令 $S=\{ S_1, S_2\}$

展開得 $4K^2-4KS+S^2-8K+4S+3=0$

K 為偶數時同樣可得 $4K^2-4KS+S^2-4K+2S=0$

當 K 為偶數代入：$4K^2-4KS+S^2-4K+2S=0$　　　解 S

當 K 為奇數代入：$4K^2-4KS+S^2-8K+4S+3=0$　　　解 S

S 所解出的兩解即為 S_1、S_2。我們稱他們為***軸座標公式***。

	0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
0	0	3	2	3	2	3	4
1	3	4	1	2	3	4	3
2	2	1	4	3	2	3	4
3	3	2	3	2	3	4	*3*
4	2	3	2	3	4	3	4
5	3	4	3	4	3	4	5
6	4	3	4	3	4	5	4

圖四 7x7 的最少步數情況

6. 以 K=3 舉例來說(圖四)，它的 S_1 為 3，沿著淺藍的格子走會經過三個 3，若由 S_1 經過 S_2 往下沿著紫色的顏色走也是會經過三個 3，所以我們定義：P 為間格數，例如：當 K=3 時它的 P=3，K=4 時 P=3，K=5 時 P=4。

   我們再試著找出它的公式，將其 K 值代入就可求出 P 值。

   把 K 分為奇數和偶數看，然後發現奇數和偶數都分別成等差數列，且公差為 2，所以我們把他寫成公式－***間隔數公式***

   K 為奇數：P=(K+1)÷2+1

   K 為偶數：P=K÷2+1

7. 之前已定義以(0 , 0)為起點，(a , b)為終點，(a, b)≡K， K 為最少步數，現在我們再定義 a+b≡W。W 為其兩座標值的和。我們想試著利用 W 去找出一給定 K 值的點集合。

8. 因為 P 為間隔數，所以要到達 S_1 之最底部的 K，所需的步數為 2P，則最小步數為

S_1，最大步數為 S_1+2P。

符合給定 K 值所得的 W 值： $\mathbf{S_1+2Q(\,0\leq Q\leq P,\ \ Q\in Z)}$

我們稱此為*<u>行走步數公式</u>*

9. 因為行走步數有他的範圍存在，所以我們接著著手尋找他的範圍。觀察圖五與圖六的情形，為我們對於當 K 值為奇數與偶數的情況接近 X 軸的點所做的歸納。

奇數外界限為 $X<S_2+2=2K+1$

偶數外界限為 $X<S_2+1=2K+1$

所以得外界限為 $\mathbf{X<2K+1}$

推廣至 X 軸與 Y 軸為 $\mathbf{|X|<2K+1,\ \ |Y|<2K+1}$

我們稱之為*<u>外界限公式</u>*

S_1		S_2		
X		X		
	X		X	
X		X		

圖五 K 為奇數的情況

	S_1		S_2	
	X		X	
X		X		
	X		X	

圖六 K 為偶數的情況

10. 另外在已給定的 K 值所形成的點集合圖形的內圍，也有範圍存在。由於奇數與偶數的情況不同，也必須分開討論。K 為奇數的部分，以 K=5 來舉例，參考圖七。藍色線條為 $|X|+|Y|=S_1+2P-4$，黃色線條為 $|X|=S_1$ 及 $|Y|=S_1$。

藍色線條以上為 $|X|+|Y|<S_1+2P-4$，我們稱此區域為 B。為了避免 B 中的 K 被排除，就在 B 中多加兩個限制：$|X|<S_1$ 及 $|Y|<S_1$，我們把這兩個限制所構成的區域稱為 C，$B\cap C$ 所形成的區域就不會包含到 K。

K 為偶數的部分，以 K=4 來舉例，參考圖八，藍色線條 $|X|+|Y|=S_1+2P-4$，黃色線條為 $|X|=S_1-1$ 及 $|Y|=S_1-1$。

藍色線條以上為 $|X|+|Y|<S_1+2P-4$，我們稱此區域為 B。為了避免 B 中的 K 被排除，

就在 B 中多加兩個限制：$|X|<S_1-1$ 及 $|Y|<S_1-1$ 所構成的區域稱為 C, B∩C 所形成的區域就不會包含到 K。歸納可得<u>*內界限公式*</u>：

當 K 為奇數時：$|X|+|Y|<S_1+2P-4$, $|X|<S_1$ 及 $|Y|<S_1$

當 K 為偶數時：$|X|+|Y|<S_1+2P-4$, $|X|<S_1-1$ 及 $|Y|<S_1-1$

	0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5	6	7
1	3	4	1	2	3	4	3	4	5	6	5	6
2	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6
4	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5	6	7
5	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6
6	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7
7	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6
8	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7
9	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8
10	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8	7
11	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8

圖七 12x12 的 B 區(藍線以上)與 C 區(黃線以內)

	0	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4	5
1	3	4	1	2	3	4	3	4	5	6
2	2	1	4	3	2	3	4	5	4	5
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5	6

4	2	3	2	3	4	3	4	5	4	5
5	3	4	3	4	3	4	5	4	5	6
6	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5
7	5	4	5	4	5	4	5	6	5	6
8	4	5	4	5	4	5	6	5	6	7
9	5	6	5	6	5	6	5	6	7	6

圖八 10x10 的 B 區(藍線以上)與 C 區(黃線以內)

11. 為確定當棋盤大於 16x16(無限大)時，都可以將每一格以一最少步數到達。

推論：當棋盤為無限大時，能使所有的 K 佈滿所有的格子。

想法：根據圖形推導公式中的行走步數公式，得知當 K 為奇數時，W 為奇數，K 為偶數時，W 為偶數，所以若證得 K 為所有奇數時能佈滿所有 W 為奇數的格子、K 為所有偶數時能佈滿所有 W 為偶數的格子，即可得證。

定義：M_i 為 K= i 時的所有的點集合。

證明：

當 K 為奇數時

K=1 時 $M_1=\{(2,\pm 1),(1,\pm 2),(-2,\pm 1),(-1,\pm 2)\}$

K=3 時 $M_3=\{|X|+|Y|<11$ 且 $|X|<7$ 且 $|Y|<7\}-\{|X|+|Y|<5$ 且 $|X|<3$ 且 $|Y|<3$, $(\pm 1,0),(0,\pm 1)\}$

K=5 時 $M_5=\{|X|+|Y|<17$ 且 $|X|<11$ 且 $|Y|<11\}-\{|X|+|Y|<11$ 且 $|X|<7$ 且 $|Y|<7\}$

⋮

K=2n-1 時 $M_{2n-1}=\{|X|+|Y|<6n-1$ 且 $|X|<4n+3$ 且∩ $|Y|<4n+3\}-\{|X|+|Y|<6n-7$ 且 $|X|<4n-1$ 且 $|Y|<4n-1\}$

K=2n+1 時 $M_{2n+1}\{|X|+|Y|<6n+5$ 且 $|X|<4n+7$ 且 $|Y|<4n+7\}-\{|X|+|Y|<6n-1$ 且 $|X|<4n+3$ 且 $|Y|<4n+3\}$

$M_c= M_1+ M_3+ M_5+\ldots\ldots+ M_{2n-1}+ M_{2n+1}=\{|X|+|Y|<6n+5$ 且 $|X|<4n+7$

$\left|Y\right|<4n+7\}$

若 n 為無限大，則 M_c 也為無限大，所以 K 為所有奇數時可佈滿所有 W 為奇數的格子，同理 K 為所有偶數時一可佈滿所有 W 為偶數的格子。則當棋盤為無限大時，能使所有的 K 佈滿所有的格子。證畢。 ■

12. 在依據所得到的 16x16 棋盤中的最少步數公式，為使其能夠擴展到一個更大的棋盤中，其步數圖形仍能符合公式不會有例外出現。我們嘗試使用數學歸納法證明。

13. 推論：當 K＞4 時，圖形的形狀都會符合圖形公式，不會有例外。

(K≤**4** 會有許多例外的情況，後面會在研究目的三，Pxx 提到)

檢驗：以 K=5 和 6 來看，如圖九，因為有內界限的存在，使得 K=6 的格子不可在 $X+Y<14$ 且 $X<9$ 且 $Y<9$ 的範圍內，利用 $2X-Y=0$ 及 $X-2Y=0$ 將圖形分為三個部分，分別為 A、B、C，並填出 K=6 的位置，則圖形兩者相類似，而且沒有例外出現。(黃色格子表示 K=5 的格子，綠色格子表示由黃色格子能走的下一步)

假設：若以 K=n 仍然會符合公式，不會出現例外。

證明：和 n+1 來看(假定 n 為奇數)，令 n’=n+1，n 的 S_1 為 S_n，n’的 S_1 為 $S_{n'}$，則 $S_{n'}=S_n+3$，先看 A 部分，填入 n’的位置，又 n’的內界限限制 n’，使 n’不在 $X< S_{n'}-1$ 的範圍內 (如圖十)，而 B 部分，有內界限使得 n’不在 $X+Y< S_{n'}+n'-2$ 的範圍內(如圖十一)，C 部分如同 A 部分，綜合 A、B、C 得到 n’的圖形，且 n’和 n 的圖形相似，得知當 K 為大於 4 的正整數時，圖形會相類似。

根據數學歸納法可知，當 K＞4 時，圖形的形狀都會符合圖形公式，不會有例外。證畢。

■

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
0	0	3	2	3	2	3	4	5	4			7	6
1	3	4	1	2	3	4	3	4					7
2	2	1	4	3	2	3	4	5	4			7	
3	3	2	3	2	3	4	3	4	5				7
4	2	3	2	3	4	3	4		4	5		7	
5	3	4	3	4	3	4		4				6	7
6	4	3	4	3	4		4					7	6
7	5	4	5	4		4					7	6	7
8	4	5	4	5	4					7	6	7	8
9	5	6	5	6	5	6			7	6	7	8	7
10	6	5	6	5	6	5		7	6	7	8	7	8
11	7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8	9
12		7		7		7		7	8	7	8	9	8

A

B

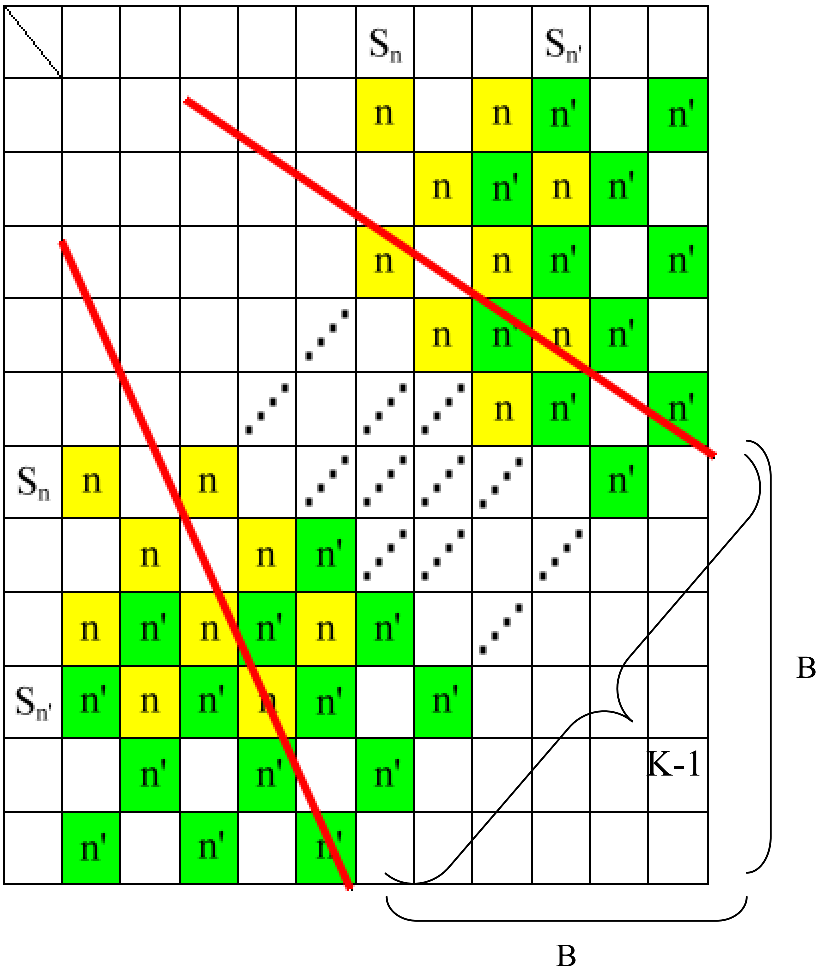
C B

圖九 12x12 的 5 步與 6 步可到的情況(分 A, B ,C 區)

S_n			$S_{n'}$		
n		n	n'		n'
	n	n'	n	n'	
⋮					
n		n	n'		n'
	n	n'	n	n'	
n		n	n'		n'
	n	n'	n	n'	
n	n'	n	n'		n'

$\frac{k+2}{2}$

圖十 n 步與 n'步於 A 區情況



圖十一 n 步與 n’步於 B 區情況

13. 反求步數

甲、我們定義**(a, b)≡K**, 表示將原點 O(0 , 0)當起點, 終點為(a , b)時, K 為其最少步數。

乙、前面所寫的是由一已知 K 去計算它所可能到達的格子有哪幾格。在完成前面的工作後, 我們又想是否能由已知的起點和終點去計算出它的 K 是多少, 假定起點(0 , 0), 我們觀察圖形發現其座標有一定的規律, 但有一些會比較特殊, 特殊部分在後面會加以討論, 我們將其所有走幾步的有哪幾個座標做出整理, 舉例:走三步的座標有(3 , 2) (5 , 2) (2 , 3) (4 , 3) (6 , 3) (3 , 4) (5 , 4) (2 , 5) (4 , 5) (3 , 6)(已經將特殊部分剔除）發現這些座標的 X 軸和 Y 軸的和是分布在 5~9 之間, 而走四步的座標和是分布在 8~12 之間, 走五步是在 11~15 之間……等根據我們整理出來的規律, 再導出公式即為－

丙、 <u>*座標和公式*</u>：**3K**-4＜＝W＜＝3K 且 **W** 和 **K** 必須同為奇數或同為偶數

在我們完成座標和公式後, 發現有幾個特殊點不能用此公式去計算, 而這些特殊點都位

在兩軸附近，且由圖形可以看出它有一定的循環：每三條斜線就會重複一個循環。

丁、由圖十二觀察。

9	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***16***	***17***
5	6	7	6	7	8	9	8	9
6	5	6	7	8	7	8	9	10
5	6	7	6	7	8	9	8	9
6	5	6	7	8	7	8	9	10
5	6	7	6	7	8	9	8	9
6	5	6	7	8	7	8	9	10
5	6	7	6	7	8	9	8	9

圖十二 靠近 X 軸的最少步數情況

下面我們參考圖十二的情況進行分析。

我們發現特殊部分有一定的規則，斜線部分每三個成一個循環且形狀皆相同，我們從他的座標和下手，分成三類討論，導出下面公式－

首先我們先定義：(參考圖十二)

普通點：符合座標和公式的點

特殊點：無法符合座標和公式的點

邊界點：每條斜線中最遠離兩軸的特殊點

EX：(9 , 3) (11 , 3) (11 , 4) (13 , 1) (13 , 3) (13 , 5)

極限點：每條斜線中不是特殊點且最靠近兩軸的座標點

EX：(8 , 4) (10 , 4) (10 , 5) (12 , 2) (12 , 4) (12 , 6)

K’：極限點的最少步數

A：某一點和極限點的 X 座標差

A’：某一點和極限點的 K 差值

規定：某一點(X_0 , Y_0)若 $Y_0> X_0$ 則 $Y_0=X, X_0=Y$，否則 $X_0=X, Y_0=Y$

<1>判斷公式：若 3∣W 且 X>2Y 時

(判斷公式是判斷是否適用下面公式)

公式：$\frac{X-A}{Y+A}$=2，求得 A

A'=∣【-A÷4】∣，再由座標和公式求得 K'

則 K=K'+2A'

<2>判斷公式：若 3∣W-1 且(X-2) >2(Y+1)時

公式：$\frac{X-2-A}{Y+1+A}$=2，求得 A

A'=∣【-A÷4】∣，再由座標和公式求得 K'

則 K=K'+2A'

<3>判斷公式：若 3∣W-2 且(X-2) >2 (Y+3)時

公式：$\frac{X-2-A}{Y+3+A}$=2，求得 A

A'=∣【-A÷4】∣，再由座標和公式求得 K'

則 K=K'+2A'

證明上述公式：我們把他分為三類：3∣W、3∣W-1、3∣W-2

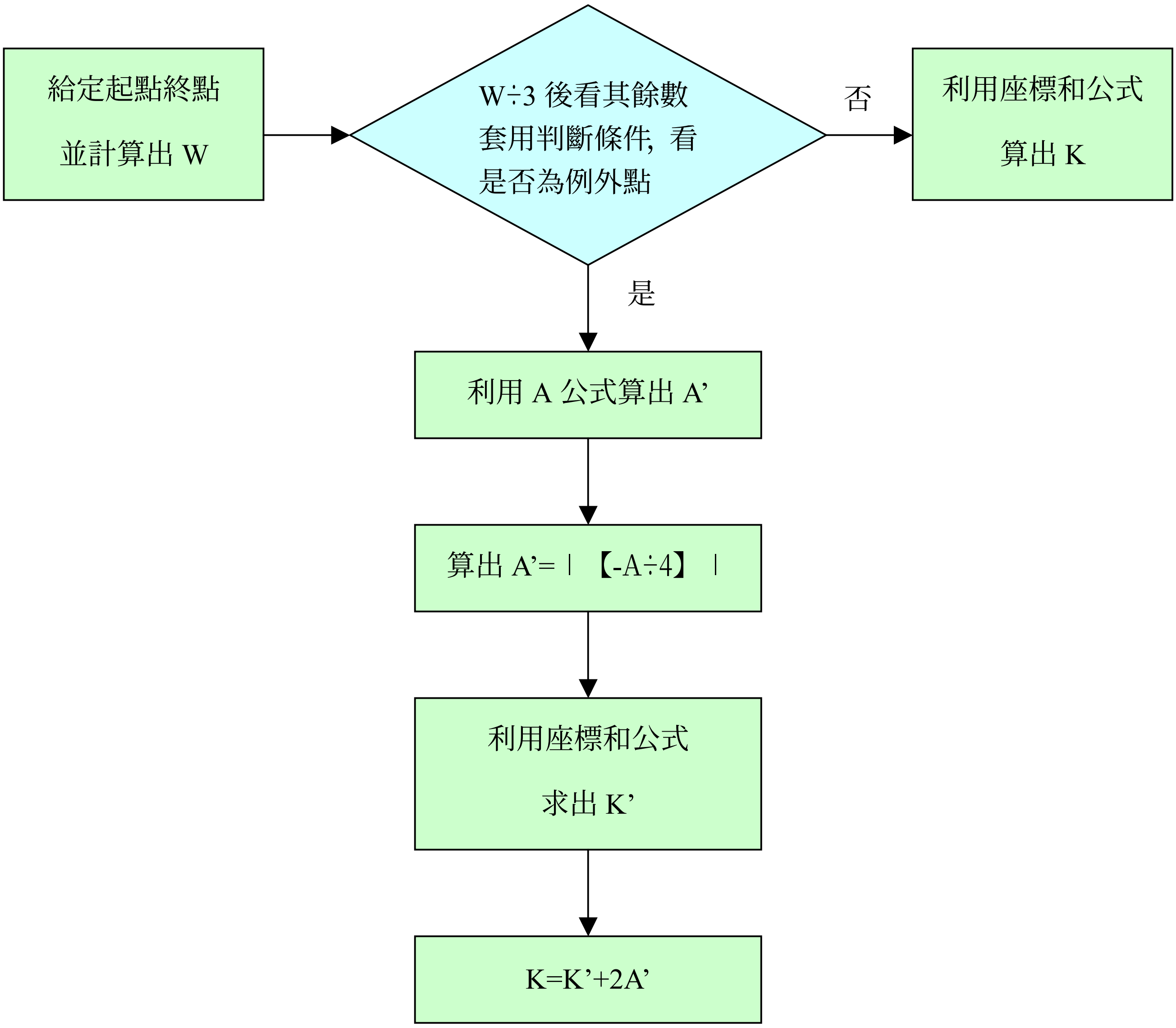
<1> 首先看 3∣W 這類，它的極限點有一個規律就是 X=2Y，而特殊點 X 皆>2Y，所以我們把 X>2Y 當成判斷條件，當符合這個條件時，我們就去算極限點和某一點的 X 差值，也就是 A，則(X-A , Y+A)為極限點，所以導出了$\frac{X-A}{Y+A}$=2。

我們從圖中發現 A 每增加 1~4，K 就會增加 2，所以把 K 的增加數定為 2A'，則公式為 2A'=2∣【-A÷4】∣，極限點和此點的 W 相同，再由座標軸公式算出極限點的最少步數 K'，則其點的 K=K'+2A'

<2> 3∣W-1 這類也用相同的方法得知，它的極限點有$\frac{X-2}{Y+1}$=2 的規律，所以得到判斷條件為(X-2) >2(Y+1)，同樣地其極限點為(X-A , Y+A)，所以導出$\frac{X-2-A}{Y+1+A}$=2，求出 A 並代入 2A'=2∣【-A÷4】∣即可知道其點的 K= K'+2A'

<3> 3∣W-2 這類它的極限點則是 $\frac{X-2}{Y+3}$=2，得到判斷條件為(X-2) >2 (Y+3)，其極限點為(X-A , Y+A)，導出 $\frac{X-2-A}{Y+3+A}$=2，求得 A 再代入 2A’=2∣【-A÷4】∣即可知道其點的 K= K’+2A’。

反求步數--使用公式流程



14. 舉出例外

1. 例外情況一：(參考圖十三)

   當起點為(1 , 1) (1 , n) (n , 1) (n , n) →(2 , 2) (2 , n-1) (n-1 , 2) (n-1 , n-1)

   (2 , 2) (2 , n-1) (n-1 , 2) (n-1 , n-1) →(1 , 1) (1 , n) (n , 1) (n , n)

   使得 K=4

   任意起點(X , Y) →(X+2 , Y+2) (X-2 , Y+2) (X+2 , Y-2) (X-2 , Y-2)，使得 K=4

   任意起點(X , Y) →(X+1 , Y) (X , Y+1) (X-1 , Y) (X , Y-1)，使得 K=3

	1	…	n
1			
⋮			
n			

圖十三 為表示例外的新定義座標軸

2. 例外情況二：折返所造成的例外。

   在 4xN 的棋盤中，由於無法以一個接近直線的規律前進，造成強迫折返使得最少步數圖形產生例外。在座標（3 , 0）的位置，若棋盤的範圍大於 4 的情形下，應為 3 步到達，但是恰為 4 的時候，卻是 5 步。根本的原因就是折返的緣故。如圖十四所示，理論上可以藉由經過（4 , 2）回到（3 , 0），可以得到 3 步到達。但是若少了一行，便無法以 3 步到達，因為（4 , 2）在 4xN 的棋盤中並不存在，所以必須用圖十五所示的走法前進（其中的一個方法），得到由（0 , 0）到（3 , 0）的最少步數為 5 步。

	0	***1***	***2***	***3***	***4***
0	0	3	2	3	2
1	3	4	1	2	3
2	2	1	4	3	2
3	3	2	3	2	3
4	2	3	2	3	4

圖十四 5x5 的最少步數情況

	0	***1***	***2***	***3***
0	0	3	2	5
1	3	4	1	2
2	2	1	4	3
3	3	2	3	2
4	2	3	2	3

圖十五 4x5 的最少步數情況

陸、研究結果

一、圖形推導

軸座標公式：**當 K 為偶數 $4K^2-4KS+S^2-4K+2S=0$**

當 K 為奇數 $4K^2-4KS+S^2-8K+4S+3=0$

圖形公式：　1.間隔數公式

K 為奇數：$P=(K+1)\div 2+1$

K 為偶數：$P=K\div 2+1$

2.行走步數公式

符合給定 K 值所得的 W 值：$S_1+2Q(0\le Q\le P,\ Q\in Z)$

3.外界限公式

$|X|<2K+1,\ |Y|<2K+1$

4.內界限公式

K 為奇數：$|X|+|Y|<S1+2P-4,\ |X|<S_1$ 及 $|Y|<S_1$

K 為偶數：$|X|+|Y|<S1+2P-4,\ |X|<S_1-1$ 及 $|Y|<S_1-1$

二、反求步數

座標和公式：**3K**-4<＝W<＝3K 且 **W 和 K 必須同為奇數或同為偶數**

判斷公式：

1. 若 **3∣W** 且 **X÷Y>2** 時，公式：$\frac{X-A}{Y+A}$=2，求得 A
2. 若 **3∣W-1** 且**(X-2)÷(Y+1)>2** 時，公式：$\frac{X-2-A}{Y+1+A}$=2，求得 A
3. 若 **3∣W-2** 且**(X-2)÷(Y+3)>2** 時，公式：$\frac{X-2-A}{Y+3+A}$=2，求得 A

統合上述的 A 值，進而代入 **A'=∣【-A÷4】∣**，再由座標和公式求得 K'則 K=K'+2A'

柒、討論

1. 可以進一步討論在給定一起點與一終點，探討其最少步數有幾種走法，並想辦法求得期間最少步數的走法規則。已撰寫出程式供參考，具體結果仍在研究中。
2. 若在一立體空間中給定一起點與一終點，研究騎士走法最少步數的規則及公式。
3. 若騎士有另外的走法譬如由起點 O(0, 0)，騎士走法用(±3, ±4) (±4, ±3)、(±4, ±5) (±5, ±4)…等方法，是否也能走遍棋盤的各個座標點？是否有最少步數的公式存在？

捌、參考資料

1. 張良杰，游耿能譯。趣味數學問答集。凡異出版社。P37、P189。(1992/04)
2. 國際數學奧林匹克大陸隊訓練教材。九章出版社。P278~P285。(1990/09)

玖、附錄

16x16 棋盤最少步數列出主程式

本程式的功能，為顯示 16x16 棋盤中，在選擇一起點後，到達每一格的最少步數。
分若干區域介紹：

A－ 顯示滑鼠游標所在的座標
B－ 顯示研究目的（二）中定義的特殊點
C－ 鎖定並顯示輸入座標的可以用騎士走法到達位置
D－ 顯示顏色選單 I：勾選所要的步數，使該步數的格子轉換顏色，供參考。
E－ 顯示顏色選單 II：選擇「使用」，並選擇步數。使每點選一次起點，固定轉換選擇步數格子的顏色。
F－ 統計表：統計點擊起點後，棋盤內的各步數格子個數，並顯示起點位置。
G－ 顯示區：於任意時間點擊起點，並顯示到達棋盤內每一個格子的最少步數。

評語

改進：1.騎士所走的路徑若能利用互動式的展將大大提升本作品的呈現品質。

2.數學打字之品質有待提升。