

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

高中組

數學科

科別：數學科

組別：高中組

作品名稱：挑剔數列

關鍵詞：序數和、數列化簡法

編號：040413

學校名稱：

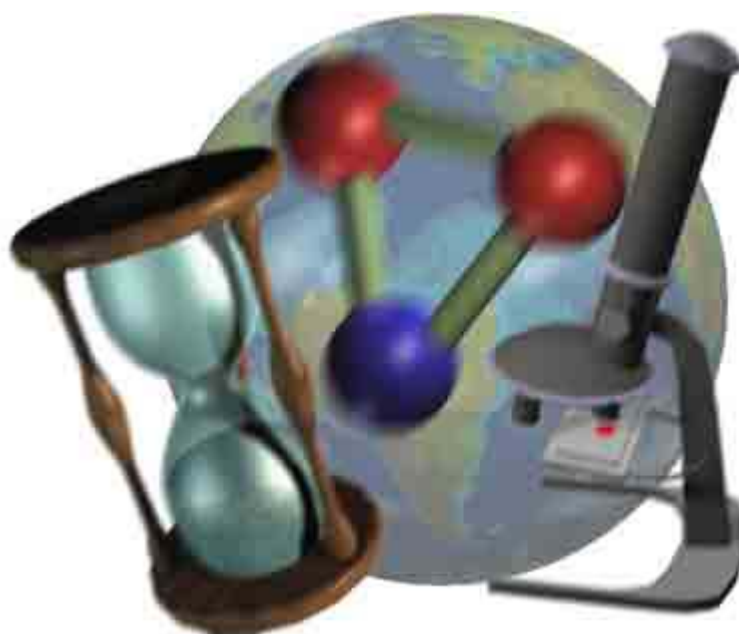
國立彰化高級中學

作者姓名：

黃皓倫、黃師軒、吳思賢、賴瑞禹

指導老師：

林漢良、黃文鍾



摘要

在一個偶然的機會下，接觸到一種特別的數列，這種數列是由 1~7 等數字組成，其中每個數字都重複使用兩次，在總共 14 格的格子裡排列，而且要符合 1 與 1 之間有 1 個數、2 與 2 之間有 2 個數字、 $\dots$ 、6 與 6 之間有 6 個數字、7 與 7 之間有 7 個數字。

例：2 3 7 2 6 3 5 1 4 1 7 6 5 4

依據此種排列規則也找出 1~3 組成的數列 312132、1~4 組成得數列 41312432，將此數列改成為 1~n 所組成的 $2n$ 位數列，並討論此 $2n$ 位數列的各種特性，並將有此特別規則的數列命為“挑剔數列”。

目的：

- ☐ 證明 $n=4k+1$ 和 $4k+2$ (k 為非負整數) 時不存在挑剔數列
- ☐ 找出一種排法能排出 $2n$ 位的挑剔數列
- ☐ 證明此排法並反推 $n=4k$ 和 $4k+3$ 時一定有挑剔數列存在

為了達到這些目的，我們使用以下方法：

- ☐ 以數列對應序數的關係及序數總合證明 $n=4k+1$ 和 $4k+2$ 時無挑剔數列
- ☐ 藉由現有的挑剔數列，發現每一種 $2n$ 的挑剔數列中階有一組挑剔數列有相似的排法
- ☐ 將每一組相似的數列用化簡法化簡之後可得一有規律性的數列，再探討其轉變後的數列的排列。

雖然目前已經找到哪些 n 值有挑剔數列存在，也找到排法能排出至少一組挑剔數列，但對於在 $2n$ 位中可以排出多少挑剔數列卻仍然不知，這個挑剔數列還有很多地方可以繼續發展下去。

壹、研究動機

這次的主題探討，靈感主要是來自國小同學間的遊戲，當時只覺得這是個可以打發時間的問題，但現在再次想起，突然發現這個數列好像滿特別的，可能會有一些特定的組成規律，希望能深入探討，了解整個思考的過程，並找尋其中特定的組成與規律。

貳、挑剔數列之定義

2 3 7 2 6 3 5 1 4 1 7 6 5 4

在十四個空格中填入十四個數字，這十四個數字是從 1 到 7 的整數且每個數都重複一遍，也就是 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 7 等十四個數字，填入時必須遵守 1 跟 1 之間有一個數、2 跟 2 之間有兩個數、3 跟 3 之間有三個數...7 跟 7 之間要有七個數，必須將十四個數字填入且符合上敘條件。

延伸此數列到 $2n$ 個空格，總共填入數字 $1\sim n$ 各兩次，其中 1 和 1 中間要隔一個數字，2 和 2 中間要隔兩個數字，以此類推， n 和 n 中間要隔 n 個數字，符合以上條件的數列我們就稱之為挑剔數列。

舉例($n=3$)

挑剔數列： 3 1 2 1 3 2

舉例($n=4$)

4 1 3 1 2 4 3 2

參、研究目的

- 一、證明 $n=4k+1$ 和 $4k+2$ (k 為非負整數)時不存在挑剔數列。
- 二、找出一種排法能排出 $2n$ 位的挑剔數列。
- 三、證明此排法並反推 $n=4k$ 和 $4k+3$ 時一定有挑剔數列存在。

肆、研究方法

- 一、證明 n 之值為多少時挑剔數列不存在。

(一)用電腦排挑剔數列。

使用 C 語言設計程式讓電腦試排到 $n=20$ ，

其中 $n=1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18$ 時挑剔數列皆不存在。

(二)尋找使挑剔數列不存在之 n 的規律。

經過觀察， $n=4k+1$ or $4k+2$ 時挑剔數列皆不存在。

(三)證明 $n=4k+1$ or $4k+2$ 時挑剔數列不存在。

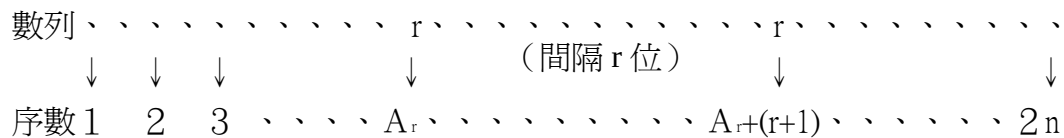
方法 1.

※『序數』之定義：

此挑剔數列從左邊開始數來，第一位之序數=1，第二位之序數=2，依序遞增，至第 $2n$ 位時序數= $2n$

※挑剔數列中數字與序數之對應關係：

每個數字都要填兩次，所以一個數字會對應到兩個序數，設一數字為 r ，則數字 r 中序數較小的序數表示為 A_r ，序數較大的 r 則因為兩個 r 之間相距 r 格所以序數表示為 $A_{r+(r+1)}$ ，如下圖所示



證明：

一個需填入 $1 \sim n$ 各兩次的挑剔數列，其序數和為 $1+2+3+4+\cdots+2n=2n^2+n$ —□

且 當 $r=1$ 時，兩個 1 分別對應序數 A_1 、 $A_1+(1+1)$

當 $r=2$ 時，兩個 2 分別對應序數 A_2 、 $A_2+(2+1)$

當 $r=3$ 時，兩個 3 分別對應序數 A_3 、 $A_3+(3+1)$

當 $r = n$ 時，兩個 n 分別對應序數 A_n 、 $A_{n+(n+1)}$

數字 1~n 分別對應了所有的序數，所以序數和也可表示為

$$A_1 + A_{1+(1+1)} + A_2 + A_{2+(2+1)} + \cdots + A_r + A_{r+(r+1)} = \square$$

$$\begin{matrix} \bullet & \bullet \\ & \bullet \end{matrix} \square = \square$$

$$\therefore 4n^2 + 2n = 4(A_1 + A_2 + \dots + A_r) + n^2 + 3n \Rightarrow n(3n - 1) = 4(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$$

得 $n(3n-1)$ 必為 4 的倍數，且 n 有四種情況 $n=4k$ ， $n=4k+1$ ， $n=4k+2$ ， $n=4k+3$ 分別代入 $n(3n-1)$ ，當 $n=4k+1$ or $4k+2$ 分別代入 $n(3n-1)$ 後， $n(3n-1)$ 並不是 4 的倍數，

故得證： 當 $n=4k+1$ or $4k+2$ 時，挑剔數列不存在。

方法 2.

設 $n=4k+1$

一個使用數字 $1 \sim 4k+1$ (k 為非負整數) 各兩次的挑剔數列是由 $2k$ 個偶數和 $2k+1$ 個奇數各填兩次所成，共 $8k+2$ 格，將空格由左而右編號為 $1 \sim 8k+2$ ，則其中編號為奇數的有 $4k+1$ 格，編號為偶數的有 $4k+1$ 格，

任一偶數填入的位置為 a (設編號為奇數)，則此偶數的第二次填入為 a (奇數) + 數字本身 (偶數) + 1，則為偶數，所以全部的偶數填入後會用掉 $2k$ 個編號為奇數和 $2k$ 個編號為偶數的格子，此時偶數格和奇數格都剩 $2k+1$ 個。任一奇數填入的位置為 b (設編號為奇數)，則此奇數的第二次填入為 b (奇

數)+數字本身(奇數)+1，則為奇數，表示全部的奇數填入時會用掉 $2p$ 個編號為奇數的格子或 $2q$ 個編號為偶數個格子($p+q=2k+1$)，今奇數格和偶數格都剩下 $2k+1$ (奇數)格，所以全部的奇數無法完全填入，得證 $n=4k+1$ 無法排出挑別數列。 ■

設 $n=4k+2$

一個使用數字 $1\sim 4k+2$ (k 為非負整數)各兩次的挑別數列是由 $2k+1$ 個偶數和 $2k+1$ 個奇數各填兩次所成，共 $8k+4$ 格，將空格由左而右編號為 $1\sim 8k+4$ ，則其中編號為奇數的有 $4k+2$ 格，編號為偶數的有 $4k+2$ 格，

因為全部的偶數填入後會用掉 $2k+1$ 個編號為奇數和 $2k+1$ 個編號為偶數的格子，所以偶數格和奇數格都剩 $2k+1$ 個。

全部的奇數填入時會用掉 $2p$ 個編號為奇數的格子或 $2q$ 個編號為偶數個格子($p+q=2k+1$)，今奇數格和偶數格都剩下 $2k+1$ (奇數)格，所以全部的奇數無法完全填入，得證 $n=4k+2$ 無法排出挑別數列。 ■

二、找出一排法能排出 $2n$ 位挑別數列，並證明 $n=4k$ 、 $4k+3$ 至少能找到一組挑別數列。

(一)找出規律，如能證出 k =任意值時皆能找到至少一組挑別數列，則間接得知 $n=4k$ or $4k+3$ 時挑別數列必存在。

1.挑別數列之化簡

(1)先把挑別數列中最大的數字 n 寫下，再依造數字的大小順序由第一個 n 的右邊開始空一格依序填入直到第 2 個 n 之左方。

例： 7_6_5_4_7 ($n=7$)

(2)把步驟一所填入的數字往其右方填入第二次，同時在第一個 n 之左方補上此挑別數列應有但尚未畫上之空格。

例： _ _ 7_6_5_4_7 6 5 4 ($n=7$)

(3)把剩餘數字的偶數由左到右遞增填入偶數格中，這些偶數的第 2 次皆填入原先填入之偶數的右方。

偶數格的定義為與第 1 個 n 之序數差為偶數的格子。

奇數格的定義為與第 1 個 n 之序數差為奇數的格子。

例： 2_4 2 11_10 4 9_8_7_6_11 10 9 8 7 6 ($n=11$)

(4)把剩餘的數字與空格一起作化簡，把剩餘的奇數皆減一再除以二，空格與空格間的距離也減一再除以二，使之變為一新的挑別數列。

例：原 $n=11$ 的挑別數列化簡為 _ X _ X _ _ _

X 表示此格在原挑別數列中已被填入過數字。

2.新挑別數列之排法

※新挑別數列之定義：

新挑別數列之形式為 _ X _ _ _ 其中 X 之數量為右方連續空格之數量減 2。

(1) $\text{num}[X] = 4a+1$ 時的排法

□ 先把偶數由右往左遞增填入偶數格中，填入這些偶數的第 2 次時，最大偶數的第 2 次往原來的右方填，其餘的往左方填入。

例： $_X_X_X_X_X\ 2\ 4_2\ 0\ 0\ 4$

偶數格之定義改為與 X 之序數差為偶數。

奇數格之定義改為與 X 之序數差為奇數。

□ 剩餘的數字與空格一起作化簡，剩餘的奇數皆減一再除以二，空格與空格間的距離也減一再除以二，使此挑剔數列再做變化。

例：原 $\text{num}(X)=5$ 變為 $______X______$

□ 再把偶數由左往右遞增填入偶數格，這些偶數的第 2 次填入中最大的偶數第 2 次往原來的左方填，其餘的往右方填入

□ 再化簡一次，則此數列就會變回新挑剔數列，形成一循環過程，每次循環後原 $\text{num}(X)=4a+1$ 之 a 值減少 2 ($a \geq 0$)。

(2) $\text{num}[X] = 4a+2$ 時的排法

□ 把最大的偶數填在最右邊的偶數格，其餘的偶數由右往左遞增填入偶數格，這些偶數的第二次填入皆往原數之左填入，惟第 2 次往左填入會碰到最大偶數的偶數往原數之右填入。

例： $_X_X_X_X\ 4\ X_X\ 6\ 4_2\ 0\ 0\ 2\ 6$

□ 把剩餘的空格與數字用和前面一樣的方法化簡，則此數列就會變回新挑剔數列，形成一循環過程，每次循環後 原 $\text{num}(X) = 4a+2$ 之 a 值減少 1 ($a \geq 0$)。

(3) $\text{num}[X] = 4a+3$ 與 $\text{num}[X] = 4a+4$ 時的排法

□ 把偶數由右往左遞增填入偶數格中，這些偶數的第 2 次填入往原數之左方填入。

例： $_X_X_X_X\ 6\ X_X\ 4\ X_6\ 2\ 4_2\ 0\ 0______$

□ 把剩餘數字與空格依前面所提之方法化簡。

□ 把偶數由左往右遞增填入偶數格中，這些偶數的第二次填入皆填往原數之右方，再執行一次化簡的步驟，則此數列就會變回新挑剔數列，每次循環後原 $4a+3$ or $4a$ 之 a 值減少 2 ($a \geq 0$)。

(二)證明上述新挑剔數列之排列方式中 $\{\text{num}(X)=4a、4a+1、4a+2、4a+3\}$ ， a 為任意非負整數時此排列方式恆成立。

1.證明 $\text{num}[X] = 4a+1$ ， a 為非負整數時，此排法皆成立。

(1)由於每個 X 之左方必有一個空格，所以設 $\text{num}[______X] = 4a+1$

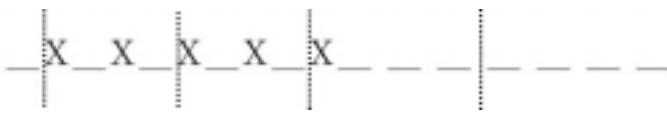
新挑剔數列中右方之連續空格數為 $\text{num}[X] + 2$ ，故 $\text{num}[______] = 4a+3$

總空格為 $(4a+1)+4a+3=8a+4$ ，故可填入數字 $0 \sim 4a+1$ 。

(2)標定序數，最右方為 1，至最左方為 $(4a+1) \times 2 + (4a+3) = 12a+5$ 。

(3)跟據排法，偶數皆先填入偶數格中。 $0 \sim 4a+1$ 中偶數共有 $2a+1$ 個，由於之前已說數字第二次填入所對應之序數表示為 $A_r+(r+1)$ ，現在 A_r 位於偶數格，而 r 又為偶數，故這些偶數的第二次填入會填入奇數格中，形成 $[XXX_]$ 的情況。

(4)把此數列由右至左每四個劃為一組。

例：

最大偶數倒填使得前 4 格變為「2 0 0 4a」，0 和 4a 都無法使「XXX」的情況出現，所以 $\text{num}[\text{XXX}] = 2a+1-2=2a-1$ ，而 $\text{num}[\text{XXXX}] = 1$

故 $\text{num}[\text{X}] = \{\text{總格數} - 4\text{num}[\text{XXX}] - 4\text{num}[\text{XXXX}] - \text{最左方一格}[\text{ }]\} \div 2 = 2a+2$ 。

(5)依之前所提方式化簡：

$\text{XXX} \rightarrow \text{X}$ $\text{XXXX} \rightarrow \text{消失}$ $\text{X} \rightarrow \text{ }$ $\text{ } \rightarrow \text{ }$

此時化簡後新的數列與原挑剔數列左右顛倒（連續空格在左方）

而 $\text{num}[\text{X}] = 2a-1$ $\text{num}[\text{ }] = 2a+2+1=2a+3$

新的數列總空格 = $\text{num}[\text{ }] + \text{num}[\text{X}] = 4a+2 \rightarrow$ 可填入的數字為 $0 \sim 2a$ 。

(6)再重複一次偶數填偶數格之方法

則 $\text{num}[\text{X}] = a+1-2=a-1$ $\text{num}[\text{XXXX}] = 1$

最右方之一格 $\text{num}[\text{ }] = 1$ $\text{num}[\text{X}] = (\text{總格數} - 4(a-1) - 4 - \text{最右方一格}[\text{ }]) / 2 = a$ 。

(7)再用之前的方法化簡一次

則新的數列方向變為和原來的一樣

且 $\text{num}[\text{X}] = a-1$ $\text{num}[\text{ }] = a+1$

兩者差為 2，條件皆和原先的新挑剔數列相符，形成一循環過程。

(8)故得證 a 為任意非負整數時此排法皆成立。 ■

2.證明 $\text{num}[\text{X}] = 4a+2$ ，a 為非負整數時，此排法皆成立。

(1)由於每個 X 之左方必有一個空格，所以設 $\text{num}[\text{X}] = 4a+2$

新挑剔數列中右方之連續空格數為 X 之數量+2，故 $\text{num}[\text{ }] = 4a+4$

總空格數為 $(4a+2)+4a+4=8a+6$ ，故可填入數字 $0 \sim 4a+2$ 。

(2)標定挑剔數列的序數，最右方為 1，至最左方為 $2 \times (4a+2) + (4a+4) = 12a+8$ 。

(3)跟據排法，偶數皆先填入偶數格中。 $0 \sim 4a+2$ 中偶數共有 $2a+2$ 個，數字第二次填入所對應之序數表示為 $A_r(r+1)$ ，現在 A_r 位於偶數格，而 r 又為偶數，故這些偶數的第二次填入會填入奇數格中，形成「XXX」的情況。

(4)把此數列由右至左每四個劃為一組，惟起始時是 5 個一組，由於最大之偶數 $4a+2$ 是排在第一個偶數格上，使得偶數 $2a$ 要倒填，故 0 和 $2a$ 不會產生「XXX」的形式，而前 5 格之形式為「XXXXX」

所以 $\text{num}[\text{XXX}] = 2a+2-2=2a$ $\text{num}[\text{XXXXX}] = 1$

最左方之空格 $\text{num}[\text{ }] = 1$

故 $\text{num}[\text{X}] = (\text{總格數} - 4 \times (2a) - 5 - 1) \div 2 = 2a+1$ 。

(5)依之前所提方式化簡：

$\text{XXX} \rightarrow \text{X}$ $\text{X} \rightarrow \text{ }$ $\text{ } \rightarrow \text{ }$

此時化簡後新的數列雖與原挑剔數列左右顛倒（連續空格在左方）

但 $\text{num}[\text{X}] = 2a$ $\text{num}[\text{ }] = 2a+1+1=2a+2$

兩者差為 2，條件和原先的挑剔數列相符，可視為一循環過程。

(6)故得證 a 為任意非負整數時此排法皆成立。 ■

3. $\text{num}[X] = 4a+3$, a 為非負整數時, 此排法皆成立。

(1)由於每個 X 之左方必有一個空格, 所以設 $\text{num}[_X] = 4a+3$

新挑剔數列中右方之連續空格數為 $\text{num}[X] + 2$, 故 $\text{num}[_] = 4a+5$

總空格數為 $(4a+3)+4a+5=8a+8$, 故可填入數字 $0 \sim 4a+3$ 。

(2)標定序數, 最右方為 1, 至最左方為 $2 \times (4a+3) + (4a+5) = 12a+11$ 。

(3)跟據排法, 偶數皆先填入偶數格中。 $0 \sim 4a+3$ 中偶數共有 $2a+2$ 個, 數字第二次填入所對應之序數表示為 $A_r + (r+1)$, 現在 A_r 位於偶數格, 而 r 又為偶數, 故這些偶數的第二次填入會填入奇數格中, 形成 $[XXX_]$ 的情況。

(4)把此數列由右至左每四個劃為一組

每個偶數的第 2 次填入皆會形成 $[XXX_]$

所以 $\text{num}[XXX_]=2a+2$, 最左方之空格 $\text{num}[_] = 1$

故 $\text{num}[X_]= (\text{總格數} - 4 \times (2a+2) - 1) \div 2 = 2a+1$ 。

(5)依之前所提方式化簡:

$XXX_ \rightarrow X_ \quad X_ \rightarrow _ \quad _ \rightarrow _$

此時化簡後新的數列與原挑剔數列左右顛倒 (連續空格在左方)

而 $\text{num}[_X] = 2a+2 \quad \text{num}[_] = 2a+1+1 = 2a+2$

新的數列總空格數 $= \text{num}[_] + \text{num}[_X] = 4a+4$

$\rightarrow$ 可填入的數字為 $0 \sim 2a+1$ 。

(6)再重複一次偶數填偶數格之方法。

(7)一開始的 $[002_]$ 並不產生 $[_XXX]$ 的情形

故 $\text{num}[_XXX] = a+1-1=a$, 最右邊留有一空格 $\text{num}[_] = 1$

$\text{num}[_X] = (\text{總格子數} - 4a - 3 - 1) \div 2 = a+1$ 。

(8)再用之前的方法化簡一次。

(9)則新的數列左右方向變為和原來的一樣

且 $\text{num}[_X] = a \quad \text{num}[_] = a+2$

兩者差為 2, 條件皆和原先的挑剔數列相符, 形成一循環過程。

(10)故得證 a 為任意非負整數時此排法皆成立。 ■

4. $\text{num}[X] = 4a+4$, a 為任意非負整數時, 此排法皆成立。

(1)由於每個 X 之左方必有一個空格, 所以設 $\text{num}[_X] = 4a+4$

新挑剔數列中右方之連續空格數為 X 之數量 $+ 2$, 故 $\text{num}[_] = 4a+6$

總空格為 $(4a+4) + (4a+6) = 8a+10$, 故可填入數字 $0 \sim 4a+4$ 。

(2)標定序數, 最右方為 1, 至最左方為 $(4a+4) \times 2 + (4a+6) = 12a+14$ 。

(3)跟據排法, 由小到大的偶數依序填入由右而左的偶數格。 $0 \sim 4a+4$ 中偶數共有 $2a+3$ 個, 之前已說過第二次填入數字時所對應之序數表示為 $A_r + (r+1)$, 現在 A_r 位於偶數格, 而 r 又為偶數, 故這些偶數的第二次填入會填入奇數格中, 形成 $[XXX_]$ 的情況。

(4)把此數列由右至左每四個劃為一組, 惟一開始先三格一組

因為 $4a+4$ 的最右邊為偶數格, 所以填入後的最右邊是 $[XXX]$

所以 $\text{num}[XXX_]=2a+3-1=2a+2$, 而 $\text{num}[XXX]=1$

故 $\text{num}[X_]=\{\text{總格數}-4\times\text{num}[XXX_]-3\times\text{num}[XXX]-\text{最右邊的}[_]\}\div 2=2a+1$ 。

(5)依之前所提方式化簡

$XXX_ \rightarrow X_ \quad XXX \rightarrow \text{消失} \quad X_ \rightarrow _ \quad _ \rightarrow _$

此時化簡後新的數列與原挑剔數列左右顛倒（連續空格在左方）

而 $\text{num}[X_]=2a+2 \quad \text{num}[_]=2a+2$

新的數列總空格 $=\text{num}[_] + \text{num}[_X] = 4a+4$

→可填入的數字為 $0\sim 2a+1$ 。

(6)再重複一次偶數填偶數格之方法

則 $\text{num}[_XXX]=a+1-1=a, \text{num}[XXX]=1$, 最右方之一格 $\text{num}[_]=1$

$\text{num}[_X]=(\text{總格數}-4(a)-3-\text{最右方一格}[_])/2=a+1$ 。

(7)再用之前的方法化簡一次

則新的數列方向變為和原來的一樣，且 $\text{num}[_X]=a \quad \text{num}[_]=a+2$

兩者差為 2，條件皆和原先的挑剔數列相符，形成一循環過程。

(8)故得證 a 為任意非負整數時此排法皆成立。 ■

伍、研究結果與討論

一、我們所列的目的都達到了，第一我們已經証出 $n=4K+1$ 和 $4K+2$ 是絕對不存在挑剔數列的。

二、爲了要完成第二個目的，我們試著找出每個挑剔數列的共通性，也找到了以化減的方法來分類，有效減少了繁雜的挑剔數列，藉由不斷的化簡，快速的找到至少一組挑剔數列，當 $2n$ 相當大時，也能藉由 4、5 次化簡就能排出挑剔數列，這可說是目前最大的突破。

三、證出當 $n=4K+3$ 和 $4K+4$ 是絕對存在挑剔數列的。原本挑替數列的 n 值是以四爲一個循環 ($4K+1$ 、 $4K+2$ 無挑剔數列； $4K+3$ 、 $4K+4$ 有挑剔數列)，經過化簡後，新挑剔數列的 $\text{num}(X)$ 還是以四爲循環 ($4a+1$ 、 $4a+2$ 、 $4a+3$ 、 $4a+4$)，相當有規律。

四、當然，未來希望繼續找尋其它的規律，試圖將挑剔數列分析到最清楚，可是目前還沒辦法知道每一個 $2n$ 位能排出多少組挑剔數列，不過從已經知道的組數 ($n=3$ 有 2 解； $n=4$ 有 2 解； $n=7$ 有 52 解； $n=8$ 有 256 解) 來看，我們推測 n 與挑剔數列組數之關係應該是成指數關係增加，希望能試著找出其奧妙。

陸、參考文獻

- 一、Nrich 數學期刊 <http://www.nrich.maths.org.uk/mathsf/journalf/jan00/inspire1/>
- 二、數據處理入門 陳勝凡 科學出版社
- 三、中學數學教學法通論 楊弢亮 浙江教育出版社

評語

優點：引用國外網頁，令人感到本題材已吸引遙遠地方的人士進行同步研究。

改進：參考文獻三「中學數學教法通論」一書適合教師研讀，比較不易從中取得科展之靈感。