

中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

高中組

數學科

科別：數學科

組別：高中組

作品名稱：神奇推銷員

關鍵詞：

編號：040411

學校名稱：

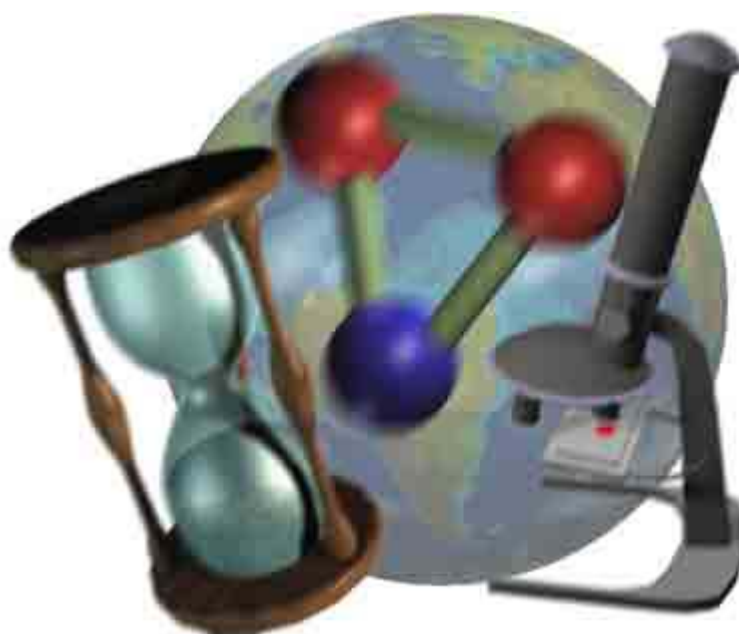
國立馬祖高級中學

作者姓名：

曹儷馨、陳以叡、陳韋婷

指導老師：

陳穎希



摘要

(一) 問題：推銷員要將每戶人家都訪問到，但為了節省時間及精力，每戶人家必不重複走到！是否每次出門訪問時，都可找到一條「推銷員路線」？

對於不同點數、不同線路連節方式的圖形，要如何輕易地分辨是否有推銷員路線？

(二) 解決過程：以 0、1 為字元，由數個 0、1 組成字串，將圖形中每個點用字串表示，

例如：以二字元表示四個點 00、01、11、10

若路線為 $00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10$ ，則可用「記憶輪」0011 表示，

記憶輪中尾數後一字元「0」與首數前一字元「0」是可連接起來的，

此路線即為推銷員路線。

當然圖形中的點要用字串標示，需要多次嘗試！

而四個點以上就必需要用三字原來表示

例如：七個點 001、011、111、110、101、010、100

若路線為 $001 \rightarrow 011 \rightarrow 111 \rightarrow 110 \rightarrow 101 \rightarrow 010 \rightarrow 100$ ，

且首尾可接的起來，則可用「記憶輪」0011101 表示，

記憶輪中尾數後兩字元「00」與首數前兩字元「00」是可連接起來的，

此路線即為推銷員路線。

經過多次嘗試、推論並驗證後得到：

圖形若有推銷員路線，其路線必可用記憶輪來表示

(三) 結果：

1. 我們利用簡化圖形來標點，並利用記憶輪，可使得在較難看出是否有推銷員路線的圖形中，較快找到通路、來判斷其是否有通路。
2. 雖然過程中有一些簡單圖形很容易就可以看出是否有推銷員路線，但利用記憶輪的方式來討論，可以幫助我們在面對更複雜的圖形時，能夠將其推廣進而解決問題。
3. 有時找到的通路雖然無法表示成記憶輪，但它確實是條推銷員路線，亦符合當初我們的目的。

對推銷員而言，如此則可判別圖形是否有推銷員路線，若有，則路線為何。

壹、研究動機

在學習高中數學第四冊第二章的排列組合時，接觸到「圖形路線的走法有幾種？」等類型的題目，又於課餘挑戰題中看到了「一筆畫問題」，進而至圖書館尋找資料，尋找資料的過程中，我不僅解決了一筆畫問題，也發現了這次科展所要做的主題「推銷員路線」。

貳、研究目的

1. **判別**圖形是否有推銷員路線。若有，則路線為何。
2. **了解**記憶輪與推銷員路線的關係。
3. 當圖形不易看出推銷員路線時，希望以「記憶輪」的方式來解決，而能夠知道是否有推銷員路線。

參、研究過程及方法

起初，我一直以為「推銷員路線」比一筆畫問題來得簡單，但事實上並非如此。當我準備著手解決推銷員問題時，先試了幾個圖形，而對於這個問題，我完全沒有任何頭緒與方法來解決。

一天晚上，教弟弟「二進位」時，突然發現由 0、1 構成的 n 字元共有 2^n 個數，當時我的腦袋突然閃過一個念頭：「或許我能夠以字元字串的方式來表示圖形的點及路線！」

其中 字元：0、1

字串：00、01、11、10（2 字元時）

我發現可以將所有字串寫在一起簡化成 0011（表示 $00 \rightarrow 01 \rightarrow 11 \rightarrow 10 \rightarrow 00$ ）

後來在圖書館找資料時，才知道這樣的方式原來稱為「**記憶輪**」0011，就像一條蛇緊咬著自己的尾巴，雖然這樣的結果前人已經做過，我仍然不氣餒，努力找尋它可以繼續做下去的契機！

當心中存在這樣的想法時，**我開始著手解決**，首先想到的第一個問題是：

（一） 該怎樣進行「標點」的工作

既然我們欲找的推銷員路線是不重複地走過圖形中每一個點，因此必須給每個點取一個名字，也就是說替它們標上 n 字元的字串（當然，點的名稱不能重複）。

假使圖形有 x 個點，那麼標點的字串必須是幾**字元**呢？

首先，假設 x 個點須以 n **字元**的字串來標示，

因為我們是以 0、1 為字元來構成字串，可知所有用 0、1 表示成 n 字元的字串，共有 2^n 個。

因此，可以得到：若圖形點數有 x 個時，用來標點的 n 字元的字串與 x 有以下的關係：

$$2^{(n-1)} < x \leq 2^n$$

ex：有 15 個點的圖形必須以 n 字元來標示？

$$\because 2^3 < 15 \leq 2^4$$

$\therefore n = 4$, 即以 4 字元來標點

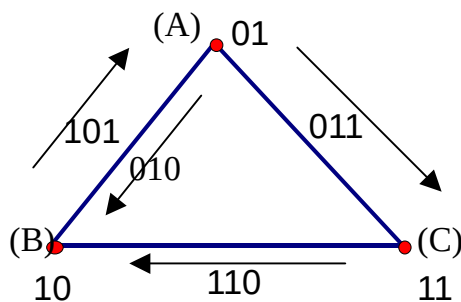
(二) 兩點之間的線（路）要怎麼標示

起初我們認為記憶輪能夠方便解決推銷員路線的原因在於「記憶輪有連貫性」，也就是說希望兩點之間可以連接，而如何突顯這個連接的關鍵性呢？藉由線（路）！於是我們替線（路）做了以下的設定：

兩點 A、B 分別以 n 字元的字串 a 與字串 b 來表示，若字串 a 的後 $(n-1)$ 個字元與字串 b 的前 $(n-1)$ 個字元相同時，即代表點 A、B 之間有一條方向從 A 到 B 的通路，而那條路的名稱為「(字串 a 的第一個字元) 接 (字串 a 第一個字元後，與字串 b 最後一個字元前重複的相同字元) 接 (字串 b 的最後一個字元)」。

Ex：下（圖一）中

點 A 標 01；點 B 標 10；點 C 標 11



(圖一)

則 1. A→B 的道路標為 010（可通）

B→C 的道路標為？（不可通）

C→A 的道路標為？（不可通）

無法形成迴路

2. A→C 的道路標為 011（可通）

C→B 的道路標為 110（可通）

B→A 的道路標為 101（可通）

形成迴路

因此選擇第二種標點法，記憶輪為 011，有推銷員路線。

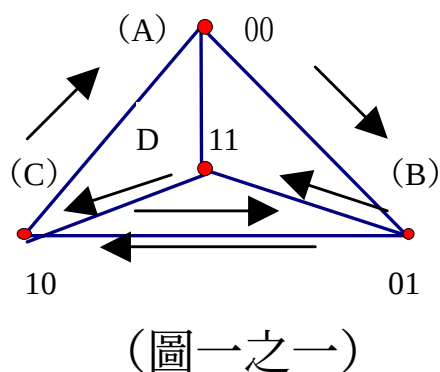
(三) 圖形中有那麼多點，該怎麼下手做描點的工作

目前為止，我們只是盲目的做了幾個圖形，並沒有特別的方式來進行描點工作；為了避免遺漏某些點，所以我們將圖形分層後，一層層的描點，並儘量使其形成迴路。接下來，依照此種模式來做幾個圖形，再由試驗圖形的過程來探討：是否有其他更好更正確的描點方式？

(四) 圖形的試驗

接著做幾個圖形，看看能不能發現什麼！

1.



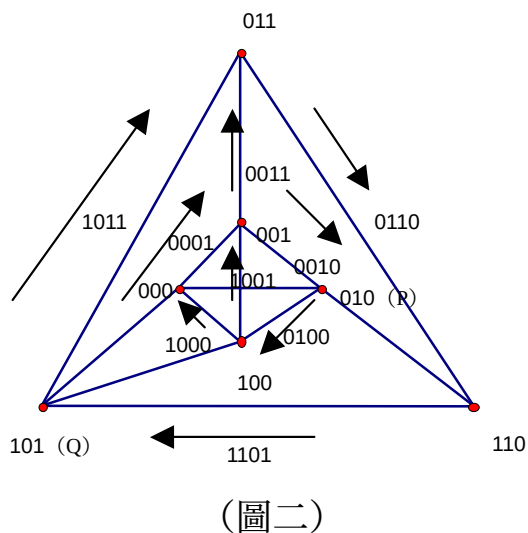
將（圖一）內加入一點後，形成（圖一之一）
四個點，以二字元描點即可

有迴路：A → B → D → C → A

001 → 011 → 110 → 100 → 001

發現（圖一之一）中推銷員路線可形成記憶輪 0110，
其中點 A、B、C、D 皆可做為起點。

2.



在標點的過程中，我們發現先標內部四個點構成的
四邊形，較先標外頭的三角形容易。故我們作下這
樣的結論：

圖形中較複雜的部份要先考慮。（對記憶輪來
說，複雜就等於點數較多）

內部：000 → 001 → 010 → 100 → 000

外部：011 → 110 → 101 → 011

再將內部的點 011 連接外部的點 001，使內外相連

（圖二）標出的推銷員路線，以 P 為起點、Q 為終
點，路段亦可構成一記憶輪 0100011

（圖二）中多加了中間一點 A，為（圖二之一）

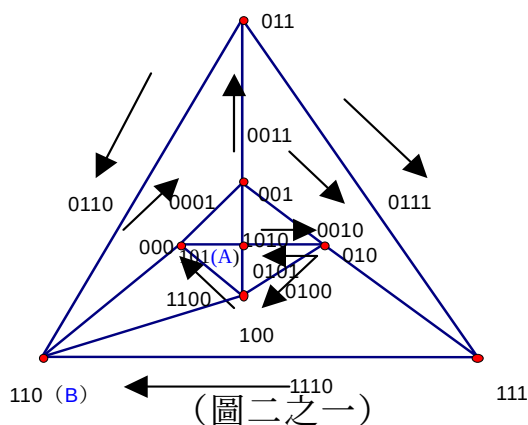
先標較複雜的內部：000 → 001 → 010 → 100 → 000

配合最中間一點：101

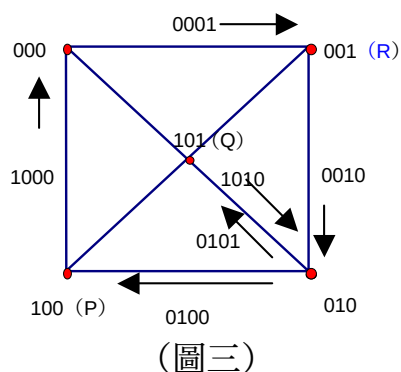
再標外部：011 → 111 → 110

圖三中的推銷員路線以 A 為起點 B 為終點，

也能夠表示為記憶輪 10100011



3.



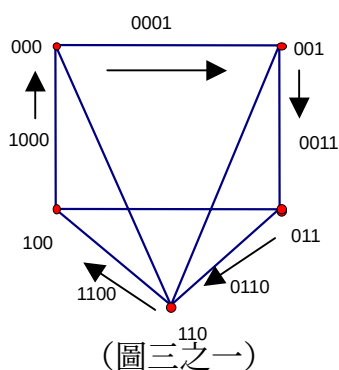
外圍：000→ 001→ 010→ 100→ 000
中間一點：101

雖然有兩條推銷員路線分別是 P 為起點 Q 為終點及 Q 為起點、R 為終點，卻都無法表示成記憶輪！

是標點出問題嗎？

討論：（圖三）與（圖一）的類型相似（兩圖形內部皆含一點，又皆與外部各點連接），且與（圖二之一）內部的圖形相同，當（圖三）位於（圖二之一）之系統之中未發生錯誤，為何單獨分離出來會有問題？

猜想：是否能將（圖三）中間的點拉出圖形外，構成五邊形？……再做一次！



將（圖三）中間的點拉出圖形外，構成五邊形為（圖三之一）。重新標點，發現路線為：

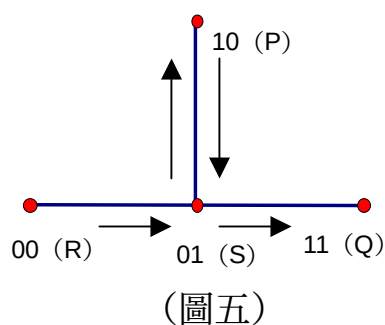
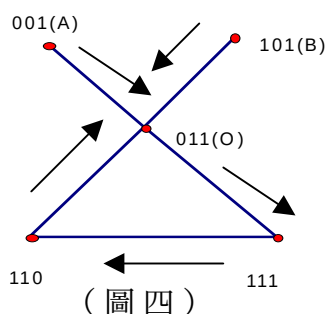
000→ 001→ 011→ 110→ 100→ 000 產生記憶輪 00011

真的很順利地找出能表示成記憶輪的推銷員路線。

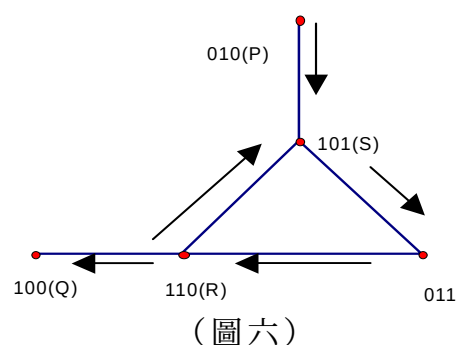
於是，又試幾個同類型的圖形，都可找出記憶輪；因此我們推論：可以將圖形內部含的點，拉出圖形外，以方便標點！

4.

(1) 討論（圖四）與（圖五）：



在（圖四）中兩點 A、B 皆只接同一點 O；且（圖五）中三點 P、Q、R 皆只接同一點 S，
兩圖皆無通路可走。



(2) 比較（圖四）、（圖六）：

①相同處：兩圖形都是以三角形做為基礎所衍生的變形（三角形外加兩點）。

②相異處：（圖四）是不同兩點 A、B 接另外同一點 O。（無推銷員路線）

（圖六）是不同兩點 P、Q 分別接另外不同的兩點 S、R。（有推銷員路線）

（圖四）沒有通路的原因是什麼？

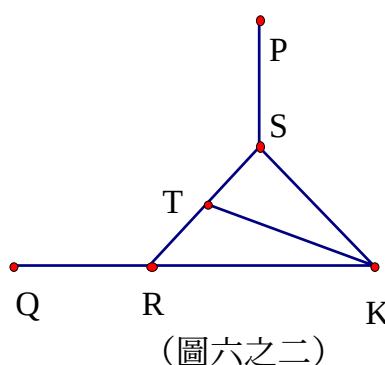
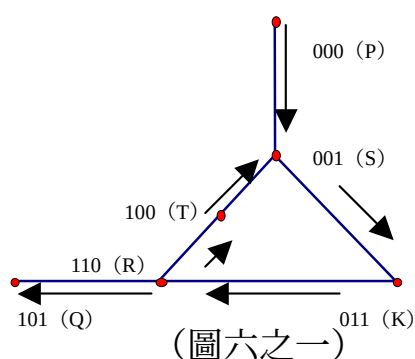
因為點 A、B 接同一點 O，也就是說：點 A、B 都必須藉由點 O 才能加入以三角形為主體的圖形系統中；而推銷員路線的條件是點不重複走，所以點 A、B 之中，至少會有一點被排拒於系統外。

（圖六）的獨特性是什麼？

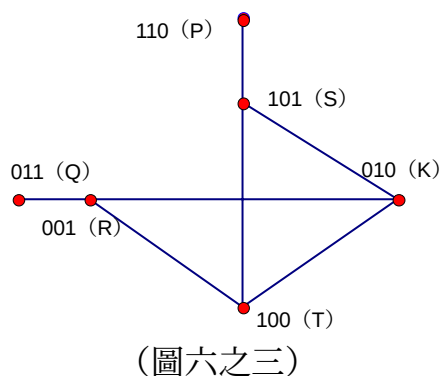
（圖六）有通路，我們發現它通路的性質：P、Q 兩點必一為起點、一為終點。因為這兩點 P、Q 與 S、R 的關係很重要，P、Q 皆為只連接一條線（單向道）的點，所以進入後就不可能再出來，相同的，出來後也就無法再進入。

（3）接著我們在（圖六）上多加一點 T，稱為（圖六之一），重新標點後，發現它沒有通路了！

又在（圖六之一）上多加一條線後成為（圖六之二）；然後轉換圖形為（圖六之三），再重新加以標點，很奇妙的，它又有通路了！



探討（圖六之一）沒有通路的原因：在原圖形（圖六）中，P、Q 分別擔任起、終點的重要角色，且必為起、終點。但後來增加的點 T，卻巧妙的只與對於 P、Q 很重要的兩點 S、R 連接，這兩點 S、R 是唯一能夠連接起、終點的點。



至於（圖六之二）可以拉出點 T，為（圖六之三），再標點後，可找出推銷員路線，且記憶輪為 110100。

討論（圖六之一）與（圖六之二），分兩部分來看：

①以點 R 為中心連接三點 Q、T、K 的系統

②以點 S 為中心連接三點 P、T、K 的系統

其中若（圖六之一）有推銷員路線，則 P、Q 必為起、終點，所以必有兩條路 P-S 與 Q-R。如此點 S、R 就分別都只剩下再連接另一個點的機會。

若 S、R 都連接同一點 K 或 T，則未被連接的一點會被排除在系統之外，無法形成通路。

或是 S、R 分別連接不同的點 K、T，則圖形無法連接，亦無法形成通路。

於是我們在（圖六之一）加了一條線路來連接點 T 與點 K，使兩系統因此線路而連接在一起，形成（圖六之二）。如此，圖形又出現通路了，且有記憶輪 110100。

由（1）、（2）、（3）得：

①若一圖形中有三個以上分別只連接一條線的點存在，必無推銷員路線！

②若圖形中恰存在兩個分別只連接一條線的點：

※ 此兩點連接另外同一點，且圖形點數>3，則無推銷員路線。

※ 存在兩個這樣的點，且圖形有推銷員路線者，此兩點必分別為起、終點。

③觀察圖形時，只要找到一個所處位置很矛盾的點（如點 T、點 K），就表示圖形無通路。

(五) 推論

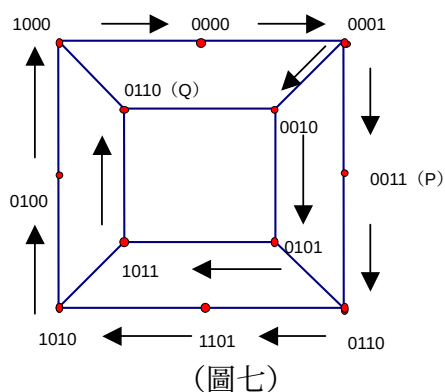
在（四）中我們動手做了多個圖形後，發現圖形若有通路，則有以下關係：

末段路 → （終點到起點的路）→ 首段路 是可連結的！

即

末段路後（n-1）字元與終點到起點的路前（n-1）字元相同，終點到起點的路後（n-1）字元與首段路前（n-1）字元相同，且形成一字串（n+1）字元，其中依序包含末段路、終點到起點的路、首段路。

因為這樣的關係，所以我們推論：圖形若有推銷員路線，其路線必可用記憶輪來表示。



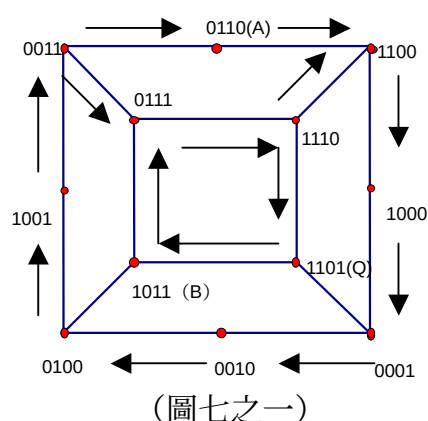
依（圖七）的標點方式，只有唯一推銷員路線

P 起 Q 終：10110 → ? → 00110

但不構成記憶輪！

為什麼此路線，是推銷員路線，卻不構成記憶輪？

換一種描點方式：



依（圖七之一）的標點方式，有兩種不同路線：

(1) A 起 B 終：11011 → 10110 → 01100
(末段路) (B 到 A 的路) (首段路)

有記憶輪 011000100111

(2) Q 起 A 終：00110 → 01101 → 11011
(末段路) (B 到 A 的路) (首段路)

有記憶輪 110111000100

為了表示推銷員路線，我們欲以記憶輪的方式來解決，做了多個圖形後，發覺似乎有問題：

我們無法很快的找到一條可構成記憶輪的推銷員路線，或是即使圖形有推銷員路線，也可能根本無法表示成記憶輪。

因此我們提出以下的問題：

“ 是否有某種含推銷員路線的圖形，卻無法以記憶輪表示？ ”

若有這樣的圖，則表示記憶輪是不適用的，即無法解決推銷員路線的問題。

假設答案是否定的！我們推論：圖形若有推銷員路線，其路線必可用記憶輪來表示。

(六) 推論的驗證

欲証：圖形若有推銷員路線，其路線必可用記憶輪來表示。

pf：

一個有推銷員路線的 x 個點圖形，圖形的每個點會全落在推銷員路線上，而我們可以將彎曲的路線拉直為一條線，接著將它頭尾相接成一環，這時點依然落在環上，最後依環上的點數 x ，將其拉成正 x 邊形，由此可見：

有推銷員路線的 x 個點圖形，必可拉展成正 x 邊形。

此正 x 邊形，就像一條咬住自己尾巴的蛇（記憶輪），而這正 x 邊形，能不能用記憶輪來表示？

從圖形的點數下手：

我們知道以 0、1 字元構成的 n 字元字串共 2^n 個，可用於標示 2^n 個點的圖形，且此 2^n 個點一定可以寫成記憶輪。

那麼點數 x 介於 2^{n-1} 與 2^n 之間，且有推銷員路線的圖形，也能以記憶輪表示嗎？——（※※）

欲解決（※※），首先要知道 2^n 個數的記憶輪中，0、1 出現的次數相同。

1. 先說明寫記憶輪的原則：

(1) 三字元，有 $2^3=8$ 個 3 字元的字串

000 111 01

因為三字元的數中必有 000、111，先寫下來，而 111 之後，不可再寫上 1（111 會重複兩次），故寫 0，為使次數相同，再寫上 1。

(2) 四字元，有 $2^4=16$ 個 4 字元的字串

0000 1111 0010 1101

寫出 0000、1111 後，必寫 0，還可再寫一個 0；而第三個數如果加 0，第四個必為 1，可是會重複（0001），故第三個數寫 1，第四個數可寫 0；寫了 0010 又因次數關係，故取 1101 填上。

(3) 五字元， $2^5=32$ 個 5 字元的字串

同 (1)、(2) 理，寫成記憶輪 00000111110001011101001101100101

2. 從記憶輪中抽取的 x 個字串，可形成記憶輪的方法

(1) 以三字元為例，標示 2^3 個點的記憶輪為 00011101

從中抽取 5 個字串來標示 5 個點（此 5 個字串須形成記憶輪）

抽取 (00011) (00111) (01110) (10001) 是可用的!

(11101) (01000) (11010) (10100) 是不可用的!

上述字串不可用（有重複）的原因:

① ∵ 記憶輪的頭尾可相接成環

∴ 11101 可改寫成 11110，其中 111 重複兩次（記憶輪中 1 連續出現的次數 > 3 ）

01000 可改寫成 10000，其中 000 重複兩次（記憶輪中 0 連續出現的次數 > 3 ）

② 11010 中，∵ 單獨的 0 出現兩次，而 0 的前後必接 1，∴ 101 重複！

10100 中，∵ 單獨的 1 出現兩次，而 1 的前後必接 0，∴ 010 重複！

(2) 以四字元為例，標示 2^4 個點的記憶輪為 0000111100101101，

① 從中抽取 9 個字串來標示 9 個點（此 9 個字串須形成記憶輪）

抽取 (010000111)、(101101000) 是可用的

(000011110)、(011110010) 是不可用的

上述字串不可用（有重複）的原因:

(000011110) 可改寫成 (111100000) ∵ 0 連續出現的次數 > 4 ∴ 0000 重複！

(011110010) 可改寫成 (111100100) ∵ 成雙的 00 出現兩次 ∴ 1001 重複！

② 從中抽取 11 個字串來標示 11 個點（此 11 個字串須形成記憶輪）

抽取 (00001111001) 是可用的，而 (11100101101) 是不可用的

其中 (11100101101) 不可用的原因：

檢驗 (11100101101) 時發現，取其後 3 字元 101 接其前 3 字元 111，所產生的新字串 101111 中的 1011，在 (11100101101) 中出現兩次。事實上，一開始抽取出的 (11100101101) 可以改寫成 (11001011011)，可見 1011 重複！

(3) 歸納以上可得：

若要將有 x 個點圖形的推銷員路線，以記憶輪表示，可遵循下列方式：

① 為了方便討論數字的出現次數，首位與末位字元儘量取不同。

② 可以抽取字串中後 s 個字元接前 t 個字元，其中 $s+t=x$ 。

③ 在記憶輪首位與末位字元不同的情況下，恰好表示 x 個字串的 n 字元記憶輪，其中不可有 0 或 1 連續出現的次數 $> n$ 。

④ 抽取出的 n 字元字串之中，不可有連續 k 個 0 或 1 出現 q 次的情況（其中 $q \geq 2$, $k \geq n-2$ ）。

⑤抽取出的 n 字元字串，取其後 $(n-1)$ 字元接其前 $(n-1)$ 字元，所產生的新字串中所有任意連續 n 字元的字串，在原抽取出的 n 字元字串中，僅能出現一次。

By1、2：只要了解寫記憶輪的原則，並掌握抽取記憶輪時進退的方法，無論有推銷員路線的圖形中含有點數為何，皆可表示為記憶輪，則解決了（※※）的問題。

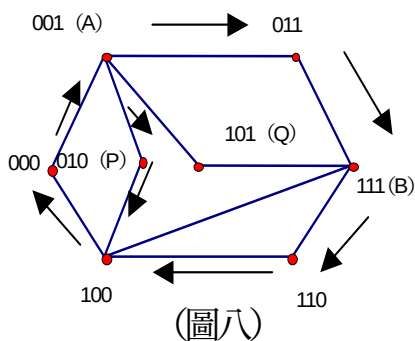
3. 以下舉例點數為 x 時的記憶輪寫法：

- (1) 當 $2^2 < x \leq 2^3$ 可找得 $x=5: 00011$
 $x=6: 000111$
 $x=7: 0011101$
 $x=8: 00011101$
- (2) 當 $2^3 < x \leq 2^4$ 可找得 $x=9: 101101000$
 $x=10: 1011010000$
 $x=11: 00001111001$
 $x=12: 000111100101$
 $x=13: 0001111001011$
 $x=14: 00001111001011$
 $x=15: 000111100101101$
 $x=16: 0000111100101101$

如此可得証：圖形若有推銷員路線，其路線必可用記憶輪來表示。

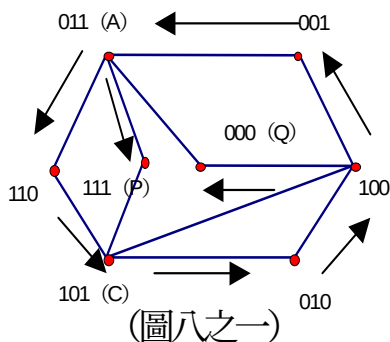
(七) 利用記憶輪來判別圖形是否有推銷員路線。若有，則路線為何：

1. 描點後發現圖形沒有推銷員路線



圖八中，

- ∵ 點 Q 無法外接點 A、B
- ∴ 點 Q 被獨立出來，不能形成通路！



重新標點後，如圖八之一，

依標點結果知：點 P、Q 皆為終點，

但 ∵ 一推銷員路線只有一個起、終點，

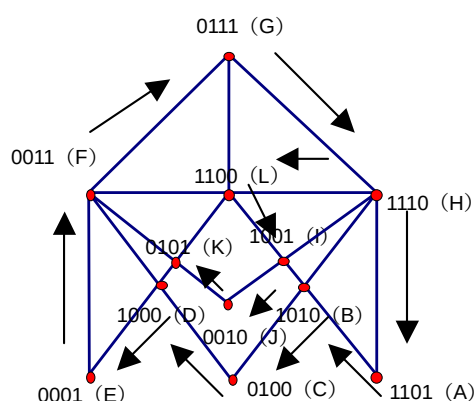
∴ 產生矛盾。故無論如何標點，如(圖八)、(圖八之一)，

皆無法形成記憶輪，找不到推銷員路線！

2. 圖形簡化

(1) 圖形分層（分塊再連接）來看

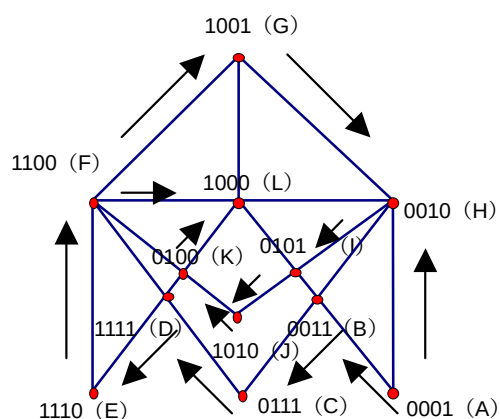
①



(圖九)

將外圍的八邊形 ABCDEFGH 與內部的四邊形 IJKL 分別自行標點，再利用八邊形的點 H (1110) 與四邊形的點 L (1100) 相連接。

如此可將 (圖九) 標點完成。A 為起點，K 為終點，有推銷員路線，卻不形成記憶輪！



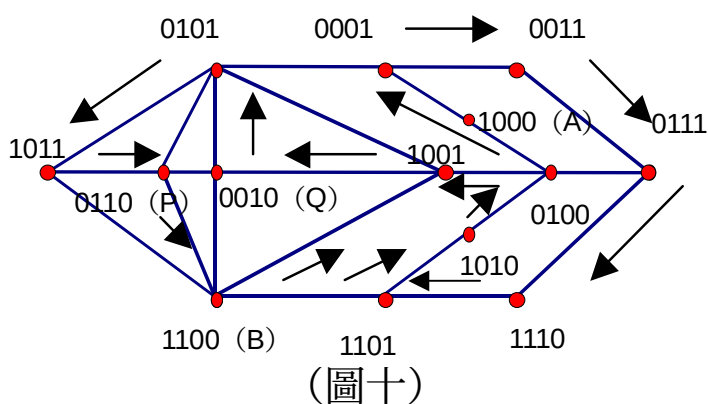
(圖九之一)

重新標點後如 (圖九之一)，利用八邊形的點 H (0010) 與四邊形的點 I (0101) 相連接。

這時形成記憶輪 000111100101

A 為起點，L 為終點，有推銷員路線。

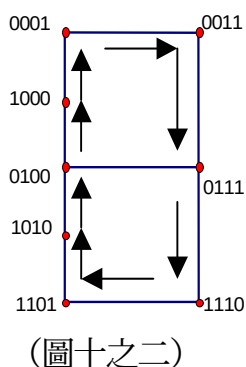
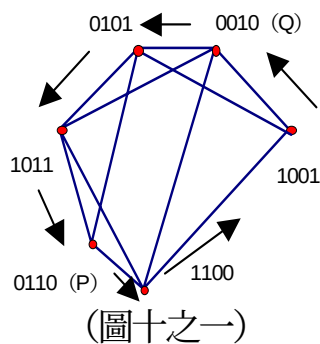
②



(圖十)

將 (圖十) 標點的方式如下：

(圖十) 的左半部可拉出點 P、Q，形成六邊形，如 (圖十之一)，將其自行標點；



(圖十) 的右半部可視為一八邊形，如 (圖十之二)，

將其自行標點，

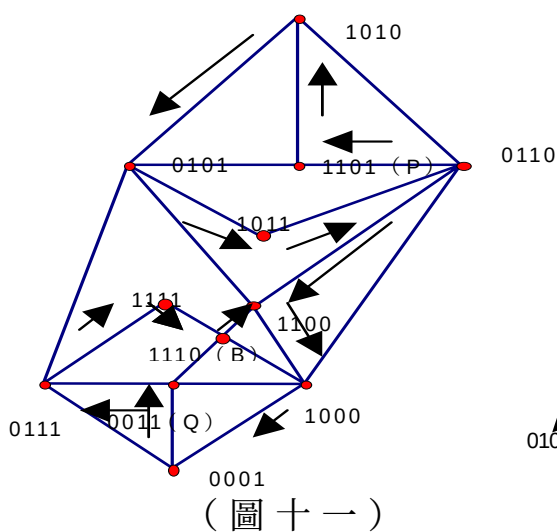
(圖十之一) 與 (圖十之二) 再以 0100 與 1001 連接。

如此可將 (圖十) 標點完成。

形成記憶輪 10001110100101，

A 為起點，B 為終點，有推銷員路線。

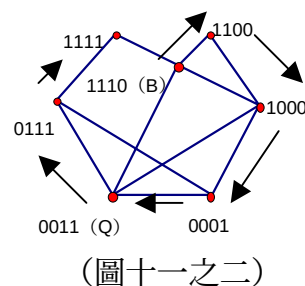
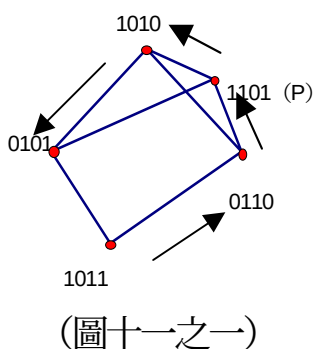
③



將 (圖十一) 標點的

方式如下：

(圖十一) 的上半部可拉出點 P，形成五邊形，如 (圖十一之一)，將其自行標點；



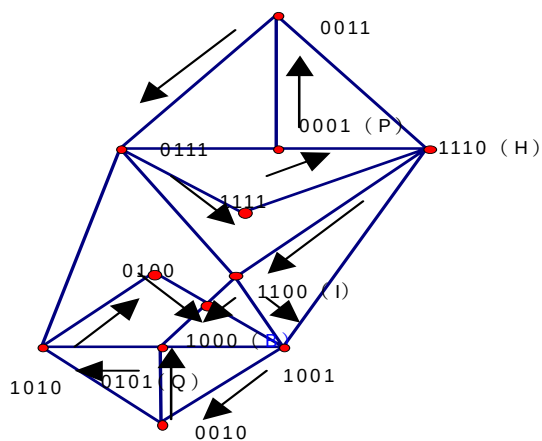
(圖十一) 的下半部可拉出點 Q，形成七邊形，

如 (圖十一之二)，將其自行標點

兩圖形再以 0110、1100 相連接。

如此可將 (圖十一) 標點完成。

P 為起點，B 為終點，有推銷員路線，卻不形成記憶輪！

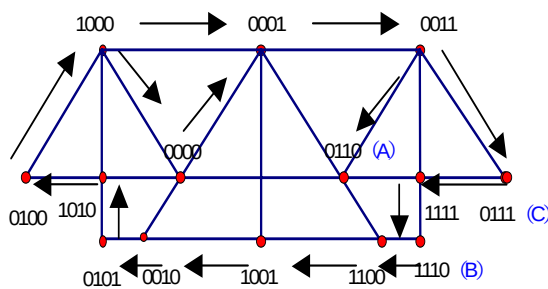


(圖十一之三)

重新標點後如 (圖十一之三)，利用五邊形的點 H (1110) 與七邊形的點 I (1100) 相連接。這時形成記憶輪 000111100101

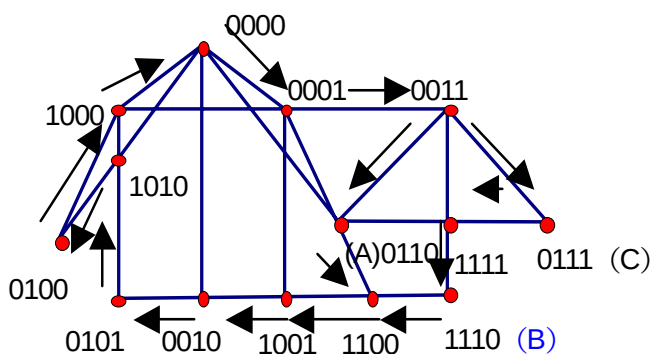
P 為起點，B 為終點，有推銷員路線。

(2) 將圖形中的點拉出圖形外



(圖十二)

將 (圖十二) 標點的方式如下：



(圖十二之一)

將 (圖十二) 中的點 0000 拉出圖形外，形成 (圖十二之一) 後標點，再將點標入 (圖十二) 中。

這時無記憶輪！

卻有兩條推銷員路線：

分別是 A 為起點、B 為終點，

C 為起點 A 為終點的推銷員路線

(3) 看關鍵點

觀察圖形：

(圖十三) 似乎需分層來看，但無論如何分層，皆會遺漏一些點。又因為圖形的點並非完全對稱，故我們先分三層 (三個方形依序由內向外)，再找出三個層的關鍵點來配合標點！

由內向外標：

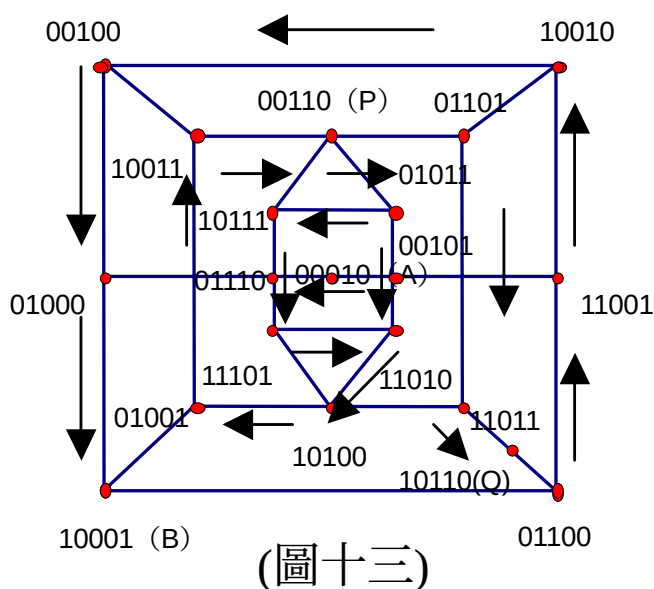
第一個關鍵點：(A)00010（必為起點）

第二個關鍵點：(P)00110（與點 10100 是同等地位，是往外一層必經之點）

第三個關鍵點：(Q)10110（是往外一層必經之點）

將（圖十三）標點完成後，形成記憶輪 00010111010011011001

A 為起點，B 為終點，有推銷員路線。

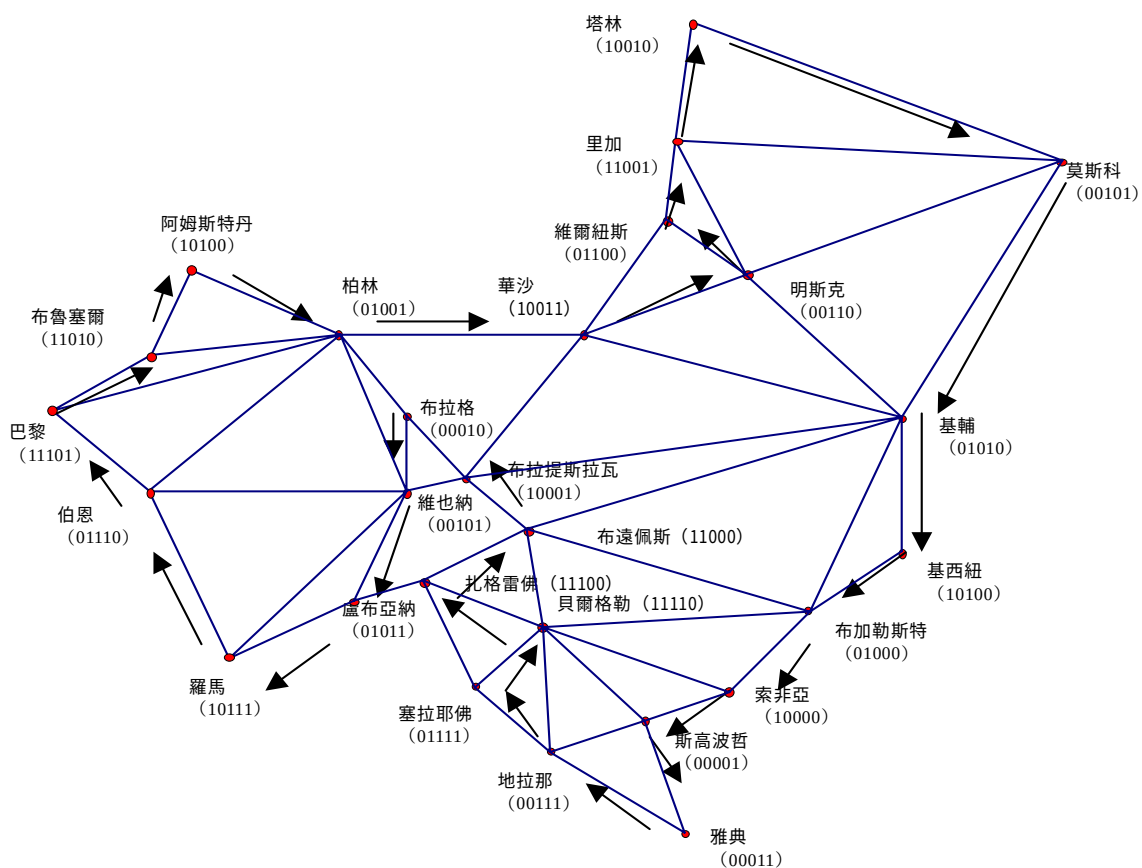


肆、討論與結論

- （一）記憶輪一定可以表示有推銷員路線的圖形，也就是說含有推銷員路線的圖形，至少有一條可以標成記憶輪的路。
- （二）我們利用簡化圖形來標點的目的，是為了在較難看出是否有推銷員路線的圖形中，較快找到通路、來判斷其是否有通路。
- （三）雖然過程中有一些簡單圖形很容易就可以看出是否有推銷員路線，但利用記憶輪的方式來討論，可以幫助我們在面對更複雜的圖形時，能夠將其推廣進而解決問題。
- （四）有時找到的通路雖然無法表示成記憶輪（如（五）圖七中 P 起 Q 終的路線），但它確實是條推銷員路線，亦符合當初我們的目的。

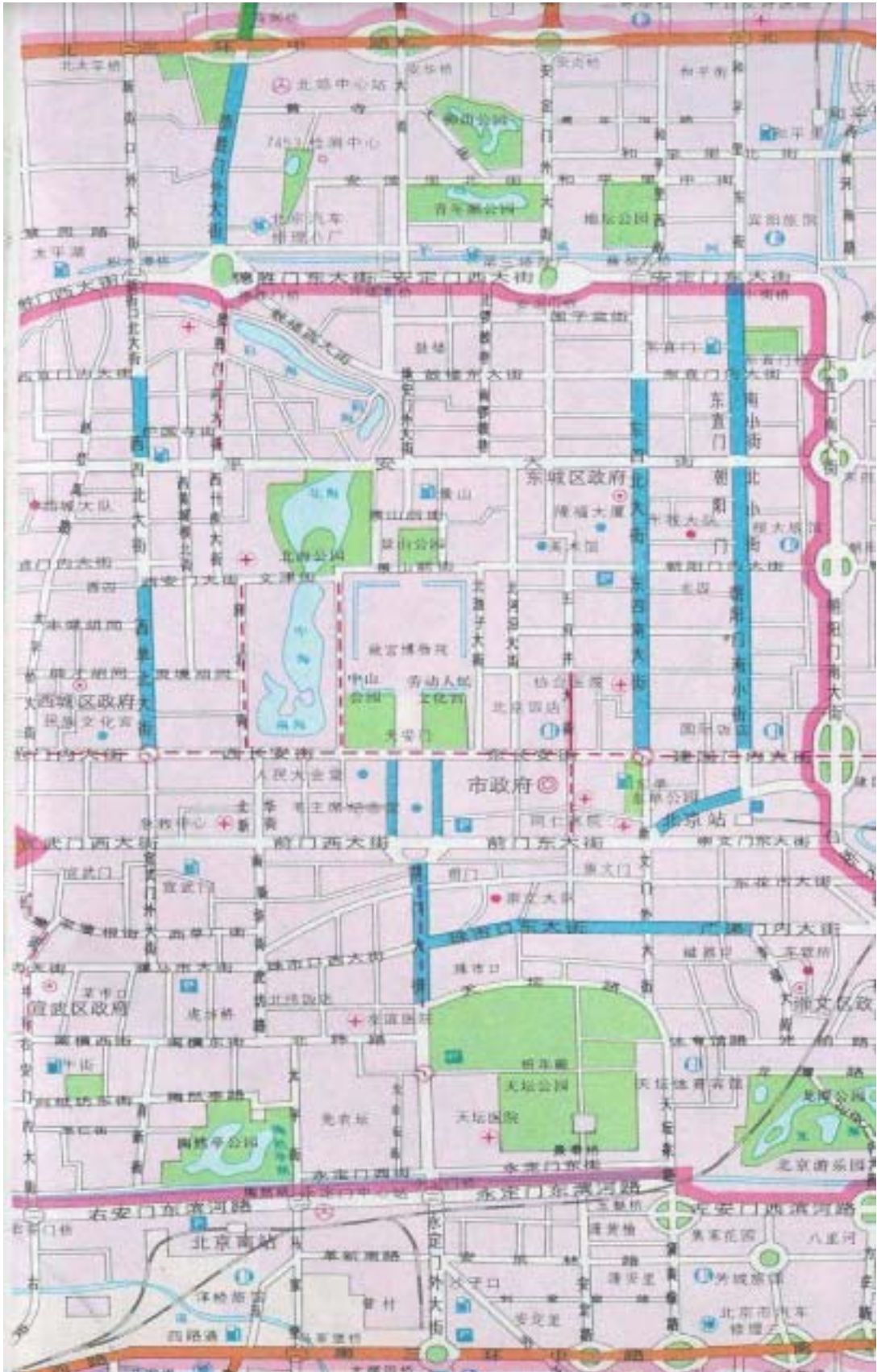
伍、應用

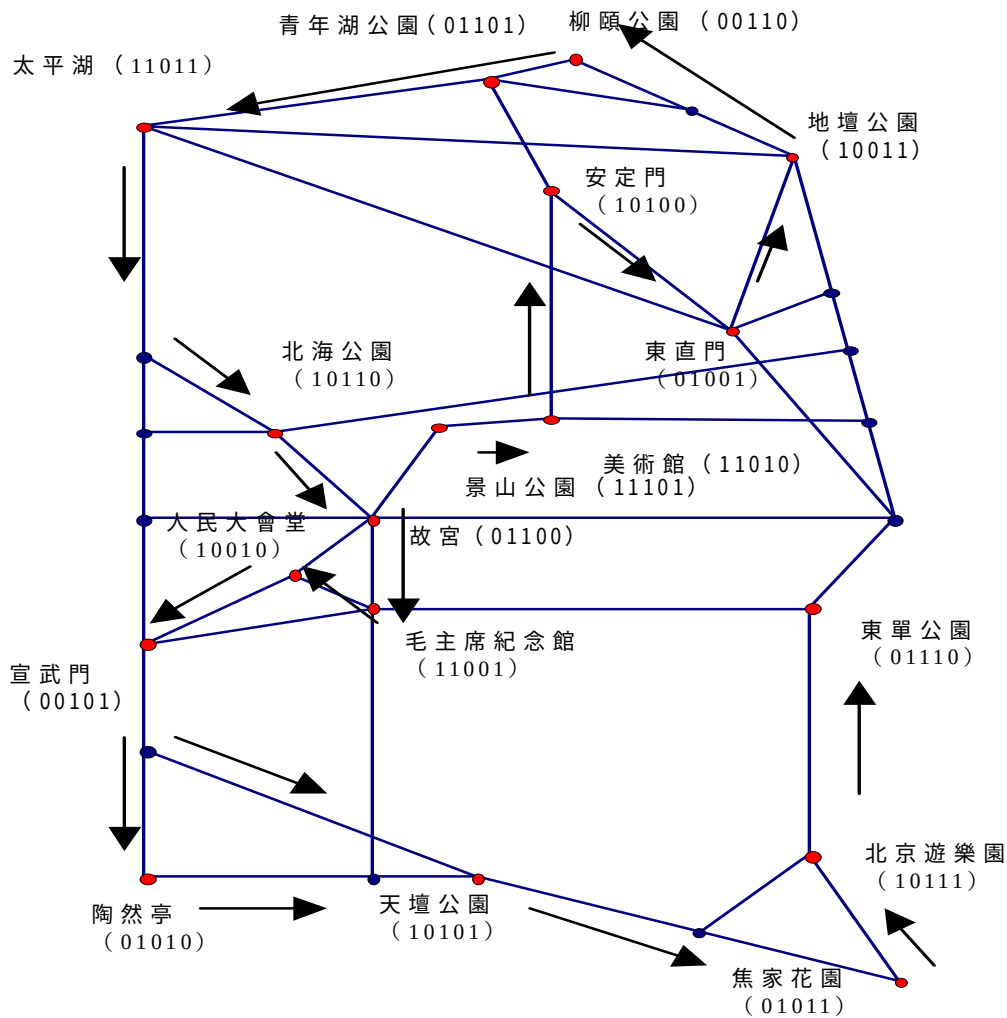
(一) 某一旅行團欲辦歐洲地區的首都之旅，他們希望能夠讓旅客體會一路上歐洲各國的風貌，因此希望能夠使旅遊路線不重複，該怎麼走？（條件：路線走鄰國）



路線以布拉格（00010）為起點、布拉提斯拉瓦（10001）為終點。
記憶輪為 000011110001011101001100101

（二）遊客欲逛逛北京故宮與其附近區域的景點，必須怎樣走，才不會浪費重複走相同路段的時間？（條件：走 Block 間的大道路）





路線以景山公園 (11101) 為起點、東單公園 (01110) 為終點
 記憶輪為 111010011011001010

陸、參考資料

原著者：Bondy.Murty，譯著者：吳森原，圖形論及其應用，曉園出版社
 原著者：斯坦，譯著者：葉偉文，數學是啥玩意？(I) 天下文化

評語

優點：團隊合作無間。

改進：注意專有名詞之使用是否合乎慣例。