中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

高中組

數學科

科別：數學科

組別：高中組

作品名稱：貓捉老鼠的秘密

關鍵詞：貓捉老鼠遊戲、尤拉公式、平面圖

編號：040409

學校名稱：

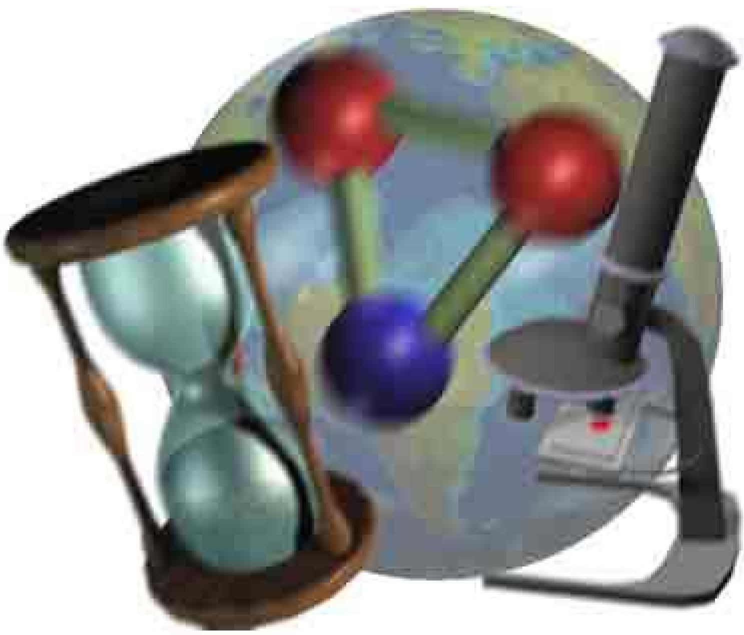
國立花蓮女子高級中學

作者姓名：

邱瑋婷、吳思慧

指導老師：

邱俊良、黃光鷺



摘要

本文探討了特定問題的組合最佳化，所謂組合最佳化就是在共同限制及相互影響下，來求得最佳解。一個組合最佳化問題的困難，往往是由於其龐大的解空間所致。本文介紹了貓抓老鼠問題的組合最佳化，並在第一步中，以歸納法解決了一個較簡單的例子。經由我們歸納的結果，我們一共得到了五個證明，來推廣每個頂點相等通道的一般性，並且得到了四個相等通道問題所應該有的性質，之後我們又用了二個證明，推廣在完全對稱下所需的結果。第二步中，我們又用了四個證明，將問題推廣到每個頂點不相等通道的問題，並且以二個不等通道的範例，闡釋了我們所得的結果。我們所得到的結果，能有效的解決解空間不大的某些特定問題，尤其是以人工來解決問題時，提供了一個絕佳的途徑。然而當解空間變得較大且邊數不等時，即使有不錯的結果，問題也會變的非常的複雜。我們在特例探討上，解釋了即使是單純且限制了許多條件的問題，要證明一般性也不是這樣容易，所以當問題變大時，我們改以組合最佳化的最佳解逼近來取代求最佳解，而不直接求最佳解。一個好的最佳解逼近就是在可接受的時間範圍內，求得逼近最佳解。當然我們仍能以暴力法則求得最佳解，但時間範圍是我們所不能接受的，故在此不予討論。

壹、研究動機

在一次偶然的機會裡，我們看到一種叫做「貓抓老鼠」的遊戲。這個遊戲在一張紙上畫了 20 間房間，每間房間裡各養一隻貓，房間之間有通道相連，貓咪可以相互跑來跑去。現在主人想抓 10 隻老鼠放進去，可是每間房間只能養一隻貓或老鼠，所以必須抓 10 隻貓出來。我們知道貓會吃老鼠，所以貓咪和老鼠之間的通道必須是關

閉的，請問主人應該怎麼做，在關閉最少的通道下把老鼠放進去？

當我們見到這問題時，我們直覺想到可以用高一教的歸納法[1]來找到規律，再從規律來探討一般式, 我們同時也想到可以用幾何學下冊[2] [3]教的尤拉公式與多面體來探討，因為課本教了我們如何將正多面體挖一個洞攤在平面上，讓平面圖也符合尤拉公式。這雖然只是個小遊戲，但卻蘊含著極為有趣的數學概念。我們藉著這次科展的機會，深入探討這個問題。

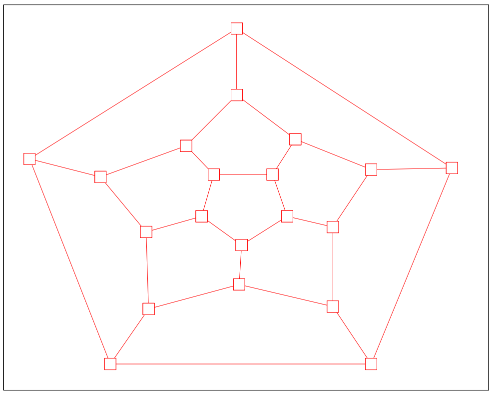


圖 1

貳、研究目的

假設有 n 間房間，每個房間各養一隻貓，房間與房間之間有的相通，有的不相通，我們要抓 k 隻貓出去，並放進 k 隻老鼠。遊戲規則為：

1. 每個房間只能住一隻貓或老鼠；
2. 貓會吃老鼠，因此若貓和老鼠的房間相通，那麼就要關閉通道。

問題：若要養 k 隻老鼠進去，其中 $k \le \frac{n}{2}$，請問要抓哪些貓出去，使得需要被封閉的通道最少？

以下我們討論這個組合最佳化的問題。

參、研究設備及器材

紙、筆、個人電腦、Matlab 6.5、Visual C++ 6.0

肆、研究過程或方法

一、 定義及名詞解釋

1. 我們以 $s=[s_1,...,s_n]$ 表示 n 間房間的狀態，其中 $s_i=\begin{cases}+1, 若第\ i 個房間為貓 \\ -1, 若第\ i 個房間為老鼠\end{cases}$。令 S 為所有解所成集合，顯然 S 有 2^n 個元素。令函數 $C:S\to N$ 為由解空間 S 映至正整數的函數，代表一組解所需關閉的通道數。我們稱兩組不同的解 $s,s'\in S$ 為同

類，如果 s 與 s' 的+1,-1 個數相同、包含同數目的封閉區域與分割數並且滿足 $C(s)=C(s')$。

2. 一個圖稱為連通如果圖形的任兩個頂點，都存在一路徑連結。若圖形存在 w 個連通區域但彼此不連通，則我們稱其為 w 個分割。
3. 一個圖為平面圖，如果圖上除了頂點外沒有其他交點。
4. 一個圖所包含的封閉區域數為平面被圖形分割的總區域數。如果一個圖不包含任何封閉區，那麼一定是樹或路徑。
5. 平面圖的尤拉公式為 $v-e+r=2$，其中 v 為頂點數、e 為邊數、r 為封閉區域數。
6. 多面體壓縮到平面上為將多面體的底面挖一個洞拉開，直到能夠投影到平面上，使得頂點數、邊數、面數不變的一種變換。

二、 研究過程

(一)、每間房間對外通道數相同的貓抓老鼠問題

我們先討論最原始的貓抓老鼠問題：

假設有二十間房間，每間房間各養了一隻貓，每間房間有三個通道與其他房間相通，如果現在要抓 k 隻貓換成 k 隻老鼠，請問如何才能關閉最少的通道，而將老鼠放進去？

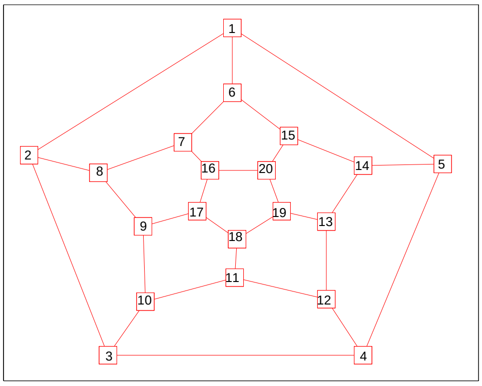


圖 2

我們一個情況一個情況來討論。

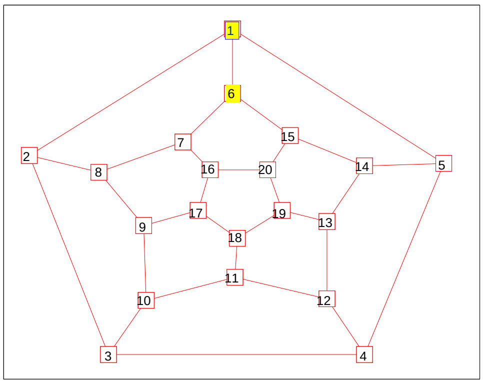
1.一隻老鼠：

由於每個房間都有 3 個通道，因此所有解都同類，任取哪一房間皆可。

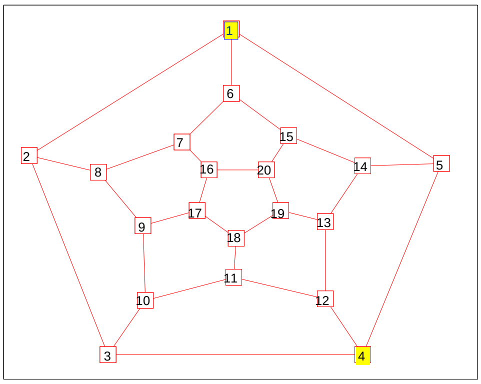
∴最佳── 3 個通道

2.二隻老鼠：

(A)完全連接二房間：由於任選完全連接二房間都與選擇 01-06 同類，故斷 4 條。



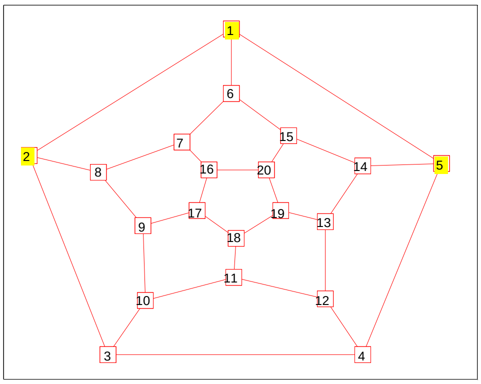
(B)不完全連接二房間：由於任選不完全連接二房間都與選擇 01-04 同類，故 6 條。



∴最佳—— 4 個通道

3.三隻老鼠：

(A)完全連接的三房間：由於任選完全連接三房間都與選擇 01-02-05 同類，故斷 5 條。

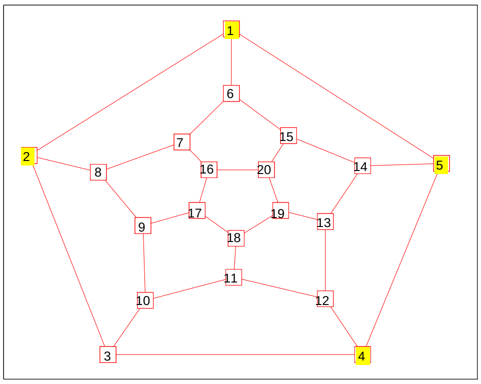


(B)不完全連接三房間：由於超過 2 個分割，因此斷掉的邊必定大於等於 6。

∴最佳—— 5 個通道

4.四隻老鼠：

(A)完全連接的四房間：由於任選完全連接四房間都與選擇 01-02-05-04 同類，故斷 6 條



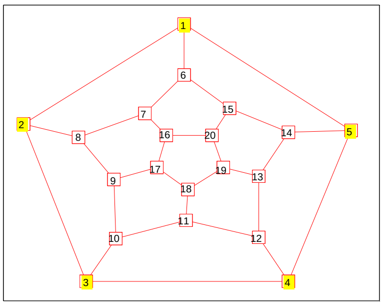
(B)不完全連接四房間：由於超過 2 個分割，斷掉的邊必定大於等於 6。

∴最佳—— 6 個通道

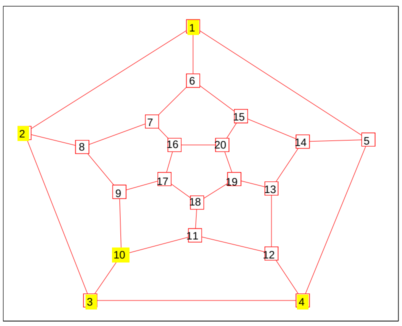
5.五隻老鼠：

(A)完全連接的五房間：

(1)包含 1 封閉區域：由於任選包含 1 封閉區域五房間都與選擇 01-02-03-04-05 同類，故斷 5 條



(2)不包含封閉區域：由於任選不包含封閉區域五房間都與選擇 01-02-03-04-10 同類，故斷 7 條



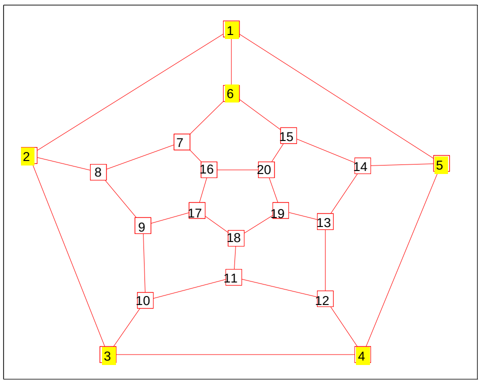
(B)不完全連接五房間：若有 2 個分割，則至少有一個分割的頂點個數大於一，所以斷掉的邊必定大於等於 3+4=7。若超過 2 個分割，則斷掉的邊必定大於等於 9。

∴最佳—— 5 個通道

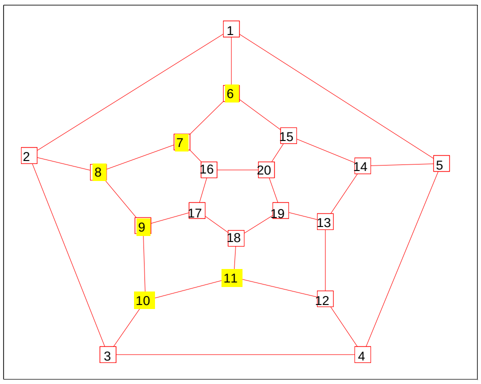
6.六隻老鼠：

(A)完全連接的六房間：

(1)包含 1 封閉區域：由於任選包含 1 封閉區域六房間都與選擇 01-02-03-04-05-06 同類，故斷 6 條



(2)不包含封閉區域：由於任選不包含封閉區域六房間都與選擇 06-07-08-09-10-11 同類，故斷 8 條



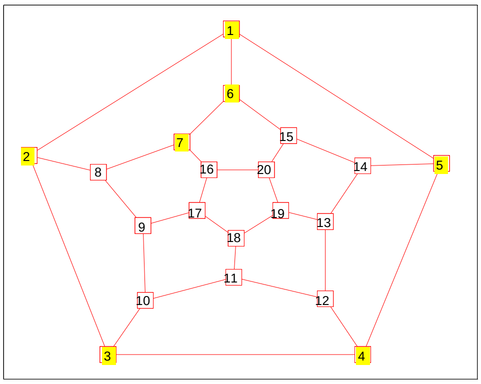
(B)不完全連接的六房間：若有 2 個分割，則至少有一個分割的頂點個數大於一，所以斷掉的邊必定大於等於 3+4=7。若超過 2 個分割，則斷掉的邊必定大於等於 9。

∴最佳—— 6 個通道

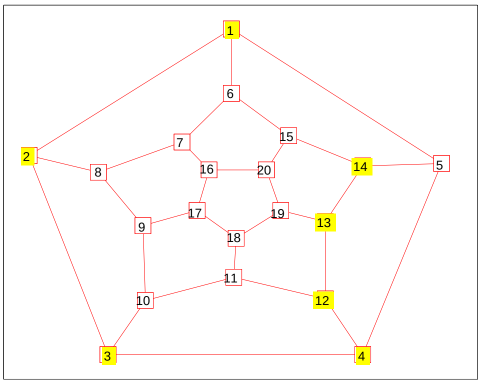
7.七隻老鼠：

(A)完全連接的七房間：

(1)包含 1 封閉區域：由於任選包含 1 封閉區域七房間都與選擇 01-02-03-04-05-06-07 同類，故斷 7 條



(2)不包含封閉區域：由於任選不包含封閉區域七房間都與選擇 01-02-03-04-12-13-14 同類，故斷 9 條



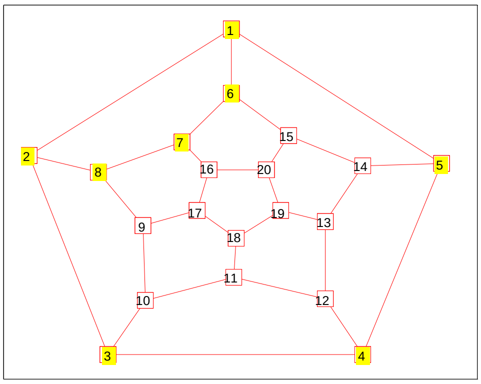
(B)不完全連接七房間：若有 2 個分割，則至少有一個分割的頂點個數大於一，所以斷掉的邊必定大於等於 3+4=7。若超過 2 個分割，則斷掉的邊必定大於等於 9。

∴最佳—— 7 個通道

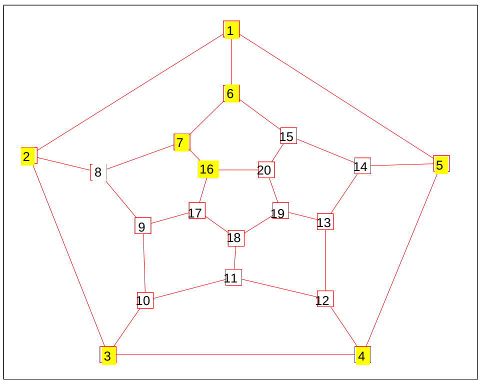
8.八隻老鼠：

(A)完全連接的八房間：

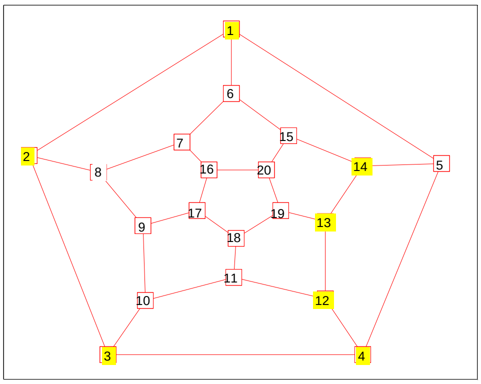
(1)包含 2 封閉區域：由於任選包含 2 封閉區域八房間都與選擇 01-02-03-04-05-06-07-08 同類，故斷 6 條



(2)包含 1 封閉區域：由於任選包含 1 封閉區域八房間都與選擇 01-02-03-04-05-06-07-16 同類，故斷 8 條



(3)不包含封閉區域：由於任選不包含封閉區域八房間都與選擇 01-02-03-04-12-13-14-15 同類，故斷 10 條



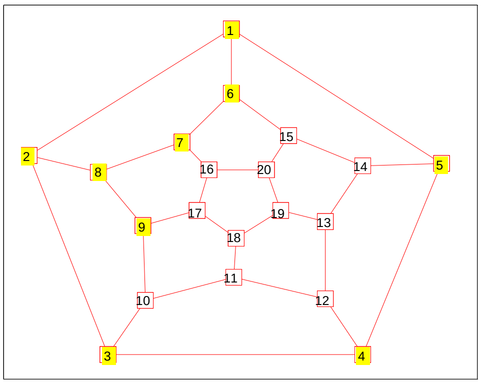
(B)不完全連接八房間：由於超過 2 個分割，則斷掉的邊必定大於等於 6

∴最佳—— 6 個通道

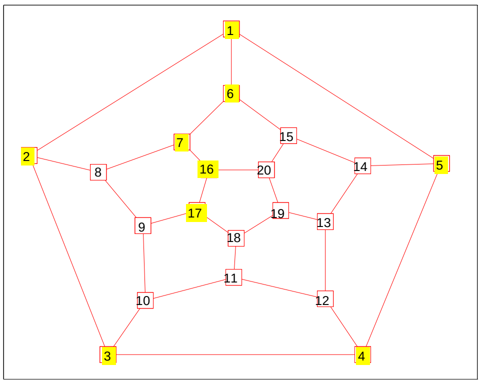
9.九隻老鼠：

(A)完全連接的九房間：

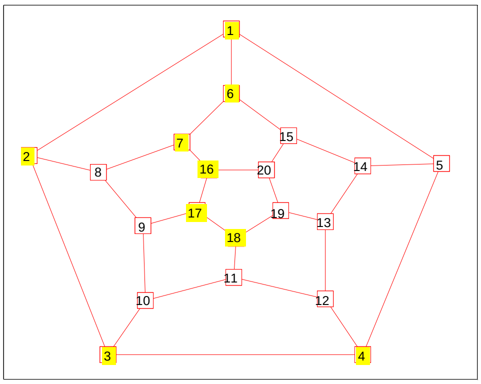
(1)包含 2 封閉區域：由於任選包含 2 封閉區域九房間都與選擇 01-02-03-04-05-06-07-08-09 同類，故斷 7 條



(2)包含 1 封閉區域：由於任選包含 1 封閉區域九房間都與選擇 01-02-03-04-05-06-07-16-17 同類，故斷 9 條



(3)不包含封閉區域：由於任選不包含封閉區域九房間都與選擇 01-02-03-04-18-06-07-16-17 同類，故斷 11 條



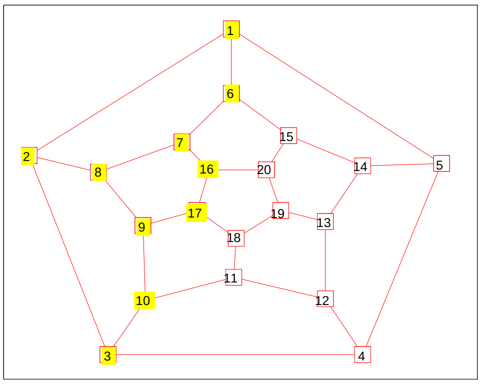
(B)不完全連接九房間：若有 2 個分割，則至少有一個分割的頂點個數大於一，所以斷掉的邊必定大於等於 3+4=7。若超過 2 個分割，則斷掉的邊必定大於等於 9。

∴最佳—— 7 個通道

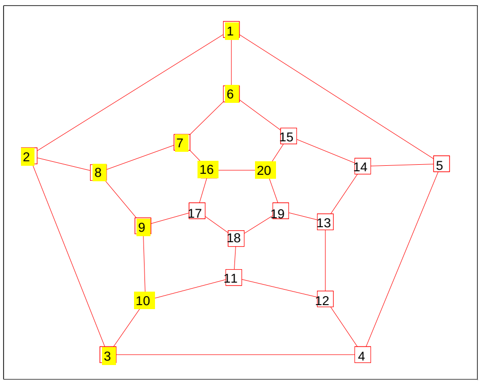
10.十隻老鼠：

(A)完全連接的十房間：

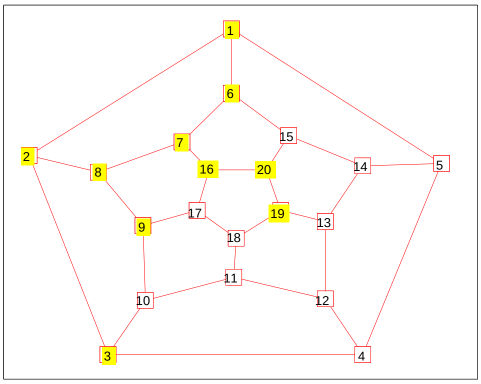
(1)包含 3 封閉區域：由於任選包含 3 封閉區域十房間都與選擇 01-02-03-06-07-08-09-10-16-17 同類，故斷 6 條



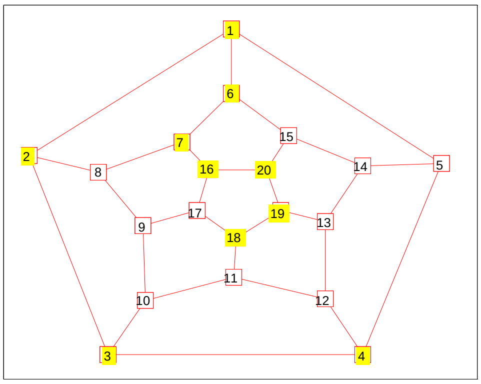
(2)包含 2 封閉區域：由於任選包含 2 封閉區域十房間都與選擇 01-02-03-06-07-08-09-10-16-20 同類，故斷 8 條



(3)包含 1 封閉區域：由於任選包含 1 封閉區域十房間都與選擇 01-02-03-06-07-08-09-19-16-20 同類，故斷 10 條



(4)不包含封閉區域：由於任選不包含封閉區域十房間都與選擇 01-02-03-06-07-14-18-19-16-20 同類，故斷 12 條



(B)不完全連接十房間：若有 2 個分割，則至少有一個分割的頂點個數大於一，所以斷掉的邊必定大於等於 3+4=7。若超過 2 個分割，則斷掉的邊必定大於等於 9。

∴最佳—— 6 條。

我們把發現的結果歸納如下：

表格 1：不同的 k 值在不同情況下所需關閉的通道數及最佳解

相等通道貓抓老鼠問題						
k	不連通	不包含封閉區域	包含 1 封閉區域	包含 2 封閉區域	包含 3 封閉區域	最佳解
k=1	無	k+2	無	無	無	k+2
$2 \le k \le 4$	大於 6	k+2	無	無	無	k+2
$5 \le k \le 7$	大於 7	k+2	K	無	無	k
$8 \le k \le 9$	大於 7	k+2	K	k-2	無	k-2
10	大於 7	k+2	K	k-2	6	6

(二)、相等通道貓抓老鼠問題的推廣

我們現在把貓抓老鼠問題推廣到 n 個房間，每個房間各有 d 個通道與其他房間相連，怎樣才能關閉最少的通道，而把 k 隻老鼠放進去？

問題 1：貓抓老鼠問題

給定 n 個頂點的平面圖貓抓老鼠問題 V，若每個頂點都有 d 個邊，在 V 上找二個頂點所成集合 P_1, P_2，使得 $|P_1| = k, |P_2| = n-k$，其中 $P_1 \cap P_2 = \phi, P_1 \cup P_2 = V$，請問如何找分割 P_1, P_2，使得關閉通道最少？

先透過一個觀察, 將 k 隻貓換成 k 隻老鼠的最佳解, 應該與將(n-k)隻貓換成(n-k)隻老鼠的最佳解相同，因此我們有

定理一：給定 n 個頂點的平面圖貓抓老鼠問題 V, 在 V 上找二個頂點所成集合 P_1, P_2,

則 $|P_1| = k, |P_2| = n-k$ 與 $|P_1| = n-k, |P_2| = k$ 的最佳解相同。

證明：

由於將 k 隻貓換成 k 隻老鼠，等同於留下(n-k)隻貓。而貓和老鼠關閉通道會相同。故將 k 隻貓換成 k 隻老鼠的最佳解，與將(n-k)隻貓換成(n-k)隻老鼠的最佳解相同。

■

現在我們先來看每個頂點都相連的情況。我們歸納發現，若 d=3 且 P_1 不包含封閉區域時，則關閉的通道等於 k+2。但當我們推廣到一般情形時，似乎也有類似的規則。我們經由遞回的方法，成功的得到了定理二。

定理二：給定 n 個頂點的平面圖貓抓老鼠問題 V，若每個頂點都有 d 個邊，在 V 上找二個頂點所成集合 P_1, P_2，使得 $|P_1| = k, |P_2| = n-k$。若 P_1 為一路徑或樹且 P_1 連通，則所要關閉的通道為 $k(d-2)+2$。

證明：

假設 $|P_1| = k-1$ 時，關閉的通道為 a_{k-1}，我們很容易知道當 $|P_1| = k$ 時，存在一遞回定義 $a_k = a_{k-1} + d - 2$，即 $a_k - a_{k-1} = d-2$。

解遞回方程式 $\sum_{i=2}^{k}(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=2}^{k}(d-2) = (k-1)(d-2)$，所以

$$a_k = a_1 + (k-1)(d-2) = d + (k-1)(d-2) = k(d-2)+2$$

■

現在我們來看若P_1包含一個封閉區域時，會有怎樣的情況呢。我們發現當封閉區域拿掉一個邊時，會變成定理二的情況，即不包含任何封閉區域。然而當我們把邊加回來後，關閉的通道會少 2。所以我們得到了定理三。

定理三：給定 n 個頂點的平面圖貓抓老鼠問題 V，若每個頂點都有 d 個邊，在 V 上找二個頂點所成集合P_1,P_2，使得$|P_1|=k,|P_2|=n-k$，若P_1包含一封閉區域且P_1連通，則所要關閉的通道為$k(d-2)$。

證明：

若我們取走P_1封閉區域上的一邊 q，則$|P_1|=k$ 且P_1為一路徑或樹，由定理二知，所要關閉的通道為$k(d-2)+2$。現在當我們把取走的一邊加回來時，我們知道所要關閉的通道數會少 2，故變為$k(d-2)+2-2=k(d-2)$。

■

我們現在把問題推廣到包含 r 個封閉區域。當某一個封閉區域拿掉一個邊時，會變成包含 r-1 個封閉區域。然而當我們把邊加回來後，關閉的通道會少 2。所以我們得到了定理四。

定理四：給定 n 個頂點的平面圖貓抓老鼠問題 V，若每個頂點都有 d 個邊，在 V 上找二個頂點所成集合P_1,P_2，使得$|P_1|=k,|P_2|=n-k$，若P_1包含 r 個封閉區域且P_1連通，則所要關閉的通道為$k(d-2)-2(r-1)$。

證明：

假設$|P_1|=k$ 且包含 r 個封閉區域時，我們令關閉的通道為$a_{k,r}$。顯然當$|P_1|=k$ 且包含 r 個封閉區域時，若我們取走P_1封閉區域上的某一邊 q，使得P_1包含 r-1 個封閉區域，則$|P_1|=k$ 且關閉的通道為$a_{k,r-1}$。我們容易知道P_1存在一遞回定義$a_{k,r}=a_{k,r-1}-2$，解遞回方程式得$\sum_{i=2}^{r}\left(a_{k,i}-a_{k,i-1}\right)=\sum_{i=2}^{r}\left(-2\right)=(-2)(r-1)$，所以$a_{k,r}=a_{k,1}-2(r-1)$，由定理三：$a_{k,1}=k(d-2)$，所以$a_{k,r}=k(d-2)-2(r-1)$

■

我們之前的推廣都是在P_1任兩個頂點都有路徑的情況，但當P_1包含 r 個封閉區域且有 w 個不相連圖形時，會是怎樣呢？我們發現其實我們可以將 w 個互不相連圖形看成有 w 個且每個都相連的圖形，由於每一個獨立的圖形都可以用定理四來求關閉的通道。所以關閉的總通道就是個別關閉通道的和，所以我們得到了定理五。

定理五：給定個 n 個頂點的平面圖貓抓老鼠問題 V，若每個頂點都有 d 個邊，在 V 上找二個頂點所成集合 P_1, P_2，使得 $|P_1| = k, |P_2| = n-k$，若 P_1 包含 r 個封閉區域且有 w 個分割，則所要關閉的通道為 $k(d-2)-2(r-w)$。

證明：

由定理四，一個連通圖形有 r 個封閉區域所關閉通道為 $k(d-2)-2(r-1)$，現在我們假設第 w_i 個分割包含 r_i 個封閉區域、 k_i 個頂點，則由定理四，第 w_i 個分割所關閉的通道為 $k_i(d-2)-2(r_i-1)$，所以所關閉的通道總和為

$$\sum_i^w k_i(d-2)-2(r_i-1) = (d-2)\sum_i^w k_i - 2\sum_i^w (r_i-1)$$
$$= k(d-2)-2(r-w)$$

■

我們把推廣的公式歸納如下：

表格 2：不同的 k 值在不同情況下所需關閉的通道數及最佳解

相等通道貓抓老鼠問題推廣					
$\|P_1\|$	不包含封閉區域 f_1	包含 r 個封閉區域 f_2	w 個分割且包含 r 個封閉區域	f_1 - f_2	下界
k	$k(d-2)+2$	$k(d-2)-2(r-1)$	$k(d-2)-2(r-w)$	$2r$	$k(d-2)-2(\max(r-w))$

由我們推廣的結果，我們發現同樣的 k 值，連通圖包含 r 個封閉區域所要關閉的通道，比不包含封閉區域少 $2r$，且包含 r 個封閉區域比包含 r-1 個封閉區域少 2，故我們知道若要連通圖所要關閉的通道數最小，就要在給定的 k 值上，找包含越多封閉區域越好。然而若不連通，就要找包含越多封閉區域且越少分割越好。

現在我們重新以我們的證明來解一些相等通道貓抓老鼠問題的範例，我們分別舉了 d=3 到 5 的三個範例，由於 d=1 的情況為相連兩點，d=2 的情況我們在定理九會討論，故在此省略。

例 1 ：20 個頂點、30 個邊，且每個頂點有 3 個邊的貓抓老鼠問題：

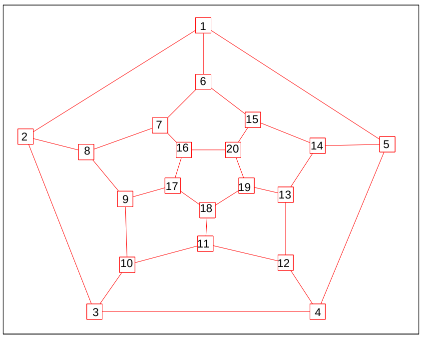


圖 3

1^0 連通圖中，由於 $k=10, d=3$，我們容易知道最多有 3 個封閉區域，所以由定理四關閉的通道數最小為 $k(d-2)-2(r-1)=10\times 1-2\times 2=6$

2^0 若不連通，由於 $k=10, d=3$，所以由定理五關閉的通道數最小為
$k(d-2)-2(r-w)\geq k(d-2)-2(3-2)=k(d-2)-2=10-2=8$

3^0 由於 6<8，所以關閉的通道數最小為 6。

例 2：12 個頂點、24 個邊，且每個頂點有 4 個邊的貓抓老鼠問題：

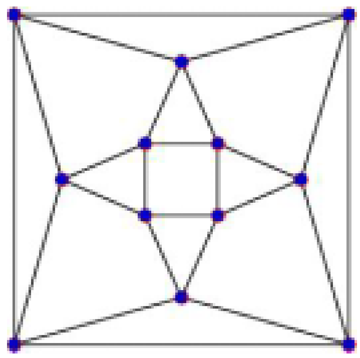


圖 4

1^0 連通圖中，由於 $k=6, d=4$，我們容易知道最多有 3 個封閉區域，所以由定理四關閉的通道數最小為 $k(d-2)-2(r-1)=6\times 2-2\times 2=8$

2^0 若不連通，由於 $k=6, d=4$，且最多不會超過 3 個封閉區域，由定理五關閉的通道數最小為 $k(d-2)-2(r-w)\geq k(d-2)-2(3-2)=k(d-2)-2=12-2=10$

3^0 由於 8<10，所以關閉的通道數最小為 8。

例 3：12 個頂點、30 個邊，且每個頂點有 5 個邊的貓抓老鼠問題：

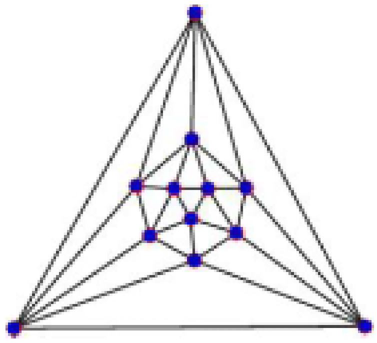


圖 5

1^0 連通圖中，由於 $k=6, d=5$，我們容易知道最多有 5 個封閉區域，所以由定理四關閉的通道數最小為 $k(d-2)-2(r-1)=6\times 3-2\times 4=10$

2^0 若不連通，由於 $k=6, d=5$，所以每一個部分圖形的頂點數必小於等於 5，所以最多不會超過 5 個封閉區域，由定理五關閉的通道數最小為
$k(d-2)-2(r-w)\geq k(d-2)-2(5-2)=k(d-2)-6=18-6=12$

3^0 由於 10<12，所以關閉的通道數最小為 10。

經由我們的研究，我們已經得到了一些相等通道最佳化所需要的結果，現在我們來證明一些相等通道貓抓老鼠問題的一些性質。由尤拉公式，我們很容易知道一個平面的貓抓老鼠問題必定有一個頂點的邊數小於等於 5，然而當我們的問題限制在每個頂點有相等通道時，我們很自然的可以得到每個頂點的邊都必須小於等於 5 的性質，現在我們來證明定理六。

定理六：給定 n 個頂點的平面圖貓抓老鼠問題，若每個頂點都有 d 個邊，則 $d \le 5$，即所有貓抓老鼠問題只有 5 種類別，$d = 1 \text{ or } 2 \text{ or } 3 \text{ or } 4 \text{ or } 5$。

證明：

由尤拉公式：$v - e + r = 2$，其中 v 為頂點數、e 為邊數、r 為封閉區域數。然而每個封閉區域最少有 3 個邊，所以 $2e \ge 3r$，所以 $v - e + \frac{2e}{3} \ge 2$，所以 $e \le 3v - 6$，由於 $v = n$ 故 $e \le 3n - 6$。

現在我們再用反證法來證明，

若 $d \ge 6$，則 $\sum_{1}^{n} d \ge 6n$，所以 $\sum_{1}^{n} d = 2e \ge 6n$，即 $e \ge 3n$。但 $e \le 3n - 6$，所以 $3n - 6 \ge 3n$，所以 $-6 \ge 0$ 矛盾。故 $d \le 5$。

■

架構在定理六上，我們知道 d 必定小於等於 5，然而由我們得到的結果，連通圖中所關閉的通道必小於 $k(d-2)+2$，所以我們很自然的得到了一個與 d 無關的上界。然而在不連通中，最多只有 k 個不相連圖形，所以關閉的通道當然小於等於 $5k$。現在我們來證明定理七。

定理七：給定 n 個頂點的平面圖貓抓老鼠問題 V，若每個頂點都有 d 個邊，在 V 上找一個分割 P_1, P_2，使得 $|P_1| = k, |P_2| = n - k$，若 P_1 連通則所要關閉的通道小於等於 $3k + 2$，若 P_1 不連通則所要關閉的通道小於 $5k$。

證明：

由我們得到的結果，連通圖中所關閉的通道必小於 $k(d-2)+2$，又由定理六 $d \le 5$，故 $k(d-2)+2 \le k(5-2)+2 = 3k+2$。然而不連通中，由於 $d \le 5$，故關閉的通道小於 $kd \le 5k$。

■

在我們的研究過程中，我們找到了一個很有趣的性質，即相等通道的貓抓老鼠問題中，若貓和老鼠的個數相等，且分別都是連通圖，則貓和老鼠圖形所包含的封閉區域數會相等，與圖形的選取無關。若不是連通圖，則貓和老鼠圖形所包含的封閉區數的差，會等於不相連區域數的差。

定理八：給定 n 個頂點的平面圖貓抓老鼠問題 V，若每個頂點都有 d 個邊，在 V 上找二個頂點所成集合 P_1, P_2，使得 $|P_1| = \frac{n}{2}, |P_2| = \frac{n}{2}$，若 P_1 包含 r_1 個封閉區域且有 w_1 個分割，P_2 包含 r_2 個封閉區域且有 w_2 個分割，則 $r_1 - r_2 = w_1 - w_2$。若 P_1, P_2 皆連通，則 $r_1 = r_2$，與 P_1 選取無關。

證明：

由定理五我們得到 P_1 所關閉的通道數為 $\frac{n}{2}(d-2) - 2(r_1 - w_1)$，$P_2$ 所關閉的通道數為 $\frac{n}{2}(d-2) - 2(r_2 - w_2)$，但 P_1 及 P_2 所關閉的通道必定要相等，所以

$$\frac{n}{2}(d-2) - 2(r_1 - w_1) = \frac{n}{2}(d-2) - 2(r_2 - w_2),$$

所以 $(r_1 - w_1) = (r_2 - w_2)$，即 $r_1 - r_2 = w_1 - w_2$。

若 P_1, P_2 皆連通，則 $w_1 = w_2 = 1$，由上結果得 $r_1 - r_2 = 1 - 1 = 0$，故 $r_1 = r_2$。

■

若我們將每個頂點的邊數固定為 2，我們發現了一個不變的性質，即所要關閉的最少通道會固定為 2，與圖形的選取無關。

定理九：給定 n 個頂點的貓抓老鼠問題，若每個頂點都有 2 個邊，找二個頂點所成集合 P_1, P_2，使得 $|P_1| = k, |P_2| = n - k$，則所要關閉的最少通道為 2，與圖形無關。

證明：

由於所有頂點的邊數皆為 2 的情況，必定形成一迴路，與圖形選取無關，故所要關閉的最少通道為 2。

■

現在我們探討幾個貓抓老鼠問題的特例，我們首先對在空間上每一點都對稱的圖形探討，如正多面體、空間上完全圖等等。經由我們的研究發現，一個完全對稱的圖形，切成一半一半時，貓或老鼠的圖形必須是連通的，我們來看定理十。

定理十：給定 n 個頂點的空間上貓抓老鼠問題 V，若 V 是一個對任何頂點都對稱的圖形，在 V 上找二個頂點所成集合 P_1, P_2，使得 $|P_1| = k, |P_2| = n - k$，若 P_1, P_2 使得切割最小，則 P_1, P_2 皆分別是連通圖。

證明：

若我們在 V 上找二個頂點所成集合 P_1, P_2，若 P_1 不連通且存在分割 w_1, w_2，由於 V 是一個對任何頂點都對稱的圖形，所以 w_1 經由移動後切割數不變，我們可以將 w_1 經由移動靠近 w_2，當 w_1, w_2 變成連通時，我們知道切割數會變小，所以若 P_1, P_2 使得切割最小，則 P_1, P_2 皆必須是連通圖。

■

我們現在把這個對稱圖形壓到平面上，也會有同樣的性質，即

定理十一：給定 n 個頂點的平面上圖形貓抓老鼠問題 V，若 V 是一個由空間上對任何頂點都對稱的圖形壓縮而成，在 V 上找二個頂點所成集合 P_1, P_2，使得 $|P_1| = k, |P_2| = n-k$，若 P_1, P_2 使得切割最小，則 P_1, P_2 皆分別是連通圖。

證明：

由定理十，若 V 是一個由空間上對任何頂點都對稱的圖形，若 P_1, P_2 使得切割最小，則 P_1, P_2 皆必須是連通圖。現在我們可以將 V 中的某一面挖一個洞拉開攤在平面上，則 V 在平面上且同時滿足 P_1, P_2 使得切割最小，且分別是連通圖。

■

由定理十一，我們可以發現由正多面體壓到平面上的圖形，若使得切割最小，則 P_1, P_2 皆分別是連通圖。我們知道正多面體一共只有五種，其中正 12 面體壓縮後就是我們原始的貓抓老鼠問題；正 20 面體壓縮後就是我們相等通道的範例 3。經由我們得到的結果，我們可以更快的得到最小切割數，我們現在來看五種正多面體壓到平面上的情形。

例 4：正 4 面體壓縮：

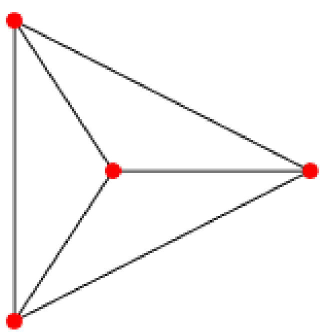


圖 6

由定理十，若使得切割最小，則 P_1, P_2 皆分別是連通圖，由於 $k = 2, d = 3$，最多有 0 個封閉區域，所以由定理四關閉的通道數最小 $k(d-2) - 2(r-1) = 2\times1 - 2\times(-1) = 4$

例 5：正 6 面體壓縮：

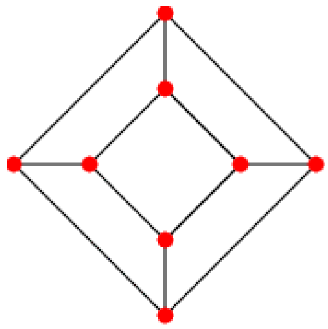


圖 7

由定理十，若使得切割最小，則 P_1, P_2 皆分別是連通圖，由於 $k = 4, d = 3$，最多有 1 個封閉區域，所以由定理四關閉的通道數最小為 $k(d-2) - 2(r-1) = 4\times 1 - 2\times 0 = 4$

例 6：正 8 面體壓縮：

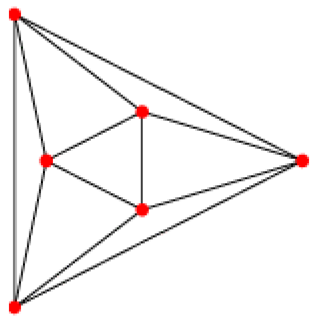


圖 8

由定理十，若使得切割最小，則 P_1, P_2 皆分別是連通圖，由於 $k = 3, d = 4$，最多有 1 個封閉區域，所以由定理四關閉的通道數最小為 $k(d-2) - 2(r-1) = 3\times 2 - 2\times 0 = 6$

例 7：正 12 面體壓縮：

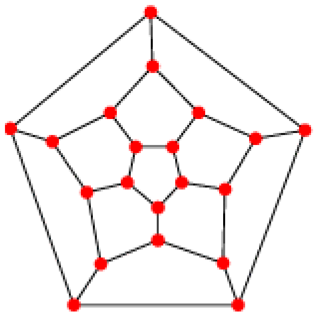


圖 9

由定理十，若使得切割最小，則 P_1, P_2 皆分別是連通圖，由於 $k = 10, d = 3$，最多有 3 個封閉區域，所以由定理四關閉的通道數最小為 $k(d-2) - 2(r-1) = 10\times 1 - 2\times 2 = 6$

例 8：正 20 面體壓縮：

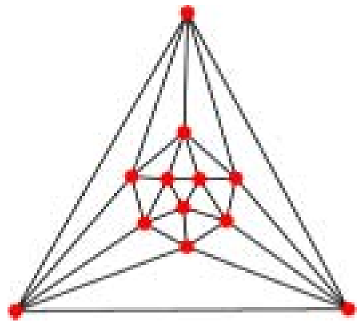


圖 10

由定理十，若使得切割最小，則 P_1, P_2 皆分別是連通圖，由於 $k = 6, d = 5$，最多有 5 個封閉區域，所以由定理四關閉的通道數最小為 $k(d-2) - 2(r-1) = 6 \times 3 - 2 \times 4 = 10$

(三)、不等通道貓抓老鼠問題

我們現在把貓抓老鼠問題推廣到 n 個房間，但每個房間不一定相等通道與其他房間相連，怎樣才能關閉最少的通道，而把 k 隻老鼠放進去？

問題 2：不等通道貓抓老鼠問題

給定 n 個頂點的平面圖貓抓老鼠問題 V，若第 i 個頂點有 d_i 個邊，在 V 上找頂點所成集合 P_1, P_2，使得 $|P_1| = k, |P_2| = n-k$，其中 $P_1 \cap P_2 = \phi, P_1 \cup P_2 = V$，如何找集合 P_1, P_2，使得關閉通道最少。

在不等通道的情況下，由於我們知道所要關閉的通道數必定等於包含頂點的邊數和，減去包含的邊數。故我們很容易的利用了尤拉公式得到定理十二。

定理十二：給定一個 n 個頂點, m 個邊的平面圖貓抓老鼠問題 V, 若第 i 個頂點有 d_i 個邊，在 V 上找二個頂點所成集合 P_1, P_2，使得 $|P_1| = k, |P_2| = n-k$，若 P_1 為一路徑或樹且 P_1 連通，令 E_1 為所有 P_1 頂點的邊數所成集合，為則所要關閉的通道為 $\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k + 2$。

證明：

由尤拉公式：$v - e + r = 2$，其中 v 為頂點數、e 為邊數、r 為封閉區域數, 所以 $e = v + r - 2$，所以所要關閉的通道為

$$\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2e = \sum_{d_i \in E_1} d_i - 2v - 2r + 4$$

因為 P_1 為一路徑或樹，所以 $r = 1, v = k$，所以

$$\begin{aligned}\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2e &= \sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2 + 4 \\ &= \sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k + 2\end{aligned}$$

■

然而連通圖，在不等通道的情況下，也有包含封閉區域會是怎樣的情況呢？我們發現同樣可以用尤拉公式得到一般式，只不過公式會和頂點的邊數有關。

定理十三：給定一個 n 個頂點, m 個邊的平面圖貓抓老鼠問題 V, 若第 i 個頂點有 d_i 個邊，在 V 上找二個頂點所成集合 P_1, P_2，使得 $|P_1| = k, |P_2| = n-k$，若 P_1 包含 r 個封閉區域且 P_1 連通，令 E_1 為所有 P_1 頂點的邊數所成集合，則所要關閉的通道為 $\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(r-1)$。

證明：

由尤拉公式：$v-e+r=2$，其中 v 為頂點數、e 為邊數、r 為封閉區域數，所以$e=v+r'-2$，所以所要關閉的通道為

$$\sum_{d_i\in E_1} d_i - 2e = \sum_{d_i\in E_1} d_i - 2v - 2r + 4$$

因為 P_1 包含 r 個封閉區域，所以$r'=r+1, v=k$，所以

$$\begin{aligned}\sum_{d_i\in E_1} d_i - 2e &= \sum_{d_i\in E_1} d_i - 2k - 2(r+1) + 4 \\ &= \sum_{d_i\in E_1} d_i - 2k - 2(r-1)\end{aligned}$$

■

同樣的，我們之前的推廣都是在 P_1 任兩個頂點都有路徑且在不等通道的情況下，但當 P_1 包含 r 個封閉區域且有 w 個不相連圖形時，會是怎樣呢？我們發現其實我們一樣可以將 w 個互不相連圖形看成有 w 個且每個都相連的圖形，由於每一個獨立的圖形都可以用定理十三來求關閉的通道。所以關閉的總通道數就是個別關閉通道數的和，所以我們得到了定理十四。

定理十四： 給定一個 n 個頂點，m 個邊的平面圖貓抓老鼠問題 V，若第 i 個頂點有 d_i 個邊，在 V 上找二個頂點所成集合 P_1, P_2，使得$|P_1|=k, |P_2|=n-k$，若 P_1 包含 r 個封閉區域且有 w 個分割，令 E_1 為所有 P_1 頂點的邊數所成集合，則所要關閉的通道為 $\sum_{d_i\in E_1} d_i - 2k - 2(r-w)$。

證明：

由定理十三，一個連通圖形有 r 個封閉區域所關閉的通道為 $\sum_{d_i\in E_1} d_i - 2k - 2(r-1)$，現在我們假設第 w_i 個分割包含 r_i 個封閉區域、k_i 個頂點，則由定理十二，第 w_i 個分割所關閉的通道為 $\sum_{d_j\in W_i} d_j - 2k_i - 2(r_i-1)$，所以所關閉的通道總和為

$$\sum_{i}^{w} \sum_{d_j\in W_i} d_j - 2k_i - 2(r_i-1) = \sum_{d_i\in E_1} d_i - 2k - 2(r-w)$$

■

然而僅考慮邊數也可以得到對應的結果，考慮 P_1 中所有的頂點，這些頂點總共包含了 $\sum_{d_i\in E_1} d_i$ 個邊，有的邊會連到外面，有的邊的兩個端點都是 P_1 內的點。假設兩個端點都是 P_1 的邊總共有 I 個，扣掉這些邊，剩下的邊都連向外面，因此我們知道這

樣的邊一共有 $\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2I$ 個，而這也正是所要關閉的通道數，因此我們得到定理十五。

定理十五： 給定 n 個頂點的平面圖貓抓老鼠問題 V，若第 i 個頂點有 d_i 個邊，在 V 上找二個頂點所成集合 P_1, P_2，使得 $|P_1| = k, |P_2| = n-k$，令 I 為所有以 P_1 內的點為頂點的邊的總數，則所要關閉的通道為 $\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2I$。

證明：

由於 I 為所有以 P_1 內的點為頂點的邊的總數，對每個頂點來說顯然 I 要算兩次，故每個頂點連接邊數的總和為 $2I$，所以關閉的通道為 $\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2I$。

■

我們把推廣的公式歸納如下：

表格 3：不同的 k 值在不同情況下所需關閉的通道數及最佳解

不等通道貓抓老鼠問題推廣				
$\lvert P_1 \rvert$	不包含封閉區域	包含 r 個封閉區域	W 個分割且包含 r 個封閉區域	下界
K	$\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k + 2$	$\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(r-1)$	$\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(r-w)$	$\min_{E_1}\left(\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(r-w)\right)$

在我們證明的過程中，我們知道邊數相等的貓抓老鼠問題其實是邊數不等的一個特例，即 $\sum_{d_i \in E_1} d_i = kd$，然而在邊數不等之中，連通圖所關閉通道的下界為 $\min_{E_1}\left(\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(r-1)\right)$，即最佳化必須同時將邊數的總和極小化及封閉區域最大化。而不連通圖所關閉通道的下界為 $\min_{E_1}\left(\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(r-w)\right)$，即最佳化必須同時將邊數的總和極小化及封閉區域減分割數最大化。

現在我們重新以我們的證明來解一些不等通道貓抓老鼠問題的範例，我們分別舉了二個範例，來闡釋我們的結果。

例１：16 個頂點的不等通道問題

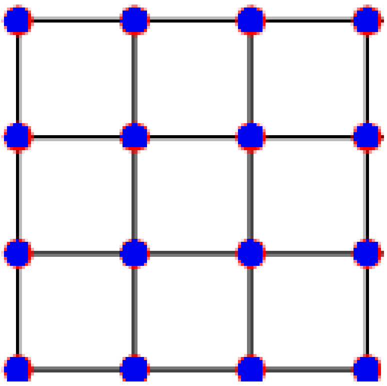


圖 11

1^0 連通圖中，由於 $k=8$，我們容易知道最多有 3 個封閉區域，所以由定理十二，若

r =1： $\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(r-1) = \sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k = \sum_{d_i \in E_1} d_i - 16 \geq 23 - 16 = 7$。

r =2： $\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(r-1) = \sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2 = \sum_{d_i \in E_1} d_i - 18 \geq 24 - 18 = 6$。

r =3： $\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(r-1) = \sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 4 = \sum_{d_i \in E_1} d_i - 20 \geq 24 - 20 = 4$。

所以連通圖中關閉的通道數最小為 4。

2^0 若不連通，由於 $k=8$，所以最多有 2 個封閉區域，由定理十三關閉的通道數最小為

$$\begin{aligned}\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(r-w) \geq \sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(2-w) &\geq \sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(2-2) \\ &= \sum_{d_i \in E_1} d_i - 16 \geq 20 - 16 \\ &= 4\end{aligned}$$

由結果 $1^0, 2^0$，所以關閉的通道數最小為 4。

例 2：20 個頂點的不等通道問題

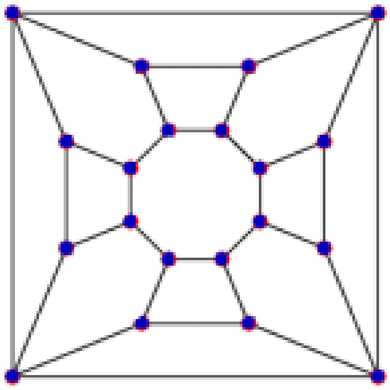


圖 12

1^0 連通圖中，由於 $k=10$，我們容易知道最多有 4 個封閉區域，所以由定理十二，若

r =1：$\sum_{d_i\in E_1} d_i-2k-2(r-1)=\sum_{d_i\in E_1} d_i-2k=\sum_{d_i\in E_1} d_i-20\geq 30-20=10$。

r =2：$\sum_{d_i\in E_1} d_i-2k-2(r-1)=\sum_{d_i\in E_1} d_i-2k-2=\sum_{d_i\in E_1} d_i-22\geq 30-22=8$。

r =3：$\sum_{d_i\in E_1} d_i-2k-2(r-1)=\sum_{d_i\in E_1} d_i-2k-4=\sum_{d_i\in E_1} d_i-24\geq 31-24=7$。

r =4：$\sum_{d_i\in E_1} d_i-2k-2(r-1)=\sum_{d_i\in E_1} d_i-2k-6=\sum_{d_i\in E_1} d_i-26\geq 32-26=6$。

所以連通圖中關閉的通道數最小為 6。

2^0 若不連通，由於 $k=10$，所以最多有 3 個封閉區域，由定理十三關閉的通道數最小為

$$\begin{aligned}\sum_{d_i\in E_1} d_i-2k-2(r-w)\geq \sum_{d_i\in E_1} d_i-2k-2(3-w)\geq &\sum_{d_i\in E_1} d_i-2k-2(3-2)\\ =&\sum_{d_i\in E_1} d_i-22\geq 30-22\\ =&\,8\end{aligned}$$

所以不連通圖中關閉的通道數最小為 8。

由結果 $1^0,2^0$，所以關閉的通道數最小為 6。

(四)、貓抓老鼠問題的特例探討

由之前的探討，我們得到了相等通道與不等通道貓抓老鼠問題的一般式。這個一般式對於解空間不大的某些特定問題，提供了一個絕佳的途徑，尤其是以人工來解決問題。然而這一般式並無法直接找到解答，故當解空間變得很大且複雜時，問題依然不容易解。但如果我們在問題上加一些特殊條件，我們是可以找到公式解的，但缺點就是容易受條件限制，而有不同的情況。

現在我們來看一個格子點圖形問題，我們在不等通道的範例一，示範了一個 16 個頂點的 4x4 格子點不等通道問題，我們得到最小切割為對半的情況，這似乎是滿符合直覺的事情，但對於一般格子點，是否也會對呢？我們現在來證明在某些情況下，這件事情是對的。

定理十六： 給定一個 $m \times n$ 的矩形平面圖貓抓老鼠問題 S，其中 $m \le n$ 且 n 為奇數，顯然 S 有 $(m+1)\times(n+1)$ 個點，在 V 上找二個頂點所成集合 P_1, P_2，使得 $\left|P_1\right| = \dfrac{(m+1)(n+1)}{2}, \left|P_2\right| = \dfrac{(m+1)(n+1)}{2}$，則所要關閉的最小通道為 m+1。

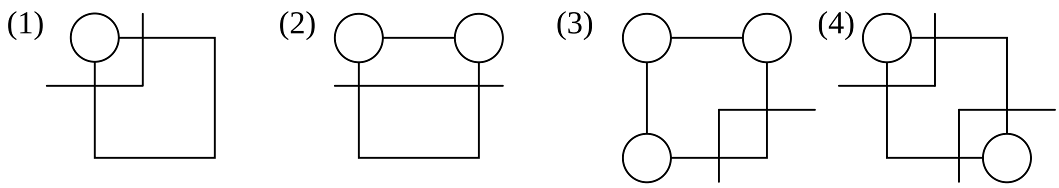
由於當切割為對半時，所要關閉的通道為 m+1，所以我們知道 m+1 的解存在，若我們能證明不存在小於 m+1 的解，則所要關閉的最小通道為 m+1。

為了證明方便，我們先來定義名詞。

定義： 給定 S 與 S 上的分割 P_1, P_2，我們稱一群連在一起的方塊為”一條蛇”，若

(1) 每個方塊至少包含一斷邊
(2) 方塊以上下或左右的方式連接到其他方塊
(3) 所有方塊連接成一條帶子或頭尾相接但不打結

我們稱包含斷邊的方塊為”邊界方塊”，邊界方塊一共有四類：



其中 ○ 表示 P_1 中的點，直線表示蛇的走向，除了第四種情形外，蛇與蛇之間不會相交，因此得知。

現在我們先證明一些引理來輔助證明定理十六。

引理一：

對於任意矩形 S 與 S 上的分別 P_1， P_2 如果其上的邊界方塊不包含第四類，則這些邊界方塊可分成一群不相交的蛇。

證明：

若有相交，則邊界方塊必定會包含 2 條蛇，故得證。

■

引理二：

(1) 頭尾不相接長度為 L 的蛇，包含了(L+1)個斷邊。

(2) 頭尾相接長度為 L 的蛇，包含了 L 個斷邊。

證明：

邊界方塊(1)~(3)，每塊包含了二個斷邊，但由於斷邊會共用，因此平均每塊分得一個斷邊。

■

引理三：

總長度小於 m 的蛇群，最多包含$\left\lfloor \frac{L+1}{2} \right\rfloor \times \left\lceil \frac{L+1}{2} \right\rceil$個 ○ 點。

證明：

(1)如果只有一條長度 L<m 的蛇：

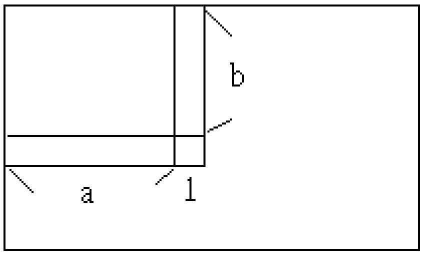
1^0 最好的情況下，蛇不可能頭尾相接，因為如果這樣，由於對稱的關係，我們可把蛇“移到 S 的邊邊”，然後將環狀的蛇解開，可以包含更多的點。

2^0 蛇頭與尾不可能在 S 外框的二平行邊長，因為長度不夠。

3^0 蛇所圍的區域不可能有凹洞，因為如果這樣，把凹洞“往外推”，會圍住更多的點。

所以唯一可能的情形是圍成矩形，矩形二個邊由蛇圍成，另二邊是 S 的邊框。

4^0 討論極值發生時：



令$a+1+b=L$，包含$(a+1)(b+1)$個點，由不等式

$$(a+1)(b+1) \le \left(\frac{a+1+b+1}{2}\right)^2 \le \left(\frac{L+1}{2}\right)^2$$

等號成立時 $a=\left(\frac{L-1}{2}\right)$與$b=\left(\frac{L-1}{2}\right)$，但$a,b$皆為整數，故

$a=\left\lfloor \frac{L-1}{2} \right\rfloor$與$b=\left\lceil \frac{L-1}{2} \right\rceil$，即得證。

(2)如果有好幾條蛇：

1^0假設有二條，第一條長度L_1，第二條長度L_2， L_1+L_2=L，

令$a_1=\left\lfloor \frac{L_1+1}{2} \right\rfloor$， $b_1=\left\lceil \frac{L_1+1}{2} \right\rceil$， $a_2=\left\lfloor \frac{L_2+1}{2} \right\rfloor$， $b_2=\left\lceil \frac{L_2+1}{2} \right\rceil$。

則L_1與L_2最多包圍$a_1b_1+a_2b_2$個點，而

$a_1b_1+a_2b_2 \le (a_1+a_2-1)(b_1+b_2-1)+1$，因為

$$\begin{aligned}(a_1+a_2-1)(b_1+b_2-1)+1 &= a_1b_1+a_1b_2-a_1+a_2b_1+a_2b_2-a_2-b_1-b_2+1+1 \\ &= a_1b_1+a_2b_2+(a_1-1)(b_2-1)+(a_2-1)(b_1-1) \\ &\ge a_1b_1+a_2b_2\end{aligned}$$

令$t_1=(a_1+a_2-1)$，$t_2=(b_1+b_2-1)$，所以$(a_1+a_2-1)(b_1+b_2-1)+1=t_1t_2+1$

由於a_1， a_2， b_1， $b_2 \ge 1$，且存在一數≥ 2，不失一般性，假設$a_1 \ge 2$

$\therefore t_1=a_1+a_2-1>1$

$\therefore t_1t_2+1<t_1t_2+t_1=t_1(t_2+1)$，又

$$\begin{aligned}t_1(t_2+1) &\le \left(\frac{t_1+t_2+1}{2}\right)^2=\left(\frac{(a_1+a_2-1)+(b_1+b_2-1)+1}{2}\right)^2 \\ &=\left(\frac{(a_1+b_1)+(a_2+b_2)-1}{2}\right)^2 \\ &=\left(\frac{(L_1+1)+(L_2+1)-1}{2}\right)^2 \\ &=\left(\frac{L_1+L_2+1}{2}\right)^2=\left(\frac{L+1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$\therefore t_1(t_2+1) \le \left\lfloor \frac{L+1}{2} \right\rfloor \times \left\lceil \frac{L+1}{2} \right\rceil =$一條長度為 L 的蛇包圍最大面積。

因此知二條蛇所能圍的點數$\le$接在一起一條蛇所能圍的最多點數。

2^0如果超過二條蛇：

由(2)知二條合併成一條能包圍更多的點，因此最後會只剩一條。

■

現在我們來看包含第四類的情況，我們知道如果 S 被切成 P_1 與 P_2，如果邊界方塊包含第四類，那麼蛇和蛇會相交：

引理四：

將 S 分割成 P_1 與 P_2，如果第四類邊界方塊算成二塊，那麼斷邊為(m+1)最多只能用 m+1 邊界方塊。

證明：由引理二

■

引理五：

小於 m 個邊界方塊不可能包圍 S 中一半的點。

證明：

由引理三，總長度小於 m 的蛇群，最多包含 $\left\lfloor \frac{L+1}{2} \right\rfloor \times \left\lceil \frac{L+1}{2} \right\rceil =$ 個 ○ 點，又

$$\left\lfloor \frac{L+1}{2} \right\rfloor \times \left\lceil \frac{L+1}{2} \right\rceil < \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor \times \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil \le \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor \times \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil < \frac{(m+1)(n+1)}{2}$$

故得證。

■

因此由引理四與引理五，知斷邊總和的個數為(m+1)且 $|P_1| = |P_2|$，則所使用的邊界方塊只能是(m+1)或 m 個。(m+1)顯然不合，因為這表示 P_1 是由一條或數條圍成圈的蛇所構成，利用類似引理三的推論，可知不可能包圍 S 中一半的點。

若是 m 個邊界方塊，則其中必包含一條頭尾不相接的蛇，且共有一條，否則由引理三知不可能包圍一半的點。這一條蛇必定是連接二較長的 S 外圍(也就是對半的情形)，否則最多只能包圍 $\left[\frac{m+1}{2} \right] \times \left[\frac{m+1}{2} \right]$ 個點，還是不到一半。故得證。

(五)、貓抓老鼠問題的數值最佳化

在之前研究過程中，我們討論了各種可能的情況，但當我們問題變成邊數不等及點數變多時，我們發現問題變成非常的複雜，即使有了將邊數的總和極小化及封閉迴路最大化的結論，題目依然不是非常的容易，也似乎並非一般討論或樹狀圖所能解答。我們在特例的探討中闡釋了即使是特殊問題，要證明一般性也會變的非常複雜。在我們嘗試了各種可能的方法及查閱了各式期刊及論文之後，我們卻發現貓抓老鼠問題其實就是一種圖論上的圖形切割問題，只不過貓抓老鼠問題是一個平面圖的圖形切割問題。

所謂的圖形切割問題，就是給定一個 n 個頂點、e 個邊的圖形，在把頂點分成一半一半的情況下，斷掉的邊最少。圖形切割問題是一個 NP-complete 的問題，即目前無法找到在多項式時間內解答的演算法。但我們的問題是平面圖的圖形切割問題，是否還是 NP-complete 呢？一篇 2002 年的論文告訴我們，目前這個問題還無解 [2]，但一些學者猜測，它應該是 NP-complete。

由於這個問題的複雜度，我們決定同時探討數值逼近法來尋求逼近解。所謂一個好的逼近解，就是能在多項式時間內，找到一個近似最佳的逼近值，在我們尋求老師的協助後，老師指導了我們一種啟發式隨機搜索演算法叫平均場退火法。

平均場退火法是一種求最佳化的方法，它能夠輕易的避開區域極值的問題，也是一種多項式時間的演算法，它結合了物理、統計力學、資訊理論的各種概念，所產生的一種最佳化理論。平均場理論的困難在於如何將所要求的問題建立數學模型，再經過一系列的數學推導，來求得所要的式子，並不同於一般已知函數的求極值。如同用微分求極小值一般，必須先有函數，再令一次微分等於零，來求極值。只不過平均場理論的函數必須自己推導，並不同於一般已知函數求極值。所以在做最佳化過程之中，我們必須先造一個函數，使得若函數值越小，則對應解越好，如此我們就可以把最佳化的問題轉換成求極小值問題，再配合解極小值，我們就可以把問題解決。

現在我們先來定義貓抓老鼠問題的數學模型。

1、定義：貓抓老鼠問題的數學定義

給定一個 n 個頂點，m 個邊的平面圖貓抓老鼠問題 V，若第 i 個頂點有 d_i 個邊，在 V 上找頂點所成集合 P_1, P_2，使得 $|P_1| = k, |P_2| = n - k$，其中 $P_1 \cap P_2 = \phi, P_1 \cup P_2 = V$，如何找集合 P_1, P_2，使得關閉通道最少。

2、建立數學模型：

在我們嘗試將貓抓老鼠問題建立數學模型時，我們發現其實貓抓老鼠問題的每個房間只有兩種狀態，不是貓就是老鼠。所以我們可以用

$s_i = \begin{cases} 1, 若第\ i 個房間為貓 \\ -1, 若第\ i 個房間為老鼠 \end{cases}$ 當成第 i 個房間的狀態。現在我們要找一個

$s = [s_1 \ldots s_n]$ 的函數 $H(s)$，使得若函數值越小，則對應解越好，如此我們就可以把最佳化的問題轉換成求極小值問題。

我們的研究不難發現若兩個房間 s_i, s_j 都同時屬於貓或老鼠，則 $s_i s_j$ 會等於+1，

即 $s_i s_j = \begin{cases} 1, 若房間\ i 和\ j 都為貓或老鼠 \\ -1, 其它 \end{cases}$。所以若我們定義一符號 J_{ij}，為第 i 個房間

和第 j 個房間相連的狀態，即 $J_{ij} = \begin{cases} 1, 若房間\ i 和\ j 相連 \\ 0, 其它 \end{cases}$。則我們知道 $J_{ij} s_i s_j$ 等於+1

若兩個房間 s_i, s_j 都相連且同時屬於貓或老鼠，即

$$J_{ij} s_i s_j = \begin{cases} 1, 若房間\ i 和\ j 相連,且同時為貓或老鼠 \\ 0, 若房間\ i 和\ j 未相連 \\ -1, 若房間\ i 和\ j 相連,且不同時為貓或老鼠 \end{cases}。$$

所以我們若令 $H(s) = \sum_{i \neq j} J_{ij} s_i s_j$，則我們知道若 $H(s)$ 越大，則 $J_{ij} s_i s_j$ =-1 越少，即兩個房間 s_i, s_j 都相連且一個屬於貓另一個屬於老鼠的情況越少，即關閉通道越少。可是我們希望求的是極小值，所以我們令 $H(s) = -\sum_{i \neq j}^{N} J_{ij} s_i s_j$。在此我們已經找到一個函數使得函數值越小，則對應解越好。

對應於我們的問題，我們不只希望關閉通道越少，還希望限制在 k 隻老鼠和 n-k 隻貓，即貓和老鼠的差為 n-2k，即 $\sum_{i}^{N} s_i = (N-2k)$，所以我們若希望 $\sum_{i}^{N} s_i$ 越接近 $(N-2k)$，就要求 $\left| \sum_{i}^{N} s_i - (N-2k) \right|$ 的極小值，但為了方便計算，我們換成解

$\left\{ \sum_{i}^{N} s_i - (N-2k) \right\}^2$ 的極小值。所以我們重新將貓抓老鼠問題的函數定義為

$$H(s) = -\sum_{i \neq j}^{N} J_{ij} s_i s_j + \mu \{ \sum_{i}^{N} s_i - (N-2k) \}^2$$

其中 $s_i = \begin{cases} 1, 若房間\ i 為貓 \\ -1, 若房間\ i 為老鼠 \end{cases}$ 代表頂點的狀態，$J_{ij} = \begin{cases} 1, 若房間\ i 和\ j 相連時 \\ 0, 其它 \end{cases}$ 代表頂點相連關係，μ 為一個可改變的參數，是一個正的常數，目的是控制極小解及

限制條件之間的比例關係。

由函數的分析，我們知道若$H(s)$越小，則解越好。其中第一項代表了關閉通道的最佳化，第二項代表了讓兩個集合符合我們要的大小。

3、**最佳化推導：**求得$H(s) = -\sum_{i\neq j}^{N} J_{ij} s_i s_j + \mu\{\sum_{i}^{N} s_i - (N-2k)\}^2$的最小值

(1)、**貪心法則**

我們現在先用貪心法則來求得$H(s)$的最小值，所謂貪心法則即在求解的過程中，每次都選取最小解，隨著$H(s)$的減小，最後必定會收斂到一區域極值。

現在我們先來看$H(S)$，由於

$$
\begin{aligned}
H(s) &= -\sum_{i\neq j}^{N} J_{ij} s_i s_j + \mu\{\sum_{i}^{N} s_i - (N-2k)\}^2 \\
&= -\sum_{i\neq j}^{N} J_{ij} s_i s_j + \mu\{\left(\sum_{i}^{N} s_i\right)^2 - 2(N-2k)\left(\sum_{i}^{N} s_i\right) + (N-2k)^2\} \\
&= -\sum_{i\neq j}^{N} J_{ij} s_i s_j + \mu\{\sum_{i}^{N} s_i^2 + \sum_{i\neq j}^{N} s_i s_j - 2(N-2k)\left(\sum_{i}^{N} s_i\right) + (N-2k)^2\} \\
&= -\sum_{i\neq j}^{N} \left(J_{ij} - \mu\right) s_i s_j + \mu N - 2\mu(N-2k)\left(\sum_{i}^{N} s_i\right) + \mu(N-2k)^2
\end{aligned}
$$

若我們令給定$s_i = +1$的函數$H(s)$為$H(s \| s_i = 1)$，所以

$$
\begin{aligned}
H(s \| s_i = +1) = &-\sum_{k\neq i}^{N} \sum_{j\neq i,k}^{N} \left(J_{kj} - \mu\right) s_k s_j - 2\sum_{j\neq i}^{N} \left(J_{ij} - \mu\right) s_j + \mu N \\
&- 2\mu(N-2k)\left(\sum_{k\neq i}^{N} s_k + 1\right) + \mu(N-2k)^2
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
H(s \| s_i = -1) = &-\sum_{k\neq i}^{N} \sum_{j\neq i,k}^{N} \left(J_{kj} - \mu\right) s_k s_j + 2\sum_{j\neq i}^{N} \left(J_{ij} - \mu\right) s_j + \mu N \\
&- 2\mu(N-2k)\left(\sum_{k\neq i}^{N} s_k - 1\right) + \mu(N-2k)^2
\end{aligned}
$$

所以$\Delta H(s \| s_i) \equiv H(s \| s_i = -1) - H(s \| s_i = 1) = 4\left(\sum_{j\neq i}^{N} \left(J_{ij} - \mu\right) s_j + \mu(N-2k)\right)$,

即 s_i 的能量差為 $\sum_{j\neq i}^{N}\left(J_{ij}-\mu\right)s_j+\mu(N-2k)$，即

$$s_i=\begin{cases}+1, 若\ \Delta H(s\parallel s_i)>0\\ -1, 若\ \Delta H(s\parallel s_i)<0\end{cases}$$

以符號函數代替，所以

$$s_i=\mathrm{sgn}(\Delta H(s\parallel s_i))$$

演算法：

1. 初始一個限制值 θ
3. 隨機產生一組 s 值
4. for i=1 to n

   $s_i=\mathrm{sgn}(\Delta H(s\parallel s_i))$

5. 若 $\sum_i\left|\Delta H(s\parallel s_i)\right|<\theta$，則停止。否則回到步驟 3

(2)、**平均場退火法**

由於貪心法則會有區域極值的問題，所以我們現在以平均場退火法來改進貪心法則。在貪心法則中，我們限制了 $H(s\parallel s_i=-1)\geq H(s\parallel s_i=1)$，則選擇 $s_i=1$，反之則選擇 $s_i=-1$。然而硬性的限制，使我們陷入了區域極值。平均場退火法以機率的角度來解極值，能夠順利的避免區域極值。這個方法假設了 $s_i=1$ 出現的機率會正比 $\exp(-\beta H(s\parallel s_i=1))$，而 $s_i=-1$ 出現的機率會正比 $\exp(-\beta H(s\parallel s_i=-1))$，即

$$s_i=\begin{cases}+1\ 的機率正比於\ \exp(-\beta H(s\parallel s_i=+1).\\ -1\ 的機率正比於\ \exp(-\beta H(s\parallel s_i=-1).\end{cases}$$

然而為了使機率相加等於 1，所以令

$$\begin{aligned}p(s_i=+1)&=\frac{\exp(-\beta H(s\parallel s_i=+1))}{\exp(-\beta H(s\parallel s_i=-1))+\exp(-\beta H(s\parallel s_i=+1))}\\&=\frac{1}{1+\exp\left[-\beta\left(H(s\parallel s_i=-1)-H(s\parallel s_i=+1)\right)\right]}\\&=\frac{1}{1+\exp\left[-\beta\Delta H(s\parallel s_i)\right]}\end{aligned}$$

而

$$
\begin{aligned}
p(s_i=-1) &= \frac{\exp(-\beta H(s \| s_i=-1))}{\exp(-\beta H(s \| s_i=-1))+\exp(-\beta H(s \| s_i=+1))} \\
&= 1-p(s_i=+1) \\
&= \frac{\exp\left[-\beta \Delta H(s \| s_i)\right]}{1+\exp\left[-\beta \Delta H(s \| s_i)\right]}
\end{aligned}
$$

不硬性的限制 s_i 的值，取而代之以 s_i 的期望值來代替 s_i，即

$$
\begin{aligned}
s_i \equiv E(s_i) &= p(s_i=+1)\times(+1)+p(s_i=-1)\times(-1) \\
&= \frac{1}{1+\exp\left[-\beta \Delta H(s \| s_i)\right]}-\frac{\exp\left[-\beta \Delta H(s \| s_i)\right]}{1+\exp\left[-\beta \Delta H(s \| s_i)\right]} \\
&= \frac{\exp\left[\frac{\beta}{2}\Delta H(s \| s_i)\right]-\exp\left[-\frac{\beta}{2}\Delta H(s \| s_i)\right]}{\exp\left[\frac{\beta}{2}\Delta H(s \| s_i)\right]+\exp\left[-\frac{\beta}{2}\Delta H(s \| s_i)\right]} \\
&= \tanh\left(\frac{\beta}{2}\Delta H(s \| s_i)\right)
\end{aligned}
$$

由於 $\Delta H(s \| s_i)=4\left(\sum_{j\neq i}^{N}\left(J_{ij}-\mu\right)s_j+\mu(N-2k)\right)$，所以

$$
s_i=\tanh\left\{2\beta\left(\sum_{j\neq i}^{N}\left(J_{ij}-\mu\right)m_j+\mu(N-2k)\right)\right\}
$$

演算法：

1. 初始一個限制值 θ， β， 及迭代次數 l

6. 隨機產生近似 0 的 m_i 值

7. for i=1 to l

$$
m_i=\tanh\left\{\beta\left(\sum_{j\neq i}^{N}\left(J_{ij}-\mu\right)m_j+\mu(N-2k)\right)\right\}
$$

8. 若 $\sum_i \frac{m_i^2}{N}>\theta$，則停止。否則增加 β 並回到步驟 3

伍、研究結果

在研究過程中，我們已經展示了用我們的理論來解貓抓老鼠遊戲。現在我們要以組合最佳化的平均場理論來解決範例一的問題(圖 6)，以下是我們數值最佳化所得到的結果，其中以紅點為老鼠、藍點為貓，邊上的數字代表關閉的通道數。我們的程式以 matlab6.5 及 Visual C++ 6.0 來完成，我們以一些例子展示我們所得到的結果。

例一：

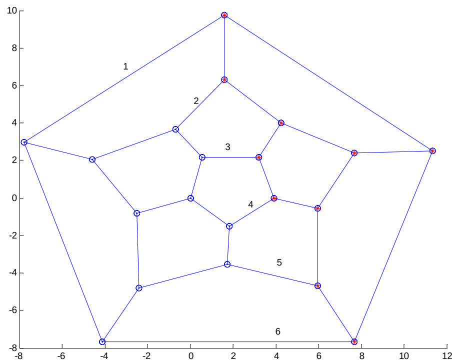


圖 13：20 個點的相等通道貓抓老鼠遊戲

表格 4：最佳逼近解

頂點	邊	選取點數	斷邊總和
20	30	10	6

例二：6x6 格子點

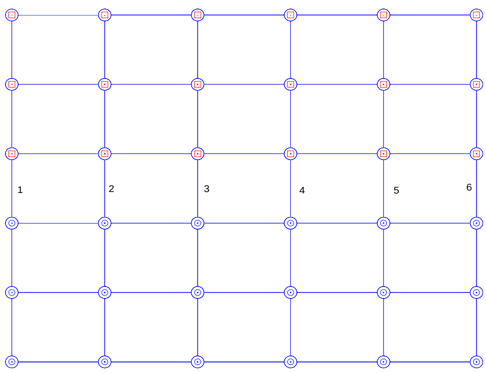


圖 14：36 個點的不等通道貓抓老鼠遊戲

表格 5：最佳逼近解

頂點	邊	選取點數	斷邊總和
36	60	18	6

例三：10x10 格子點

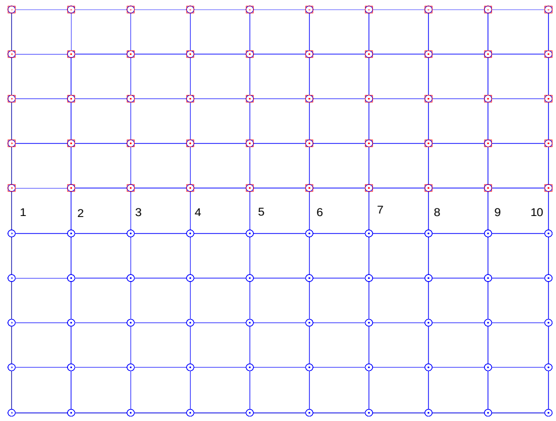


圖 15：100 個點的不等通道貓抓老鼠遊戲

表格 6：最佳逼近解

頂點	邊	選取點數	斷邊總和
100	180	50	10

例四：隨機產生的平面圖

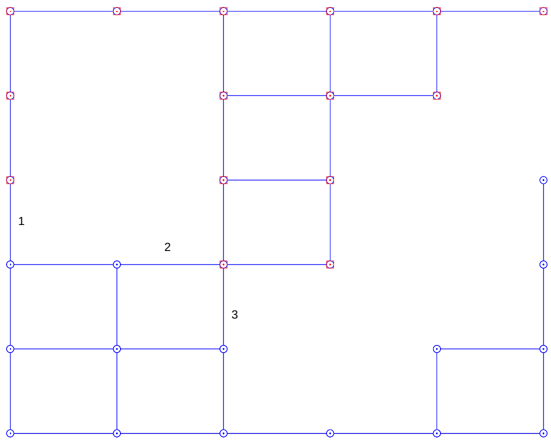


圖 16：亂數產生的 30 個點不等通道貓抓老鼠遊戲

表格 7：最佳逼近解

頂點	邊	選取點數	斷邊總和
30	27	15	3

例五：隨機產生的平面圖

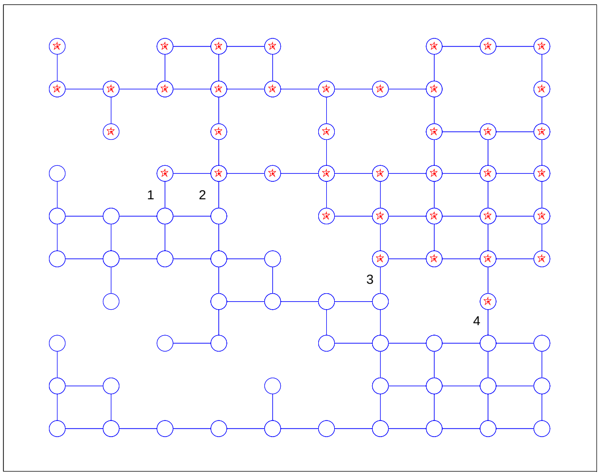


圖 17：亂數產生的 80 個點不等通道貓抓老鼠遊戲

表格 8：最佳逼近解

頂點	邊	選取點數	斷邊總和
80	108	40	4

例六：三度空間 Bucky 球

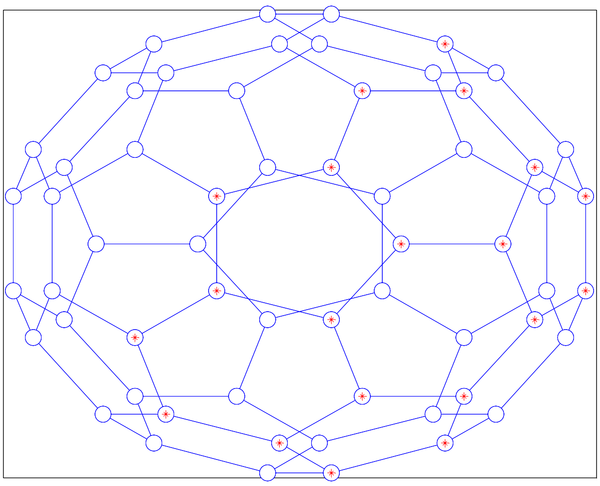


圖 18：60 個點三度空間 Bucky 球貓抓老鼠遊戲

表格 9：最佳逼近解

頂點	邊	選取點數	斷邊總和
60	90	30	10

陸、討論

當我們第一次接觸到貓抓老鼠問題時，我們的直覺便是不知從何下手，除了其龐大的解空間外，這個問題的困難在於即使給定了固定的頂點數、邊數、每個頂點連接的邊數及封閉區域數，仍然有數種不一樣的圖形，而且具有不同的斷邊數(如圖 19)，

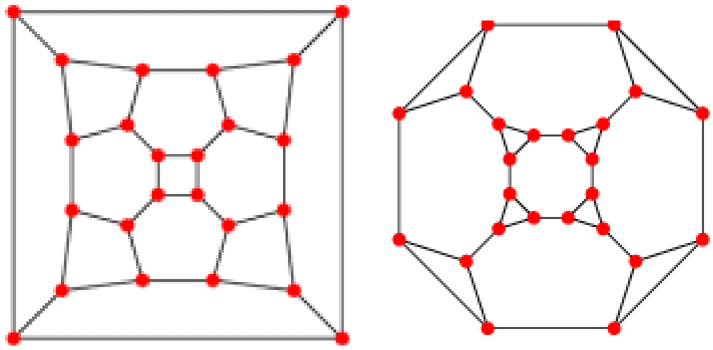


圖 19：24 個頂點，36 個邊，13 個封閉區域，且每個頂點皆為 3 個邊的不同圖形，其中左圖關閉最少通道為 6、右圖關閉最少通道為 4。

所以我們絕對無法只用頂點及邊數兩參數，就要求得最少關閉通道，因為最少關閉通道數會和圖形有關，並無法由頂點及邊數唯一決定。然而我們仍然找到了一些不變的性質，即最少關閉通道數只和選取集合的頂點連接的邊數及包含的封閉區域數及分割數有關。

在我們經歷了數次的研究及討論後，我們發現了幾個在最佳化過程中，所應該有的結論。之後我們將我們的結論應用在幾個較簡易問題上，並試圖將問題一般化。但當我們嘗試擴展問題時，我們發現複雜的解空間，讓我們依然不容易下手，我們在特例探討上，解釋了即使是單純且限制了許多條件的問題，要證明一般性也不是這樣容易，所以我們開始著手研究問題的複雜性。在我們查閱了各式期刊及論文，我們發現其實貓抓老鼠問題是一種平面圖的圖形切割問題，然而圖形切割問題是一個 NP-complete 問題，即無法找到多項式時間的演算法來解決問題。在我們尋找了許多書籍來了解何為 NP-complete 問題後，我們開始嘗試尋求最佳近似解。但之後我們有碰到了一個大難題，即圖形切割問題在平面圖上是否還是 NP-complete 問題呢?很幸運的，我們上網找到了一篇探討圖形切割問題的論文，它告訴了我們，這個問題目前還無解[7]。

我們的文章總共討論了 2 個大方向來探討貓抓老鼠問題，第一個方向以圖形的角度分析最佳化所需要的結果，第二個方向以組合最佳化的平均場理論尋求較複雜問題的近似解。配合著理論證明及數值逼近，我們更完整的分析了貓抓老鼠問題。

柒、結論

本文首先以圖形的觀點來分析貓抓老鼠問題，並且在邊數不等中，求出連通圖所關閉通道的下界為 $\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(r-1)$，即最佳化必須同時將邊數的總和極小化及封閉區域最大化。而不連通圖所關閉通道的下界為 $\min_{E_1}\left(\sum_{d_i \in E_1} d_i - 2k - 2(r-w)\right)$，即最佳化必須同時將邊數的總和極小化及封閉區域減分割數最大化。其中當每個頂點的邊數相等時，連通圖最佳化的情況為 $k(d-2)-2(\max_{E_1}(r)-1)$，不連通圖最佳化的情況為 $k(d-2)-2(r-w)$。而在特例探討中，我們得到了 $m \times n$ 的格子點，其中 $m \le n$ 且 n 為奇數，則最小關閉通道為 $m+1$。

但由於當解空間變得較大且邊數不等時，即使有不錯的結果，問題也會變的非常的複雜並非能輕易的求出，所以之後我們以組合最佳化的平均場理論，求得最佳化的迭代式

$$m_i = \tanh\left\{\beta\left(\sum_{j \ne i}^{N}\left(J_{ij}-\mu\right)m_j + \mu(N-2k)\right)\right\},$$

利用我們導出的最佳化的迭代式，我們有效的解決了解空間較大且邊數不等的貓抓老鼠問題。我們的迭代式能夠輕易的推廣到不限維度的任意圖形，我們在結果的例題 6 展示了三度空間的巴克球，但礙於篇幅，我們並不予以討論。

捌、應用與展望

現在我們就應用層面來作探討。最近聽到一個駭人聽聞的消息，即和平醫院集體感染 SARS，而政府希望能將 SARS 病患隔離在和平醫院。然而和平醫院並非所有病患皆感染 SARS 且 SARS 是接觸傳染。若兩個房間互通，將大大的增加了感染的機率。我們的問題產生了，如果我們要安排 SARS 病患及非 SARS 病患的房間，我們要如何安排，才能關閉最少的通道呢。這個問題就像我們的貓抓老鼠問題一樣，若能關閉最少通道，將節省很多不必要的成本。我們問題的應用層面很廣，舉凡兩個互斥的集合必須關閉最少連接，都是我們所能應用的範疇。

我們對未來的展望就是希望能將問題推廣到三個不同集合以上，且希望能同時探討關閉最多通道的問題。如美伊戰爭時，若能以固定數個區域找到關閉最多通道，我們就能以有限的兵力鎮守最多區域。

玖、參考資料及其他

1. 楊維哲、蔡聰明、吳隆盛，高級中學數學(一)，三民書局，2002
2. 余文卿、吳志揚，高級中學幾何學下，龍騰文化事業公司，2002
3. 余文卿、吳志揚，升大學幾何學透視，龍騰文化事業公司，2001
4. 張子浩，整合離散數學，文笙書局，1996
5. 焦李成，神經網路系統理論，儒林出版社，1991
6. Jiann-Ming Wu, Kuang-Chih Huang. " Neural Optimizations by Advanced Mean Field
7. Annealing, " Master's Thesie, National Dong Hwa Univisity, 2002.
8. Marek Karpinski. " Approximability of the Minimum Bisection Problem: An Algorithmic Challenge, " to appear in Proc. 27th MFCS (2002), LNCS, Springer, 2002.
9. Douglas B.West. *Introduction to Graph Theory*, Prentice-Hall, 2nd Edition.

評語

優點：與其作品比較，除了反映出學生的用心專注及老師的關鍵指導，其取材、步驟、方法等都反映出優秀的數學品味。