中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯

高中組

數學科

科別：數學科

組別：高中組

作品名稱：正多邊形的幻影

關鍵詞：<u>正多邊形</u>

編號：040405

學校名稱：

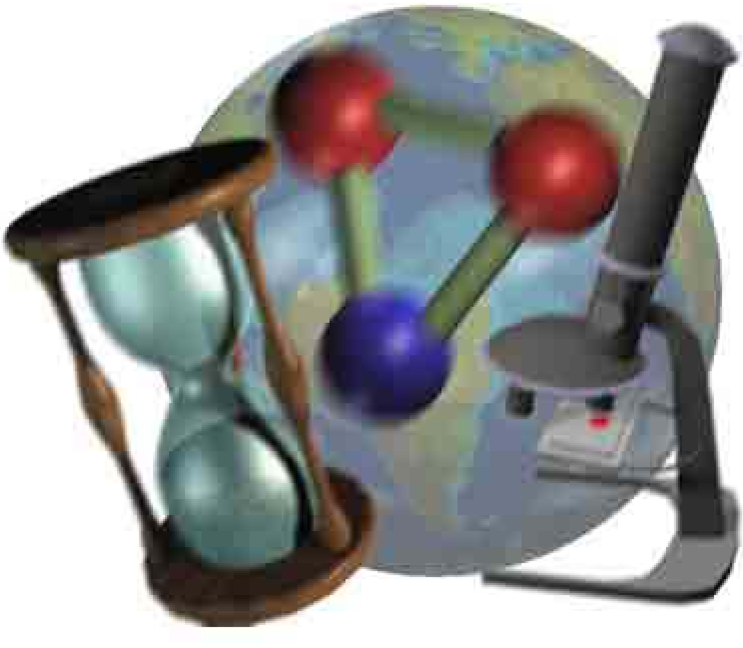
國立台南女子高級中學

作者姓名：

方思云、王鶴蕙、林怡妏

指導老師：

黃添益



一、研究動機：

對多邊形每一邊長作相同的分割比，連接這些分割點，或將原多邊形的頂點與分割點相連，亦可圍成一多邊形，此多邊形與原多邊形是否相似？這是值得研究的一個問題。我們發現將一多邊形作 m：n 之分割，除了少數情形與原多邊形相似外，大部分的情形都無法與原多邊形相似。只有正多邊形的情形一定可以得到與原多邊形相似的多邊形。除此之外，我們對正多邊形之分割點與原正多邊形頂點所圍出來的正多邊形頂點 A'、B'、C'、$D'\cdots$ 的軌跡也將有所探討。

我們把連接分割點所得的正多邊形稱為第一型態正多邊形，把原正多邊形的頂點與次一邊上的分割點相連，所圍出來的正多邊形稱為第二型態正多邊形，把正多邊形的頂點與再次一邊上的分割點相連，所為出來的正多邊形稱為第三型態正多邊形。接下來的討論分為四部份。A 部分我們要討論，第一型態的正多邊形，B 部分我們要討論第二型態的正多邊形，C 部分我們要討論第二型態正多邊形頂點的軌跡，D 部分我們要討論第三型態正多邊形的軌跡，而最後 E 部分我們要對此問題作一個結論及討論。

二、研究方法及討論：

A：第一型態的多邊形

1. 三角形：

對任意三角形，每一邊長作相同的分割比$m:n$，而$m+n=1$

設$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，分割點D、E、F連成一ΔDEF。

$$\because \begin{cases} \overline{DF}^2=m^2+n^2b^2-2mnb\cos A \\ \overline{DE}^2=n^2+m^2a^2-2mna\cos B \\ \overline{EF}^2=n^2a^2+m^2b^2-2mnab\cos C \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{BC}^2=1^2+b^2-2b\cos A=a^2 \\ \overline{AC}^2=1^2+a^2-2a\cos B=b^2 \\ \overline{AB}^2=a^2+b^2-2ab\cos C=1^2 \end{cases}$$

$$\therefore \overline{DF}^2:\overline{DE}^2:\overline{EF}^2$$

$$=\left[m^2+n^2b^2-2mnb\cdot\frac{1+b^2-a^2}{2b}\right]:\left[n^2+m^2a^2-2mna\cdot\frac{1+a^2-b^2}{2a}\right]:\left[n^2a^2+m^2b^2-2mnab\cdot\frac{a^2+b^2-1}{2ab}\right]$$

$$=\left[m^2+n^2b^2-mn\left(1+b^2-a^2\right)\right]:\left[n^2+m^2a^2-mn\left(1+a^2-b^2\right)\right]:\left[n^2a^2+m^2b^2-mn\left(a^2+b^2-1\right)\right]$$

(1)若ΔABC是正Δ，則$a=b=1$

$$\overline{DF}^2:\overline{DE}^2:\overline{EF}^2=\left(m^2+n^2-mn\right):\left(m^2+n^2-mn\right):\left(m^2+n^2-mn\right)$$

$$=1:1:1$$

$\therefore \Delta DEF$ 也是正Δ

$\therefore \Delta DEF \sim \Delta CAB$

(2) 若ΔABC不是正Δ，但$m=n=\dfrac{1}{2}$

$$則\ \overline{DF}^2:\overline{DE}^2:\overline{EF}^2=\frac{a^2}{4}:\frac{b^2}{4}:\frac{1}{4}=a^2:b^2:1=\overline{BC}^2:\overline{AC}^2:\overline{AB}^2$$

即 $\overline{DF}:\overline{DE}:\overline{EF}=\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}$

$\therefore \Delta DEF \sim \Delta CAB$

就正Δ而言，

$$\frac{\Delta DEF\text{面積}}{\Delta ABC\text{面積}}=\frac{\sqrt{S'\left(S'-\sqrt{m^2+n^2-mn}\right)\left(S'-\sqrt{m^2+n^2-mn}\right)\left(S'-\sqrt{m^2+n^2-mn}\right)}}{\sqrt{S\left(S-1\right)\left(S-1\right)\left(S-1\right)}}$$

其中 $S=\dfrac{3}{2},S'=\dfrac{3}{2}\sqrt{m^2+n^2-mn}$

$$=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}\left(\sqrt{m^2+n^2-mn}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2+n^2-mn}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2+n^2-mn}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2+n^2-mn}\right)}}{\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}$$

$$=m^2+n^2-mn$$

$$=1-3mn$$

$$=1-3m\left(1-m\right)$$

$$=3m^2-3m+1$$

$$=3\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

$\therefore$ 當 $m=\dfrac{1}{2}=n$ 時，ΔDEF 面積為最小　$\therefore\left(\dfrac{\Delta DEF}{\Delta ABC}\right)_{\min}=\dfrac{1}{4}$

2. 四邊形：

對任意四邊形的邊長作相同的分割比 $m:n$，而 $m+n=1$

令 $\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CD}=b$，$\overline{AD}=c$，分割點 E、F、G、H 連成一四邊形 $EFGH$

$$\begin{cases}\overline{EF}^2=n^2+m^2a^2-2mna\cos B\\ \overline{FG}^2=n^2a^2+m^2b^2-2mnab\cos C\\ \overline{GH}^2=n^2a^2+m^2c^2-2mnbc\cos D\\ \overline{EH}^2=m^2+n^2c^2-2mnc\cos A\end{cases}$$

$$\begin{cases}\overline{BD}^2 = a^2+b^2-2ab\cos C \\ \overline{BD}^2 = 1^2+c^2-2c\cos A \\ \overline{AC}^2 = 1^2+a^2-2a\cos B \\ \overline{AC}^2 = b^2+c^2-2bc\cos D\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\overline{EF}^2 = n^2+m^2a^2-mn\left(1+a^2-\overline{AC}^2\right) \\ \overline{FG}^2 = n^2a^2+m^2b^2-mn\left(a^2+b^2-\overline{BD}^2\right) \\ \overline{GH}^2 = n^2b^2+m^2c^2-mn\left(b^2+c^2-\overline{AC}^2\right) \\ \overline{EH}^2 = m^2+n^2c^2-mn\left(1+c^2-\overline{BD}^2\right)\end{cases}$$

(1)若 $ABCD$ 不是正方形，但 $m=n=\frac{1}{2}$

則 $\overline{EF}^2=\frac{1}{4}\overline{AC}^2$， $\overline{FG}^2=\frac{1}{4}\overline{BD}^2$， $\overline{GH}^2=\frac{1}{4}\overline{AC}^2$， $\overline{EH}^2=\frac{1}{4}\overline{BD}^2$

四邊形 $EFGH$ 為平行四邊形，與原四邊形 $ABCD$ 不會相似。

(2)若 $ABCD$ 是正方形，即 $a=b=c=1$，儘管 $m\neq n$ 所分割出來的四邊形 $EFGH$ 會與原四邊形 $ABCD$ 相似，這可以由下面的算式看出來。

$$\begin{cases}\overline{EF}^2 = n^2+m^2-mn\left(2-\overline{AC}^2\right)=\left(n-m\right)^2+mn\overline{AC}^2 \\ \overline{FG}^2 = n^2+m^2-mn\left(2-\overline{BD}^2\right)=\left(n-m\right)^2+mn\overline{BD}^2 \\ \overline{GH}^2 = n^2+m^2-mn\left(2-\overline{AC}^2\right)=\left(n-m\right)^2+mn\overline{AC}^2 \\ \overline{EH}^2 = n^2+m^2-mn\left(2-\overline{BD}^2\right)=\left(n-m\right)^2+mn\overline{BD}^2\end{cases}$$

$\because ABCD$ 是正方形 $\therefore \overline{AC}=\overline{BD}$

因此， $\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{EH}$ $\quad \because \Delta BEF\cong\Delta AHE$

$\angle 1=\angle 4, \angle 3=\angle 2$

$\because \angle 1+\angle 3=90^\circ \quad \therefore \angle 1+\angle 2=90^\circ \quad \therefore \angle FEH=90^\circ$

$\therefore$ 四邊形 $EFGH$ 為正方形，與原四邊形 $ABCD$ 相似

$$\frac{\text{四邊形}EFGH\text{面積}}{\text{四邊形}ABCD\text{面積}}=\frac{m^2+n^2}{1}=m^2+\left(1-m\right)^2=2m^2-2m+1=2\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$$

$\therefore$ 當 $m=n=\dfrac{1}{2}$ 時，$\left(\dfrac{\text{四邊形}EFGH\text{面積}}{\text{四邊形}ABCD\text{面積}}\right)_{\min}=\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{4}$

3. 正五邊形：

$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=108^\circ$

$\Delta APT,\Delta BQP,\Delta CRQ,\Delta DSR,\Delta ETS$ 皆相等

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 1+\angle 3+\angle A=180^\circ$，$\angle 2+\angle 3+\angle TPQ=180^\circ$

$\angle A=\angle TPQ=108^\circ$，同理 $\angle B=\angle PQR=108^\circ$，$\cdots$

$\therefore$ 五邊形 $PQRST$ 為正五邊形，與五邊形 $ABCDE$ 相似

$$a\Delta APT=\frac{1}{2}mn\sin 108^\circ$$
$$=\frac{1}{2}mn\cos 18^\circ$$

$\therefore$ 五邊形 $PQRST$ 面積 = 五邊形 $ABCDE$ $-5\times\Delta APT$ 面積

$$=5\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\cot 36^\circ-5\cdot\frac{1}{2}mn\cos 18^\circ$$

$$\frac{PQRST\text{面積}}{ABCDE\text{面積}}=1-\frac{2mn\cos 18^\circ}{\cot 36^\circ}$$
$$=1-2mn\cos 18^\circ\tan 36^\circ$$
$$=1-2mn\cos 18^\circ\cdot\frac{2\sin 18^\circ\cos 18^\circ}{\cos 36^\circ}$$
$$=1-\frac{4mn\cos^2 18^\circ\sin 18^\circ}{\cos 36^\circ}$$
$$=1-\frac{4mn\cdot\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}$$
$$=1-\frac{5-\sqrt{5}}{2}m(1-m)$$
$$=1+\frac{5-\sqrt{5}}{2}\left(m^2-m\right)$$
$$=1+\frac{5-\sqrt{5}}{2}\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]\geq 1-\frac{5-\sqrt{5}}{8}=\frac{3+\sqrt{5}}{8}>\frac{1}{2}$$

4. 正六邊形：

$ABCDEF$ 為正六邊形，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=\angle F=120^\circ$

$\Delta APU, \Delta BQP, \Delta CRQ, \Delta DSR, \Delta ETS, \Delta FUT$ 皆全等

$\therefore \overline{PU}=\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RS}=\overline{ST}=\overline{TU}$

$\angle 2=\angle 4$，$\angle 1+\angle 2+\angle PUT=\angle 1+\angle 4+120^\circ=180^\circ \quad \therefore \angle PUT=120^\circ$

同理，$\angle UPQ=120^\circ, \cdots\cdots$

$\therefore$ 正六邊形 $PQRSTU$ 與正六邊形 $ABCDEF$ 相似

$$a\Delta APU=\frac{1}{2}mn\sin 120^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}mn$$

正六邊形 $PQRSTU$ 面積 = 正六邊形 $ABCDEF$ $-6\times\Delta APU$ 面積

$$=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}-6\times\frac{\sqrt{3}}{4}mn$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}(1-mn)$$

$$\therefore \frac{\text{正六邊形PQRSTU面積}}{\text{正六邊形}ABCDEF\text{面積}}=1-mn$$

$$=1-m(1-m)$$

$$=m^2-m+1$$

$$=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$\therefore m=\frac{1}{2}\text{時，}\frac{\text{六邊形PQRSTU}}{\text{六邊形}ABCDEF}=\frac{3}{4}>\frac{3+\sqrt{5}}{8}$$

5.正 k 邊形

設 $A_1 A_2 \ldots A_k$ 為正 k 邊形

$$A_1 A_2 \ldots A_k \text{ 面積 } = k \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cot\frac{\pi}{k} = \frac{k}{4} \cdot \cot\frac{\pi}{k}$$

$$B_1 B_2 \ldots B_k \text{ 面積 } = \frac{k}{4} \cdot \cot\frac{\pi}{k} - k \cdot \frac{1}{2} mn \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{k}\right) = \frac{k}{4} \cdot \cot\frac{\pi}{k} - \frac{k}{2} mn \sin\frac{2\pi}{k}$$

$$\therefore \frac{B_1 B_2 \ldots B_k \text{面積}}{A_1 A_2 \ldots A_k} = 1 - \frac{\frac{k}{2} mn \sin\frac{2\pi}{k}}{\frac{k}{4} \cdot \cot\frac{\pi}{k}}$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{k}}{\cot\frac{\pi}{k}} mn = 1 - 2 \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{k}}{\cot\frac{\pi}{k}} m(1-m)$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{k}}{\cot\frac{\pi}{k}} \left(m^2 - m\right) = 1 + 2 \cdot \frac{\sin\frac{2\pi}{k}}{\cot\frac{\pi}{k}} \left(\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$\geq 1 - \frac{\sin\frac{2\pi}{k}}{2\cot\frac{\pi}{k}} = 1 - \frac{2\sin^2\frac{\pi}{k}\cos\frac{\pi}{k}}{2\cos\frac{\pi}{k}} = 1 - \sin^2\frac{\pi}{k} \to 1$$

結論：

1.正多邊形每邊作相同的分割比，所構成的多邊形也是正多邊形。

2.所有這些內接正多邊形在 $m:n = 1:1$ 時面積最小，且邊數增大，此內接多邊形的最小面積會增大，會越來越接近原正多邊形的面積。

B：第二型態正多邊形

1. 正三角形：

ΔABC 的每邊做相同的分割比 $m:n$，分割點為 D、E、F，連接 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$，

則 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 各交於 A'、B'、C'。

$\Delta ABD \cong \Delta BCE \cong \Delta CAF$

$\Delta AA'F \cong \Delta BB'D \cong \Delta CC'E \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = \angle 3$

$\therefore \Delta A'B'C'$ 為正三角形

當 $m = n = \dfrac{1}{2}$ 時，$\Delta A'B'C'$ 面積= 0 $\left(\because A', B', C'\text{重合}\right)$，面積最小。

當 $m > n$ 時，面積又變大。

當 $m \to 1$ 時，$\Delta A'B'C'$ 面積→ ΔABC 面積。

2. 正四邊形：

$\Delta AFD \cong \Delta BGA \cong \Delta CHB \cong \Delta DEC$

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$，$\angle 5 = \angle 6 = \angle 7 = \angle 8$

$\therefore \angle A' = \angle B' = \angle C' = \angle D'$

$\overline{FA'} = \overline{GB'}$，$\overline{DD'} = \overline{AA'}$

$\therefore \overline{A'B'} = \overline{A'D'} \Rightarrow A'B'C'D'$ 為正方形

當 $m \to 1$ 時，$A'B'C'D'$ 趨近於一個點（$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的交點）

此時，四邊形 $A'B'C'D'$ 面積 $= 0$ 最小。

我們也可以這樣來看：

令 $\angle BAG = \theta$，$\overline{A'B'} = n\cos\theta$

$\therefore$ 四邊形 $A'B'C'D'$ 面積 $= n^2\cos^2\theta = \dfrac{n^2}{\sec^2\theta} = \dfrac{n^2}{1+\tan^2\theta}$

$= \dfrac{n^2}{1+m^2}$ 四邊形$ABCD$面積

$= \dfrac{(1-m)^2}{1+m^2} \geq 0$

$\therefore$ 當 $m \to 1$ 時，四邊形 $A'B'C'D'$ 面積 $=0$ 最小。

3. 正五邊形：

$\Delta ABH \cong \Delta BCI \cong \Delta CDJ \cong \Delta DEF \cong \Delta EAG$

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5$， $\angle 6 = \angle 7 = \angle 8 = \angle 9 = \angle 10$

因此 $\angle A' = \angle B' = \angle C' = \angle D' = \angle E'$， $\therefore A'B'C'D'E'$ 為正五邊形

$\therefore$ 五邊形 $A'B'C'D'E'$ ＝五邊形 $ABCDE - 5\times\Delta ABH + 5\times\Delta AGA'$

$\because \Delta AGA' \sim \Delta EGA$

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GE}} = \frac{\overline{GA'}}{\overline{AG}}，\quad \frac{\overline{AA'}}{1} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2+2m\cos 72^\circ}} = \frac{\overline{GA'}}{m}$$

$$\therefore \overline{AA'} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2+2m\cos 72^\circ}}，\quad \overline{GA'} = \frac{m^2}{\sqrt{1+m^2+2m\cos 72^\circ}}$$

$$\Delta AGA' = \frac{1}{2}\overline{AA'}\cdot\overline{GA'}\cdot\sin 108^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{m^3}{1+m^2+2m\cos 72^\circ}\cdot\sin 108^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{m^3}{1+m^2+2m\cos 72^\circ}\cdot\sin 72^\circ$$

$$\Delta ABH = \frac{1}{2}\cdot m\cdot 1\cdot\sin 108^\circ$$

$$= \frac{1}{2}\cdot m\cdot\sin 72^\circ$$

$$\therefore \text{五邊形 } ABCDE = 5\times\frac{1}{2}\times 1\times\left(\frac{1}{2}\tan 54^\circ\right)$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\cot 36^{\circ}$$
$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{\cos 36^{\circ}}{\sin 36^{\circ}}$$
$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{2\sin 36^{\circ}\cos 36^{\circ}}{2\sin^{2}36^{\circ}}$$
$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{\sin 72^{\circ}}{2\sin^{2}36^{\circ}}$$

$\therefore$ 五邊形 $A'B'C'D'E'$ 面積

$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{\sin 72^{\circ}}{2\sin^{2}36^{\circ}}-\frac{5}{2}\cdot m\cdot\sin 72^{\circ}+\frac{5}{2}\cdot\frac{m^{3}\cdot\sin 72^{\circ}}{1+m^{2}+2m\cos 72^{\circ}}$$
$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{\sin 72^{\circ}}{2\sin^{2}36^{\circ}}\left(1-4m\cdot\sin^{2}36^{\circ}+\frac{4\cdot m^{3}\cdot\sin^{2}36^{\circ}}{1+m^{2}+2m\cos 72^{\circ}}\right)$$

令 $2\cos 72^{\circ}=a$ 即 $2\left(1-2\sin^{2}36^{\circ}\right)=a$

$\therefore 4\sin^{2}36^{\circ}=2-a$

$$\therefore f(m)=1+(a-2)m+\frac{(2-a)m^{3}}{1+am+m^{2}}$$
$$=\frac{1+am+m^{2}+(a-2)m(1+am+m^{2})+(2-a)m^{3}}{1+am+m^{2}}$$
$$=\frac{1+2(a-1)m+(a-1)^{2}m^{2}}{1+am+m^{2}}$$
$$=(a-1)^{2}+\frac{-(1-a^{2})(2-a)m+a(2-a)}{1+am+m^{2}}$$
$$=(a-1)^{2}+\frac{a(2-a)-(1+a)(1-a)(2-a)m}{1+am+m^{2}}$$

$\because 2-a=2-2\cos 72^{\circ}=2(1-\cos 72^{\circ})>0$

$1+a=1+2\cos 72^{\circ}>0$

$1-a=1-2\cos 72^{\circ}>1-2\cos 60^{\circ}=1-2\times\frac{1}{2}=0$

$\therefore$ 當 m 由 $0\rightarrow 1$ 時，$a(2-a)-(1+a)(1-a)(2-a)m$ 愈來愈小，而 $1+am+m^{2}$ 愈來愈大

$\therefore f(m)$就愈來愈小，當$m=1$時，$f(1)=(a-1)^2+\dfrac{(2-a)(a^2+a-1)}{2+a}=\dfrac{a^2}{2+a}$為最小，其中$a=2\cos 72^\circ$。

4. 正六邊形：

$\Delta ABH \cong \Delta BCI \cong \Delta CDJ \cong \Delta DEK \cong \Delta KFL \cong \Delta FAG$

$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=\angle 5=\angle 6$，$\angle 7=\angle 8=\angle 9=\angle 10=\angle 11=\angle 12$

$\therefore \angle A'=\angle B'=\angle C'=\angle D'=\angle E'=\angle F'$，$\therefore A'B'C'D'E'F'$為正六邊形

六邊形$A'B'C'D'E'F'$＝六邊形$ABCDEF-6\times\Delta ABH+6\times\Delta BHB'$

$\Delta BB'H \sim \Delta ABH$

$\therefore \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{BH}}{\overline{AH}}=\dfrac{\overline{B'H}}{\overline{BH}}$，$\dfrac{\overline{BB'}}{1}=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1+m}}=\dfrac{\overline{B'H}}{m}$

$\therefore \overline{BB'}=\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1+m}}$，$\overline{B'H}=\dfrac{m^2}{\sqrt{m^2+1+m}}$

$\Delta BHB'=\dfrac{1}{2}\overline{BB'}\cdot\overline{B'H}\cdot\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{m^3}{m^2+m+1}$

$\therefore$六邊形$A'B'C'D'E'F'$面積$=6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}-6\times\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot m\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{m^3}{m^2+m+1}$

$\dfrac{\text{六邊形}A'B'C'D'E'F'}{\text{六邊形}ABCDEF}=1-m+\dfrac{m^3}{m^2+m+1}=\dfrac{m^2+m+1-m-m^2-m^3+m^3}{m^2+m+1}=\dfrac{1}{m^2+m+1}=f(m)$

當m由$0\rightarrow 1$時，m愈大，m^2愈大，$f(m)$就愈小。

當$m=1$時，$f(m)=\dfrac{1}{3}$為最小值。

5 正 k 邊形

$A_1A_2A_3\cdots A_k$ 面積$=k\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{k}$

$\Delta A_1A_2P_2$ 面積$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot m\cdot\sin\frac{2\pi}{k}$

$\Delta A_1B_1P_1\sim\Delta A_1A_2P_2$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1A_2}}=\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{A_1P_2}}=\frac{\overline{B_1P_1}}{\overline{A_2P_2}}$$

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{1}=\frac{m}{\sqrt{1+m^2-2m\cos(\pi-\frac{2\pi}{k})}}=\frac{\overline{B_1P_1}}{m}\text{，}\quad\overline{A_1B_1}=\frac{m}{\sqrt{1+m^2+2m\cos\frac{2\pi}{k}}}$$

$$\overline{B_1P_1}=\frac{m^2}{\sqrt{1+m^2+2m\cos\frac{2\pi}{k}}}$$

$$\begin{aligned}\Delta A_1B_1P_1&=\frac{1}{2}\cdot\overline{A_1B_1}\cdot\overline{B_1P_1}\cdot\sin\frac{2\pi}{k}\\&=\frac{m^3}{2(1+m^2+2m\cos\frac{2\pi}{k})}\sin\frac{2\pi}{k}\end{aligned}$$

$\therefore B_1B_2\cdots B_k$ 面積$=A_1A_2\cdots A_n$ 面積-$k\cdot\Delta A_1A_2P_2$ 面積+$k\cdot\Delta A_1B_1P_1$ 面積

$$=\frac{k}{4}\cdot\cot\frac{\pi}{k}-\frac{km}{2}\sin\frac{2\pi}{k}+\frac{km^3}{2(1+m^2+2m\cos\frac{2\pi}{k})}\cdot\sin\frac{2\pi}{k}$$

$$\frac{B_1B_2\cdots B_k\text{面積}}{A_1A_2\cdots A_k\text{面積}}=1-2m\frac{\sin\frac{2\pi}{k}}{\cot\frac{\pi}{k}}+\frac{2m^3\sin\frac{2\pi}{k}}{(1+m^2+2m\cos\frac{2\pi}{k})\cot\frac{\pi}{k}}$$

$$=1-4m\sin^2\frac{\pi}{k}+\frac{4m^3\sin^2\frac{\pi}{k}}{1+m^2+2m\cos\frac{2\pi}{k}}$$

$$=1-2m(1-\cos\frac{2\pi}{k})+\frac{2m^3(1-\cos\frac{2\pi}{k})}{1+m^2+2m\cos\frac{2\pi}{k}}$$

$$=1-2m(1-a)+\frac{2m^3(1-a)}{1+m^2+2ma} \qquad （令 a＝\cos\frac{2\pi}{k}）$$

$$=1-2m(1-a)+2(1-a)m-4a(1-a)+\frac{(8a^2-2)(1-a)m+4a(1-a)}{1+m^2+2ma}$$

$$=(2a-1)^2+2(1-a)\cdot\frac{(4a^2-1)m+2}{1+2ma+m^2}=f(m)$$

當 m 從 $0\to 1$ 時， $f(m)$就越小

當 m＝1 時，最小值 $f(1)=(2a-1)^2+2(1-a)\cdot\frac{4a^2+1}{2+2a}$

$$=(2a-1)^2+\frac{(1-a)(4a^2+1)}{1+a}$$

$$=\frac{(2a-1)^2(1+a)+(1-a)(4a^2+1)}{1+a}$$

$$=\frac{4a^2-4a+2}{1+a}\to 1$$

（$\because a=\cos\frac{\pi}{k}$ 當 $k\to\infty$ 時，$a\to 1$）

結論：1.第二型態所圍出來的多邊形與原多邊形相似。

2.所圍出來的正多邊形，其最小面積隨邊數之增大而變大，其極限值趨近於原正多邊形面積，而正三角形及正方形的面積最小值＝0。

C：正多邊形頂點的軌跡

正多邊形分割比例變化時, 原多邊形頂點與次一邊上的分割點相連所圍出來正多邊形的頂點也隨之變化。我們現在要看看這些點的軌跡為何？

1. 正三角形：

$\overline{BC}$ 的參數式為：$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$\overline{AB}$ 的參數式為：$\begin{cases} x = 0 - t \\ y = \sqrt{3} - \sqrt{3}t \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$\therefore \overleftrightarrow{AD}$ ：$y - \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{1-2t}(x-0)$，即 $\sqrt{3}x + (2t-1)y = \sqrt{3}(2t-1)$

$\overleftrightarrow{CF}$ ：$y - 0 = \dfrac{\sqrt{3}(t-1)}{1+t}(x-1)$，即 $\sqrt{3}(t-1)x - (1+t)y = \sqrt{3}(t-1)$

設 $\overleftrightarrow{AD}$ 與 $\overleftrightarrow{CF}$ 的交點為 A'

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + (2t-1)y = \sqrt{3}(2t-1) \\ \sqrt{3}(t-1)x - (1+t)y = \sqrt{3}(t-1) \end{cases}$$

$$\therefore x = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{3}(2t-1) & 2t-1 \\ \sqrt{3}(t-1) & -(1+t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2t-1 \\ \sqrt{3}(t-1) & -(1+t) \end{vmatrix}} = \frac{\sqrt{3}[-(1+t)(2t-1)-(t-1)(2t-1)]}{\sqrt{3}[-(1+t)-(t-1)(2t-1)]} = \frac{2t^2-t}{t^2-t+1}$$

$$\therefore y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}(2t-1) \\ \sqrt{3}(t-1) & \sqrt{3}(t-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2t-1 \\ \sqrt{3}(t-1) & -(1+t) \end{vmatrix}} = \frac{3[t-1-2t^2+3t-1]}{\sqrt{3}[-(1+t)-(t-1)(2t-1)]} = \frac{\sqrt{3}(t^2-2t+1)}{t^2-t+1}$$

當 $t=0$ 時，$A'(0,\sqrt{3})$ 即 A 點

當 $t=1$ 時，$A'(1,\ 0)$ 即 C 點

當 $m=\dfrac{1}{2}$ 時，即 $t=\dfrac{1}{2}$ 時，$A'(0,\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ 也就是 ΔABC 的重心位置

由於對稱， $B^{'},C^{'}$ 也在 $(0,\dfrac{1}{\sqrt{3}})$

$A^{'}$ 的軌跡為何？

$$\begin{cases} x=\dfrac{2t^2-t}{t^2-t+1}=2+\dfrac{t-2}{t^2-t+1} \\ y=\sqrt{3}\cdot\dfrac{t^2-2t+1}{t^2-t+1}=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}t}{t^2-t+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=\dfrac{t-2}{t^2-t+1} & \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y-\sqrt{3}=-\dfrac{\sqrt{3}t}{t^2-t+1} & \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$(1)^2+(2)^2$ 得 $(x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2=\dfrac{t^2-4t+4+3t^2}{(t^2-t+1)^2}=\dfrac{4}{t^2-t+1}$

由(1) $\quad x-2=\dfrac{t-2}{t^2-t+1}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由(2) $\quad \dfrac{y-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{-t}{t^2-t+1}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)+(4)得 $x-2+\dfrac{y-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{-2}{t^2-t+1}$

$\therefore (x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2=-2(x-2)-\dfrac{2}{\sqrt{3}}(y-\sqrt{3})$

$\Rightarrow \left[(x-2)^2+2(x-2)+1\right]+\left[(y-\sqrt{3})^2+\dfrac{2}{\sqrt{3}}(y-\sqrt{3})+(\dfrac{1}{\sqrt{3}})^2\right]=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$

$\therefore (x-1)^2+(y-\dfrac{2\sqrt{3}}{3})^2=(\dfrac{2}{\sqrt{3}})^2$

$\therefore A^{'}$ 的軌跡為一圓的部分圖形，圓心在 $(1,\dfrac{2}{\sqrt{3}})$，半徑為 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，且此圓通過重心 $(0,\dfrac{1}{\sqrt{3}})$

2. 正方形：

$\overline{AB}$ 的參數式為： $\begin{cases} x=0-t \\ y=1-t \end{cases} \quad t\in[0,1]$

$\overline{BC}$ 的參數式為： $\begin{cases} x=-1+t \\ y=0-t \end{cases} \quad t\in[0,1]$

$\overleftrightarrow{DE}$ ： $y-0=\dfrac{t-1}{t+1}(x-1)$，即 $(t-1)x-(t+1)y=t-1$

$\overleftrightarrow{AF}$ ： $y-1=\dfrac{1+t}{1-t}(x-0)$，即 $(t+1)x+(t-1)y=t-1$

設 $\overleftrightarrow{DE}$ 與 $\overleftrightarrow{AF}$ 的交點為 A'

$$\begin{cases}(t-1)x-(t+1)y=t-1\\(t+1)x+(t-1)y=t-1\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} t-1 & -(t+1)\\ t-1 & (t-1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t-1 & -(t+1)\\ t+1 & (t-1)\end{vmatrix}}=\dfrac{t^2-t}{t^2+1}=1-\dfrac{t+1}{1+t^2}\\[2ex] y=\dfrac{\begin{vmatrix} t-1 & t-1\\ t+1 & (t-1)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t-1 & -(t+1)\\ t+1 & (t-1)\end{vmatrix}}=\dfrac{1-t}{t^2+1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x-1=-\dfrac{t+1}{1+t^2} & \cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\[1ex] y=\dfrac{1-t}{t^2+1} & \cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

當 $t=0$ 時， $A'(0,\ 1)$ 即 A 點

當 $t=1$ 時， $A'(0,\ 0)$ 即原點 O

當 $t=\dfrac{1}{2}$ 時， $A'(-\dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5})$

$(1)^2+(2)^2$ 得 $(x-1)^2+y^2=\dfrac{2}{(t^2+1)}$

$(2)-(1)$ 得 $y-(x-1)=\dfrac{2}{t^2+1}$

$$\therefore (x-1)^2 + y^2 = y-(x-1)$$

$$\left[(x-1)^2+(x-1)+\frac{1}{4}\right]+\left[y^2-y+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{2}$$

$$\left[(x-1)+\frac{1}{2}\right]^2+\left[y-\frac{1}{2}\right]^2=\frac{1}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$A^{'}$之軌跡為一圓的部份圖形.圓心在 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

同理可得 $B^{'},C^{'},D^{'}$ 的軌跡方程式

$B^{'}$： $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

$C^{'}$： $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

$D^{'}$： $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

都通過 $(0,0)$ $\therefore (0,0)$ 為 $A^{'},B^{'},C^{'},D^{'}$ 之軌跡的交點.

3 : 正五邊形

$$\sin 18^0=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\cos 18^0=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\sin 36^0=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\cos 36^0=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

設 $\sin 72^0=\cos 18^0=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=\gamma$

$$\sin 72^0+\sin 36^0=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\alpha$$

$$\frac{1}{2}+\cos 72^0=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\cos 36^0=\beta$$

$\overline{AB}$ 的參數式為 $\begin{cases} x = 0 - \beta t \\ y = \alpha + (\gamma - \alpha) t \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$\overline{BC}$ 的參數式為 $\begin{cases} x = -\beta + \left(\beta - \dfrac{1}{2}\right) t \\ y = \gamma - \gamma t \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$\overleftrightarrow{AG}$ ： $y - \alpha = \dfrac{\alpha - (\gamma - \gamma t)}{\beta - \left(\beta - \dfrac{1}{2}\right) t}(x - 0)$

即 $(\alpha - \gamma + \gamma t)x - \left[\beta + \left(\dfrac{1}{2} - \beta\right) t\right] y = -\alpha\beta + \alpha\left(\beta - \dfrac{1}{2}\right) t$

$\overleftrightarrow{EF}$ ： $y - \gamma = \dfrac{\gamma - \alpha + (\alpha - \gamma) t}{\beta + \beta t}(x - \beta)$

即 $[(\gamma - \alpha) + (\alpha - \gamma) t] x - (\beta + \beta t) y = \beta(\alpha - \gamma) t - \gamma(\beta + \beta t) + \beta(\gamma - \alpha)$

$\overleftrightarrow{AG}$ ： $[\alpha - \gamma(1 - t)] x - \left[\beta + \left(\dfrac{1}{2} - \beta\right) t\right] y = -\alpha\beta(1 - t) - \dfrac{1}{2}\alpha t$

$\overleftrightarrow{EF}$ ： $(\gamma - \alpha)(1 - t) x - \beta(1 + t) y = -\alpha\beta(1 - t) - 2\beta\gamma t$

$$\therefore x = \frac{\begin{vmatrix} -\alpha\beta(1-t) - \dfrac{1}{2}\alpha t & -\left[\beta + \left(\dfrac{1}{2} - \beta\right) t\right] \\ -\alpha\beta(1-t) - 2\beta\gamma t & -\beta(1+t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha - \gamma(1-t) & -\left[\beta + \left(\dfrac{1}{2} - \beta\right) t\right] \\ (\gamma - \alpha)(1-t) & -\beta(1+t) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\alpha\beta^2(1-t) + \dfrac{1}{2}\alpha\beta t(1+t) - \alpha\beta^2(1-t) - \alpha\beta\left(\dfrac{1}{2} - \beta\right) t(1-t) - 2\beta^2\gamma t - 2\beta\gamma\left(\dfrac{1}{2} - \beta\right) t^2}{-\alpha\beta(1+t) + \beta\gamma(1 - t^2) + \beta(\gamma - \alpha)(1-t) + (\gamma - \alpha)\left(\dfrac{1}{2} - \beta\right) t}$$

$$= \frac{\left[2\beta^2(\gamma - \alpha) + \beta(\alpha - \gamma)\right] t^2 + 2\beta^2(\alpha - \gamma) t}{\left[\dfrac{1}{2}(\alpha - \gamma) - \alpha\beta\right] t^2 + \left[\alpha\beta + \dfrac{1}{2}(\gamma - \alpha) - 2\beta\gamma\right] t + 2\beta(\gamma - \alpha)}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\alpha-\gamma(1-t) & -\alpha\beta(1-t)-\frac{1}{2}\alpha t\\ (\gamma-\alpha)(1-t) & -\alpha\beta(1-t)-2\beta\gamma t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha-\gamma(1-t) & -\left[\beta+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)t\right]\\ (\gamma-\alpha)(1-t) & -\beta(1+t)\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-\alpha^2\beta(1-t)-2\alpha\beta\gamma t+\alpha\beta\gamma(1-t)^2+2\beta\gamma^2t(1-t)+\alpha\beta(\gamma-\alpha)(1-t)^2+\frac{1}{2}\alpha(\gamma-\alpha)t(1-t)}{-\alpha\beta(1+t)+\beta\gamma\left(1-t^2\right)+\beta(\gamma-\alpha)(1-t)+(\gamma-\alpha)\left(\frac{1}{2}-\beta\right)t}$$

$$=\frac{\left[2\alpha\beta\gamma+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-\gamma)-2\beta\gamma^2-\alpha^2\beta\right]t^2+\left[3\alpha^2\beta-6\alpha\beta\gamma+\frac{1}{2}\alpha(\gamma-\alpha)+2\beta\gamma^2\right]t+2\alpha\beta(\gamma-\alpha)}{\left[\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)-\alpha\beta\right]t^2+\left[\alpha\beta+\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)-2\beta\gamma\right]t+2\beta(\gamma-\alpha)}$$

當 $t=0$ 時 $A'(0,\alpha)$即A點

當 $t=1$ 時 $\begin{cases}x=\dfrac{-\beta(\gamma-\alpha)}{-2\alpha\beta}=\dfrac{\gamma-\alpha}{2\alpha}\\ y=\dfrac{-2\alpha\beta\gamma}{-2\alpha\beta}=\gamma\end{cases}$ $A'\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{2\alpha},\gamma\right)$ 即為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BE}$ 之

交點

把x寫成

$$x=\frac{dt^2+et}{at^2+bt+c}$$

其中 $a=\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)-\alpha\beta$

$b=\alpha\beta-\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)-2\beta\gamma$

$c=2\beta(\gamma-2)=-2\beta(\alpha-\gamma)$

$d=-\beta(\alpha-\gamma)(2\beta-1)$

$$e = 2\beta^2(\alpha - \gamma)$$

$$\alpha = \sin 72^0 + \sin 36^0 = 2\sin 54^0 \cos 18^0 = 2\cos 36^0 \sin 72^0 = 2\beta\gamma$$

$$\gamma = \sin 72^0 = 2\sin 36^0 \cos 36^0 = 2(\alpha - \gamma)\beta = 2\alpha\beta - \beta\gamma = 2\alpha\beta - \alpha$$

$$\therefore 2\alpha\beta = \alpha + \gamma$$

$$a = \frac{1}{2}(\alpha - \gamma) - \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = -\gamma = -\sin 72^0$$

$$b = \alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha - \gamma) - 2\beta\gamma$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) - \frac{1}{2}(\alpha - \gamma) - 2\beta\gamma$$

$$= \gamma - \alpha = -\sin 36^0 = -\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$c = -2\beta(\alpha - \gamma) = -2\cos 36^0 \sin 36^0 = -\sin 72^0 = -\gamma = a$$

$$d = -\beta(\alpha - \gamma)(2\beta - 1) = \frac{1}{2}c(2\beta - 1) = c\left(\beta - \frac{1}{2}\right) = -\sin 72^0\left[\cos 36^0 - \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = -\frac{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5})}}{16}$$

$$= -\frac{\sqrt{40 - 8\sqrt{5}}}{16} = -\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{8} = -\frac{1}{2}\sin 36^0 = \frac{b}{2}$$

$$e = 2\beta^2(\alpha - \gamma) = 2\beta(\alpha - \gamma)\beta = -c \cdot \cos 36^0 = \sin 72^0 \cos 36^0 = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

也就是： $a = -\sin 72^0 = -2\sin 36^0 \cos 36^0 = 2b\beta = -\gamma$

$$b = -\sin 36^0$$

$$c = -\sin 72^0 = -2\sin 36^0 \cos 36^0 = 2b\beta$$

$$d = -\frac{1}{2}\sin 36^0 = \frac{b}{2}$$

$$e = \sin 72^0 \cos 36^0 = 2\sin 36^0 \cos^2 36^0 = -2b\beta^2$$

同理：把 y 寫成 $y=\dfrac{ft^2+gt+h}{at^2+bt+c}$

其中

$$
\begin{aligned}
f &= 2\alpha\beta\gamma+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-\gamma)-2\beta\gamma^2-\alpha^2\beta \\
&= 2\beta\gamma(\alpha-\gamma)+\alpha\left[\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)-\alpha\beta\right] \\
&= 2\beta(\alpha-\gamma)\gamma+\alpha\left[\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)-\alpha\beta\right] \\
&= -c\gamma+a\alpha \\
&= \gamma^2-\alpha\gamma \\
&= \gamma(\gamma-\alpha)=-\sin 72^0\sin 36^0=-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=-\frac{\sqrt{100-20}}{16}=-\frac{\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g &= 3\alpha^2\beta-6\alpha\beta\gamma-\frac{1}{2}\alpha(\alpha-\gamma)+2\beta\gamma^2 \\
&= 2\alpha^2\beta-4\alpha\beta\gamma-f
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
2\alpha^2\beta-4\alpha\beta\gamma &= 2(\sin72^0+\sin36^0)^2\cos36^0-4(\sin72^0+\sin36^0)\cos36^0\sin72^0 \\
&= 2(\sin^2 72^0+2\sin72^0\cdot\sin36^0+\sin^2 36^0)\cos36^0-4\sin^2 72^0\cdot\cos36^0-4\sin36^0\cos36^0\sin72^0 \\
&= 2\sin^2 36^0\cdot\cos36^0-2\sin^2 72^0\cdot\cos36^0 \\
&= 2(\sin^2 36^0-\sin^2 72^0)\cdot\cos36^0 \\
&= 2\left(\frac{10-2\sqrt{5}}{16}-\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\right)\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}=-\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}=-\frac{5+\sqrt{5}}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore g=-\frac{5+\sqrt{5}}{8}-\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{-5+\sqrt{5}}{8}=-\frac{5-\sqrt{5}}{8}=-\frac{\sqrt{5}}{4}\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}=f\cdot 2\sin18^0
$$

$$
\begin{aligned}
h &= -2\alpha\beta(\alpha-\gamma) = -\alpha\cdot 2\beta(\alpha-\gamma) = -\alpha\gamma \\
&= -\left(\sin 72^0 + \sin 36^0\right)\cdot \sin 72^0 \\
&= -\sin^2 72^0 - \sin 72^0 \cdot \sin 36^0 \\
&= -\frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \times \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \\
&= -\frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{\sqrt{80}}{16} = -\frac{10+6\sqrt{5}}{16} = -\frac{5+3\sqrt{5}}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \begin{cases} x = \dfrac{dt^2+et}{at^2+bt+c} \\ y = \dfrac{ft^2+gt++h}{at^2+bt+c} \end{cases}
$$

$a = -\sin 72^0, b = -\sin 36^0, c = -\sin 72^0,$

$d = -\frac{1}{2}\sin 36^0, e = \sin 72^0 \cos 36^0 = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4},$

$f = -\frac{\sqrt{5}}{4}, g = -\frac{5-\sqrt{5}}{8}, h = -\frac{5+3\sqrt{5}}{8}$

$$x=\frac{d}{a}+\frac{(ae-bd)t-cd}{a(at^2+bt+c)}$$

其中$\frac{d}{a}=\frac{1}{4\cos 36^0}=\frac{1}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$$ae=-\sin 72^0(\sin 72^0\cdot\cos 36^0)=-\frac{10+2\sqrt{5}}{16}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}=-\frac{5+3\sqrt{5}}{16}$$

$$bd=-\sin 36^0\left(-\frac{1}{2}\sin 36^0\right)=\frac{1}{2}\sin^2 36^0=\frac{1}{2}\cdot\frac{10-2\sqrt{5}}{16}=\frac{5-\sqrt{5}}{16}$$

$$ae-bd=-\frac{10+2\sqrt{5}}{16}=-\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2=-\sin^2 72^0=-a^2$$

$$cd=-\sin 72^0\left(-\frac{1}{2}\sin 36^0\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{80}}{32}=\frac{\sqrt{5}}{8}$$

$$=-a\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}a$$

$$x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{-at+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}}{at^2+bt+c}$$

$$\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2=\frac{a^2t^2-2a\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}t+\frac{10-2\sqrt{5}}{64}}{(at^2+bt+c)^2}$$

$$=\frac{a^2t^2+2\cdot\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}t+\frac{5-\sqrt{5}}{32}}{(at^2+bt+c)^2}$$

$$=\frac{a^2t^2+\frac{\sqrt{5}}{4}t+\frac{5-\sqrt{5}}{32}}{(at^2+bt+c)^2}$$

同理$y=\frac{f}{a}+\frac{(ag-bf)t+(ah-fc)}{a(at^2+bt+c)}$

其中$\frac{f}{a}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{4}}{-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}=\frac{\sqrt{5}\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\sin 36^0$

$$ag=-\sin 72^0\left(-\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{8}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{30-10\sqrt{5}}}{32}$$

$$=\frac{\sqrt{200-40\sqrt{5}}}{32}=\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{16}$$

$$bf\ =-\sin 36^0\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{16}$$

$$\therefore ag-bf\ =0$$

$$ah=-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\left(-\frac{5+3\sqrt{5}}{8}\right)$$

$$fc=-\frac{\sqrt{5}}{4}\left(-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)$$

$$\therefore ah-\ fc=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{8}-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{8}=-a\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

$$y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\frac{-a\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{8}}{a\left(at^2+bt+c\right)}=\frac{-\frac{5+\sqrt{5}}{8}}{at^2+bt+c}$$

$$\left(y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2=\frac{\frac{30+10\sqrt{5}}{64}}{\left(at^2+bt+c\right)^2}=\frac{\frac{15+5\sqrt{5}}{32}}{\left(at^2+bt+c\right)^2}$$

$$\therefore\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2=\frac{a^2t^2+\frac{\sqrt{5}}{4}t+\frac{20+4\sqrt{5}}{32}}{\left(at^2+bt+c\right)^2}$$

$$\because ac=-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)=\frac{20+4\sqrt{5}}{32}$$

$$ab=-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\left(-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)=\frac{\sqrt{100-20}}{16}=\frac{\sqrt{80}}{16}=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2=\frac{a\left(at^2+bt+c\right)}{\left(at^2+bt+c\right)^2}=\frac{a}{at^2+bt+c}$$

$$y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\frac{-\frac{5+\sqrt{5}}{8}}{at^2+bt+c}$$

$$\because\ \frac{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}{a}=\frac{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}{-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{30+10\sqrt{5}}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{80}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{200+40\sqrt{5}}}{\sqrt{80}}=-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}=a$$

$$\therefore\ y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\frac{-a^2}{at^2+bt+c}$$

故$$\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2=-\frac{1}{a}\left(y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)$$

$$\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\left[\left(y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2+\frac{1}{a}\left(y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)+\frac{1}{4a^2}\right]=\frac{1}{4a^2}$$

$$\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}+\frac{1}{2a}\right)^2=\frac{1}{4a^2}$$

此$a=-\sin 72^0=-\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$\therefore A'$ 的軌跡是一個圓的部分圖形

圓心在$\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4},\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}+\dfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\right)$,

半徑$=\dfrac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}$

4.正六邊形

$\overline{AB}$ 的參數式為$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}-t\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\qquad t\in[0,1]$

$\overline{BC}$ 的參數式為 $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}t \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$$\overleftrightarrow{FG}：\frac{y-0}{x-1} = \frac{0-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(\dfrac{1}{2}-t\right)} = \frac{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{1}{2}+t}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{1}{2}+t\right)y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{即} \sqrt{3}x + (2t+1)y = \sqrt{3}$$

$$\overleftrightarrow{AH}：\frac{y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{x-\dfrac{1}{2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)}{\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}t\right)} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}t}{1+\dfrac{1}{2}t} = \frac{\sqrt{3}t}{t+2}$$

$$\sqrt{3}tx - \frac{\sqrt{3}}{2}t = (t+2)y - \frac{\sqrt{3}}{2}(t+2) \quad \text{即} \sqrt{3}tx - (t+2)y = -\sqrt{3}$$

設 $\overline{FG}$ 與 $\overline{AH}$ 的交點為 A'

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + (2t+1)y = \sqrt{3} \\ \sqrt{3}tx - (t+2)y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\therefore x = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2t+1 \\ -\sqrt{3} & -(t+2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2t+1 \\ \sqrt{3}\text{t} & -(t+2) \end{vmatrix}} = \frac{\sqrt{3}(-t-2+2t+1)}{\sqrt{3}(-t-2-2t^2-t)} = \frac{t-1}{-2(t^2+t+1)} = \frac{1-t}{2(t^2+t+1)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3}\text{t} & -\sqrt{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2t+1 \\ \sqrt{3}\text{t} & -(t+2) \end{vmatrix}} = \frac{3(-1-t)}{\sqrt{3}(-2t^2-2t-2)} = \frac{\sqrt{3}(1+t)}{2(t^2+t+1)}$$

當 $t=0$ 時，$A'\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 即 A 點

當 $t=1$ 時，$A'\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$2x=\frac{1-t}{t^2+t+1}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}y=\frac{1+t}{t^2+t+1}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$(1)+(2)$得 $2x+\frac{2}{\sqrt{3}}y=\frac{2}{t^2+t+1}\Rightarrow x+\frac{1}{\sqrt{3}}y=\frac{1}{t^2+t+1}\cdots\cdots(3)$

$(2)-(1)$得 $\frac{2}{\sqrt{3}}y-2x=\frac{2t}{t^2+t+1}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}y-x=\frac{t}{t^2+t+1}\cdots\cdots(4)$

$(1)^2+(2)^2$得 $4x^2+\frac{4}{3}y^2=\frac{2+2t^2}{(t^2+t+1)^2}\Rightarrow 2x^2+\frac{2}{3}y^2=\frac{1+t^2}{(t^2+t+1)^2}\cdots\cdots(5)$

$(3)\times(4)$得 $\frac{1}{3}y^2-x^2=\frac{t}{(t^2+t+1)^2}\cdots\cdots(6)$

$(5)+(6)$得 $x^2+y^2=\frac{t^2+t+1}{(t^2+t+1)^2}=\frac{1}{t^2+t+1}=x+\frac{1}{\sqrt{3}}y$

$$\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\left[y-\frac{1}{\sqrt{3}}y+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2\right]=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$\therefore A'$ 的軌跡為一圓的部分圖形，圓心$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$，半徑$=\frac{1}{\sqrt{3}}$

5.正 K 邊形

$\overline{A_2A_3}$ 的參數式為 $\begin{cases} x=\cos\frac{2\pi}{k}+t\left(\cos\frac{4\pi}{k}-\cos\frac{2\pi}{k}\right) \\ y=\sin\frac{2\pi}{k}+t\left(\sin\frac{4\pi}{k}-\sin\frac{2\pi}{k}\right) \end{cases}$ $t\in[0,1]$

$\overline{A_3A_4}$ 的參數式為 $\begin{cases} x=\cos\frac{4\pi}{k}+t\left(\cos\frac{6\pi}{k}-\cos\frac{4\pi}{k}\right) \\ y=\sin\frac{4\pi}{k}+t\left(\sin\frac{6\pi}{k}-\sin\frac{4\pi}{k}\right) \end{cases}$ $t\in[0,1]$

$$\therefore \overleftrightarrow{A_1P_1}: y-0=\frac{\sin\frac{2\pi}{k}+t\left(\sin\frac{4\pi}{k}-\sin\frac{2\pi}{k}\right)}{-1+\cos\frac{2\pi}{k}+t\left(\cos\frac{4\pi}{k}-\cos\frac{2\pi}{k}\right)}(x-1)$$

$$\overleftrightarrow{A_2P_2}: y-\sin\frac{2\pi}{k}=\frac{\left(\sin\frac{4\pi}{k}-\sin\frac{2\pi}{k}\right)+t\left(\sin\frac{6\pi}{k}-\sin\frac{4\pi}{k}\right)}{\left(\cos\frac{4\pi}{k}-\cos\frac{2\pi}{k}\right)+t\left(\cos\frac{6\pi}{k}-\cos\frac{4\pi}{k}\right)}\left(x-\cos\frac{2\pi}{k}\right)$$

設$\overleftrightarrow{A_1P_1}$與$\overleftrightarrow{A_2P_2}$的交點為$B_1$

當$t=0$時　$B_1=\left(\cos\frac{2\pi}{k},\sin\frac{2\pi}{k}\right)$即$A_2$

當$t=1$時　B_1即為$\overleftrightarrow{A_1A_3}$與$\overleftrightarrow{A_2A_4}$的交點

而B_1的軌跡為一圓的部分圖形

從如此的討論，我們可以得到這樣的結論：

1. 對正多邊形其第二型態分割點與頂點所圍出來的正多邊形的頂點的軌跡是一圓的部分圖形。

2.當 k→∞，此正多邊形的圖形會趨近一個圓形，而分割點與頂點所圍出來的正多邊形的頂點的軌跡是一個小圓弧，而此圓弧長趨近於 0。

D：第三型態正多邊形頂點軌跡

正多邊型的分割比例變化時，原多邊型的頂點與再次一邊上的分割點相連，所圍出來正多邊形頂點也隨之變化，我們現在要看看這些點的軌跡為何？

順便要研究第四型、第五型，……等正多邊形頂點軌跡之延續性。

1．正方形：

$\overline{BC}$ 的參數式為 $\begin{cases} x=-1+t \\ y=0-t \end{cases}$ $t\in[0,1]$

$\overline{CD}$ 的參數式為 $\begin{cases} x=0+t \\ y=-1+t \end{cases}$ $t\in[0,1]$

$\overleftrightarrow{DE}$： $y-0=\dfrac{-t}{t-2}(x-1)$ 即 $tx+(t-2)y=t$

$\overleftrightarrow{AF}$： $y-1=\dfrac{t-2}{t}(x-0)$ 即 $(t-2)x-ty=-t$

設 $\overleftrightarrow{DE}$ 與 $\overleftrightarrow{AF}$ 的交點為 A'

$$\because \begin{cases} tx+(t-2)y=t \\ (t-2)x-ty=-t \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} t & t-2 \\ -t & -t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t-2 \\ t-2 & -t \end{vmatrix}}=\dfrac{-2t}{-2t^2+4t-4}=\dfrac{t}{t^2-2t+2} \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} t & t \\ t-2 & -t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & t-2 \\ t-2 & -t \end{vmatrix}}=\dfrac{-2t^2+2t}{-2t^2+4t-4}=\dfrac{t^2-t}{t^2-2t+2}=1+\dfrac{t-2}{t^2-2t+2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{t}{t^2-2t+2}\cdots\cdots(1) \\ y-1=\dfrac{t-2}{t^2-2t+2}\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

$\therefore$當 t ＝ 0 時，$A'(0,0)$即原點 O

當 t ＝ 1 時，$A'(1,0)$即 D 點

當 t ＝ $\dfrac{1}{2}$時，$A'\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{5}\right)$

$(1)^2+(2)^2$ 得 $x^2+(y-1)^2=\dfrac{2}{t^2-2t+2}$

$(1)-(2)$ 得 $x-(y-1)=\dfrac{2}{t^2-2t+2}$

$\therefore\quad x^2+(y-1)^2=x-(y-1)$

$$\left[x^2-x+\frac{1}{4}\right]+\left[(y-1)^2+(y-1)+\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{2}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$\therefore A'$的軌跡為一圓的部分圖形，圓心在$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，此與第二型態的軌跡都在同一圓$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$上

同理，可得B',C',D'的軌跡方程式

B'：$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

C'：$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

D'：$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$

都通過正方形的中心$(0,0)$，$\therefore(0,0)$為A'，B'，C'，D'軌跡之交點。

2．正五邊形：

設正五邊形的頂點如右圖（與前面 C 部分相同）

$\overline{BC}$ 的參數式為 $\begin{cases} x=-\beta+\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)t \\ y=\gamma-\gamma t \end{cases}$ $\quad t\in[0,1]$

$\overline{CD}$ 的參數式為 $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}+t \\ y=0 \end{cases}$ $\quad t\in[0,1]$

$\overleftrightarrow{EF}$ ：$y-\gamma=\dfrac{\gamma t}{2\beta-\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)t}(x-\beta)$

即 $\gamma tx-\left[2\beta-\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)t\right]y=-2\beta\gamma+\gamma\left(2\beta-\dfrac{1}{2}\right)t$

$\overleftrightarrow{AG}$ ：$y-\alpha=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1}{2}-t}(x-0)$ 即 $\alpha x-\left(\dfrac{1}{2}-t\right)y=-2\left(\dfrac{1}{2}-t\right)$

$$\therefore x=\frac{\begin{vmatrix} -2\beta\gamma+\gamma\left(2\beta-\frac{1}{2}\right)t & -\left[2\beta-\left(\beta-\frac{1}{2}\right)t\right] \\ -\alpha\left(\frac{1}{2}-t\right) & -\left(\frac{1}{2}-t\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma t & -\left[2\beta-\left(\beta-\frac{1}{2}\right)t\right] \\ \alpha & -\left(\frac{1}{2}-t\right) \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{2\beta\gamma\left(\frac{1}{2}-t\right)-\gamma t\left(\frac{1}{2}-t\right)\left(2\beta-\frac{1}{2}\right)-2\alpha\beta\left(\frac{1}{2}-t\right)+\alpha t\left(\frac{1}{2}-t\right)\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}{-\gamma t\left(\frac{1}{2}-t\right)+\alpha\left[2\beta-\left(\beta-\frac{1}{2}\right)t\right]}$$

$$=\frac{\left[\beta(2\gamma-2)+\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)\right]t^2+\left[\left(\frac{5}{2}\alpha-3\gamma\right)\beta+\frac{1}{4}(\gamma-\alpha)\right]t+\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma t^2+\left[\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)-\alpha\beta\right]t+2\alpha\beta}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} rt & -2\beta\gamma+\gamma\left(2\beta-\frac{1}{2}\right)t \\ \alpha & -\alpha\left(\frac{1}{2}-t\right) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \gamma t & -\left[2\beta-\left(\beta-\frac{1}{2}\right)t\right] \\ \alpha & -\left(\frac{1}{2}-t\right) \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{-\alpha\gamma t\left(\frac{1}{2}-t\right)+2\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma t\left(2\beta-\frac{1}{2}\right)}{-\gamma t\left(\frac{1}{2}-t\right)+\alpha\left[2\beta-\left(\beta-\frac{1}{2}\right)t\right]}$$

$$=\frac{\alpha\gamma t^2-2\alpha\beta\gamma t+2\alpha\beta\gamma}{\gamma t^2+\left[\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)-\alpha\beta\right]t+2\alpha\beta}$$

當 t=0 時，$A'\left(\frac{\gamma-\alpha}{2\alpha},\gamma\right)$即$\overline{AC}$與

當 t=1 時,$A'\left(\frac{2\alpha\beta+(\alpha-\gamma)}{4\alpha\beta+2(\alpha+\gamma)},\frac{4\alpha\beta}{4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)}\right)$即$\overline{AD}$與$\overline{EC}$的交點

消去參數 t,其計算過程同前面 C 部分

可得到$\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)^2=-\frac{1}{a}\left(y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\right)$

$$\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}+\frac{1}{2a}\right)^2=\frac{1}{4a^2}$$

此時 a=-sin72°=-$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$\therefore A'$的軌跡是一個圓的部分圖形，圓心在$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4},\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}+\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}\right)$

半徑$=\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}$

3.正六邊形：

$\overline{BC}$的參數式為$\begin{cases}x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ $\quad t\in[0,1]$

$\overline{CD}$的參數式為$\begin{cases}x=-1+\frac{1}{2}t\\ y=0-\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$ $\quad t\in[0,1]$

$\overleftrightarrow{FG}$:y-0=$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t}{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t}(x-1)$,即$\sqrt{3}(1-t)x+(3+t)y=\sqrt{3}(1-t)$

$\overleftrightarrow{AH}$:y-$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$=$\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}t}\left(x-\frac{1}{2}\right)$,即$\sqrt{3}(1+t)x-(3-t)y=-\sqrt{3}(1-t)$

設$\overline{FG}$與$\overline{AH}$的交點為 A'

$$\begin{cases}\sqrt{3}(1-t)x+(3+t)y=\sqrt{3}(1-t)\\ \sqrt{3}(1+t)x-(3-t)y=-\sqrt{3}(1-t)\end{cases}$$

$$\therefore x=\frac{\begin{vmatrix}\sqrt{3}(1-t) & 3+t\\ -\sqrt{3}(1+t) & -(3-t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sqrt{3}(1-t) & 3+t\\ \sqrt{3}(1+t) & -(3-t)\end{vmatrix}}=\frac{-2\sqrt{3}(t^2-t)}{-2\sqrt{3}(t^2+3)}=\frac{t^2-t}{t^2+3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\sqrt{3}(1-t) & \sqrt{3}(1-t)\\ \sqrt{3}(1+t) & -\sqrt{3}(1-t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\sqrt{3}(1-t) & 3+t\\ \sqrt{3}(1+t) & -(3-t)\end{vmatrix}}=\frac{-6(1-t)}{-2\sqrt{3(t^2+3)}}=\frac{\sqrt{3}(1-t)}{t^2+3}$$

當 t=0 時,A'$\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

當 t=1 時,A'$(0,0)$

$$\begin{cases}x-1=\dfrac{-t-3}{t^2+3}\cdots\cdots(1)\\ \dfrac{y}{\sqrt{3}}=\dfrac{1-t}{t^2+3}\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

$(1)-(2)$得$x-1-\dfrac{y}{\sqrt{3}}=\dfrac{-4}{t^2+3}\cdots\cdots(3)$

$(1)+(2)$得$x-1+\dfrac{y}{\sqrt{3}}=\dfrac{-2(t+1)}{t^2+3}\cdots\cdots(4)$

$(1)^2+(2)^2$得$(x-1)^2+\dfrac{y^2}{3}=\dfrac{2(t^2+2t+5)}{(t^2+3)^2}=\dfrac{2(t^2+3)+4(t+1)}{(t^2+3)^2}=\dfrac{2}{t^2+3}+\dfrac{4(t+1)}{(t^2+3)^2}\cdots\cdots(5)$

$(3)\times(4)$得$(x-1)^2-\dfrac{y^2}{3}=\dfrac{8(t+1)}{(t^2+3)^2}\cdots\cdots(6)$

$(5)\times 2-(6)$得$(x-1)^2+y^2=\dfrac{4}{t^2+3}=-\left(x-1-\dfrac{y}{\sqrt{3}}\right)$

$$\left[(x-1)+\frac{1}{2}\right]^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$\therefore A'$ 的軌跡為一圓的部分圖形，圓心$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$，半徑$=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，與第二型的軌跡在同一圓上

4.正 k 邊形：

$\overline{A_3A_4}$ 的參數式為$\begin{cases} x=\cos\frac{4\pi}{k}+t(\cos\frac{6\pi}{k}-\cos\frac{4\pi}{k}) \\ y=\sin\frac{4\pi}{k}+t(\sin\frac{6\pi}{k}-\sin\frac{4\pi}{k}) \end{cases}\quad t\in[0,1]$

$\overline{A_4A_5}$ 的參數式為$\begin{cases} x=\cos\frac{6\pi}{k}+t(\cos\frac{8\pi}{k}-\cos\frac{6\pi}{k}) \\ y=\sin\frac{6\pi}{k}+t(\sin\frac{8\pi}{k}-\sin\frac{6\pi}{k}) \end{cases}\quad t\in[0,1]$

$\therefore \overleftrightarrow{A_1P_1}$：$\quad y-0=\dfrac{\sin\frac{4\pi}{k}+t\left(\sin\frac{6\pi}{k}-\sin\frac{4\pi}{k}\right)}{\cos\frac{4\pi}{k}+t\left(\cos\frac{6\pi}{k}-\cos\frac{4\pi}{k}\right)}(x-1)$

$\overleftrightarrow{A_2P_2}$ ： $y-\sin\frac{2\pi}{k}=\dfrac{\left(\sin\frac{6\pi}{k}-\sin\frac{2\pi}{k}\right)+t\left(\sin\frac{8\pi}{k}-\sin\frac{6\pi}{k}\right)}{\left(\cos\frac{6\pi}{k}-\cos\frac{2\pi}{k}\right)+t\left(\cos\frac{8\pi}{k}-\cos\frac{6\pi}{k}\right)}\left(x-\cos\frac{2\pi}{k}\right)$

設 $\overleftrightarrow{A_1P_1}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2P_2}$ 的交點為 B_1

當 t=0 時，B_1 即為 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_4}$ 的交點

當 t=1 時，B_1 即為 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 與 $\overleftrightarrow{A_2A_5}$ 的交點

而 B_1 的軌跡為一圓的部分圖形

從上面的討論，我們可以得到結論

1. 對正多邊形其第三型態分割點與頂點所圍出來的正多邊形的頂點的軌跡是一圓的部分圖形,且與第二型態相同都在同一個圓上，其軌跡是第二型軌跡的延伸。
2. 已正十五邊形為例，說明第二型、第三型，……，第十三型頂點軌跡之間之延續性。
3. 當 $k\to\infty$ 時，正 k 邊型的圖形會趨近於一圓，而其頂點的軌跡是由無數多個通過正多邊形中心的圓所形成，而佈滿在原正多邊形的內部。

E：結論與討論

從以上之討論，我們可以歸納出下面的結論：

1. 我們發現任意多邊形的邊作$m:n$的分割，連接各邊的分割點所得到的多邊形與原多邊形不見得相似。但正多邊形的邊作$m:n$的分割，連接各分割點所得到的多邊形與原正多邊形相似；且當$m=n=\frac{1}{2}$時所得的正多邊形面積最小，此最小面積隨著多邊形的邊數增加而變大。
2. 我們對正多邊形的邊作$m:n$的分割，將各頂點與次一邊的分割點相連仍可圍成一正多邊形，此一多邊形與原正多邊形相似。我們稱這一種形式圍出來的正多邊形為第二型態，而這圍出來的正多邊形的最小面積隨著邊數的增加而增大（但正三角形與正方形的最小面積皆為 0）
3. 第二型態的正多邊形的頂點隨$m:n$的比值的變化而變動，其軌跡是圓的一部份，由原正多邊形的頂點開始到圍成最小面積時而結束。但正三角形例外，正三角形時最小面積為 0，A',B',C'都落在重心上，此時$m=n=\frac{1}{2}$，當m增加時面積又變大，一直到$m=1$時，$m\Delta A'B'C'=m\Delta ABC$
4. 雖然我們只討論到原正多邊形的頂點與次相鄰邊的分割點相連所圍出來的正多邊形，即第二型態正多邊形。還有正多邊形的頂點與再次一相鄰邊的分割點相連，它們仍可圍出一正多邊形。我們可以稱此多邊形為第三型態正多邊形。但我們仍可考慮第四型態正多邊形，這些正多邊形的頂點的軌跡是第二、三型態正多邊形頂點軌跡的延伸，我們以此類推，結論可以再推到第五型態、第六型態，……。

三、參考資料與書籍：

1. 三民版數學課本第二冊
2. 三民版數學課本第三冊

評語

優點：作品的主題頗具創意。若能應用如 GSP 之類的動態幾何軟體，本作品將可增添活生生的視覺表現。

改進：作品裡所呈現的代數式子若缺乏有義意義的應用，似乎只代表一番苦工的記錄