中華民國第四十三屆中小學科學展覽會參展作品專輯
高中組

數學科

科別：數學科

組別：高中組

作品名稱：支付『國民便當』方法數的探討

關鍵詞：高斯函數、遞迴關係、非負整數解

編號：040402

學校名稱：

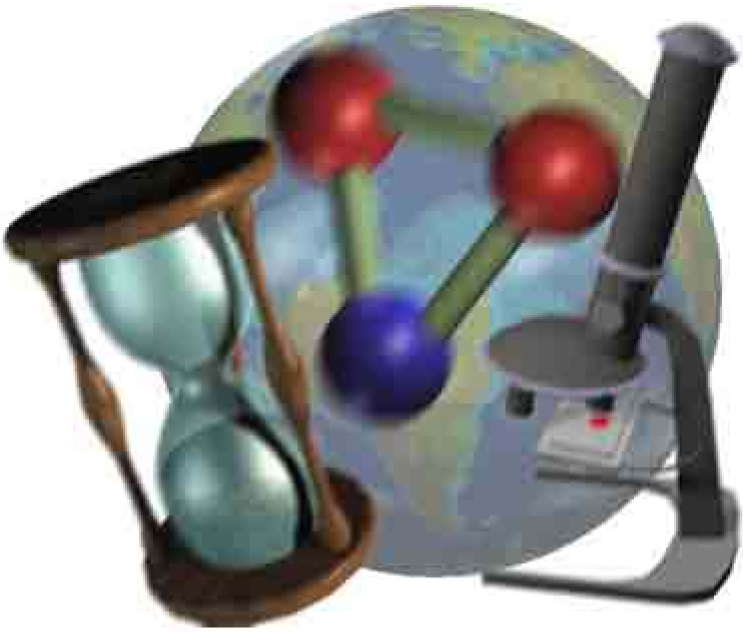
台北縣私立光仁高級中學

作者姓名：

劉韋廷、張哲豪、張菀心、蔡瑤嬑

指導老師：

翁立衛、林麗卿



摘要

本文主要探討的問題是「以多種不同錢幣來支付 n 元的方法數」。研究方式多半先以觀察與考察特例為主，再思考、証明並推廣至一般的情況。主要所涉及的數學概念與技巧是數列遞迴的概念與消去法，在化簡的過程中亦常會遭預到高斯函數與相關性質。

壹、研究動機

在某天中午我們一群朋友去 7-11 買便當，那時大家口袋裡剛好都有很多硬幣，於是決定湊錢買幾個『國民便當』，以解決午餐問題。為了支付每個 39 元的便當，大家湊的錢數和方法都有所不同，這令我們覺得很好奇，到底有多少種方法可以湊成 39 元呢？

這是一個蠻生活化的問題，如果使用錢幣的種類更多，那支付的方法鐵定更多。因此我們大膽的推論：『使用 m 種不同的錢幣支付 n 元時，會不會有通式，能輕易算出付款的方法數？』感覺上這似乎是一個龐大的工程。於是我們找了些志同道合的朋友，一段神秘的發現之旅就此展開。

貳、研究目的

為了求出以 m 種不同錢幣支付 n 元的方法數，我們先分幾種可能性做探討。

一、**當 m＝2 時，表用 2 種不同貨幣，支付 n 元的方法數**，如：

(一) 以 1 元及 p 元付款，$p \in N$ 且 $p,k>1$

(二) 以 p 元及 q 元付款，$p,q \in N$ 且$(p , q)=1$

(三) 以 p 元及 q 元付款，$p,q \in N$ 且$(p , q)=d , d \neq 1$

二、**m＝3 時，以 3 種不同貨幣，支付 n 元的方法數**，如：

(一) 以 1 元、p 元及 kp 元付款，$p,k \in N$ 且 $p,k>1$

(二) 以 1 元、p 元及 q 元付款，$p,q \in N , p,k>1$ 且$(p , q)=1$

參、研究方法

一、預備知識

(一) 排列組合的基本概念

(二) 數列的遞迴定義與對消法

(三) 高斯符號及相關性質

(四) $a,b,c \in Z$, $ax+by=c$ 有整數解的充要條件為$(a,b) \mid c$。

二、前提：

(一) 本文中提及之付款方式，與付款之先後順序無關。例如：”先付一個 3 元再付兩個 5 元”與”先付兩個 5 元再付一個 3 元”，視為同一種付款方式。

(二) 為了配合理論的完整性及作為遞迴定義的起始條件，約定 0 元的付款方式為 1 種，即支付 0 元的方法數 $a_0 = 1$。

(三) 所供應之錢幣個數是沒有限制的。

三、方法：本文的研究方式多半先以觀察與考察特例為主，再思考、証明並推廣至一般的情況。

肆、研究過程

一、m=2　(有 2 種不同貨幣時)

(一) 以 1 元及 p 元($p\in N$ 且 $p>1$)兩種貨幣支付 n 元的方法數之探討：

我們先以特例來思考，試試看以 1 元及 3 元來支付 n 元的方法數有何規律性，進而推廣至更具一般性的付款方式(1 元及 p 元)。我們將部份結果摘錄於下表：

n 元	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
方法數		1			2			3			4			5		6

發現與啟示：觀察上表，得知支付 n 元的方法數 a_n 為每隔 3 元跳一次，所以我們可以以高斯符號，將其規律性的變化表示出來，$a_n = [\frac{n}{3}]+1$。

因此推論：利用 1 元及 p 元來支付 n 元的方法數 $a_n = [\frac{n}{p}]+1$。

【證明】設使用 1 元 x 個、p 元 y 個來支付 n 元(x,y 為非負整數)，則 x,y 要滿足：x+py=n

顯然 x=n-kp (y=k)滿足上式方程式，因此 $n-kp\geq 0 \Rightarrow n\geq kp \Rightarrow \frac{n}{p}\geq k$

$\Rightarrow \frac{n}{p}\geq[\frac{n}{p}]\geq k\geq 0 \Rightarrow k$ 有$[\frac{n}{p}]+1$ 個可能，因此有$[\frac{n}{p}]+1$ 組解，即$a_n = [\frac{n}{p}]+1$。

(二) p,q 為互質正整數，以 p 元及 q 元兩種貨幣支付 n 元的方法數之探討：

問題 1.　p,q 為兩互質正整數（且 q＞p），以 p 元、q 元等面額的錢幣來支付 n 元物品，有幾種支付方法？

(1) 從 p=3，q=5 時的特例開始：

發現將正整數適度的分類(以除以 3 之後的餘數來分類)，發現 3 之倍數這一類的數一定可以用 3 的倍數的面額來支付，而被 3 除餘 1 這類的數，在(含)10 元之後，是沒有問題的，可以用兩張 5 元的錢幣來支付，而 10 元以前的三個數字 1,4,7 就有困難了，因為它既無法用 3 元的面額來支付，也無法用 5 元的面額來支付；同理，被 3 除餘 2 這類的數，在(含)5 元之後，是沒有問題的，可以用一張 5 元的錢幣來支付，而 5 元以前的數字 2 就有困難了。因此

發現，1、2、4、7 這四種錢數，不能以 3 元及 5 元的錢幣來支付，因此方法數皆為 0 種。

n=3k+1	1	4	7	10	13
n=3k+2	2	5	8	11	14
n=3k	3	6	9	12	15

我們從觀察中發現：15 是 3 和 5 的最小公倍數，在本題中扮演關鍵角色。每隔 15 個數，方法數便會出現較大的週期變化，而前 14 個數字(如果包括 0，就是 15 個數字)，大約可以分成兩個類(集合)，一個稱之為是可行的集合 P，表示可以用 3 元及 5 元來湊成的集合；

$P=\{a \mid \exists\, m', n' \in N\cup\{0\}$，使得 $3m'+5n'=a$，$a<15\}$

另一類稱之為不可行的集合 NP，表示不可以用 3 元及 5 元來湊成的集合。方法數 a_n 和 n 屬於 P 或 NP 有關，若 $n\in P$，則 $a_n=1$，若 $n\in NP$，則 $a_n=0$。也就是：

$a_i=0$，$i\in NP=\{1,2,4,7\}$

$a_j=1$，$j\in P=\{0,3,5,6,8,9,10,11,12,13,14\}$

N 元	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
方法數	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
N 元	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
方法數	2	1	1	2	1	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2

由上面表格中我們觀察到：n 除以 15 所得的餘數 r，不管是屬於可行集合 P 或是不可行集合 NP，其方法數 a_n 和 a_{n+15} 都有下列關係：

① $\begin{cases} a_{i+15}=a_i+1 \\ a_{j+15}=a_j+1 \end{cases}$

② $n=15t$ 時, $t\in Z$

方法數 $a_n=t+1$，以重複組合的觀點來看是很容易的，可視為從「5 元 3 個」及「3 元 5 個」這兩物件中重複取 t 次，則方法數為 $H^2_t=C^{t+2-1}_t=t+1$。

③ 若 n 被 15 除的餘數為 r (ie. $n=15t+r$, $t\in Z$, $0<r<15$)，則方法數 a_n 和 r 屬於可行集 P 或不可行集 NP 有關：

(a) $r\in P$，$a_n=a_r\times$（湊成 15t 的方法數）$=1\times(t+1)=(t+1)$

(b) $r\in NP$，$a_n=a_{r+15}\times$（湊成 15(t-1)的方法數）$=1\times(t-1+1)=(t)$

因此可歸納出方法數 $a_n=\begin{cases} [\frac{n}{15}] & r\in NP \\ [\frac{n}{15}]+1 & r\in P \end{cases}$ (r 是 n 除以 15 的餘數)

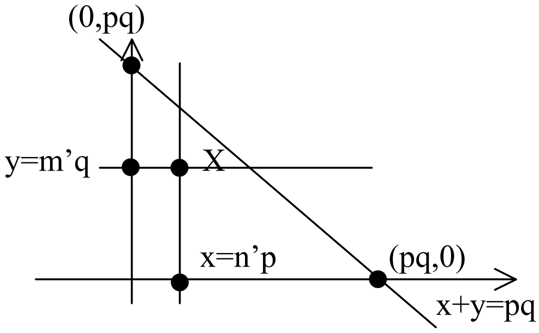
(2) 推廣至更一般的情況時，方法數 $a_n=\begin{cases}[\frac{n}{pq}] & r\in \mathrm{NP} \\ [\frac{n}{pq}]+1 & r\in \mathrm{P}\end{cases}$ (r 是 n 除以 pq 的餘數)

(3)如何快速找到可行集合 P 與不可行集合 NP？

發現這一類的問題中，n 除以 pq 的餘數 r 屬於那一個集合(P 或 NP)中會影響方法數 a_n，因此在給定 p,q 時（p,q 爲實數，且 p<q），要如何迅速找出 r 究竟屬於那一個集合(P 或 NP)是一件重要的事。

(甲)、**可行集合 P 的幾何描述與求法**

(如下圖)我們將純粹以 p 元來付款的方法想成 x 軸上的點，如：(n’p,0)表示僅用 n’個 p 元來付款的動作(n’爲非負整數且 $0\le n'\le q$)，同理，將純粹以 q 元錢幣來付款的方法想成 y 軸上的點，如：(0, m’q)表示僅用 m’個 q 元來付款的動作（$0\le m'\le p$）。現考慮位於 $x+y\le pq$ 且爲 y=m’q 及 x=n’p 兩線交點 X，則該點表示以 m’個 q 元及 n’個 p 元來付款 m’q+n’p 元的一種方式($m'q+n'p\le pq$)，按照定義，m’q+n’p 是可行集合 P 的成員之一，X 稱之爲可行點。透過一連串的動作，可以將全部的可行點找出來，再透過轉換後(將其 x,y 坐標相加)，即可以求出可行集合。



可行集合 N 求出之後，則不可行集合 NP 即爲{1,2,3,…pq}與 N 的差集。

(乙)、**可行集合 P 的幾何特性**：

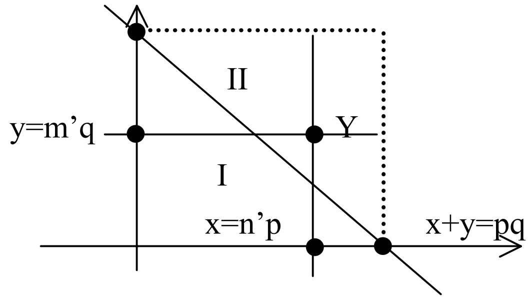
① 點座標與付款方式相對應：在 x 軸上的可行點坐標爲(n’p,0), n’=0,1,2,…q，表示僅用 n’個 p 元付款的方式；在 y 軸上的可行點坐標爲(0,m’q), m’=0,1,2,…p，表示僅用 m’個 q 元付款的方式。同一個直行的可行點表示 p 元個數固定，q 元個數改變的付款方式；同理，同一個橫列的可行點表示 q 元個數固定，p 元個數改變的付款方式。

② 由下至上，第 k 列有$[\frac{(p+1-k)q}{p}]+1$ 個可行點(k=1,2,3,4,…p+1)。

③ 共有：$p+1+\sum_{k=1}^{p}[\frac{kq}{p}]$個可行點。

我們將在以下的篇幅中，仔細討論可行點的個數及不可行點的個數問題(丁部份)，同時，可估算出『不可行集合中之最大數字』(戊部份)。

(丙)、**和不可行集合 NP 有一對一對應的點集：**



(如圖)考慮由 $x+y>pq$, $x<pq$ 及 $y<pq$ 所圍成的區域(我們稱之爲第 II 區，在 $x+y=pq$ 下方相對的區塊稱爲第 I 區，第 I 區中含邊界點，第 II 區中不考慮其邊界點)及該區域中的內部點 $Y(n'p, m'q)$，m', n'爲非負整數且 $0 \le n' < q$，$0 \le m' < p$。很顯然，$m'q+n'p>pq$。

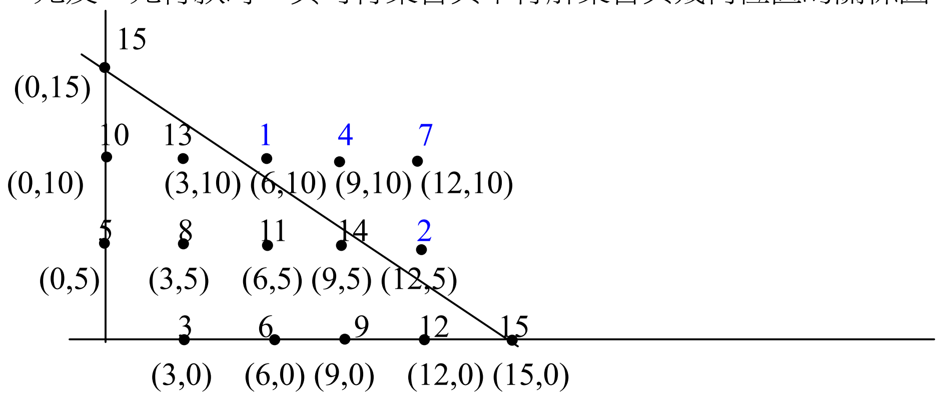
令 $r = m'q+n'p-pq$ 則 $0<r<pq$

$r = \underbrace{(m'-p)}_{\text{負的}}q+n'p=m'q+\underbrace{(n'-q)}_{\text{負的}}p$，但顯然 r 不能以 q 元及 p 元來支付。因此 $r \in NP$。

透過這個觀點，我們可以重新來界定「可行集合 P」及「不可行集合 NP」:

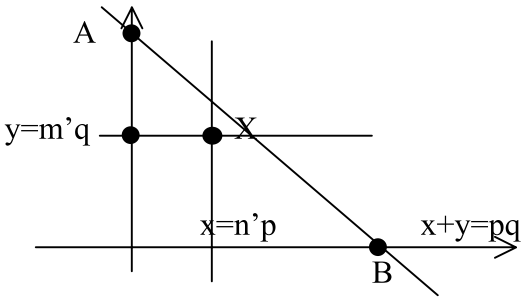
	幾何動作	代數動作
步驟一	在平面上標示出$\{(n'p,m'q) \mid 0\le n' < q，0 \le m' < p\}$	
步驟二	畫出直線 $x+y=pq$	
步驟三	判斷點$(n'p,m'q)$在直線 $x+y=pq$ 的左邊(含線上)或右邊	計算 $n'p+m'q$ 並判斷值是否大於 pq
步驟四	決定屬於 P 或 NP，若 (a) 點$(n'p, m'q)$在 $x+y=pq$ 的左邊(含線上)，則 $n'p+m'q \in P$ (b) 點$(n'p, m'q)$在 $x+y=pq$ 的右邊，則 $n'p+m'q-pq \in NP$	決定屬於 P 或 NP，若 (a) $n'p+m'q \le pq$，則 $n'p+m'q \in P$ (b) $n'p+m'q>pq$，則 $n'p+m'q-pq \in NP$

例：以 3 元及 5 元付款時，其可行集合與不行解集合與幾何位置的關係圖。

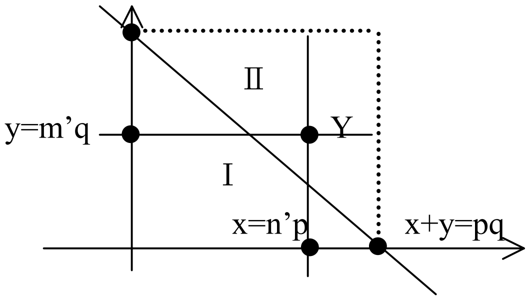


(丁)、對於可行集合 P 中的可行點個數的探討

在 p.5(乙)部份中，我們已經知道共有：$p+1+\sum_{k=1}^{p}[\frac{kq}{p}]$個可行點，這些可行點包含下圖中的 A,B 兩點(邊界點)。



從(丙)部份中的討論中，可以知道：在第 II 區域中的點集 {(n'p,m'q)}和不可行集合 NP 中的元素有一對一的對應關係。兩區域中的點集 {(n'p,m'q)}個數共有 pq 個，因此可知 NP 元素個數爲$\frac{pq-(p+q-1)}{2}=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$，因此可推出 P 元素個數爲$\frac{(p+1)(q+1)}{2}-1$個。



我們除了得到 NP 及 P 集合的元素個數之外，還意外得到了一個等式：

也就是 $p-1+\sum_{k=1}^{p}[\frac{kq}{p}]=\frac{(p+1)(q+1)}{2}-1$

經化簡後可得：$\sum_{k=1}^{p}[\frac{kq}{p}]=\frac{(p+1)(q-1)}{2}+1$

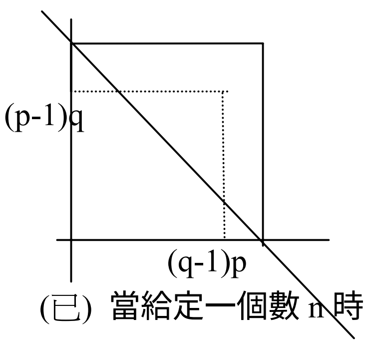
這個式子的幾何解釋就是第 I 區域中的可行點個數(扣除邊界 A,B 兩點)等於 P 集合元素個數。透過幾何關係，避免在代數式上處理高斯符號的化簡，可以清楚知道 P 及 NP 集合的元素個數。這應該是一個不錯的小發現。

(戊)、探討 NP 集合中之最大數字：

p 元、q 元支付 n 元，其中最大不能付的數字爲 pq-p-q。

例如：以 3 元及 5 元付款的狀況下，最大不能支付的錢數爲：15-3-5=7。

【證明】



(承以上的分析，如左圖所示)

NP 集合中之最大數應該位於爲 x=(q-1)p 及 y=(p-1)q 的交會處

因此其數值 =pq-p+pq-q-pq
=pq-p-q
=(pq-p-q+1)-1
=(p-1)(q-1)-1

(已) 當給定一個數 n 時，如何判斷 n 除以 pq 後的餘數 r 是否屬於 P 或 NP？

	幾何意義	代數動作
步驟一	找出餘數 r 位於那一個同餘類中，並在 y 軸上找出對應的列。	將 r 再除以 p，求得餘數 t’
步驟二		在$\{q,2q,3q,4q,......,pq\}$中，找出被 p 除餘 t’者，設其為$m'q$
步驟三	以該列上最小的可行點做為比較的指標，並比較之。	若$r \geq m'q$，則$r \in P$ 若$r < m'q$，則$r \in NP$

例：試求以 13 元及 7 元支付 987654321 元的方法數？

解：由上述理論可知，第一要務應判斷 987654321 除以 91 的餘數是屬於 P 或是 NP。

$987654321=\boxed{91}\times 10853344+17$

因此要判斷 17 屬於 P 或是 NP？

步驟 1：17 除以 7 餘 3

步驟 2：從集合$\{q,2q,......,pq\}=\{13,26,39,52,65,78,91\}$中找出除以 7 後餘數為 3 的數。

發現：52 除以 7 後，餘數=3

步驟 3：因為 17<52，可知$17 \in NP$。因此 $a_{987654321}=10853344$

(三)、以不互質的 p 元及 q 元等兩種貨幣支付 n 元的方法數之探討：

$(p,q) = d \neq 1$，且 $p= p_1d$，$q=q_1d$，$(p_1, q_1)=1$

我們知道 $px+qy=n$ 有整數解的充要條件為 p,q 的最大公因數為 n 的因數。因此 n 必須為 d 的倍數才可以。若 n 不為 d 之倍數，則方法數 $a_n = 0$。

接下來，我們引入可行集合 P 的概念來解決這個問題，定義：P(p,q)表示可以以 p 元及 q 元支付的可行集合。則 $P(p,q)=\{a \mid \exists\, s, t\in N\cup\{0\}$，使得 $sp+tq = a$，$0\le a<[p,q]\}$, [p,q] 表示 p,q 的最小公倍數。

我們發現：$P(p,q) = \{dx \mid x\in P(p_1, q_1)\}$

【証明】$\boxed{x\in P(p_1, q_1) \rightarrow dx\in P(p,q)}$

若 $x\in P(p_1, q_1)$，表示存在 $s, t\in N\cup\{0\}$使得 $sp_1+t\,q_1=x$，$x<p_1q_1$

$\Rightarrow$ $d\,(sp_1+ tq_1)=s\,(dp_1)+ t\,(dq_1)=dx$

$\Rightarrow$ $s\,(p)+ t\,(q)= dx$

$\Rightarrow$ 因此 $dx\in P(p,q)$

$\Rightarrow$

$\boxed{x\in P(p, q) \rightarrow \frac{x}{d} \in P(p_1,q_1)}$

若 $x\in P(p, q)$，表示存在 $s, t\in N\cup\{0\}$使得 $sp+tq=x$，$x<[p,q]$

$\Rightarrow$ $s(p_1d) +t\,(q_1d) = x$

$\Rightarrow$ $s\,(p_1)+ t(q_1)= \frac{x}{d}$

$\Rightarrow$ 因為 s,t, p_1,q_1 均為正整數，所以$\frac{x}{d}$亦為正整數且$\frac{x}{d}< p_1\times q_1$

因此$\frac{x}{d}\in P(p_1,q_1)$

同理：$NP(p,q) = \{dx \mid x\in NP(p_1, q_1)\}$

這就是說以 p,q 支付 n=dk 元(n 要為 d 的倍數)的方法數 a_n 即為以互質的 p_1,q_1 元支付 k 元的方法數 a_k。

令 k 除以 p_1q_1 的餘數為 r 若 $r\in P(p_1,q_1)$則 $a_n=[\frac{k}{p_1q_1}]+1$

$r\in NP(p_1,q_1)$則 $a_n=[\frac{k}{p_1q_1}]$

二、m=3　(有 3 種不同貨幣)

（一）以 1 元、p 元及 kp 元等三種貨幣支付 n 元的方法數之探討：$(p,k\neq 1, p,k\in N)$

第一次研究這個問題時，我們是以 1 元、5 元及 10 元三種貨幣，支付坊間所賣 39 元的國民便當，就是先從 p=5, k=2 的特例下手，試解這個問題，希望能從解決特例的過程中，獲得更多經驗與啓示。

問題（1）用 1 元、5 元及 10 元硬幣支付 39 元的國民便當，請問有幾種付款的方式？

設需要以 10 元 x 個，5 元 y 個，1 元 z 個來支付 39 元的便當，則：
$10x+5y+z=39$，我們從控制 10 元個數著手，列出可能的付款方式。

10 元 個數（x）	3		2				1						0							
5 元 個數（y）	1	0	3	2	1	0	5	4	3	2	1	0	7	6	5	4	3	2	1	0
1 元 個數（z）	4	9	4	9	14	19	4	9	14	19	24	29	4	9	14	19	24	29	34	39

∴共有 20 種付款方式。

發現與啓示：① 1 元的功能是補足以 5 元及 10 元支付後所不足的餘額，支付的方式主要還是掌控在 5 元及 10 元等大面額的幣值上，因此只要找出 5 元及 10 元間的變化規則，問題大致上可以被解決。

② 5 元的個數隨著 10 元個數減少而增加。每少一個 10 元，以 5 元的付款方式則會多兩種，以下表顯示此規則。

10 元個數	3	2	1	0
5 元個數	0 1	0 1 2┐ 3┘	0 1 2 3 4┐ 5┘	0 1 2 3 4 5 6┐ 7┘
1 元個數	略			

問題（2）用 1 元、5 元及 10 元硬幣支付 n 元的國民便當，請問有幾種付款的方式？

我們是以人海戰術的方式，每人分配一部份的例子，先把 n=1~40 的例子一個一個做出來，希望從中發現規律性，並進行一般性的討論，很快地，我們從下表中，發現了某些規律性。

〈表一〉

N元	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
方法數	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6

N元	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
方法數	9	9	9	9	9	12	12	12	12	12	16	16	16	16	16	20	20	20	20	20

發現與啓示：觀察表格後得知，$10t$~$10t+4$ 及 $10t+5$~$10t+9$ ($t\in N\cup\{0\}$)這 5 個錢數的付款方式，只在於 1 元的個數不同，使用 5 元及 10 元的方法數及個數上均無不同。方法數的改變是每隔 5 元改變一次。其原因是第二低的幣値爲 5 元之故，1 元的功用在於補足差額，而每超過 5 元，即增加數種付款的可能。

於是，我們取每五個數爲一單位，並列出詳細的排列狀況，觀察數字的規則後，決定將表格一變化之規律性，分成灰色與白色區塊，重新製作成〈表二〉；在這兩個區塊中，發現下列規則：

① 方法數的規律：灰色區塊部份，付款的方法數爲完全平方數；白色區塊部份，付款的方法數爲相鄰灰色區塊方法數的幾何平均。

② 方法數呈規律增加：

(a) 如：(請參考〈表二〉) 比較 0~4 元的付款方式與 10~14 元的付款方式，則 A 部分是增加的部份，其他的部份可以透過等量變換的方式得到；而 20~24 元的付款方式又比 10~14 元的付款方式多出 B 部分，其他的部份亦可以透過等量變換的方式得到。

(b) 多出來的 A,B 兩部份的共同意義，即是純粹以 5 元支付 n 元的方法數。以 n 來表示爲 $\left[\frac{n}{5}\right]+1$。

(c) 無論灰色或白色之區塊，皆有其相同之變化規則。變化關係，和區塊的顏色無關。

〈表二〉

N 元	0~4	5~9	10~14	15~19	20~24	25~29	30~34	35~39	40~44
10 元→個數	⑩→0	⑩→0	⑩→0	⑩→0	⑩→0	⑩→0	⑩→0	⑩→0	⑩→0
5 元→個數	⑤→0	⑤→0 ⑤→1	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2 **A**	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2 ⑤→3	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2 ⑤→3 ⑤→4 **B**	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2 ⑤→3 ⑤→4 ⑤→5	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2 ⑤→3 ⑤→4 ⑤→5 ⑤→6	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2 ⑤→3 ⑤→4 ⑤→5 ⑤→6 ⑤→7	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2 ⑤→3 ⑤→4 ⑤→5 ⑤→6 ⑤→7 ⑤→8
			⑩→1	⑩→1	⑩→1	⑩→1	⑩→1	⑩→1	⑩→1
			⑤→0	⑤→0 ⑤→1	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2 ⑤→3	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2 ⑤→3 ⑤→4	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2 ⑤→3 ⑤→4 ⑤→5	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2 ⑤→3 ⑤→4 ⑤→5 ⑤→6
					⑩→2	⑩→2	⑩→2	⑩→2	⑩→2
					⑤→0	⑤→0 ⑤→1	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2 ⑤→3	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2 ⑤→3 ⑤→4
							⑩→3	⑩→3	⑩→3
							⑤→0	⑤→0 ⑤→1	⑤→0 ⑤→1 ⑤→2
									⑩→4
									⑤→0
方法數	1	2	4	6	9	12		20	25

依〈表二〉的變化，我們可以將其寫成遞迴的形式，並推出一般項 a_n ：

令 $\left[\dfrac{n}{10}\right]=t$ ， $t \in N$

(a) $a_n = a_{10t} = (\left[\dfrac{n}{10}\right]+1)^2 = (t+1)^2$

(b) $a_n = a_{10t+5} = (\left[\frac{n}{10}\right]+1)(\left[\frac{n}{10}\right]+2) = (t+1)(t+2)$

【證明】

(a) 令 a_n 為支付 n 元的方法數：

$$
\begin{aligned}
a_{10} &= a_0 + 3 \\
a_{20} &= a_{10} + 5 \\
&\vdots \\
+)\quad a_{10t} &= a_{10(t-1)} + (2t+1) \\
\hline
a_{10t} &= a_0 + \frac{(3+2t+1)t}{2} \\
&= 1 + t(t+2) \\
&= (t+1)^2
\end{aligned}
$$

(b) 令 a_n 為支付 n 元的方法數：

$$
\begin{aligned}
a_{15} &= a_5 + 4 \\
a_{25} &= a_{15} + 6 \\
&\vdots \\
+)\quad a_{10t+5} &= a_{10(t-1)+5} + (2t+2) \\
\hline
a_{10t+5} &= a_5 + \frac{(4+2t+2)t}{2} \\
&= 2 + t(t+3) \\
&= (t+1)(t+2)
\end{aligned}
$$

15 元用 5 元去湊所得之方法數

小結論：

以 1 元、5 元及 10 元來支付 n 元的方法數和 t 有關，可分成兩大類：

(1).10t~10t+4 元時（$t \in \mathrm{N}\cup\{0\}$），$a_n = a_{10t} = (\left[\frac{n}{10}\right]+1)^2 = (t+1)^2$。

(2).10t+5~10t+9 元時（$t \in \mathrm{N}\cup\{0\}$），$a_n = a_{10t+5} = (\left[\frac{n}{10}\right]+1)(\left[\frac{n}{10}\right]+2) = (t+1)(t+2)$。

結論

經過整理後，我們可以歸納出「使用幣值為 1 元、p 元、kp 元，支付 n 元的方法數 a_n」的通式：

在看通式之前，要先定義符號：

令 $t = \left[\frac{n}{kp}\right]$，表 n 除以 kp 後之商數，t 有兩層意義上，一是以最大幣值 kp 元來支付 n 元時，最大貨幣 kp 元所能使用之最多個數，二是遞迴的次數。

令為 n 除以 kp 之後的餘數，則 $r = n - kpt$，

令 $b = \left[\frac{r}{p}\right]$ 為表餘數 r 除以 p 之商數（0≤b<k），

則定義 $n_o = tkp + bp$

n_o 為小於 n 且最接近 n 之 p 的倍數，顯然地，支付 n 元時的方法數等於支付 n_0 元時的方法數，即 $a_n = a_{n_0}$。因為這兩群的方法僅在 1 元的個數上有所差別，因為它們均尚未達到下一個進位單位。

而支付 n 元時的方法數 a_n 會有 k 類，每一類都可以用 t, k, p, b 及 a_{bp} 表之：

$$a_n = a_{tkp+bp} = a_{bp} + t\left[\frac{(t+1)k}{2} + (b+1)\right] \text{且 } a_{bp} = (b+1)$$

進一步化簡可得 $a_n = (t+1) \times (b+1+\frac{tk}{2})$

【證明】

$$a_{kp+bp} = a_{bp} + \frac{(kp+bp)}{p} + 1$$

$(kp+bp)$ 元只用 p 元支付方法數

$$a_{2kp+bp} = a_{kp+bp} + \frac{(2kp+bp)}{p} + 1$$

$$a_{3kp+bp} = a_{2kp+bp} + \frac{(3kp+bp)}{p} + 1$$

$$\vdots$$

$$+)a_{tkp+bp} = a_{(t-1)kp+bp} + \frac{(tkp+bp)}{p} + 1$$

$$a_{tkp+bp} = a_{bp} + [(k+b)+1] + [(2k+b)+1] + ... + [(tk+b)+1]$$

$$= a_{bp} + t\left[\frac{(t+1)k}{2} + (b+1)\right]$$

（二）以 1 元、p 元及 q 元(p,q 為互質整數)等三種貨幣支付 n 元的方法數之探討：

有了以上的經驗與遞迴的概念,我們利用遞迴關係及對消法來化簡以 1 元、p 元及 q 元(q>p)來支付 n 元的方法數 a_n：

令 n 除以 q 的商數為 t, 餘數為 r，則 n=qt+r

$$a_n = a_{n-q} + \left[\frac{n}{p}\right] + 1$$

$$a_{n-q} = a_{n-2q} + \left[\frac{n-q}{p}\right] + 1$$

$$\vdots$$

$$+)\,a_{n-(t-1)q} = a_r + \left[\frac{n-(t-1)q}{p}\right] + 1$$

$$a_n = a_r + \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n-q}{p}\right] + ... + \left[\frac{n-(t-1)q}{p}\right] + t = a_r + t + \sum_{k=0}^{t-1}\left[\frac{n-kq}{p}\right]$$

化簡式子：$\sum_{k=0}^{t-1}\left[\frac{n-kq}{p}\right] = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n-q}{p}\right] + ... + \left[\frac{n-(t-1)q}{p}\right]$

我們進一步處理高斯符號，發現有以下的性質：

(甲). n, n-q, n-2q, n-3q,⋯, n-(p-1)q 等除以 p 後的餘數皆不同。

證明： 設 n-iq 與 n-jq (0≦i , j ≦p-1)除以 p 後有相同的餘數，則(n-iq)-(n-jq)為 p 的倍數。則 $p \mid q(j-i)$，又 p,q 互質且 0≦i , j ≦p-1

$\therefore j = i$（矛盾）故其沒有相同餘數。

則從(甲)的結果中可知：

(乙). n, n-q, n-2q, n-3q,⋯, n-(p-1)q 等除以 p 後的餘數為 $\{0.1.2...(p-1)\}$ 的一種互換。

(丙). $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n-q}{p}\right]+...+\left[\frac{n-(p-1)q}{p}\right]$=n- $\frac{(p-1)(q+1)}{2}$

證明：(1).當 p 爲奇數時，由(乙)可知，n, n-q, n-2q, n-3q,⋯, n-(p-1)q 等除以 p 後的餘數爲{0, 1, 2, 3,⋯,p-1}的一種互換，因此扣除餘數爲 0 以外，剩下的數可以”湊”成 $\frac{p-1}{2}$ 對，使得餘數的和爲 p.

因此 $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n-q}{p}\right]+...+\left[\frac{n-(p-1)q}{p}\right]=\frac{n}{p}+\frac{n-q}{p}+\cdots+\frac{n-(p-1)q}{p}$ - $\frac{p-1}{2}$ = n- $\frac{(p-1)(q+1)}{2}$

(2).當 p 爲偶數時，可設 p=2k，由(乙)可知，n, n-q, n-2q, n-3q,⋯, n-(p-1)q 等除以 p 後的餘數爲{0, 1, 2, 3,⋯,p-1}的一種互換，因此扣除餘數爲 0, k 以外，剩下的數可以”湊”成 $\frac{p-2}{2}$ 對，使得餘數的和爲 p。因此：$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n-q}{p}\right]+...+\left[\frac{n-(p-1)q}{p}\right]$

$=\frac{n}{p}+\frac{n-q}{p}+\cdots+\frac{n-(p-1)q}{p}$ - $\frac{p-2}{2}$ - $\frac{1}{2}$ = n- $\frac{(p-1)q}{2}$ - $\frac{(p-1)}{2}$ == n- $\frac{(p-1)(q+1)}{2}$

(餘 k 的那一個，除以 p 後加高斯符號與不加高斯符號會差 $\frac{1}{2}$，餘 0 的那一個，除以 p 後加高斯符號與不加高斯符號並不會有差別)

這個式子對我們來說是很重要的，因爲它可以幫助我們化簡部份這堆帶有高斯符號的式子，每 p 個可以分別化簡開來，因此只要處理剩下的少數項即可。

例題：求以 1 元、3 元及 5 元，支付 1000 元的方法數。

解：令 a_n 爲以 1 元、3 元及 5 元，來支付 n 元的方法數且 $a_0=1$。

依照上述的方析方式，可以先求出 t=[$\frac{1000}{5}$] (疊代次數)及 r =0，

因此 $a_{1000}=a_0+200+\sum_{k=0}^{199}[\frac{n-kq}{p}]$

而 $\sum_{k=0}^{199}[\frac{n-kq}{p}]=[\frac{1000}{3}]+[\frac{995}{3}]+[\frac{990}{3}]+[\frac{985}{3}]+\cdots+[\frac{10}{3}]+[\frac{5}{3}]+[\frac{0}{3}]$ (200 項，分成 67 組)

$=\frac{1000}{3}+\frac{995}{3}+\frac{990}{3}+\frac{985}{3}+\cdots+\frac{10}{3}+\frac{5}{3}+\frac{0}{3}$ -67 =33433

(沒有高斯符號的運算比有高斯符號的運算，每組會多算 1，因此減去 67)

因此 a_{1000}=1+200+33433=33634

註：本題的數字雖然大，但運用以上的觀點來處理問題，結果並不會太難。

伍、研究結果與結論

本研究的主要結果有：

(1).利用 1 元及 p 元來支付 n 元的方法數 $a_n=[\frac{n}{p}]+1$。

(2).p,q 爲兩個互質整數，利用 p 元及 q 元來支付 n 元的方法數 a_n 和 n 除以 pq 的餘數 r 有關，

若 $r\in P$(可行集合)，則 $a_n=[\frac{n}{pq}]+1$；

若 $r\in NP$(不可行集合)，則 $a_n=[\frac{n}{pq}]$。 (可行集合的求法，請參考本文 p.3-7 的討論)

(3). p,q 的最大公因數爲 $d(\neq 1)$，且 $p=p_1d$，$q=q_1d$，$(p_1,q_1)=1$，則利用 p 元及 q 元來支付 n 元時，n 必須爲 d 的倍數。若 n 爲 d 的 k 倍時(k 爲整數)，則方法數 a_n 和 k 除以 p_1q_1 的餘數 r 有關，若 $r\in$ 可行集合 $P(p_1,q_1)$則 $a_n=[\frac{k}{p_1q_1}]+1$，若 $r\in NP(p_1,q_1)$則 $a_n=[\frac{k}{p_1q_1}]+1$

(可行集合 $P(p_1,q_1)$的定義，請參考本文 p.8。)

(4).以 1 元、p 元及 kp 元(k,p 爲正整數)，支付 n 元的方法數 $a_n=a_{n0}$ (a_{n0} 爲小於 n 且最接近 n 之 p 的倍數)。若 n_0 除以 kp 得商爲 t，餘數爲 r，r 再除以 p 得商爲 b，則以 1 元、p 元及 kp 元而支付 *n* 元時的方法數 a_n 和 t, k, p, b 及 a_{bp} 有關：

$$a_n=a_{n0}=a_{tkp+bp}=a_{bp}+t\left(\left(\frac{t+1}{2}\times k+(b+1)\right)\right)=(t+1)\times(b+1+\frac{tk}{2})$$

(5).以 1 元、p 元及 q 元(p,q 爲互質正整數)，支付 n 元的方法數 a_n 爲：$a_r+t+\sum_{k=0}^{t-1}[\frac{n-kq}{p}]$

其中 n 除以 q 的商數爲 t, 餘數爲 r。

陸、討論

一、重新思考遞迴的意義與樹形圖的關係

在本研究中，我們以遞迴關係來處理組合方法數的問題。例如在之前，我們討論以 1,p 及 q 元支付 n 元的方法數問題中，常看到這類的遞迴關係式：

$$a_n=a_{n-q}+[\frac{n}{p}]+1$$

這個式子中有兩個部份，一個是 a_{n-q}，這部份的意義是「至少有一個 q 元的方法數」，因爲只要再提供一個 q 元銅板，就可以把每一種「以 1,p 及 q 元支付 n-q 元的方式」挪到「以 1,p 及 q 元支付 n 元的方法數」中，而另一個是$[\frac{n}{p}]+1$，這部份的意義是「僅利用 p 元來支付 n 元的方法數」，也就是「完全不用 q 元來支付 n 元的方法數」，很顯然地，這兩部份是互斥的集合。在樹形圖的表達上，相當於求出兩個獨立分支的方法數。

繼續將遞迴關係推導下來，我們看到以下式子，發現其每一組括號中，均對應每一個分

支的方法數，因此本題應該可以畫出$[\frac{n}{q}]+1=t+1$ 個獨立分支，也就是下式中以括號所標示的 t+1 個組。

$$a_n=\overbrace{\left(\left[\frac{n}{p}\right]+1\right)}^{\text{只用p元支付}}+\underbrace{\left(\left[\frac{n-q}{p}\right]+1\right)}_{\text{僅用一個q元支付}}+\ldots+\overbrace{\left(\left[\frac{n-(t-1)q}{p}\right]+1\right)}^{\text{僅用(t-1)個q元支付}}+\underbrace{a_r}_{\text{用最大量的q元支付}}$$

二、幾個方法上的比較

這幾天老師突然丟了一個問題給大家:「希望能求出以台灣現行的五種銅幣－1 元、5 元、10 元、20 元及 50 元支付 100 元的方法數。」這個問題，讓我們順便統整一下，目前所知道的方法，目前我們知道的方法，大致有三個：一、利用樹形圖或表格的方式將可能一一列出；二、用生成函數來處理；三、利用本研究所介紹之遞迴關係來處理。

利用樹形圖或表格來討論，是以窮舉的方式，有系統地列出所有可能，需要花費許多篇幅與時間，有時候分類的系統沒有弄好，可能會造成遺漏或重複的情況發生。

而利用生成函數來求方法數，必需考慮 $f(x)=(1+x+x^2+\ldots x^{100}+\ldots)(1+x^5+x^{10}\ldots x^{100}+\ldots)(1+x^{10}+x^{20}\ldots x^{100}+\ldots)(1+x^{20}+x^{40}+\ldots x^{100}+\ldots)(1+x^{50}+x^{100}+\ldots)$展開之後 x^{100} 的係數。

而 f(x)可以繼續化簡成：$f(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\left(\frac{1}{1-x^{10}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{20}}\right)\left(\frac{1}{1-x^{50}}\right)$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})(1-x^{50})}$$

而這個式子的分有 32 項，我們不禁害怕起來，真的要這樣做下去嗎??

後來我們利用本研究中所提到的遞迴關係式來處理本題，發現效果不錯：

令 a_n 爲以 1,5,10,20 及 50 元支付 n 元的方法數。則：

這樣就可以化減爲
4 種錢幣支付 n 元

$$\begin{array}{rl} a_{100}=a_{50} & +(100\text{元以}1.5.10.20\text{元支付的方法數}) \\ +)\ a_{50}=a_0 & +(50\text{元以}1.5.10.20\text{元支付的方法數}) \\ \hline a_{100}=a_0 & +(100\text{元以}1.5.10.20\text{元支付的方法數})+(50\text{元以}1.5.10.20\text{元支付的方法數}) \end{array}$$

如此可以把此題換成 2 個小題目：以 1,5,10,20 元來求支付 50 元及 100 元的方法數。而且我們也可以從中了解，透過一次遞迴的運作，可以將錢幣的種類減少一個。

接著，我們會如法泡製，再透過一次遞迴的運作，將錢幣的種類再減少一個。

令 b_n 爲以 1,5,10 及 20 元支付 n 元的方法數。則：

$$b_{100}=b_{80}+(100\text{元以}1.5.10\text{支付的方法數})$$
$$b_{80}=b_{60}+(80\text{元以}1.5.10\text{支付的方法數})$$
$$\vdots$$
$$+)\ b_{20}=b_{0}+(20\text{元以}1.5.10\text{支付的方法數})$$
$$b_{100}=b_{0}+(100\text{元以}1.5.10\text{支付的方法數})+\ldots+(20\text{元以}1.5.10\text{支付的方法數})$$

$$b_{50}=b_{30}+(50\text{元以}1.5.10\text{支付的方法數})$$
$$+)\ b_{30}=b_{10}+(30\text{元以}1.5.10\text{支付的方法數})$$
$$b_{50}=b_{10}+(50\text{元以}1.5.10\text{支付的方法數})+(30\text{元以}1.5.10\text{支付的方法數})$$

令 c_n 爲以 1,5 及 10 元支付 n 元的方法數。再配合本研究的結果，可以上兩式化簡成：

$a_{100}= a_0+ b_0+ b_{10}+c_{100}+c_{80}+c_{60}+c_{40}+c_{20}+c_{50}+c_{30}$

$=1+1+4+121+81+49+25+9+36+16=343$ (p.13 的結果)

這樣做，並沒有特別困難。從這個例子可以看出來本研究的一點小小的優點，就是透過數次遞迴關係的運算，將錢幣的種類逐步減少。再者，透過遞迴關係的運算，可將”數字大”的方法數化約成幾個數字很小的方法數(起始條件)，如上例中的 a_0, b_0, b_{10}, c_0 等值。因此以遞迴的方式解決這類問題，應該是比較容易理解且具效率的方法。

三、對尚未完成部份的簡報

本研究在最近才有明顯的突破，自覺得還有很多要改進的地方，以下是三個可以努力的方向：

(a).以 1 元、p 元及 q 元付款，$p,q\in N$ 且 $(p, q)=d$, $d\neq 1$

(b).以 p 元、q 元及 r 元付款，p,q, r 是兩兩互質的質數。

(c).嘗試增加付款貨幣的樣式，讓問題變得更精彩。

在增加付款貨幣樣式方面的努力上，我們已經嘗試了許多例子，掌握了一些規則與可能的猜測，不過在一般式的化簡與証明上，尚待突破。以下提供兩個我們正在思考與嘗試的特例，希望讓評審先生能了解我們正在努力的過程。

例題：求以 3 元、5 元及 7 元，來支付 105 元的方法數。(**兩兩互質的情況**)

解：令 a_n 爲以 3 元、5 元及 7 元支付 n 元的方法數；b_n 爲以 3 元及 5 元支付 n 元的方法數。

則 $a_{105}= b_{105}+ b_{98}+b_{91}+b_{84}+b_{77}+\cdots+b_{21}+b_{14}+ b_7+b_0$ (共有 16 項)

於是我們將問題簡化：將三種貨幣化簡成兩種貨幣，新的問題在於如何整理這些問題的答案，讓答案的呈現更有系統或具規律性。透過表格，能夠更清楚 b_n 中每一項如何求得：

n	被 15 除餘數 r	r∈P(3,5)或 NP(3,5)	b_n	說明
105	0	P	$[\frac{105}{15}]+1$	(1).一共加上 11 個 1，而 11 正好是 P(3,5)的元素個數。 (2).這 15 個餘數皆不同，可以找出 7 對，使得和為 15。而 $[\frac{K}{15}]+[\frac{15-K}{15}]=\frac{K}{15}+\frac{15-K}{15}-1$，因此每一對都會少算 1。15 個數相加會少算 7。而去掉高斯符號之後，計算比較方便。 (3).n 呈等差，和可以用「中間項」×「項數」來處理結果會更方便。
98	8	P	$[\frac{98}{15}]+1$	
91	1	NP	$[\frac{91}{15}]$	
84	9	P	$[\frac{84}{15}]+1$	
77	2	NP	$[\frac{77}{15}]$	
70	10	P	$[\frac{70}{15}]+1$	
63	3	P	$[\frac{63}{15}]+1$	
56	11	P	$[\frac{56}{15}]+1$	
49	4	NP	$[\frac{49}{15}]$	
42	12	P	$[\frac{42}{15}]+1$	
35	5	P	$[\frac{35}{15}]+1$	
28	13	P	$[\frac{28}{15}]+1$	
21	6	P	$[\frac{21}{15}]+1$	
14	14	P	$[\frac{14}{15}]+1$	
7	7	NP	$[\frac{7}{15}]$	

$a_{105}=b_{105}+b_{98}+b_{91}+b_{84}+b_{77}+\cdots+b_{21}+b_{14}+b_7+b_0$

$=[\frac{105}{15}]+[\frac{98}{15}]+[\frac{91}{15}]+[\frac{84}{15}]+[\frac{77}{15}]+[\frac{70}{15}]+[\frac{63}{15}]+[\frac{56}{15}]+[\frac{49}{15}]+[\frac{42}{15}]+[\frac{35}{15}]+[\frac{28}{15}]+[\frac{21}{15}]+[\frac{14}{15}]+[\frac{7}{15}]+11+b_0$

$=\frac{105}{15}+\frac{98}{15}+\frac{91}{15}+\frac{84}{15}+\frac{77}{15}+\frac{70}{15}+\frac{63}{15}+\frac{56}{15}+\frac{49}{15}+\frac{42}{15}+\frac{35}{15}+\frac{28}{15}+\frac{21}{15}+\frac{14}{15}+\frac{7}{15}-7+11+b_0$

$=56-7+11+1=61$ (56 是 105 和 7 的中間項)

故以 3 元、5 元及 7 元，來支付 105 元有 61 種不同的方法。

例題：求以 1 元、5 元、15 元及 50 元支付 n=150p 元的方法數。

(將付款貨弊的種類增加，為化簡方便，僅限於特殊的 n 值)

解：令 a_n 為以 1 元、5 元、15 元及 50 元支付 n 元的方法數；b_n 為以 1 元、5 元及 15 元支付 n 元的方法數；而本題的 $k=\frac{15}{5}=3$。

則 $a_{150k}=b_0+b_{50}+b_{100}+b_{150}+\ldots+b_{150k}$ (共有 3p+1 項)

發現每隔三項的"關係"較具規律性，因此，每隔三項一起處理，結果會比較簡單。

$=b_0+\underbrace{(b_{50}+b_{200}+\ldots+b_{150k-100})}_{\text{第一群}}+\underbrace{(b_{100}+b_{250}+\ldots+b_{150k-50})}_{\text{第二群}}+\underbrace{(b_{150}+b_{300}+b_{450}+\ldots+b_{150k})}_{\text{第三群}}$

而每一群的第 m 個數都能以通式表示(m=1,2,3,4,…p)，僅在參數 t,b 的選擇上有所不同，這三群的通式為：$(10(m-1)+t+1)\times(b+1+\frac{(10(m-1)+t)k}{2})$

參數 t,b 的選擇如下表所示：

	第一群	第二群	第三群
t	$[\frac{50}{15}]=3$	$[\frac{100}{15}]=6$	$[\frac{150}{15}]=10$
b	$[\frac{5}{5}]=1$	$[\frac{10}{5}]=2$	$[\frac{0}{15}]=0$

而每一群的和為：

$$\sum_{m=0}^{p-1}(10m+t+1)(b+1+\frac{(10m+t)k}{2})$$

$$=\frac{pk}{2}(100\cdot\frac{(p-1)(2p-1)}{6}+5(2t+1)(p-1)+t^2+t)+p(b+1)(t+5p-4)$$

以若 n=600 元為例，此時的 p=4 (即 150 元的 4 倍)，將 p=4 與 b,t,k 等參數代入上式中，可得第一群的和為 2954，第二群的和為 3786，第三群的和為 4754，因此，以 1 元、5 元、15 元及 50 元支付 600 元的方法數共有 1+2954+3786+4754=11495 種之多。

四、與文獻之比較

在研究過程中，我們曾進行文獻探討，發現第二十三屆的科展由新竹中學許曉凱、馬健湘、鍾明峻等人的作品－『自然係數不等式 ax+by+cz≤n 的非負整數解』(高中組第一名)，與我們討論的問題極為類似，但該作品所使用的工具，對於我們來說，卻是很陌生的，經詢問老師後發現該作品所使用的概念與技巧和『生成函數』(generating function)有關，但這卻是高中教材所未提及的部分，因此我們打算以現有高中所學的知識，來進行探討。

該科展討論的主題，和我們所討論的問題的確有大部份是相同，可以視為本研究中，四種相異貨幣付款方式的推廣，就我們所知：『求滿足 ax+by+cz≤n 非負整數解(a,b,c)個數』和求『k+ax+by+cz=n』的非負整數解(a,b,c,k)個數是等價的問題，而用我們的觀點來說，『k+ax+by+cz=n 的非負整數解個數』即等於『使用 1 元、a 元、b 元及 c 元等四種相異錢幣支付 n 元的方法數』(a,b,c 均不為 1)。

但如果當 a,b,c 有一個為 1 時，如「x+2y+3z≦10」，該研究的結論，便無法直接應用至本問題的推廣上。因為將「x+2y+3z≦10」轉換成「x+2y+3z+k=0」時，會得到 x 與 k 之係數皆為 1 的現象，這使得在應用上，我們無法自圓其說何以出現「兩個不同的一元」這件事，因此無法將此結果直接應用於三種錢幣的支付問題上。再者，如果錢幣種類再增加，則該研究中所述及的解法便無法繼續使用及推廣。這兩個小小的缺憾，反而讓本研究有稍微伸展的空間，我們有更進一步拓展與延伸的必要。

隨著時空的變遷，教材上也有所差異。二十年前，這件作品所探討的範圍可能是屬於教科書上的習題部分，但二十年後，相同的東西，或許已經改編在補充教材裡了，不得不令我們強迫自己去接觸更多更廣的資料，希望從中獲得教科書上不足的缺憾。因此，當看到這個科展作品時，我們內心實是一則以喜，一則以憂。喜的是發覺我們的研究問題頗有深度(不然

不會得到全國第一)，似乎是該作品再加以推廣，感覺十分具有挑戰性，真是英雄所見略同啊！而憂的是該件科展作品獲得如此高的評價，如何超越或是補齊缺漏部分是個令人頭痛的問題。我們是在這種複雜的心情下逐步前行的，而我們也希望能夠站在巨人的肩膀上，看得更遠，完成前人之未完成的部份並且開創新的思考觀點。

柒、參考資料

1.高中數學課本南一版第一冊第三章數學歸納法。
2.高中數學課本南一版第四冊第二章排列組合。
3.第二十三屆科展高中組數學科第一名作品《自然係數不等式 ax+by+cz≤n 的非負整數解》，新竹中學許曉凱、馬健湘、鍾明峻。

評語

優點：標題取得好！頗具鄉土特色。

改進：1.NP-符號很容易誤導其他不相關的概念，應該改正。

2.語氣可更活潑，呈現出學生固有的新鮮好奇感。