

數學科

科別：數學科

組別：高中組

作品名稱：九死一生

關鍵詞：數學歸納法、同餘系、遞迴數列

編號：040401

學校名稱：

台北縣立海山高級中學

作者姓名：

林豐正、詹朱聰、林裕翔、簡子為

指導老師：

董維新



壹、研究動機

在一次的數學專題中，老師提出了以下的題目：「有一隻若干人的軍隊，在戰敗中決定集體自殺，此軍隊圍成一圓圈依序從 1 號開始自盡，接著跳過 2 號由 3 號自殺 一直到全部的人都死光為止。此時，若有一人欲獨活，則他應位於何處？」在老師的深入淺出的講解之下，我們很容易用數學歸納法尋求並證明出其結果。但我在參加去年的全國網路數學競試時，發現有一題目竟與此題目相似，不同處是前兩人自盡，跳過下一人 依序下去。這便引起了我的極大的興趣，便想了解其中條件的變化對其結果有什麼關聯性，便深入的探討此題目。

貳、研究目的

在美伊戰爭開打後，我們針對此事件配合我們的研究，做出以美伊戰爭為背景的故事，以呈現出我們的研究結果，我們希望藉由這個研究，能夠將數學和生活中的事件互相結合，進而對數學有更深刻的了解。藉由分析、統整、歸納等方法，培養對數學的靈敏度，最後達到寓數學於樂的終極目標。

參、研究器材

1 紙筆若干

2 計算機

3 硬體

桌上型電腦

筆記型電腦

軟體

Microsoft Excel XP

Microsoft Word XP

肆、預備知識

- 1、 同餘 (congruence)
- 2、 對數 (logrithm)
- 3、 數學歸納法 (mathematical induction)
- 4、 迴歸分析 (regression)
- 5、 遞迴數列 (recursion)
- 6、 約瑟夫排列 (Josephus problem)

伍、研究過程及方法

一、預測死亡

(一) 假設：

巴格達保衛隊中，有一支 N 個人的軍隊在戰敗之後決定舉槍自盡，整個隊伍排成一圓圈並集體自殺，此時幕僚提議：在某個人自殺後，跳過一人，下一人再自殺。此時，狡猾的海珊若想獨活，應於隊伍中的何處？若幕僚想與海珊獨活，則二人須站隊伍中的何處？當時想到此題目時，只是用土法煉鋼的方法，刪去一個個數字，找出最後剩下的規律，卻意外的發現生還者所在的數字有一定的規律。稍後，我便想到如果隔兩人自殺，隔三人自殺 隔 m 人自殺有何結果，以及倒數自殺的一人，二人 至第 K 個人的情形？於是我們便開始著手研究。有人數 N 人，我們編號 1 號至 N 號，由 1 號開始依序輪流淘汰 α 個人，留 β 個人，則最後留下的號碼與倒數第 K 個人的號碼為何？

(二) 定義：

- (1) 首先我們定義 $L(\alpha, \beta, K, N)$ 表示為總人數為 N 人時，由 1 號開始先淘汰 α 個人，留 β 個人，而倒數第 K 個人的編號。
- (2) 在汰留時，若人數少於汰 α 人 $\rightarrow$ 則規定淘汰前 $N - 1$ 人，留最後一人當存活者
若汰 α 個人後，人數少於留 β 人 $\rightarrow$ 則規定按圓形排列再從 $\alpha + 1$ 留起。

(三) 觀察：當 $\alpha = 1$ ， $\beta = 1$ 時，則為汰一留一，我們土法煉鋼式的找出最後留下的號碼，見表一：

(表一):

N	L(1,1,1,N)	L(1,1,2,N)	L(1,1,3,N)	L(1,1,4,N)	L(1,1,5,N)	L(1,1,6,N)	L(1,1,7,N)
1	1						
2	2	1					
3	2	3	1				
4	4	2	3	1			
5	2	4	5	3	1		
6	4	6	2	5	3	1	
7	6	2	4	7	5	3	1
8	8	4	6	2	7	5	3
9	2	6	8	4	9	7	5
10	4	8	10	6	2	9	7
11	6	10	2	8	4	11	9
12	8	12	4	10	6	2	11
13	10	2	6	12	8	4	13
14	12	4	8	14	10	6	2
15	14	6	10	2	12	8	4
16	16	8	12	4	14	10	6
17	2	10	14	6	16	12	8
18	4	12	16	8	18	14	10
19	6	14	18	10	2	16	12
20	8	16	20	12	4	18	14
21	10	18	2	14	6	20	16
22	12	20	4	16	8	22	18
23	14	22	6	18	10	2	20
24	16	24	8	20	12	4	22
25	18	2	10	22	14	6	24
26	20	4	12	24	16	8	26
27	22	6	14	26	18	10	2
28	24	8	16	28	20	12	4
29	26	10	18	2	22	14	6
30	28	12	20	4	24	16	8
31	30	14	22	6	26	18	10
32	32	16	24	8	28	20	12
33	2	18	26	10	30	22	14
34	4	20	28	12	32	24	16
35	6	22	30	14	34	26	18
36	8	24	32	16	36	28	20

37	10	26	34	18	2	30	22
38	12	28	36	20	4	32	24
39	14	30	38	22	6	34	26
40	16	32	40	24	8	36	28
41	18	34	2	26	10	38	30
42	20	36	4	28	12	40	32
43	22	38	6	30	14	42	34
44	24	40	8	32	16	44	36
45	26	42	10	34	18	2	38
46	28	44	12	36	20	4	40
47	30	46	14	38	22	6	42
48	32	48	16	40	24	8	44
49	34	2	18	42	26	10	46
50	36	4	20	44	28	12	48
51	38	6	22	46	30	14	50
52	40	8	24	48	32	16	52
53	42	10	26	50	34	18	2
54	44	12	28	52	36	20	4
55	46	14	30	54	38	22	6
56	48	16	32	56	40	24	8
57	50	18	34	2	42	26	10
58	52	20	36	4	44	28	12
59	54	22	38	6	46	30	14
60	56	24	40	8	48	32	16

我們觀察可得以下諸性質：

A- 1：在第一輪的淘汰中，1、3、5 號碼等依序被淘汰，顯而易見，淘汰的號碼均為奇數，而留下的號碼必為偶數。

推論 L (1,1,1,N) 必為偶數 (N>1)

A-2：而在第一輪之中，汰一留一的情況下，明顯的，約有 1/2 的人數被淘汰掉，而留下的人數：

當 N：奇數 $\rightarrow$ 汰 $\frac{N+1}{2}$ 留 $\frac{N-1}{2}$

偶數 $\rightarrow$ 汰 $\frac{N}{2}$ 留 $\frac{N}{2}$

A-3：觀察當 $N = L(1,1,1,N)$ 時，其下一項 $L(1,1,1,N+1)$ 跳項成為 2 (如表一)。

而觀察 N 的規律，我們猜測：當 $N = 2^{n-1}$ 時其 $L(1,1,1,N) = 2^{n-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$

ThmA-1 若人數 $N = 2^{n-1}$ 時，則 $L(1,1,1,N) = 2^{n-1} = N$ 。

(pf)：當 $n = 1$ ，即 $N = 1$ ， $L(1,1,1,N) = 1 = 2^0$ ，原性質成立。

設 $n = k$ 時，原性質成立，即 $L(1,1,1,N) = 2^{k-1} = N$ ，

即當人數為 2^{k-1} 人時最後留的號碼為 $L(1,1,1,2^{k-1}) = 2^{k-1}$ 號。

則當 $n = k+1$ 時，有 2^{k+1-1} 人，及其編號為 1、2、3、 2^{k+1-1} 個人，汰一輪之後，

留下偶數號 2、4、6、 2^{k+1-1} 共 2^{k-1} 人，下次淘汰 2 號；

重編碼 $\rightarrow 2 (=1^*)$ 、 $4 (=2^*)$ 、 $6 (=3^*)$ 、 $2^{k+1-1} (= (2^{k-1})^*)$ 共 2^{k-1} 人，

由 $N = 2^{k-1}$ 的性質得知最後留下為 $(2^{k-1})^*$ 號 $(= 2^{k+1-1})$ ，

即 $L(1,1,1,N) = L(1,1,1,2^{k+1-1}) = 2^{k+1-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$ ；

由 M.I. 知：當 $N = 2^{n-1}$ 時， $L(1,1,1,N) = 2^{n-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$ 成立

A-4：觀察 $L(1,1,1,N)$ 的號碼，我們發現到：當 N 不等於 2 的乘幂時 ($N \neq 2^{n-1}$)

則當 N 增加 1 時， $L(1,1,1,N)$ 增加 2，即 $L(1,1,1,N+1) = L(1,1,1,N) + 2$ 。

當 N 等於 2 的乘幂時 ($N = 2^{n-1}$)， $L(1,1,1,N+1) = 2$

(pf)：利用重編號碼：

若人數為 N 人時 $\rightarrow$ 有人數：1、2、3、 $N \rightarrow$ 留下為 $L(1,1,1,N) \text{ — (A)}$

若人數為 $N+1$ 人時 $\rightarrow$ 有人數：1、2、3、 N 、 $N+1$ ，

汰 1 號後留 3、4、5、6、 N 、 $N+1$ 、2，下次淘汰 3 號，共 N 人，

重編碼 $\rightarrow 1^* (=3)$ 、 $2^* (=4)$ 、 $(N-2)^* (=N)$ 、 $(N-1)^* (=N+1)$ 、 $N^* (=2)$

其中 $k^* = k+2$ ， $k \neq N$ ， $N^* = 2$ ，即 $L(1,1,1,N)^* = L(1,1,1,N) + 2$ ，下次淘汰 1^* 號，

由 (A) 知，有人數：1*、2*、3*、 $N^* \rightarrow$ 留下為 $L(1,1,1,N)^* = L(1,1,1,N) + 2$ ，

當 $N \neq 2^{n-1} \rightarrow L(1,1,1,N+1) = L(1,1,1,N) + 2$

當 $N = 2^{n-1} \rightarrow L(1,1,1,N+1) = 2$

A-5：觀察 $L(1,1,1,N)$ 的號碼，我們發現到： $L(1,1,1,2N) = 2 \times L(1,1,1,N)$

(pf)：若人數為 N 人時 $\rightarrow$ 有人數：1、2、3、 $N \rightarrow$ 留下為 $L(1,1,1,N) \text{ — (B)}$

若人數為 $2N$ 人時 $\rightarrow$ 有人數：1、2、3、 $2N$ ，汰一輪後，

留下偶數號：2、4、6、 $2N$ 共 N 人，下次淘汰 2 號，

重編碼 $\rightarrow 2 (=1^*)$ 、 $4 (=2^*)$ 、 $6 (=3^*)$ 、 $2N (=N^*)$ 共 N 人

由 (B) 知留下 $(L(1,1,1,N))^* = 2L(1,1,1,N)$

即 $L(1,1,1,2N) = L(1,1,1,N)^* = 2L(1,1,1,N)$

A-6：若人數 $N \rightarrow 2^{n-1} < N < 2^n$ ，取 $M = N - 2^{n-1}$ ，即 $N = 2^{n-1} + M$

則可得 $L(1,1,1,N) = 2M$

(pf)：由性質 A-4 知 $L(1,1,1,N) = L(1,1,1,2^{n-1} + M) = L(1,1,1,2^{n-1} + M - 1) + 2$

遞迴得 $L(1,1,1,N) = L(1,1,1,2^{n-1}) + 2M = 2M$ (此時 $L(1,1,1,2^{n-1})$ 遞迴後同餘為零)

結論

我們發現，若 N 為總人數，表示成二進位法，則 $L(1,1,1,N)$ 為將其二進位法的最高位數字刪除，而位於末位補零，再化成十進位。

即 $N_A = A_1A_2A_3 \dots A_n$ ， $\rightarrow L(1,1,1,N) = A_2A_3 \dots A_nA_0$ (A_0 為零)

ex：若假設 $N = 20$ ，則二進位後 $N_2 = 10100$ ， $L(1,1,1,N_2) = 1000$ ，

十進位後 $L(1,1,1,N) = 8$

B：若有些幕僚要與海珊同活，則他需位於隊伍中的哪個位置？

我們先定義幕僚在海珊上一個自殺的幕僚的號碼為 $L(1,1,2,N)$ ，我們發現隨著 N 值增加 1，而 $L(1,1,2,N)$ 會增加 2 而當 $N = L(1,1,2,N)$ 時有跳項的產生，這種情形類似於 N 與 $L(1,1,1,N)$ 的關係，於是我們便探討 N 、 $L(1,1,1,N)$ 、 $L(1,1,2,N)$ 之間互相的關聯性

B-1：我們觀察當 $N = L(1,1,2,N)$ 時，其下一項跳項（如表一）

因此我們猜測當 $N = 3 \times 2^{n-1}$ 時，則 $L(1,1,2,N) = 3 \times 2^{n-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$

ThmB-1 若人數 $N = 3 \times 2^{n-1}$ 時，則 $L(1,1,2,N) = 3 \times 2^{n-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$

(pf)：當 $n = 1 \rightarrow N = 3$ ， $L(1,1,2,3) = 3 = 3 \times 2^{n-1}$ ，原性質成立。

令當 $n = k$ 時，原性質 $L(1,1,2,N) = 3 \times 2^{k-1}$ 亦成立，

即人數 $= 3 \times 2^{k-1}$ 人倒數第二個留下的號碼為 $L(1,1,2,N) = 3 \times 2^{k-1}$ 號—(C)

則當 $n = k + 1$ 時，有 $3 \times 2^{k+1-1}$ 人，及其編號為 1、2、3 $\dots 3 \times 2^{k+1-1}$ 個人，汰一輪之後，留下偶數號 2、4、6 $\dots 3 \times 2^{k+1-1}$ 共 $3 \times 2^{k-1}$ 人，下次淘汰 2 號

重編碼 $\rightarrow 2 (= 1^*)$ 、 $4 (= 2^*)$ 、 $6 (= 3^*)$ $\dots 3 \times 2^{k+1-1} (= (3 \times 2^{k-1})^*)$ 共 $N = 3 \times 2^{k-1}$ 人，

由(C)知， $N = 3 \times 2^{k-1}$ 人倒數第二個留下的號碼為 $(3 \times 2^{k-1})^*$ 號 $(= 3 \times 2^{k+1-1})$ ，

即 $L(1,1,2,N) = L(1,1,2,3 \times 2^{k+1-1}) = 3 \times 2^{k+1-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$ ；

由 M.I. 知：當 $N = 3 \times 2^{n-1}$ 時，則 $L(1,1,2,N) = 3 \times 2^{n-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$

為了延伸我們的題目，我們再定義海珊（最後存活的人）為 $L(1,1,1,N)$ 幕僚 $L(1,1,2,N)$ ，而想與幕僚、海珊同活的人號碼依序為 $L(1,1,3,N)$ 、 $L(1,1,4,N)$ 、 $L(1,1,5,N)$

一直下去（如表）我們發現到：

$N = 1 \times 2^{n-1}$ 、 $N = 3 \times 2^{n-1}$ 、 $N = 5 \times 2^{n-1}$ 、 $N = 7 \times 2^{n-1}$ 、 $N = 9 \times 2^{n-1}$ ；
 $L(1,1,1,N)$ 、 $L(1,1,2,N)$ 、 $L(1,1,3,N)$ 、 $L(1,1,4,N)$ 、 $L(1,1,5,N)$ 依序發生跳項

由以上之規律故知當跳項時：

$N = (2K - 1) \times 2^{n-1}$ ， $L(1,1,K,N) = (2K - 1) \times 2^{n-1} \equiv 0 \pmod{N}$

而其他 $L(1,1,K,N+1) = L(1,1,K,N) + 2$

Ex： $N = 150$

$$\begin{aligned}
(1) \quad & 2^{n-1} \quad 150 < 2^{n+1-1} \rightarrow n = 8, \quad 2^{8-1} = 128 \\
& L(1,1,1,150) = L(1,1,1,128+22) = L(1,1,1,128) + 44 = 44 \\
(2) \quad & 3 \times 2^{n-1} \quad 150 < 3 \times 2^{n+1-1} \rightarrow n = 6, \quad 3 \times 2^{6-1} = 96 \\
& L(1,1,2,150) = L(1,1,2,96+54) = L(1,1,2,96) + 108 = 108 \\
(3) \quad & 5 \times 2^{n-1} \quad 150 < 5 \times 2^{n+1-1} \rightarrow n = 5, \quad 5 \times 2^{5-1} = 80 \\
& L(1,1,3,150) = L(1,1,3,80+70) = L(1,1,3,80) + 140 = 140 \\
(4) \quad & 7 \times 2^{n-1} \quad 150 < 7 \times 2^{n+1-1} \rightarrow n = 5, \quad 7 \times 2^{7-1} = 112 \\
& L(1,1,4,150) = L(1,1,4,112+38) = L(1,1,4,112) + 76 = 76
\end{aligned}$$

C：觀察汰二留一（ $\alpha = 2, \beta = 1$ ），我們觀察得以下諸性質：

C-1：在第一輪的淘汰中，1、2、4、5、7、8 號碼等依順序被淘汰，顯而易見，淘汰的號碼均為非 3 的倍數，而留下來的號碼必為 3 的倍數

推論 $L(2,1,1,N)$ 必為 3 的倍數 ($N \equiv 0 \pmod{3}$)

C-2：而在第一輪之中，約有 $2/3$ 的人數被淘汰掉，而留下的人數：

$$\text{當} \begin{cases} 3k+1 : N \equiv 1 \pmod{3} \text{ 汰 } \frac{2N+1}{3} & \text{留 } \frac{N-1}{3} \\ 3k+2 : N \equiv 2 \pmod{3} \text{ 汰 } \frac{2N+2}{3} & \text{留 } \frac{N-2}{3} \\ 3k : N \equiv 0 \pmod{3} \text{ 汰 } \frac{2N}{3} & \text{留 } \frac{N}{3} \end{cases}$$

C-3：觀察當 $N = L(2,1,1,N)$ 時，其下一項跳項（如表：汰二留一）因此，

$$\text{我們猜測當 } N = \begin{cases} 3^{n-1} \\ 2 \times 3^{n-1} \end{cases} \text{ 時，其 } L(2,1,1,N) = \begin{cases} 3^{n-1} \\ 2 \times 3^{n-1} \end{cases} \equiv 0 \pmod{N}$$

ThmC-1 若人數 $N = \begin{cases} 3^{n-1} \\ 2 \times 3^{n-1} \end{cases}$ 時，則 $\begin{cases} L(2,1,1,N) = N = 3^{n-1} \\ L(2,1,1,N) = N = 2 \times 3^{n-1} \end{cases}$

(pf1)：我們先證明若人數 $N = 3^{n-1}$ 時則， $L(2,1,1,N) = N = 3^{n-1}$

當 $n = 1$ 時 $\rightarrow N = 1, L(2,1,1,N) = 1 = 3^{n-1} = N$ ，原性質成立。

令當 $n = k$ 時，原性質 $L(2,1,1,N) = 3^{k-1} = N$ 亦成立，

即人數 3^{k-1} 人，最後留的號碼為 $L(2,1,1,3^{k-1}) = 3^{k-1}$ 號。

則當 $n = k+1$ 時，有 3^{k+1-1} 人，即 1、2、3 3^{k+1-1} 個人，汰一輪之後，

留下三的倍數號碼：3、6、9 3^{k+1-1} 共 3^{k-1} 人，下次淘汰 3 號，

重編碼 $\rightarrow 1^* (=3) \quad 2^* (=6) \quad 3^* (=9) \quad 3^{k-1*} (=3^{k+1-1})$

下次淘汰 $1^*, 2^*, 4^*, 5^*$, 最後留下 3^{k-1*} ($= 3^{k+1-1}$) 號

即 $L(2,1,1,N) = L(2,1,1,3^{k+1-1}) = 3^{k+1-1} = N$,

由 M.I. 知 : $N = 3^{n-1}$ 時 $\rightarrow L(2,1,1,N) = N = 3^{n-1} \equiv 0$ 成立

(pf2): 我們再證明若人數 $N = 2 \times 3^{n-1}$ 時, 則 $L(2,1,1,N) = N = 2 \times 3^{n-1}$

當 $n = 1$ 時 $\rightarrow N = 2 \times 3^{1-1} = 2$, $L(2,1,1,N) = 2 = N$, 原性質成立

令當 $n = k$ 時, 原性質 $L(2,1,1,N) = 2 \times 3^{k-1} = N$ 亦成立 ,

即有 $2 \times 3^{k-1}$ 人最後留下的號碼為 $L(2,1,1,N) = 2 \times 3^{n-1}$ 。

則當 $n = k + 1$ 時, 有 $2 \times 3^{k+1-1}$ 個人, 即 1、2、3 $2 \times 3^{k+1-1}$ 個人,

汰一輪之後留下 3 的倍數號碼: 3、6、9 $2 \times 3^{k+1-1}$ 共 $2 \times 3^{k-1}$ 人, 下次淘汰 3 號,

重編碼 $\rightarrow 1^* (= 3) \setminus 2^* (= 6) \setminus 3^* (= 9) \setminus 2 \times 3^{k-1*} (= 2 \times 3^{k+1-1})$

下次淘汰 $1^*, 2^*, 4^*, 5^*$ 一直下去。

由 $n = k$ 得知, 則最後留下 $2 \times 3^{k-1*}$ ($= 2 \times 3^{k+1-1}$) 號,

即 $L(2,1,1,N) = L(2,1,1,2 \times 3^{k+1-1}) = 2 \times 3^{k+1-1} = N$,

由 M.I. 知, 當 $n = k + 1$ 時, 原性質成立,

即 $N = 2 \times 3^{n-1} \rightarrow L(2,1,1,N) = 2 \times 3^{n-1} \equiv 0 \pmod{N}$ 成立

由 (pf1)(pf2) 得証: 若人數 $N = \begin{cases} 3^{n-1} \\ 2 \times 3^{n-1} \end{cases}$ 時, 則 $\begin{cases} L(2,1,1,N) = N = 3^{n-1} \\ L(2,1,1,N) = N = 2 \times 3^{n-1} \end{cases}$

C-4: 觀察 $L(2,1,1,N)$ 的號碼, 我們發現到: $L(2,1,1,N)$ 的號碼,

當 N 增加 2 時 $L(2,1,1,N)$ 增加 3 $L(2,1,1,N+2) = L(2,1,1,N) + 3$,

但 $N = L(2,1,1,N)$ 時, 下一項會跳項,

即 $L(2,1,1,N+2) = 3$

ThmC-2 若人數 $N \neq 3^{n-1}$ 或 $2 \times 3^{n-1}$, 則 $L(2,1,1,N+2) = L(2,1,1,N) + 3$

當 $N = 3^{n-1}$ 或 $2 \times 3^{n-1}$, 則 $L(2,1,1,N+2) = 3$

(pf): 用重編號碼

若人數為 N 人時 $\rightarrow$ 有人數: 1、2、3 $N \rightarrow$ 留下為 $L(2,1,1,N)$

若人數為 $N+2$ 人時 $\rightarrow$ 有人數: 1、2、3 N 、 $N+1$ 、 $N+2$, 汰 1 號 2 號留 4、5、6
 N 、 $N+1$ 、 $N+2$ 、3, 下次汰 4 號, 共 N 人, 重編碼 $1^* (= 4) \setminus 2^* (= 5)$

$(N-2)^* (= N+1) \setminus (N-1)^* (= N+2) \setminus N^* (= 3)$

下一次淘汰 1^* 共 N 人,

若 $L(2,1,1,N)^* \neq N^* \rightarrow$ 則留 $L(2,1,1,N+2) = L(2,1,1,N)^* = L(2,1,1,N) + 3$

即 $L(2,1,1,N+2) = L(2,1,1,N) + 3$

若 $L(2,1,1,N)^* = N^* \rightarrow$ 則留 $N^* = 3$, 即 $L(2,1,1,N+2) = 3$

C-5: 觀察 $L(2,1,1,N)$ 的號碼, 我們發現到 $L(2,1,1,3N) = 3 \times L(2,1,1,N)$

(pf): 若人數為 N 人時 $\rightarrow$ 有人數: 1、2、3 $N \rightarrow$ 留下為 $L(2,1,1,N) - (D)$

若人數為 $3N$ 人時 $\rightarrow$ 有人數: 1、2、3 $3N$, 汰一輪後,

留下號碼：3、6、9、 $3N$ 共 N 人，下次淘汰 3 號，
 重編碼 $3 (= 1^*)$ 、 $6 (= 2^*)$ 、 $9 (= 3^*)$ 、 $3N (= N^*)$ 共 N 人
 由 (D) 知留下 $(L(2,1,1,N))^* = 3L(2,1,1,N)$
 即 $L(2,1,1,3N) = L(2,1,1,N)^* = 3L(2,1,1,N)$
 若 N 為奇數則 $L(2,1,1,3N) = 3 \times L(2,1,1,N)$

ex : (1) $L(2,1,1,3N) = 3 \times L(2,1,1,N) \rightarrow N = 5$ 時，
 $L(2,1,1,15) = 9 = 3 \times L(2,1,1,5) (L(2,1,1,5) = 3)$
 (2) $L(2,1,1,3N) = 3 \times L(2,1,1,N) \rightarrow N = 12$ 時，
 $L(2,1,1,36) = 27 = 3 \times L(2,1,1,12) (L(2,1,1,12) = 9)$

C-6：若有些幕僚要與海珊同活，則他需位於隊伍中的哪個位置？

我們先定義幕僚在海珊上一個自殺的幕僚的號碼為 $L(2,1,2,N)$ ，我們發現隨著 N 值增加 2，而 $L(2,1,2,N)$ 會增加 3，而當 $N = L(2,1,2,N)$ 時有跳項的產生，這種情形類似於 N 與 $L(2,1,1,N)$ 的關係，於是我們便探討 N 、 $L(2,1,1,N)$ 、 $L(2,1,2,N)$ 之間的關聯性，觀察當 $N = L(2,1,2,N)$ 時，其下一項跳項（如表：汰二留一）

因此我們猜測當 $N = \begin{cases} 5 \times 3^{n-1} \\ 4 \times 3^{n-1} \end{cases}$ 時，則 $L(2,1,2,N) = \begin{cases} 5 \times 3^{n-1} \\ 4 \times 3^{n-1} \end{cases} = N \equiv 0 \pmod{N}$

ThmC-3 若人數 $N = \begin{cases} 5 \times 3^{n-1} \\ 4 \times 3^{n-1} \end{cases}$ 時，則 $L(2,1,2,N) = \begin{cases} 5 \times 3^{n-1} \\ 4 \times 3^{n-1} \end{cases} = N \equiv 0 \pmod{N}$

(pf1)：當 $n=1 \rightarrow N=5$ ， $L(2,1,2,N) = 5 = 5 \times 3^{n-1}$ ，原性質成立。

令當 $n=k$ 時，原性質 $L(2,1,2,N) = 5 \times 3^{k-1}$ 亦成立，

即人數 $= 5 \times 3^{k-1}$ 人倒數第二個留下的號碼為 $L(2,1,2,N) = 5 \times 3^{k-1}$ 號—(E)

則當 $n=k+1$ 時，有 $5 \times 3^{k+1-1}$ 人，及其編號為 1、2、3、 $5 \times 3^{k+1-1}$ 個人，

汰一輪之後，留下 3 的倍數號 3、6、9、 $5 \times 3^{k+1-1}$ 共 $5 \times 3^{k-1}$ 人，下次淘汰 3 號

重編碼 $\rightarrow 3 (= 1^*)$ 、 $6 (= 2^*)$ 、 $9 (= 3^*)$ 、 $5 \times 3^{k+1-1} (= (5 \times 3^{k-1})^*)$

共 $N = 5 \times 3^{k-1}$ ，由(E)知， $N = 5 \times 3^{k-1}$ 人倒數第二個留下的號碼為 $(5 \times 3^{k-1})^*$ 號 $(= 5 \times 3^{k+1-1})$ ，

即 $L(2,1,2,N) = L(2,1,2, 5 \times 3^{k+1-1}) = 5 \times 3^{k+1-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$ ；

由 M.I. 知：當 $N = 5 \times 3^{n-1}$ 時，則 $L(2,1,2,N) = 5 \times 3^{n-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$

(pf2)：當 $n=1 \rightarrow N=4$ ， $L(2,1,2,N) = 4 = 4 \times 3^{n-1}$ ，原性質成立。

令當 $n=k$ 時，原性質 $L(2,1,2,N) = 4 \times 3^{k-1}$ 亦成立，

即人數 $= 4 \times 3^{k-1}$ 人倒數第二個留下的號碼為 $L(2,1,2,N) = 4 \times 3^{k-1}$ 號—(F)

則當 $n=k+1$ 時，有 $4 \times 3^{k+1-1}$ 人，及其編號為 1、2、3、 $4 \times 3^{k+1-1}$ 個人，

汰一輪之後，留下 3 的倍數號 3、6、9、 $4 \times 3^{k+1-1}$ 共 $4 \times 3^{k-1}$ 人，下次淘汰 3 號

重編碼 $\rightarrow 3 (= 1^*)$ 、 $6 (= 2^*)$ 、 $9 (= 3^*)$ 、 $4 \times 3^{k+1-1} (= (4 \times 3^{k-1})^*)$ 共 $N = 4 \times 3^{k-1}$ ，

由(F)知， $N = 4 \times 3^{k-1}$ 人倒數第二個留下的號碼為 $(4 \times 3^{k-1})^*$ 號 $(= 4 \times 3^k)$ ，

即 $L(2,1,2,N) = L(2,1,2, 4 \times 3^{k+1-1}) = 4 \times 3^{k+1-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$ ；

由 M.I. 知：當 $N = 4 \times 3^{n-1}$ 時，則 $L(2,1,2,N) = 4 \times 3^{n-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$

為了延伸我們的題目，我們再定義海珊（最後存活的人）為 $L(2,1,1,N)$ 幕僚 $L(2,1,2,N)$ ，而想與幕僚、海珊同活的人號碼依序為 $L(2,1,3,N)$ $L(2,1,4,N)$ $L(2,1,5,N)$

一直下去（如表）我們發現到：

$$N = \begin{cases} 1 \times 3^{n-1} \\ 2 \times 3^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} 4 \times 3^{n-1} \\ 5 \times 3^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} 7 \times 3^{n-1} \\ 8 \times 3^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} 10 \times 3^{n-1} \\ 11 \times 3^{n-1} \end{cases};$$

$L(2,1,1,N)$ $L(2,1,2,N)$ $L(2,1,3,N)$ $L(2,1,4,N)$ 依序發生跳項

$$N = \begin{cases} (3K-2) \times 3^{n-1} \\ (3K-1) \times 3^{n-1} \end{cases}, L(2,1,K,N) = \begin{cases} (3K-2) \times 3^{n-1} \\ (3K-1) \times 3^{n-1} \end{cases} \equiv 0 \pmod{N}$$

而其他 $L(2,1,K,N+2) = L(2,1,K,N) + 3$

D：由觀察（ $\alpha = 1$ ， $\beta = 1$ ）和（ $\alpha = 2$ ， $\beta = 1$ ）的性質，我們導出以下的遞迴通式：

$$\text{啟始條件：} \begin{pmatrix} L(\alpha, \beta, K, K) = 1 \\ L(\alpha, \beta, K, K+1) = 2 \\ \vdots \\ L(\alpha, \beta, K, K+\alpha+1) = \alpha \end{pmatrix}$$

$L(\alpha, \beta, K, N+\alpha+\beta) = L(\alpha, \beta, K, N+\beta) + \alpha + \beta$ ，當 $L(\alpha, \beta, K, N+\beta) \leq N$

$L(\alpha, \beta, K, N+\alpha+\beta) = L(\alpha, \beta, K, N+\beta) - N + \alpha$ ，當 $L(\alpha, \beta, K, N+\beta) > N$

(pf)：我們先假定一開始有 $\alpha + \beta + N$ 人。首先，先淘汰 α 人、留下 β 人，再從 $\alpha + \beta + 1$ 號開始淘汰。

重編碼 $\rightarrow \alpha + \beta + 1 (=1^*)$ $(\alpha + \beta + k) = k^*$ $\alpha + \beta + N (=N^*)$,

$\alpha + k = (N+k)^*$ $\alpha + \beta (=N+\beta)^*$

(1) 若留下的號碼 $L(\alpha, \beta, K, N+\beta)$ 小於或等於 N 時，顯而易見，

則只需將新的號碼再加上 $\alpha + \beta$ ，便可得原來的號碼，

故 $L(\alpha, \beta, K, N+\alpha+\beta) = L(\alpha, \beta, K, N+\beta) + \alpha + \beta$ ，當 $L(\alpha, \beta, K, N+\beta) \leq N$

(2) 若留下的號碼 $L(\alpha, \beta, K, N+\beta)$ 大於 N 時，顯而易見，

則須將新的號碼減 N ，再加上 α ，便可得原來的號碼，

$L(\alpha, \beta, K, N+\alpha+\beta) = L(\alpha, \beta, K, N+\beta) - N + \alpha$ ，當 $L(\alpha, \beta, K, N+\beta) > N$ 故得證。

轉變後通項： $L(\alpha, \beta, K, \bar{N} + \alpha) = L(\alpha, \beta, K, \bar{N}) + (\alpha + \beta)$ ，當 $L(\alpha, \beta, K, \bar{N}) \leq \bar{N} - \beta$

$L(\alpha, \beta, K, \bar{N} + \alpha) = L(\alpha, \beta, K, \bar{N}) - \bar{N} + \alpha + \beta$ ，當 $L(\alpha, \beta, K, \bar{N}) > \bar{N} - \beta$

由觀察（ $\alpha = 1$ ， $\beta = 1$ ）和（ $\alpha = 2$ ， $\beta = 1$ ）的性質我們導出以下的倍率式：

$$L(\alpha, \beta, K, (\alpha + \beta)t) = (\alpha + \beta) \left\lceil \frac{L(\alpha, \beta, K, \beta t)}{\beta} \right\rceil - \beta \left\lceil \frac{L(\alpha, \beta, K, \beta t)}{\beta} \right\rceil + L(\alpha, \beta, K, \beta t)$$

(其中 $\left\lceil \frac{L}{\beta} \right\rceil$ 表不小於 $\frac{L}{\beta}$ 的最小整數)

pf : 有號碼 1、2、3 α 、 $\alpha + 1$ $\alpha + \beta$ 、 $\alpha + \beta + 1$ $(\alpha + \beta)t$ 等人排成一環狀。

首先，先汰 α 留 β ，則 1、2 α 依序淘汰，留下 $\alpha + 1 \sim \alpha + \beta$ 等人，

接著再從 $\alpha + \beta + 1$ 開始淘汰，淘汰一輪。

重編碼：我們將 $\alpha + 1 (= 1^*)$ $\alpha + \beta (= \beta^*)$ ，則 $(\alpha + \beta)t (= \beta t^*)$ ，

剩下的總人數為 βt 人。

取其中任一號碼 $L^*(L = L(\alpha, \beta, K, \beta t))$ ， $L^* = (\beta a - b)^*$ ，其中 $b < \beta$ ，

$$\text{則 } a = \left\lceil \frac{L}{\beta} \right\rceil, b = \beta \left\lceil \frac{L}{\beta} \right\rceil - L$$

我們發現 βa 與 $\beta a - b$ 之差為 b ，則 $L = (\alpha + \beta) \times a - b = (\alpha + \beta) \left\lceil \frac{L}{\beta} \right\rceil - \beta \left\lceil \frac{L}{\beta} \right\rceil + L$

E：觀察汰三留一 ($\alpha = 3, \beta = 1$)，我們觀察得以下諸性質：

E-1：在第一輪的淘汰中，1、2、3、5、6、7、9、10、11 號碼等依順序被淘汰，
顯而易見，淘汰的號碼均為非 4 的倍數，而留下來的號碼必為 4 的倍數。

推論 $L(3,1,1,N)$ 必為 4 的倍數 ($N \equiv 0 \pmod{4}$)

E-2：而在第一輪之中，約有 $3/4$ 的人數被淘汰掉，而留下的人數：

$$\text{當 } N = \begin{cases} N \equiv 1 \pmod{4} & \text{汰 } \frac{3N+1}{4} \text{ 留 } \frac{N-1}{4} \\ N \equiv 2 \pmod{4} & \text{汰 } \frac{3N+2}{4} \text{ 留 } \frac{N-2}{4} \\ N \equiv 3 \pmod{4} & \text{汰 } \frac{3N+3}{4} \text{ 留 } \frac{N-3}{4} \\ N \equiv 0 \pmod{4} & \text{汰 } \frac{3N}{4} \text{ 留 } \frac{N}{4} \end{cases}$$

E-3：觀察當 $N = L(3,1,1,N)$ 時，其下一項跳項（如圖：汰三留一）因此，

$$\text{我們猜測當 } N = \begin{cases} 4^{n-1} \\ 2 \times 4^{n-1} \\ 3 \times 4^{n-1} \end{cases} \text{ 時，其 } L(3,1,1,N) = \begin{cases} 4^{n-1} \\ 2 \times 4^{n-1} \equiv 0 \pmod{N} \\ 3 \times 4^{n-1} \end{cases}$$

ThmE-1 若人數 $N = \begin{cases} 4^{n-1} \\ 2 \times 4^{n-1} \\ 3 \times 4^{n-1} \end{cases}$ 時，則 $\begin{cases} L(3,1,1,N) = N = 4^{n-1} \\ L(3,1,1,N) = N = 2 \times 4^{n-1} \\ L(3,1,1,N) = N = 3 \times 4^{n-1} \end{cases}$

(pf1): 由通項遞迴公式得知：

$$L(3,1,1,N+3) = L(3,1,1,N) + 4 \rightarrow \text{當 } L(3,1,1,N) = N-1 \text{ (A)}$$

$$L(3,1,1,N+3) = 4 \rightarrow \text{當 } L(3,1,1,N) = N \text{ (B)}$$

由(B)知下項產生跳項的條件為 $L(3,1,1,N) = N$

若 $L(3,1,1,N_0)$ 產生跳項，即 $L(3,1,1,N_0) = N_0 \equiv 0$

則下一跳項設其為 $N_0 + 3k$

$$\text{由 } L(3,1,1, N_0 + 3k) = L(3,1,1, N_0) + 4k = 4k$$

$$\text{由 } L(3,1,1, N_0 + 3k) = N_0 + 3k = 4k \rightarrow k = N_0$$

即 $N_0 + 3N_0 = 4N_0$ ，即 N_0 發生跳項時，下一個跳項為 $4N_0$

我們發現到 $N_0 \rightarrow 4N_0 \rightarrow 4^2 N_0 \rightarrow 4^{n-1} N_0$ 皆成立

可推引以下性質：若 $N = m$ 為啟始跳項（第一跳項）則當 $N = m \times 4^{n-1}$ 時亦會產生跳項

(pf): 當 $n = 1$ 時， $N = m \times 4^0 = m$ 會產生跳項，原性質成立。

設 $n = k$ 時， $N = m \times 4^{k-1}$ 會產生跳項，原性質成立。

$$\begin{aligned} \text{則當 } n = k + 1 \text{ 時，} N &= m \times 4^{k+1-1} = L(3,1,1,N) = L(3,1,1, m \times 4^{k-1} + 3 \times m \times 4^{k-1}) \\ &= L(3,1,1, m \times 4^{k-1}) + 4 \times m \times 4^{k-1} \\ &= 4 \times m \times 4^{k-1} = m \times 4^{k+1-1} = N \text{ 亦會產生跳項，原性質亦成立。} \end{aligned}$$

由 M . I . 知原性質成立

觀察 $K = 1$ 的啟始條件

$$\begin{cases} L(3,1,1,1) = 1 \\ L(3,1,1,2) = 2 \\ L(3,1,1,3) = 3 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{即 } N = 1, 2, 3 \text{ 時 } L(3,1,1,N) = N \text{ 產生啟始跳項} \\ &\text{由前知：} 1 \times 4^{n-1}, 2 \times 4^{n-1}, 3 \times 4^{n-1} \text{ 依序產生啟始跳項} \end{aligned}$$

觀察 $K = 2$ 的啟始條件

$$\begin{cases} L(3,1,2,2) = 1 \rightarrow L(3,1,2,2+3) = 1+4 \rightarrow L(3,1,2,5) = 5 \\ L(3,1,2,3) = 2 \rightarrow L(3,1,2,3+3) = 2+4 \rightarrow L(3,1,2,6) = 6 \\ L(3,1,2,4) = 3 \rightarrow L(3,1,2,4+3) = 3+4 \rightarrow L(3,1,2,7) = 7 \end{cases}$$

即 $N = 5, 6, 7$ 時 $L(3,1,1,N) = N$ 產生啟始跳項

由前知： $5 \times 4^{n-1}, 6 \times 4^{n-1}, 7 \times 4^{n-1}$ 依序產生啟始跳項

考慮一般的 K 的啟始條件

$$\begin{cases} L(3,1,K,K) = 1 \\ L(3,1,K,K+1) = 2 \\ L(3,1,K,K+2) = 3 \end{cases} \quad \begin{aligned} &L(3,1,K,K+3t) = 1+4t = K+3t \rightarrow t = K-1 \\ &\text{代回得 } N = K+3K-3 = 4K-3 \\ &\rightarrow L(3,1,K,4K-3) = (4K-3) \text{ 發生啟始跳項} \rightarrow \\ &N = (4K-3) \times 4^{n-1}, L(3,1,K,N) \text{ 發生跳項} \\ &\text{同理可得：} N = (4K-2) \times 4^{n-1}, L(3,1,K,N) \text{ 發生跳項} \\ &N = (4K-1) \times 4^{n-1}, L(3,1,K,N) \text{ 發生跳項} \end{aligned}$$

我們得到：

$$N = \begin{cases} 1 \times 4^{n-1} \\ 2 \times 4^{n-1} \\ 3 \times 4^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} 5 \times 4^{n-1} \\ 6 \times 4^{n-1} \\ 7 \times 4^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} 9 \times 4^{n-1} \\ 10 \times 4^{n-1} \\ 11 \times 4^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} 13 \times 4^{n-1} \\ 14 \times 3^{n-14} \\ 15 \times 4^{n-1} \end{cases};$$

$L(3,1,1,N), L(3,1,2,N), L(3,1,3,N), L(3,1,4,N)$ 依序發生跳項

$$N = \begin{cases} (4K-3) \times 4^{n-1} \\ (4K-2) \times 4^{n-1} \\ (4K-1) \times 4^{n-1} \end{cases}, L(3,1,K,N) = \begin{cases} (4K-3) \times 4^{n-1} \equiv 0 \pmod{N} \\ (4K-2) \times 4^{n-1} \equiv 0 \pmod{N} \\ (4K-1) \times 4^{n-1} \equiv 0 \pmod{N} \end{cases}$$

而其他 $L(3,1,K,N+3) = L(3,1,K,N) + 4$

F：由以上性質，我們想推出汰 α 留一之規律性，

由通項遞迴公式得知：

$$L(\alpha, 1, 1, N + \alpha) = L(\alpha, 1, 1, N) + (\alpha + 1), \text{ 當 } L(\alpha, 1, 1, N) = N - 1$$

$$L(\alpha, 1, 1, N + \alpha) = (\alpha + 1), \text{ 當 } L(\alpha, 1, 1, N) = N$$

$$\text{因汰一留一為 } N = 2^{n-1} \rightarrow L(1, 1, 1, N) = 2^{n-1}$$

發生跳項

$$\text{汰二留一為 } N = \begin{cases} 3^{n-1} \\ 2 \times 3^{n-1} \end{cases} \rightarrow L(2, 1, 1, N) = \begin{cases} 3^{n-1} \\ 2 \times 3^{n-1} \end{cases}$$

發生跳項

$$\text{而汰三留一即為 } N = \begin{cases} 4^{n-1} \\ 2 \times 4^{n-1} \\ 3 \times 4^{n-1} \end{cases} \rightarrow L(3, 1, 1, N) = \begin{cases} 4^{n-1} \\ 2 \times 4^{n-1} \\ 3 \times 4^{n-1} \end{cases}$$

發生跳項

故我們發現到若為汰 α 留一的情形為：

$$\text{當 } N = \begin{cases} (\alpha + 1)^{n-1} \\ 2 \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ 3 \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ 4 \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ \vdots \\ \alpha \times (\alpha + 1)^{n-1} \end{cases} \rightarrow \text{其 } L(\alpha, 1, 1, N) = \begin{cases} (\alpha + 1)^{n-1} \\ 2 \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ 3 \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ 4 \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ \vdots \\ \alpha \times (\alpha + 1)^{n-1} \end{cases} \text{ 發生跳項 } \alpha \text{ 種系統。且，}$$

$$N = \begin{cases} 1 \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ 2 \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ 3 \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ 4 \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ \vdots \\ \alpha \times (\alpha + 1)^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} (\alpha + 2) \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ (\alpha + 3) \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ (\alpha + 4) \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ (\alpha + 5) \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ \vdots \\ 2\alpha \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ (2\alpha + 1) \times (\alpha + 1)^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} (2\alpha + 3) \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ (2\alpha + 4) \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ (2\alpha + 5) \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ (2\alpha + 6) \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ \vdots \\ 3\alpha \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ (3\alpha + 1) \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ (3\alpha + 2) \times (\alpha + 1)^{n-1} \end{cases} \dots ;$$

$L(\alpha, 1, 1, N)$ $L(\alpha, 1, 2, N)$ $L(\alpha, 1, 3, N)$ 依序發生跳項

(pf): 由通項遞迴公式得知:

$$L(\alpha, 1, 1, N + \alpha) = L(\alpha, 1, 1, N) + (\alpha + 1) \rightarrow \text{當 } L(\alpha, 1, 1, N) = N - 1 - (A)$$

$$L(\alpha, 1, 1, N + \alpha) = (\alpha + 1) \rightarrow \text{當 } L(\alpha, 1, 1, N) = N - (B)$$

由(B)知下項產生跳項的條件為 $L(\alpha, 1, 1, N) = N$ 若 $L(\alpha, 1, 1, N_0)$ 產生跳項,

即 $L(\alpha, 1, 1, N_0) = N_0 \equiv 0$ 則下一跳項設其為 $N_0 + \alpha k$

$$\text{由 } L(\alpha, 1, 1, N_0 + \alpha k) = L(\alpha, 1, 1, N_0) + (\alpha + 1)k = (\alpha + 1)k$$

$$\text{由 } L(\alpha, 1, 1, N_0 + \alpha k) = N_0 + \alpha k = (\alpha + 1)k \rightarrow k = N_0$$

即 $N_0 + \alpha N_0 = (\alpha + 1)N_0$, 即 N_0 發生跳項時, 下一個跳項為 $(\alpha + 1)N_0$.

我們發現到 $N_0 \rightarrow (\alpha + 1)N_0 \rightarrow (\alpha + 1)^2 N_0 \rightarrow (\alpha + 1)^{n-1} N_0$ 皆成立

→ 推引以下性質: 若 $N = m$ 為啟始跳項 (第一跳項)

則當 $N = m \times (\alpha + 1)^{n-1}$ 時亦會產生跳項

當 $n = 1$ 時, $N = m \times (\alpha + 1)^0 = m$ 亦會產生跳項, 原性質成立。

設 $n = k$ 時, $N = m \times (\alpha + 1)^{k-1}$ 會產生跳項, 原性質成立。

則當 $n = k + 1$ 時, $N = m \times (\alpha + 1)^{k+1-1}$

$$\begin{aligned} L(\alpha, 1, 1, N) &= L(\alpha, 1, 1, m \times (\alpha + 1)^{k-1} + \alpha \times m \times (\alpha + 1)^{k-1}) \\ &= L(\alpha, 1, 1, m \times (\alpha + 1)^{k-1}) + (\alpha + 1) \times m \times (\alpha + 1)^{k-1} \\ &= (\alpha + 1) \times m \times (\alpha + 1)^{k-1} = m \times (\alpha + 1)^{k+1-1} = N \end{aligned}$$

由 M.I. 知原性質成立

觀察 $K = 1$, 的啟始條件

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\alpha, 1, 1, 1) = 1 \quad \text{即 } N = 1, 2, 3 \quad \alpha \text{ 時 } L(\alpha, 1, 1, N) = N \text{ 產生啟始跳項} \\ L(\alpha, 1, 1, 2) = 2 \quad \text{由前知: } 1 \times (\alpha + 1)^{n-1}, 2 \times (\alpha + 1)^{n-1}, 3 \times (\alpha + 1)^{n-1} \quad \alpha \times (\alpha + 1)^{n-1} \\ L(\alpha, 1, 1, 3) = 3 \quad \text{依序產生啟始跳項} \\ \vdots \\ L(\alpha, 1, 1, \alpha) = \alpha \end{array} \right.$$

觀察 $K = 2$, 的啟始條件

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\alpha, 1, 2, 2) = 1 \rightarrow L(\alpha, 1, 2, 2 + \alpha) = 1 + (\alpha + 1) \rightarrow L(\alpha, 1, 2, 2 + \alpha) = 2 + \alpha \\ L(\alpha, 1, 2, 3) = 2 \rightarrow L(\alpha, 1, 2, 3 + \alpha) = 2 + (\alpha + 1) \rightarrow L(\alpha, 1, 2, 3 + \alpha) = 3 + \alpha \\ L(\alpha, 1, 2, 4) = 3 \rightarrow L(\alpha, 1, 2, 4 + \alpha) = 3 + (\alpha + 1) \rightarrow L(\alpha, 1, 2, 4 + \alpha) = 4 + \alpha \\ \vdots \\ L(\alpha, 1, 2, \alpha + 1) = \alpha \rightarrow L(\alpha, 1, 2, \alpha + 1 + \alpha) = \alpha + (\alpha + 1) \\ \rightarrow L(\alpha, 1, 2, 2\alpha + 1) = 2\alpha + 1 \end{array} \right.$$

即 $N = 2 + \alpha, 3 + \alpha, 4 + \alpha, \dots, (2\alpha + 1)$ 時 $L(\alpha, 1, 1, N) = N$ 產生啟始跳項

由前知： $(2 + \alpha) \times (\alpha + 1)^{n-1}, (3 + \alpha) \times (\alpha + 1)^{n-1}, (4 + \alpha) \times (\alpha + 1)^{n-1}$

$(2\alpha + 1) \times (\alpha + 1)^{n-1}$ 依序產生啟始跳項。

考慮一般的 K

$$L(\alpha, 1, K, K + \alpha t) = 1 + (\alpha + 1)t = K + \alpha t \rightarrow t = K - 1$$

$$L(\alpha, 1, K, K) = 1$$

$$\text{代回得 } N = K + \alpha(K - 1) = (\alpha + 1)K - \alpha$$

$$L(\alpha, 1, K, K + 1) = 2$$

$$\text{同理 } N = (\alpha + 1)K - (\alpha - 1)$$

$$L(\alpha, 1, K, K + 2) = 3$$

$\vdots$

$\vdots$

$$N = (\alpha + 1)K - 2$$

$$L(\alpha, 1, K, K + (\alpha - 1)) = \alpha$$

$$N = (\alpha + 1)K - 1$$

依序產生跳項

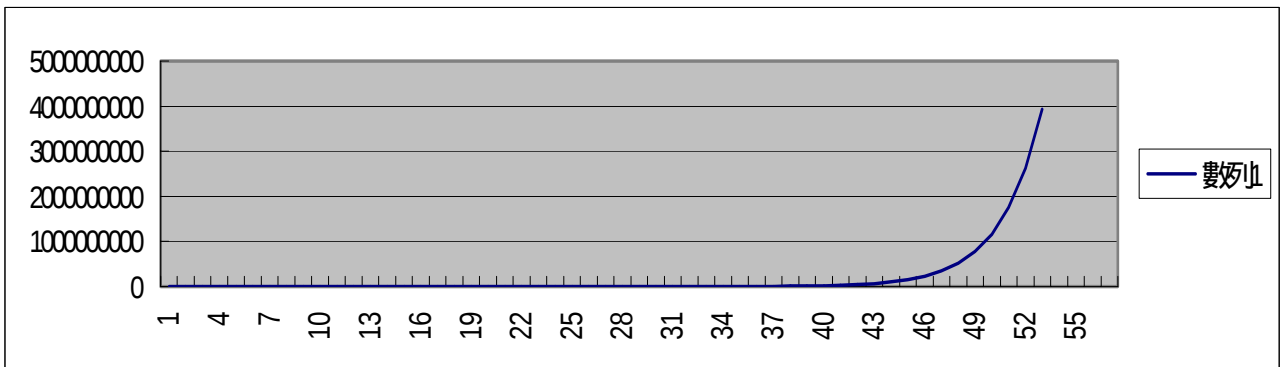
G：由於我們已經初步完成汰 α 留一的討論，也觀察並發現到汰 α 留一的規律性，
所以我們想再研究汰一留二 ($\alpha = 1, \beta = 2$) 的規律性

(表二：其中 $f(x) = 1.8250543158 \times (1.5)^n$)

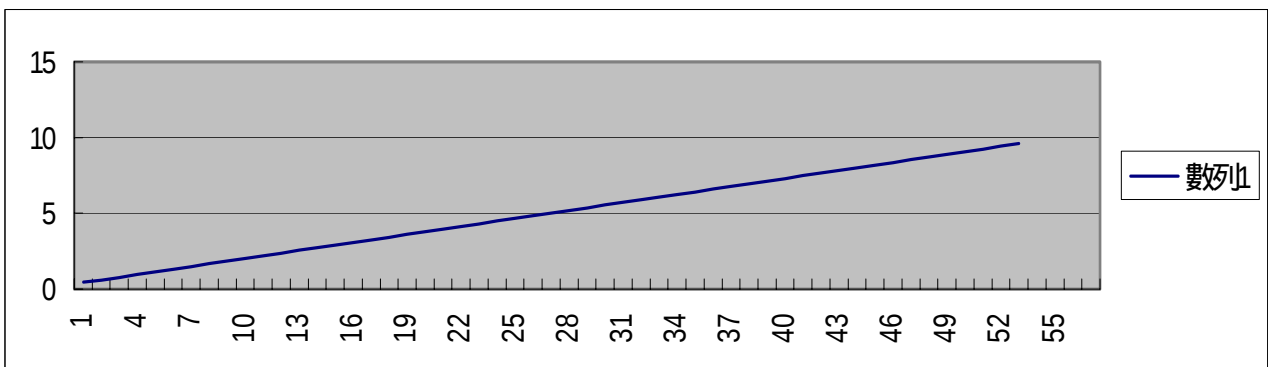
A	N	$L(1, 2, 1, N)$	Log N	N與f(x)差
1	3	3	0.477121255	0.262418526
2	4	3	0.602059991	-0.106372211
3	6	5	0.77815125	-0.159558316
4	9	8	0.954242509	-0.239337474
5	14	14	1.146128036	0.140993789
6	21	21	1.322219295	0.211490684
7	31	30	1.491361694	-0.182763974
8	47	47	1.672097858	0.225854039
9	70	69	1.84509804	-0.161218941
10	105	104	2.021189299	-0.241828412
11	158	158	2.198657087	0.137257382
12	237	237	2.374748346	0.205886073
13	355	354	2.550228353	-0.19117089
14	533	533	2.726727209	0.213243665
15	799	798	2.902546779	-0.180134502
16	1199	1199	3.078819183	0.229798247

17	1798	1797	3.254789687	-0.15530263
18	2697	2696	3.430880946	-0.232953944
19	4046	4046	3.607025878	0.150569083
20	6069	6069	3.783117137	0.225853625
21	9103	9102	3.959184543	-0.161219562
22	13655	13655	4.135291704	0.258170657
23	20482	20481	4.311372362	-0.112744015
24	30723	30722	4.487463621	-0.169116023
25	46085	46085	4.663559592	0.246325966
26	69127	69126	4.83964771	-0.130511051
27	103691	103691	5.015741063	0.304233423
28	155536	155535	5.191830926	-0.043649865
29	233304	233303	5.367922185	-0.065474798
30	349956	349955	5.544013444	-0.098212197

(圖：N 與 A 之關係圖)



(圖：Log N 與 A 之關係圖)



G-1：由圖表中 N 和 $L(1,2,1,N)$ 的關係和通項遞迴公式得知：

$$\boxed{\text{ThmG-1}} \quad L(1,2,1,N+1) = \begin{cases} L(1,2,1,N)+3 & \text{若 } L(1,2,1,N) < N-1 \\ L(1,2,1,N)+3-N & \text{若 } L(1,2,1,N) = \begin{cases} N-1 \\ N \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{接著，我們也由通項倍率式得知：} \quad L(1,2,1,3N) = \begin{cases} \frac{3}{2}L(1,2,1,2N) + \frac{1}{2} & \text{若 } L(1,2,1,2N) \text{ 為奇數} \\ \frac{3}{2}L(1,2,1,2N) & \text{若 } L(1,2,1,2N) \text{ 為偶數} \end{cases}$$

(pf)：若人數為 $3N$ 人，即 $1、2、3、4 \dots 3N-3、3N-2、3N-1、3N$

則汰一輪後，剩 $2、3、5、6 \dots 3N-1、3N$

重編碼 $\rightarrow 1^* (=2) \quad 2^* (=3) \quad 3^* (=5) \quad (2N-2)^* (=3N-3) \quad (2N-1)^* (=3N-1) \quad (2N)^* (=3N)$

即 $(2k-1)^* (=3k-1) \quad (2k)^* (=3k) \quad 1^*、2^*、3^* \quad (2N)^*$ 留下 $L(1,2,1,2N)^*$

若 $L(1,2,1,2N)$ 為奇數，即 $L(1,2,1,2N) = 2k-1$ ，

$$k = \frac{L(1,2,1,2N)+1}{2} \rightarrow L(1,2,1,3N) = 3k-1 = \frac{3}{2}L(1,2,1,2N) + \frac{1}{2}$$

若 $L(1,2,1,2N)$ 為偶數，即 $L(1,2,1,2N) = 2k$ ，

$$k = \frac{L(1,2,1,2N)}{2} \rightarrow L(1,2,1,3N) = 3k = \frac{3}{2}L(1,2,1,2N) \text{ 故得證}$$

性質：

若 $L(1,2,1,N)$ 為跳項，即 $L(1,2,1,N) = \begin{cases} N-1 \\ N \end{cases}$

若 $L(1,2,1,N) = N-1$ (奇偶不同)，則 $L(1,2,1,N+1) = 2$

若 $L(1,2,1,N) = N$ (奇偶同)，則 $L(1,2,1,N+1) = 3$

$L(1,2,1,N+1) = L(1,2,1,N) + 3 \rightarrow L(1,2,1,N+1)$ 和 $L(1,2,1,N)$ 奇偶不同，

又 $N+1$ 和 N 奇偶不同

$\rightarrow$ 若 $L(1,2,1,N)$ 非跳項且 $N、L(1,2,1,N)$ 奇偶性相同

$\rightarrow N+1, L(1,2,1,N+1)$ 奇偶性同

$\rightarrow$ 若 $L(1,2,1,N)$ 非跳項且 $N、L(1,2,1,N)$ 奇偶性不同

$\rightarrow N+1, L(1,2,1,N+1)$ 奇偶性不同

G-2：若 $L(1,2,1,N)$ 為跳項且

若 N 奇， $L(1,2,1,N)$ 偶 $\rightarrow N+1$ 偶， $L(1,2,1,N+1) = 2$ 偶，

由此遞迴可知，下一個跳項 $(N^*、L(1,2,1,N)^*)$ 奇偶同

若 N 偶， $L(1,2,1,N)$ 奇 $\rightarrow N+1$ 奇， $L(1,2,1,N+1) = 2$ 偶，

由此遞迴可知，下一個跳項 $(N^*、L(1,2,1,N)^*)$ 奇偶不同

若 N 偶， $L(1,2,1,N)$ 偶 $\rightarrow N+1$ 奇， $L(1,2,1,N+1) = 3$ 奇，

由此遞迴可知，下一個跳項 $(N^*、L(1,2,1,N)^*)$ 奇偶同

若 N 奇, $L(1,2,1,N)$ 奇 $\rightarrow N+1$ 偶, $L(1,2,1,N+1) = 3$ 奇,
由此遞迴可知, 下一個跳項 (N^* , $L(1,2,1,N)^*$) 奇偶不同

G-3: 若 $L(1,2,1,N)$ 為跳項時

令 N 奇、 $L(1,2,1,N)$ 奇 $\rightarrow N+1$ 偶、 $L(1,2,1,N+1) = 3$

若 $N^* = N+1+k$ 發生新跳項由遞迴 $L(1,2,1,N) = L(1,2,1,N+1) + 3k$

$\rightarrow L(1,2,1,N+1+k) = 3+3k$ 和 $N+1+k$

奇偶性不同 ($(3+3k) + (N+1+k) = (N+4+4k)$ 為奇)

$\rightarrow L(1,2,1,N+1+k) \neq N+1+k$, $L(1,2,1,N)^* \neq N^* \rightarrow L(1,2,1,N)^* = N^* - 1$

$\rightarrow L(1,2,1,N) = L(1,2,1,N+1+k) = 3+3k = N+k \rightarrow 2k = N-3$, $k = \frac{N-3}{2}$

$N^* = N+1 + \frac{N-3}{2} = \frac{3}{2}N - \frac{1}{2}$ 即 N^* 為 $N \times \frac{3}{2}$ 捨去小數 (小數為 0.5)

若 N 奇, $L(1,2,1,N)$ 偶 $\rightarrow N+1$ 偶, $L(1,2,1,N+1) = 2$

令 $N^* = N+1+k$ 發生新跳項由遞迴,

$L(1,2,1,N)^* = L(1,2,1,N+1+k) = L(1,2,1,N+1) + 3k = 2+3k$ 和 $N+1+k$

同奇偶 ($2+3k+N+1+k = N+3+4k$ 偶)

$\rightarrow L(1,2,1,N)^* = L(1,2,1,N+1+k) = N+1+k = N^*$

$\rightarrow 2+3k = N+1+k \rightarrow 2k = N-1 \rightarrow k = \frac{N-1}{2}$

$\rightarrow N^* = N+1 + \frac{N-1}{2} = \frac{3}{2}N + \frac{1}{2}$ 即 N 為 $N \times \frac{3}{2}$ 進位小數 (小數為 0.5)

若 N 偶 $\rightarrow N = 2k$, 且 $L(1,2,1,N)$ 奇 $\rightarrow L(1,2,1,N) = 2k-1$

$\rightarrow L(1,2,1,3k) = \frac{3}{2}L(1,2,1,2k) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(2k-1) + \frac{1}{2} = 3k-1 \Rightarrow$ 取 $N^* = 3k$

$L(1,2,1,N)^* = N^* - 1 \rightarrow$ 發生跳項

若 N 偶 $\rightarrow N = 2k$ 且 $L(1,2,1,N)$ 偶 $\rightarrow L(1,2,1,N) = 2k$

$\rightarrow L(1,2,1,3k) = \frac{3}{2}L(1,2,1,2k) = 3k \rightarrow$ 取 $N^* = 3k$

$\rightarrow L(1,2,1,N)^* = N^* \rightarrow$ 發生跳項, 即 N 偶下一項跳項 $N^* = \frac{3}{2}N$

由 G-2、G-3 知

若 $(N, L(1,2,1,N))$ 奇偶性

{	奇奇: 下一跳項 = $N \times \frac{3}{2}$ 捨去
	奇偶: 下一跳項 = $N \times \frac{3}{2}$ 進位
	偶奇: 下一跳項 = $N \times \frac{3}{2}$
	偶偶: 下一跳項 = $N \times \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}
N \text{ 奇 ; } L(1,2,1,N) \text{ 奇 : 下一跳項} &= \text{前} \times \frac{3}{2} \text{ 捨 } \begin{cases} N * \text{奇} L(1,2,1,N) * \text{偶} \\ N * \text{偶} L(1,2,1,N) * \text{奇} \end{cases} \\
N \text{ 奇 ; } L(1,2,1,N) \text{ 偶 : 下一跳項} &= \text{前} \times \frac{3}{2} \text{ 進 } \begin{cases} N * \text{奇} L(1,2,1,N) * \text{奇} \\ N * \text{偶} L(1,2,1,N) * \text{偶} \end{cases} \\
N \text{ 偶 ; } L(1,2,1,N) \text{ 奇 : 下一跳項} &= \text{前} \times \frac{3}{2} \begin{cases} N * \text{奇} L(1,2,1,N) * \text{偶} \\ N * \text{偶} L(1,2,1,N) * \text{奇} \end{cases} \\
N \text{ 偶 ; } L(1,2,1,N) \text{ 偶 : 下一跳項} &= \text{前} \times \frac{3}{2} \text{ 捨 } \begin{cases} N * \text{奇} L(1,2,1,N) * \text{奇} \\ N * \text{偶} L(1,2,1,N) * \text{偶} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{故知下一跳項} \quad \text{前} \times \frac{3}{2}$$

由迴歸分析我們發現到，N 的跳項為一近似表示式表示

當 $N = (1.8250543158 \times (1.5)^n)$ ， $L(1,2,1,N)$ 發生跳項

例：若給定一任意數 5000

$$\text{則 } 1.8250543158 \times (1.5)^n < 5000 < 1.8250543158 \times (1.5)^{n+1}$$

找到 $n=19$ ，上式即為 $4046 < 5000 < 6069$ ，由 G-2 知 $L(1,2,1,4046) = 4046 \equiv 0$

$$\text{可求 } L(1,2,1,5000) = (5000 - 4046) \times 3 = 2862$$

$$\text{再舉一任意數 } 10000, 1.8250543158 \times (1.5)^n < 10000 < 1.8250543158 \times (1.5)^{n+1}$$

$$\text{求得 } n=21, \text{ 即為 } L(1,2,1,9103) < L(1,2,1,10000) < L(1,2,1,13655)$$

$$\text{由 G-2 知 } L(1,2,1,9103) = 9102, L(1,2,1,10000) = (10000 - 9103) \times 3 - 1 = 2990$$

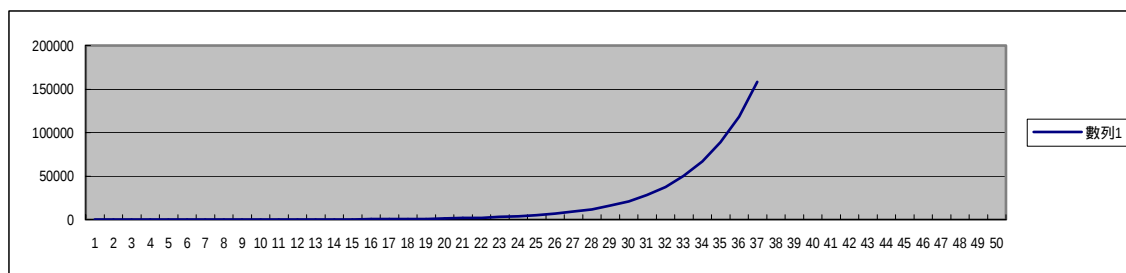
由上述方法可求得任意 N 項之 $L(1,2,1,N)$

H：我們再研究汰一留三 ($\alpha = 1, \beta = 3$),

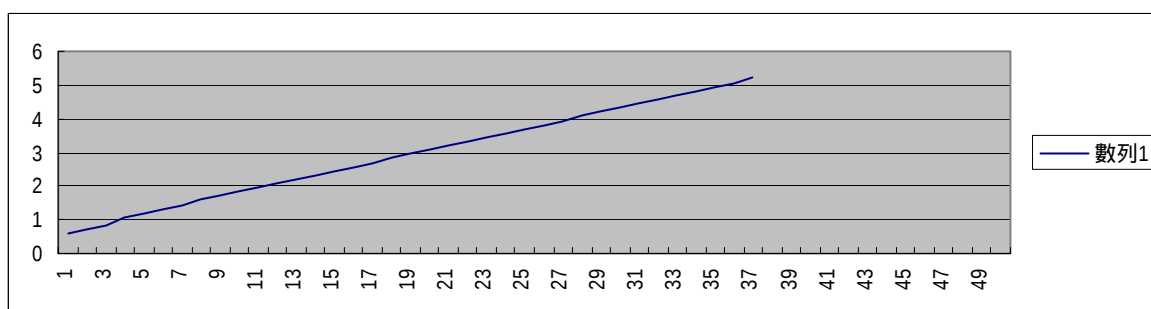
(表三：其中 $f(x) = 3.77162 \times (4/3)^n$)

A	N	$L(1,2,1,N)$	Log N	N與f(x)差
1	4	4	0.60206	-1.02883
2	5	4	0.69897	-1.7051
3	7	7	0.845098	-1.94014
4	12	11	1.079181	0.079818
5	16	15	1.20412	0.106424
6	21	19	1.322219	-0.19143
7	28	26	1.447158	-0.25525
8	38	38	1.579784	0.326339
9	50	48	1.69897	-0.23155
10	67	66	1.826075	0.024603
11	89	87	1.94939	-0.30053
12	119	118	2.075547	-0.06737
13	159	159	2.201397	0.243504

(圖：N 與 A 之關係圖)



(圖：Log N 與 A 之關係圖)



由通項遞迴公式得知：

$$\boxed{\text{ThmH-1}} L(1,3,1,N+1) = \begin{cases} L(1,3,1,N) + 4 & \text{若 } L(1,3,1,N) < N-1 \\ L(1,3,1,N) + 4 - N & \text{若 } L(1,3,1,N) = N-1 \\ 4 & \text{若 } L(1,3,1,N) = N \end{cases}$$

由迴歸分析我們發現到，N 的跳項由一近似表示式

$$\boxed{\text{當 } N = (3.77162 \times (4/3)^n), L(1,3,1,N) \text{ 發生跳項}}$$

我們又想觀察汰二留二，汰三留三 汰 α 留 α

I：若為汰二留二($\alpha = \beta = 2$)，我們由通項遞迴公式得

$$L(2,2,1,N+2) = \begin{cases} L(2,2,1,N) + 4 & \text{若 } L(2,2,1,N) < N-2 \\ 3 & \text{若 } L(2,2,1,N) = N-1 \\ 4 & \text{若 } L(2,2,1,N) = N \end{cases}$$

得知跳項條件為 $L(2,2,1,N) = N-1$ 及 $L(2,2,1,N) = N$ ，可得以下性質：

I-1：在第一輪的淘汰中 1、2、5、6、9、10 號碼依序被淘汰，顯而易見，約留下 $1/2$ 的人數，留下的號碼 $\text{Number} \equiv 3 \text{ or } 0 \pmod{4}$ 。

I-2：觀察當總人數 N 為奇數， $N = \begin{cases} L(2,2,1,N) \\ L(2,2,1,N) + 1 \end{cases}$ 和 N 為偶數， $N = L(2,2,1,N)$ 時，

其下一項跳項，因此我們猜測：

當 N 為奇數時，N 呈現 $\frac{4 \times 2^n + 1}{3}, \frac{4 \times 2^n - 1}{3}$ 循環跳項，

即當 $N = \frac{4 \times 2^n + (-1)^{n+1}}{3} = L(2,2,1, N) + \begin{cases} 0(n=1,3,5,7,\dots) \\ 1(n=2,4,6,8,\dots) \end{cases}$ 時跳項。

當 N 為偶數時， $N = 2 \times 2^{n-1} = L(2,2,1, N)$ 時跳項。

Thml-1 . 若人數 N 為奇數， $N = \frac{4 \times 2^n + (-1)^{n+1}}{3}$ 時，呈循環跳項。

(pf): 令 $n=2k-1$ ，即 $N = \frac{4 \times 2^{2k-1} + (-1)^{2k}}{3}$ 產生跳項 $\Rightarrow N = \frac{4 \times 2^{2k-1} + 1}{3}$ ，

且 $L(2,2,1, N) = N \equiv (\text{mod } N)$ ，此時為跳項，則 $L(2,2,1, N+1) = 4$ 為偶數
觀察其遞迴方式，若隔 $2k$ 項產生其下一項跳項，

即 $L(2,2,1, N+2k) = 4k$ 為偶數不可能等於 $N+2k$ (N 為奇數)

$L(2,2,1, N+2k) = 4k = (N+2k) - 1$ 產生跳項，解出 $2k = N - 1$

則 $N+2k = N + N - 1 = 2N - 1 = 2 \times \frac{4 \times 2^{2k-1} + 1}{3} - 1 = \frac{4 \times 2^{2k} + 2 - 3}{3} = \frac{4 \times 2^{2k} - 1}{3}$

此時 $n=2k$ 為 $n=2k-1$ 的下一個跳項，且跳項成 3

令 $n=2k$ 為偶數，即 $N = \frac{4 \times 2^{2k} + (-1)^{2k+1}}{3} \Rightarrow N = \frac{4 \times 2^{2k} - 1}{3}$ ，產生跳項

當 $L(2,2,1, N) = N - 1 \equiv -1 (\text{mod } N)$ ，此時為跳項，則 $L(2,2,1, N+1) = 3$ 為奇數
觀察其遞迴方式，若隔 $2k$ 項產生其下一項跳項，

即 $L(2,2,1, N+2k) = 3 + 4(k-1)$ 為奇數須等於 $N+2k$ (N 為奇數)

$L(2,2,1, N+2k) = 3 + 4k - 4 = N + 2k$ ，解出 $2k = N + 1$

則 $N+2k = 2N + 1 = 2 \times \frac{4 \times 2^{2k} - 1}{3} + 1 = \frac{4 \times 2^{2k+1} - 2 + 3}{3} = \frac{4 \times 2^{2k+1} + 1}{3}$

此時 $n=2k+1$ 為 $n=2k$ 的下一個跳項，故得證

Thml-2 若人數 N 為偶數，且 $N = 2 \times 2^{n-1} = L(2,2,1, N)$ 時跳項。

(pf): 令 $n=k$ ，即 $N = 2 \times 2^{k-1} = L(2,2,1, N)$ ，當 $L(2,2,1, N) = N \equiv 0 (\text{mod } N)$ ，此時為跳項，
觀察其遞迴方式，若隔 $2k$ 項產生其下一項跳項

則 $L(2,2,1, N+2k) = N + 2 = 4k$ ，解出 $2k = N$ ；則 $N+2k = 2N = 2 \times (2 \times 2^{k-1}) = 2 \times 2^k$

此時 $n=k+1$ 為 $n=k$ 的下一個跳項

J: 若為汰三留三($\alpha = \beta = 3$)，我們由通式遞迴可得。

$L(3,3,1, N+3) = \begin{cases} L(3,3,1, N) + 6 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{cases}$ 當 $\begin{cases} L(3,3,1, N) < N - 3 \\ L(3,3,1, N) = N - 2 \\ L(3,3,1, N) = N - 1 \\ L(3,3,1, N) = N \end{cases}$ 得知跳項條件為：

$L(3,3,1, N) = N - 2$ 、 $L(3,3,1, N) = N - 1$ 及 $L(3,3,1, N) = N$ 可得以下性質

J-1：在第一輪的淘汰中 1、2、3、7、8、9，號碼依序被淘汰，顯而易見，約留下 1/2 的人數。留下的號碼 $\text{Number} \equiv 4, 5, 0 \pmod{6}$ 。

$$\text{J-2：觀察當總人數 } N = 3k - 2, N = \begin{cases} L(2,2,1, N) \\ L(2,2,1, N) + 1 \\ L(2,2,1, N) + 2 \end{cases}, N = 3k - 1, N = \begin{cases} L(2,2,1, N) \\ L(2,2,1, N) + 2 \\ L(2,2,1, N) + 1 \end{cases} \text{ 和 } N = 3k,$$

$N = L(2,2,1, N)$ 時，其下一項跳項，因此我們猜測：

當 $N = 3k - 2$ 時， N 呈現 $\frac{12 \times 2^n + 4}{7}, \frac{12 \times 2^n + 1}{7}, \frac{12 \times 2^n - 5}{7}$ 之循環跳項，

$$\text{即當 } N = \frac{12 \times 2^n + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}{3} = L(3,3,1, N) + \begin{pmatrix} 0(n = 3k - 2) \\ 1(n = 3k - 1) \\ 2(n = 3k) \end{pmatrix} \text{ 時跳項。}$$

當 $N = 3k - 1$ 時， N 呈現 $\frac{18 \times 2^n - 1}{7}, \frac{18 \times 2^n + 5}{7}, \frac{12 \times 2^n - 4}{7}$ 之循環跳項，

$$\text{即當 } N = \frac{18 \times 2^n + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}}{7} = L(3,3,1, N) + \begin{pmatrix} 1(n = 3k - 2) \\ 0(n = 3k - 1) \\ 2(n = 3k) \end{pmatrix} \text{ 時跳項。}$$

$N = 3k$ ，且 $N = 3 \times 2^n = L(3,3,1, N)$ 時跳項。

$$\text{ThmJ-1 若總人數 } N = 3k - 2, \text{ 且 } N = \frac{12 \times 2^n + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}{7} \text{ 時呈循環跳項。}$$

(pf)：令 $n = 3k - 2$ ，即 $N = \frac{12 \times 2^{3k-2} + 4}{7}$ ，當 $L(N) = N \equiv 0 \pmod{N}$ ，

此時為跳項，即 $L(3,3,1, N + 3) = 6$ ，觀察其遞迴方式，若隔 $3k$ 項產生其下一項跳項，即 $L(3,3,1, N + 3k) = 6k$ ，不可能等於 $N + 3k$ ($N = 3k - 2$)

$L(3,3,1, N + 3k) = 6k = (N + 3k) - 1$ 產生跳項，解出 $3k = N - 1$

$$\text{則 } N + 3k = N + N - 1 = 2N - 1 = 2 \times \frac{12 \times 2^{3k-2} + 4}{7} - 1 = \frac{12 \times 2^{3k-1} + 8 - 7}{7} = \frac{12 \times 2^{3k-1} + 1}{7}$$

此時 $n = 3k - 1$ 為 $n = 3k - 2$ 的下一個跳項，且跳項成 5

$$\text{令 } n = 3k - 1, \text{ 即 } N = \frac{12 \times 2^{3k-1} + 1}{7},$$

當 $L(3,3,1, N) = N - 1 \equiv -1 \pmod{N}$ ，此時為跳項，即 $L(3,3,1, N + 3) = 5$

觀察其遞迴方式，若隔 $3k$ 項產生其下一項跳項，

即 $L(3,3,1, N + 3k) = 6k - 1$ ，不可能等於 $N + 3k$ ($N = 3k - 2$)

$L(3,3,1,N+3k) = 6k - 1 = (N+3k) - 2$ 產生跳項，解出 $3k = N - 1$

$$\text{則 } N+3k = N + N - 1 = 2N - 1 = 2 \times \frac{12 \times 2^{3k-1} + 1}{7} - 1 = \frac{12 \times 2^{3k} + 2 - 7}{7} = \frac{12 \times 2^{3k} - 5}{7}$$

此時 $n = 3k$ 為 $n = 3k - 1$ 的下一個跳項，且跳項成 4

$$\text{令 } n = 3k, \text{ 即 } N = \frac{12 \times 2^{3k} - 5}{7}$$

當 $L(3,3,1,N) = N - 2 \equiv -2 \pmod{N}$ ，此時為跳項，即 $L(3,3,1,N+3) = 4$

觀察其遞迴方式，若隔 $3k$ 項產生其下一項跳項，

即 $L(3,3,1,N+3k) = 6k - 2$ ，等於 $N+3k$ ($N = 3k - 2$)

$L(3,3,1,N+3k) = 6k - 2 = (N+3k)$ 產生跳項，解出 $3k = N + 2$

則 $L(3,3,1,N+3k) = 6k - 2$ ，且 $3k = N + 2$ ；

$$\text{則 } N+3k = N + N + 2 = 2N + 2 = 2 \times \frac{12 \times 2^{3k} - 5}{7} + 2 = \frac{12 \times 2^{3k+1} - 10 + 14}{7} = \frac{12 \times 2^{3k+1} + 4}{7}$$

此時 $n = 3k + 1$ 為 $n = 3k$ 的下一個跳項，且跳項成 6；故得證

ThmJ-2 若總人數 $N = 3k - 1$ ，且 $N = \frac{18 \times 2^n + \begin{cases} -1 \\ 5 \\ -4 \end{cases}}{3}$ 時呈循環跳項

(pf): 令 $n = 3k - 2$ ，即 $N = \frac{18 \times 2^{3k-2} - 1}{7}$ ，當 $L(3,3,1,N) = N - 1 \equiv -1 \pmod{N}$ ，

此時為跳項，即 $L(3,3,1,N+3) = 5$

觀察其遞迴方式，若隔 $3k$ 項產生其下一項跳項，

即 $L(3,3,1,N+3k) = 6k - 1$ ，必等於 $N+3k$ ($N = 3k - 1$)

$L(3,3,1,N+3k) = 6k - 1 = (N+3k)$ 產生跳項，解出 $3k = N + 1$

$$\text{則 } N+3k = N + N + 1 = 2N + 1 = 2 \times \frac{18 \times 2^{3k-2} - 1}{7} + 1 = \frac{18 \times 2^{3k-1} - 2 + 7}{7} = \frac{18 \times 2^{3k-1} + 5}{7}$$

此時 $n = 3k - 1$ 為 $n = 3k - 2$ 的下一個跳項，且跳項成 6

$$\text{令 } n = 3k - 1, \text{ 即 } N = \frac{18 \times 2^{3k-1} + 5}{7},$$

當 $L(3,3,1,N) = N = 0 \pmod{N}$ ，此時為跳項，即 $L(3,3,1,N+3) = 6$

觀察其遞迴方式，若隔 $3k$ 項產生其下一項跳項，

即 $L(3,3,1,N+3k) = 6k$ ，不可能等於 $N+3k$ ($N = 3k - 1$)

$L(3,3,1,N+3k) = 6k = (N+3k) - 2$ 產生跳項，解出 $3k = N - 2$

$$\text{則 } N+3k = N + N - 2 = 2N - 2 = 2 \times \frac{18 \times 2^{3k-1} + 5}{7} - 2 = \frac{18 \times 2^{3k} + 10 - 14}{7} = \frac{18 \times 2^{3k} - 4}{7}$$

此時 $n = 3k$ 為 $n = 3k - 1$ 的下一個跳項，且跳項成 4

$$\text{令 } n = 3k, \text{ 即 } N = \frac{18 \times 2^{3k} - 4}{7}$$

當 $L(3,3,1,N) = N - 2 \equiv -2 \pmod{N}$ ，此時為跳項，即 $L(3,3,1,N+3) = 4$

觀察其遞迴方式，若隔 $3k$ 項產生其下一項跳項，

即 $L(3,3,1,N+3k) = 6k - 2$ ，等於 $N + 3k$ ($N = 3k - 1$)

$L(3,3,1,N+3k) = 6k - 2 = (N + 3k) - 1$ 產生跳項，解出 $3k = N + 1$

$$\text{則 } N + 3k = N + N + 1 = 2N + 1 = 2 \times \frac{18 \times 2^{3k} - 4}{7} + 1 = \frac{18 \times 2^{3k+1} - 8 + 7}{7} = \frac{18 \times 2^{3k+1} - 1}{7}$$

此時 $n=3k+1$ 為 $n=3k$ 的下一個跳項，且跳項成 5；故得證

ThmJ-3 若總人數 $N=3k$ ，且 $N = 3 \times 2^{n-1} = L(3,3,1,N)$ 時跳項

(pf): 令 $n=k$ ，即 $N = 3 \times 2^{k-1} = L(3,3,1,N)$ ，當 $L(N) = N \equiv 0 \pmod{N}$ ，此時為跳項，

觀察其遞迴方式，若隔 $3k$ 項其下一項跳項，則 $L(3,3,1,N+3k) = N + 3k = 6k$ ，

解出 $3k=N$ ；則 $N + 3k = 2N = 2 \times (3 \times 2^{k-1}) = 3 \times 2^k$ ，此時 $n=k+1$ 為 $n=k$ 的下一個跳項；

故得證

K：由上知

汰二留二

$$\text{總人數 } N = 2k - 1, N = \begin{cases} L(2,2,1,N) \\ L(2,2,1,N) + 1 \end{cases} = \frac{4 \times 2^n + (-1)^{n+1}}{3} \text{ 呈循環跳項}$$

$$\text{總人數 } N = 2k, N = L(2,2,1,N) = 2 \times 2^n$$

汰三留三

$$\text{總人數 } N = 3k - 2, N = \begin{cases} L(2,2,1,N) \\ L(2,2,1,N) + 1 \\ L(2,2,1,N) + 2 \end{cases} = \frac{12 \times 2^n + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}}{7} \text{ 呈循環跳項}$$

$$\text{總人數 } N = 3k - 1, N = \begin{cases} L(2,2,1,N) \\ L(2,2,1,N) + 2 \\ L(2,2,1,N) + 1 \end{cases} = \frac{18 \times 2^n + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}}{7} \text{ 呈循環跳項}$$

$$\text{總人數 } N = 3k, N = L(2,2,1,N) = 3 \times 2^n$$

將汰 4 留 4~汰 10 留 10 的跳項公式放至附錄。

討論若為汰 α 留 α ($\alpha = \beta$) 的狀況下，我們猜測：

當總人數 $N \neq \alpha \times k$ 時，則 $N = \frac{(\alpha \times A) \times 2^n + B}{2^\alpha - 1}$ 產生跳項，A、B 為尚未找出規律的值，

即總人數 N 分成模 α 的餘數 0、1、2、 $\alpha - 1$ 個系統，

各有不同的循環跳項，但皆形同 $\frac{(\alpha \times A) \times 2^n + B}{2^\alpha - 1}$

當總人數 $N = \alpha \times k$ 時，則 $N = \alpha \times 2^n = L(\alpha, \alpha, 1, N)$

陸、總結

我們根據以上的研究，歸納出以下性質：

汰一留一：

A-3：觀察當 $N = L(1,1,1,N)$ 時，其下一項 $L(1,1,1,N+1)$ 跳項成為 2（如表一）。

而觀察 N 的規律，我們猜測：當 $N = 2^{n-1}$ 時其 $L(1,1,1,N) = 2^{n-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$

ThmA-1 若人數 $N = 2^{n-1}$ 時，則 $L(1,1,1,N) = 2^{n-1} = N$ 。

A-4：觀察 $L(1,1,1,N)$ 的號碼，我們發現到：當 N 不等於 2 的乘幂時 ($N \neq 2^{n-1}$)

則當 N 增加 1 時， $L(1,1,1,N)$ 增加 2，即 $L(1,1,1,N+1) = L(1,1,1,N) + 2$ 。

當 N 等於 2，即 $L(1,1,1,N+1) = 2^{n-1}$ 。 $L(1,1,1,N+1) = 2$

A-5：觀察 $L(1,1,1,N)$ 的號碼，我們發現到： $L(1,1,1,2N) = 2 \times L(1,1,1,N)$

A-6：若人數 $N \rightarrow 2^{n-1} < N < 2^n$ ，取 $M = N - 2^{n-1}$ ，即 $N = 2^{n-1} + M$

則可得 $L(1,1,1,N) = 2M$

結論

我們發現，若 N 為總人數，表示成二進位法，則 $L(1,1,1,N)$ 為將其二進位法的最高位數字刪除，而位於末位補零，再化成十進位。

即 $N_A = A_1A_2A_3 \dots A_n$ ， $\rightarrow L(1,1,1,N) = A_2A_3 \dots A_nA_0$ (A_0 為零)

ex：若假設 $N = 20$ ，則二進位後 $N_2 = 10100$ ， $L(1,1,1,N_2) = 1000$ ，十進位後 $L(1,1,1,N) = 8$

汰一留一之倒數幾項：

B-1：我們觀察當 $N = L(1,1,2,N)$ 時，其下一項跳項（如表：汰一留一）

因此我們猜測當 $N = 3 \times 2^{n-1}$ 時，則 $L(1,1,2,N) = 3 \times 2^{n-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$

ThmB-1 若人數 $N = 3 \times 2^{n-1}$ 時，則 $L(1,1,2,N) = 3 \times 2^{n-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$

$N = 1 \times 2^{n-1}$ 、 $N = 3 \times 2^{n-1}$ 、 $N = 5 \times 2^{n-1}$ 、 $N = 7 \times 2^{n-1}$ 、 $N = 9 \times 2^{n-1}$ ；
 $L(1,1,1,N)$ $L(1,1,2,N)$ $L(1,1,3,N)$ $L(1,1,4,N)$ $L(1,1,5,N)$ 依序發生跳項

汰二留一：

C-3：觀察當 $N = L(2,1,1,N)$ 時，其下一項跳項（如表：汰二留一）因此，

我們猜測當 $N = \begin{cases} 3^{n-1} \\ 2 \times 3^{n-1} \end{cases}$ 時，其 $L(2,1,1,N) = \begin{cases} 3^{n-1} \\ 2 \times 3^{n-1} \end{cases} \equiv 0 \pmod{N}$

ThmC-1 若人數 $N = \begin{cases} 3^{n-1} \\ 2 \times 3^{n-1} \end{cases}$ 時，則 $\begin{cases} L(2,1,1,N) = N = 3^{n-1} \\ L(2,1,1,N) = N = 2 \times 3^{n-1} \end{cases}$

C-4：觀察 $L(2,1,1,N)$ 的號碼，我們發現到： $L(2,1,1,N)$ 的號碼，
當 N 增加 2 時 $L(2,1,1,N)$ 增加 3
 $L(2,1,1,N+2) = L(2,1,1,N) + 3$ ，但 $N = L(2,1,1,N)$ 時，下一項會跳項，
即 $L(2,1,1,N+2) = 3$

ThmC-2 若人數 $N \neq 3^{n-1}$ 或 $2 \times 3^{n-1}$ ，則 $L(2,1,1,N+2) = L(2,1,1,N) + 3$

當 $N = 3^{n-1}$ 或 $2 \times 3^{n-1}$ ，則 $L(2,1,1,N+2) = 3$

汰二留一之倒數幾項：

C-6：觀察當 $N = L(2,1,2,N)$ 時，其下一項跳項（如表：汰二留一）

因此我們猜測當 $N = \begin{cases} 5 \times 3^{n-1} \\ 4 \times 3^{n-1} \end{cases}$ 時，則 $L(2,1,2,N) = \begin{cases} 5 \times 3^{n-1} \\ 4 \times 3^{n-1} \end{cases} = N \equiv 0 \pmod{N}$

ThmC-3 若人數 $N = \begin{cases} 5 \times 3^{n-1} \\ 4 \times 3^{n-1} \end{cases}$ 時，則 $L(2,1,2,N) = \begin{cases} 5 \times 3^{n-1} \\ 4 \times 3^{n-1} \end{cases} = N \equiv 0 \pmod{N}$

$$N = \begin{cases} 1 \times 3^{n-1} \\ 2 \times 3^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} 4 \times 3^{n-1} \\ 5 \times 3^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} 7 \times 3^{n-1} \\ 8 \times 3^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} 10 \times 3^{n-1} \\ 11 \times 3^{n-1} \end{cases};$$

$L(2,1,1,N) \setminus L(2,1,2,N) \setminus L(2,1,3,N) \setminus L(2,1,4,N)$ 依序發生跳項

$$N = \begin{cases} (3K-2) \times 3^{n-1} \\ (3K-1) \times 3^{n-1} \end{cases}, L(2,1,K,N) = \begin{cases} (3K-2) \times 3^{n-1} \\ (3K-1) \times 3^{n-1} \end{cases} \equiv 0 \pmod{N}$$

而其他 $L(2,1,K,N+2) = L(2,1,K,N) + 3$

汰三留一：

E-3：觀察當 $N = L(3,1,1,N)$ 時，其下一項跳項（如圖：汰三留一）因此，

$$\text{我們猜測當 } N = \begin{cases} 4^{n-1} \\ 2 \times 4^{n-1} \\ 3 \times 4^{n-1} \end{cases} \text{ 時，其 } L(3,1,1,N) = \begin{cases} 4^{n-1} \\ 2 \times 4^{n-1} \\ 3 \times 4^{n-1} \end{cases} \equiv 0 \pmod{N}$$

ThmE-1 若人數 $N = \begin{cases} 4^{n-1} \\ 2 \times 4^{n-1} \\ 3 \times 4^{n-1} \end{cases}$ 時，則 $\begin{cases} L(3,1,1,N) = N = 4^{n-1} \\ L(3,1,1,N) = N = 2 \times 4^{n-1} \\ L(3,1,1,N) = N = 3 \times 4^{n-1} \end{cases}$

汰三留一之倒數幾項：

$$N = \begin{cases} 1 \times 4^{n-1} \\ 2 \times 4^{n-1} \\ 3 \times 4^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} 5 \times 4^{n-1} \\ 6 \times 4^{n-1} \\ 7 \times 4^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} 9 \times 4^{n-1} \\ 10 \times 4^{n-1} \\ 11 \times 4^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} 13 \times 4^{n-1} \\ 14 \times 3^{n-14} \\ 15 \times 4^{n-1} \end{cases};$$

$L(3,1,1,N), L(3,1,2,N), L(3,1,3,N), L(3,1,4,N)$ 依序發生跳項

$$N = \begin{cases} (4K-3) \times 4^{n-1} \\ (4K-2) \times 4^{n-1} \\ (4K-1) \times 4^{n-1} \end{cases}, L(3,1,K,N) = \begin{cases} (4K-3) \times 4^{n-1} \equiv 0 \pmod{N} \\ (4K-2) \times 4^{n-1} \equiv 0 \pmod{N} \\ (4K-1) \times 4^{n-1} \equiv 0 \pmod{N} \end{cases}$$

而其他 $L(3,1,K,N+3) = L(3,1,K,N) + 4$

汰 α 留一：

$$N = \begin{cases} 1 \times (\alpha+1)^{n-1} \\ 2 \times (\alpha+1)^{n-1} \\ 3 \times (\alpha+1)^{n-1} \\ 4 \times (\alpha+1)^{n-1} \\ \vdots \\ \alpha \times (\alpha+1)^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} (\alpha+2) \times (\alpha+1)^{n-1} \\ (\alpha+3) \times (\alpha+1)^{n-1} \\ (\alpha+4) \times (\alpha+1)^{n-1} \\ (\alpha+5) \times (\alpha+1)^{n-1} \\ \vdots \\ 2\alpha \times (\alpha+1)^{n-1} \\ (2\alpha+1) \times (\alpha+1)^{n-1} \end{cases}, N = \begin{cases} (2\alpha+3) \times (\alpha+1)^{n-1} \\ (2\alpha+4) \times (\alpha+1)^{n-1} \\ (2\alpha+5) \times (\alpha+1)^{n-1} \\ (2\alpha+6) \times (\alpha+1)^{n-1} \\ \vdots \\ 3\alpha \times (\alpha+1)^{n-1} \\ (3\alpha+1) \times (\alpha+1)^{n-1} \\ (3\alpha+2) \times (\alpha+1)^{n-1} \end{cases};$$

$L(\alpha,1,1,N), L(\alpha,1,2,N), L(\alpha,1,3,N)$ 依序發生跳項

汰 α 留一之倒數幾項：

考慮一般的 K	$L(\alpha,1,K,K+\alpha t) = 1 + (\alpha+1)t = K + \alpha t \rightarrow t = K-1$
$L(\alpha,1,K,K) = 1$	代回得 $N = K + \alpha(K-1) = (\alpha+1)K - \alpha$
$L(\alpha,1,K,K+1) = 2$	同理 $N = (\alpha+1)K - (\alpha-1)$
$L(\alpha,1,K,K+2) = 3$	$\vdots$
$\vdots$	$N = (\alpha+1)K - 2$
$L(\alpha,1,K,K+(\alpha-1)) = \alpha$	$N = (\alpha+1)K - 1$
	依序產生跳項

柒、未來展望

在此次科展的研究中，從原始題目的汰一留一，尋找最後淘汰的編號，漸而擴展到一順序淘汰的編號，再尋找汰二留一、汰三留一，一直到汰 α 留一，其規律性也逐漸出來。接著再研究汰一留二、汰一留三時，發現規律性並不像預料中的如此完整，以致於我們便發展出另一種規律的系統。

由於時間的關係及龐大數據的存在，我們在編版頁時用了滿多的心力，而在汰一留二中，我們找出了「1.8250543658」這個數字其意義為遞迴式的極限，而在汰一留三我們找出了「3.77162」這個數字，能夠正確找出汰一留三的最後數字，但相關的證明手法，我們尚未能完成。

- 1、 $L(1,1,K,N) \rightarrow L(2,2,K,N) \rightarrow L(3,3,K,N)$ 看似有規律

形如 $\frac{(\alpha \times A) \times 2^n + B}{2^\alpha - 1}$ ，但 A、B 之規律我們也尚未解決。

- 2、 $L(2,4,K,N) \rightarrow L(3,6,K,N) \rightarrow L(\alpha, 2\alpha, K, N)$ 的規律和 $L(1,2,K,N)$

其指數底分別為 1×1.8250543658 、 2×1.8250543658 、 $\alpha \times 1.8250543658$ 。

我們猜測 α 、 β 若有相同之最大公因數，其指數底可能會有規律性。

- 3、我們在汰 1 留 β 的部分尚未完成其充分的猜測及證明，

因此也尚未完成汰 α 留 β 的終極目標。

- 4、我們最後發現此問題與約瑟夫排列 (Josephus problem) 有關，如下：

定義 $J(\alpha, \beta, K, N)$ 為總人數為 N 人，先留 β ，汰 α ，倒數第 K 人之編號，

而 $J(\alpha, \beta, K, N) = L(\alpha, \beta, K, N) + \beta \equiv (\text{mod } N)$

捌、參考資料

- 1、數學歸納法 『華羅庚 著』凡異出版社
- 2、遞歸數列 『陳家聲、徐惠芳 著』凡異出版社
- 3、高中數學競賽教程 『嚴鎮軍 主編』九章出版社：
第 4 講 p24 - p31
第 15 講 p118 - p127
第 30 講 p271 - p279
第 31 講 p309 - p316
第 31 講 p317 - p325

表：汰一留一（於說明書 A）

N	L (1,1,1,N)
1	1
<u>2</u>	<u>$2 \equiv 0$</u>
3	2
<u>4</u>	<u>$4 \equiv 0$</u>
5	2
6	4
7	6
<u>8</u>	<u>$8 \equiv 0$</u>
9	2
10	4
11	6
12	8
13	10
14	12
15	14
<u>16</u>	<u>$16 \equiv 0$</u>
17	2
18	4
19	6
20	8

玖、圖表與證明

表：汰一留一倒數（於說明書 B）

N	L (1,1,1,N)	L (1,1,2,N)	L (1,1,3,N)	L (1,1,4,N)	
<u>2</u>	<u>$2 \equiv 0$</u>	1			
<u>3</u>	2	<u>$3 \equiv 0$</u>	1		
<u>4</u>	<u>$4 \equiv 0$</u>	2	3	1	
<u>5</u>	2	4	<u>$5 \equiv 0$</u>	3	
<u>6</u>	4	<u>$6 \equiv 0$</u>	2	5	
<u>7</u>	6	2	4	<u>$7 \equiv 0$</u>	
<u>8</u>	<u>$8 \equiv 0$</u>	4	6	2	
9	2	6	8	4	
<u>10</u>	4	8	<u>$10 \equiv 0$</u>	6	
11	6	10	2	8	
<u>12</u>	8	<u>$12 \equiv 0$</u>	4	10	
13	10	2	6	12	
<u>14</u>	12	4	8	<u>$14 \equiv 0$</u>	
15	14	6	10	2	
<u>16</u>	<u>$16 \equiv 0$</u>	8	12	4	
17	2	10	14	6	
18	4	12	16	8	
19	6	14	18	10	
<u>20</u>	8	16	<u>$20 \equiv 0$</u>	12	
21	10	18	2	14	
22	12	20	4	16	
23	14	22	6	18	
<u>24</u>	16	<u>$24 \equiv 0$</u>	8	20	
25	18	2	10	22	
26	20	4	12	24	
27	22	6	14	26	
<u>28</u>	24	8	16	<u>$28 \equiv 0$</u>	

表：汰二留一（於說明書 C）

N = 奇數	跳項規律 $L(2,1,1,N) = 3^{n-1}$	N = 偶數	跳項規律 $L(2,1,1,N) = 2 \times 3^{n-1}$
<u>1</u>	<u>$1 \equiv 0$</u>	<u>2</u>	<u>$2 \equiv 0$</u>
<u>3</u>	<u>$3 \equiv 0$</u>	4	3
5	3	<u>6</u>	<u>$6 \equiv 0$</u>
7	6	8	3
<u>9</u>	<u>$9 \equiv 0$</u>	10	6
11	3	12	9
13	6	14	12
15	9	16	15
17	12	<u>18</u>	<u>$18 \equiv 0$</u>
19	15	20	3
21	18	22	6
23	21	24	9
25	24	26	12
<u>27</u>	<u>$27 \equiv 0$</u>	28	15
29	3	30	18
31	6	32	21
33	9	34	24
35	12	36	27
37	15	38	30
39	18	40	33
41	21	42	36
43	24	44	39
45	27	46	42
47	30	48	45
49	33	50	48

表：汰二留一倒數（於說明書 C-6）

N	L (2,1,1,N)	L (2,1,2,N)	N	L (2,1,1,N)	L (2,1,2,N)
1	1		<u>2</u>	<u>2 ≡ 0</u>	1
<u>3</u>	<u>3 ≡ 0</u>	2	<u>4</u>	3	<u>4 ≡ 0</u>
<u>5</u>	3	<u>5 ≡ 0</u>	<u>6</u>	<u>6 ≡ 0</u>	3
7	6	3	8	3	6
<u>9</u>	<u>9 ≡ 0</u>	6	10	6	9
11	3	9	<u>12</u>	9	<u>12 ≡ 0</u>
13	6	12	14	12	3
<u>15</u>	9	<u>15 ≡ 0</u>	16	15	6
17	12	3	<u>18</u>	<u>18 ≡ 0</u>	9
19	15	6	20	3	12
21	18	9	22	6	15
23	21	12	24	9	18
25	24	15	26	12	21
<u>27</u>	<u>27 ≡ 0</u>	18	28	15	24
29	3	21	30	18	27
31	6	24	32	21	30
33	9	27	34	24	33
35	12	30	<u>36</u>	27	<u>36 ≡ 0</u>
37	15	33	38	30	3
39	18	36	40	33	6
41	21	39	42	36	9
43	24	42	44	39	12
<u>45</u>	27	<u>45 ≡ 0</u>	46	42	15
47	30	3	48	45	18
49	33	6	50	48	21

表：汰三留一（於說明書 E）

$N \equiv 1 \pmod{3}$	跳項規律 $L(3,1,1,N)$ $= 4^{n-1}$	$N \equiv 2 \pmod{3}$	跳項規律 $L(3,1,1,N)$ $= 2 \times 4^{n-1}$	$N \equiv 0 \pmod{3}$	跳項規律 $L(3,1,1,N)$ $= 3 \times 4^{n-1}$
1	1	2	2	3	3
<u>4</u>	<u>$4 \equiv 0$</u>	5	4	6	4
7	4	<u>8</u>	<u>$8 \equiv 0$</u>	9	8
10	8	11	4	<u>12</u>	<u>$12 \equiv 0$</u>
13	12	14	8	15	4
<u>16</u>	<u>$16 \equiv 0$</u>	17	12	18	8
19	4	20	16	21	12
22	8	23	20	24	16
25	12	26	24	27	20
28	16	29	28	30	24
31	20	<u>32</u>	<u>$32 \equiv 0$</u>	33	28
34	24	35	4	36	32
37	28	38	8	39	36
40	32	41	12	42	40
43	36	44	16	45	44
46	40	47	20	<u>48</u>	<u>$48 \equiv 0$</u>
49	44	50	24	51	4
52	48	53	28	54	8
55	52	56	32	57	12
58	56	59	36	60	16
61	60	62	40	63	20
<u>64</u>	<u>$64 \equiv 0$</u>	65	44	66	24
67	4	68	48	69	28
70	8	71	52	72	32
73	12	74	56	75	36
76	16	77	60	78	40
79	20	80	64	81	44
82	24	83	68	84	48
85	28	86	72	87	52
88	32	89	76	90	56
91	36	92	80	93	60
94	40	95	84	96	64
97	44	98	88	99	68
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

表：汰一留二（於說明書 G）

N	L (1,2,1,N)	N	L (1,2,1,N)	N	L (1,2,1,N)	N	L (1,2,1,N)
1	1	25	12	49	6	73	8
2	2	26	15	50	9	74	11
3	3	27	18	51	12	75	14
4	3	28	21	52	15	76	17
5	2	29	24	53	18	77	20
6	5	30	27	54	21	78	23
7	2	31	30	55	24	79	26
8	5	32	2	56	27	80	29
9	8	33	5	57	30	81	32
10	2	34	8	58	33	82	35
11	5	35	11	59	36	83	38
12	8	36	14	60	39	84	41
13	11	37	17	61	42	85	44
14	14	38	20	62	45	86	47
15	3	39	23	63	48	87	50
16	6	40	26	64	51	88	53
17	9	41	29	65	54	89	56
18	12	42	32	66	57	90	59
19	15	43	35	67	60	91	62
20	18	44	38	68	63	92	65
21	21	45	41	69	66	93	68
22	3	46	44	70	69	94	71
23	6	47	47	71	2	95	74
24	9	48	3	72	5	96	77
97	80	126	62	130	74	159	3
98	83	127	65	131	77	160	6
99	86	128	68	132	80	161	9
100	89	129	71	133	83	162	12
101	92	126	62	134	86	163	15
102	95	103	98	135	89	164	18
103	98	104	101	136	92	165	21
104	101	105	104	137	95	166	24
105	104	106	2	138	98	167	27
106	2	107	5	139	101	168	30
107	5	108	8	140	104	169	33
108	8	109	11	141	107	170	36
109	11	110	14	142	110	171	39

110	14	168	30	143	113	172	42
111	17	169	33	144	116	173	45
112	20	170	36	145	119	174	48
113	23	171	39	146	122	175	51
114	26	172	42	147	125	176	54
115	29	173	45	148	128	177	57
116	32	174	48	149	131	178	60
117	35	175	51	150	134	179	63
118	38	176	54	151	137	180	66
119	41	177	57	152	140	181	69
120	44	178	60	153	143	182	72
121	47	179	63	154	146	183	75
122	50	180	66	155	149	184	78
123	53	181	69	156	152	185	81
124	56	182	72	157	155	186	84
125	59	183	75	158	158	187	87
188	90	217	177	246	27	274	111
189	93	218	180	247	30	275	114
190	96	219	183	248	33	276	117
191	99	220	186	249	36	277	120
192	102	221	189	250	39	278	123
193	105	222	192	251	42	279	126
194	108	223	195	252	45	280	129
195	111	224	198	253	48	281	132
196	114	225	201	254	51	282	135
197	117	226	204	255	54	283	138
198	120	227	207	256	57	284	141
199	123	228	210	257	60	285	144
200	126	229	213	258	63	286	147
201	129	230	216	259	66	287	150
202	132	231	219	260	69	288	153
203	135	232	222	261	72	289	156
204	138	233	225	262	75	290	159
205	141	234	228	246	27	291	162
206	144	235	231	263	78	292	165
207	147	236	234	264	81	293	168
208	150	237	237	265	84	294	171
209	153	238	3	266	87	295	174
210	156	239	6	267	90	296	177

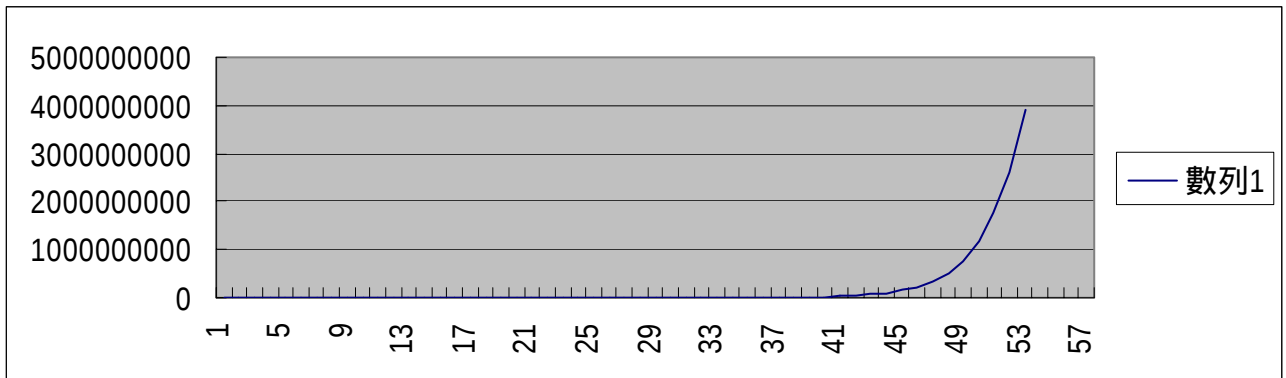
211	159	240	9	268	93	297	180
212	162	241	12	269	96	298	183
213	165	242	15	270	99	299	186
214	168	243	18	271	102	300	189
215	171	244	21	272	105	301	192
216	174	245	24	273	108	302	195
303	198	315	234	327	270	339	306
304	201	316	237	328	273	340	309
305	204	317	240	329	276	341	312
306	207	318	243	330	279	342	315
307	210	319	246	331	282	343	318
308	213	320	249	332	285	344	321
309	216	321	252	333	288	345	324
310	219	322	255	334	291	346	327
311	222	323	258	335	294	347	330
312	225	324	261	336	297	348	333
313	228	325	264	337	300	349	336
314	231	326	267	338	303	350	339

表：汰一留二跳項（於說明書 G）

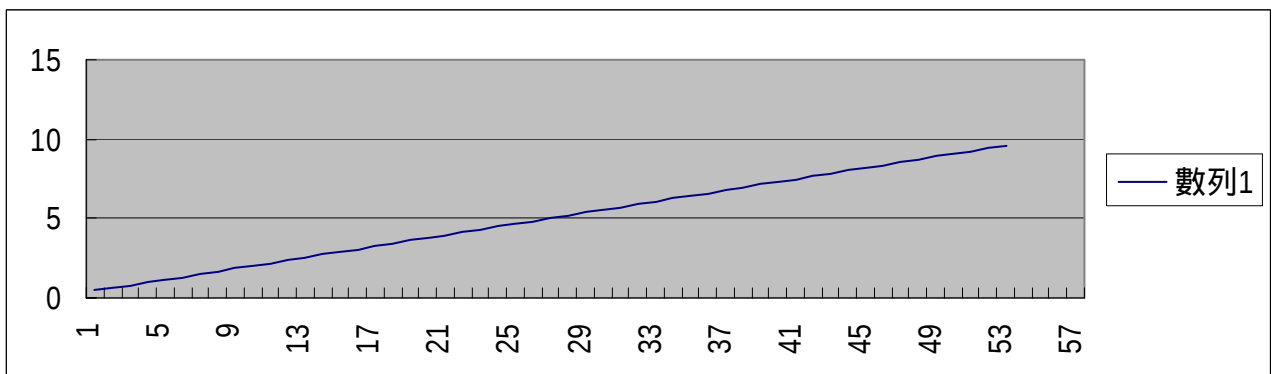
A	N	L (1,2,1,N)	Log N	N與f(x)差
1	3	3	0.477121255	0.262418526
2	4	3	0.602059991	-0.106372211
3	6	5	0.77815125	-0.159558316
4	9	8	0.954242509	-0.239337474
5	14	14	1.146128036	0.140993789
6	21	21	1.322219295	0.211490684
7	31	30	1.491361694	-0.182763974
8	47	47	1.672097858	0.225854039
9	70	69	1.84509804	-0.161218941
10	105	104	2.021189299	-0.241828412
11	158	158	2.198657087	0.137257382
12	237	237	2.374748346	0.205886073
13	355	354	2.550228353	-0.19117089
14	533	533	2.726727209	0.213243665
15	799	798	2.902546779	-0.180134502
16	1199	1199	3.078819183	0.229798247
17	1798	1797	3.254789687	-0.15530263
18	2697	2696	3.430880946	-0.232953944
19	4046	4046	3.607025878	0.150569083
20	6069	6069	3.783117137	0.225853625
21	9103	9102	3.959184543	-0.161219562
22	13655	13655	4.135291704	0.258170657
23	20482	20481	4.311372362	-0.112744015
24	30723	30722	4.487463621	-0.169116023
25	46085	46085	4.663559592	0.246325966
26	69127	69126	4.83964771	-0.130511051
27	103691	103691	5.015741063	0.304233423
28	155536	155535	5.191830926	-0.043649865
29	233304	233303	5.367922185	-0.065474798
30	349956	349955	5.544013444	-0.098212197
31	524934	524933	5.720104703	-0.147318295
32	787401	787400	5.896195962	-0.220977442
33	1181102	1181102	6.072287405	0.168533837
34	1771653	1771653	6.248378664	0.252800755
35	2657479	2657478	6.424469841	-0.120798868
36	3986219	3986219	6.600561155	0.318801698

37	5979328	5979327	6.776652378	-0.021797452
38	8968992	8968991	6.952743637	-0.032696178
39	13453488	13453487	7.128834896	-0.049044268
40	20180232	20180231	7.304926155	-0.0735664
41	30270348	30270347	7.481017414	-0.110349603
42	45405522	45405521	7.657108673	-0.165524408
43	68108283	68108282	7.833199932	-0.24828659
44	102162425	102162425	8.009291193	0.127570093
45	153243637	153243636	8.185382451	-0.308644861
46	229865456	229865456	8.361473711	0.037032694
47	344798184	344798184	8.53756497	0.055549085
48	517197276	517197276	8.713656229	0.083323598
49	775795914	775795914	8.889747488	0.124985456
50	1163693871	1163693871	9.065838747	0.187478065
51	1745540806	1745540805	9.241930006	-0.218782902
52	2618311209	2618311208	9.418021265	-0.328174114
53	3927466814	3927466814	9.594112524	0.00773859

(圖：N 與 A 之關係圖)



(圖：Log N 與 A 之關係圖)

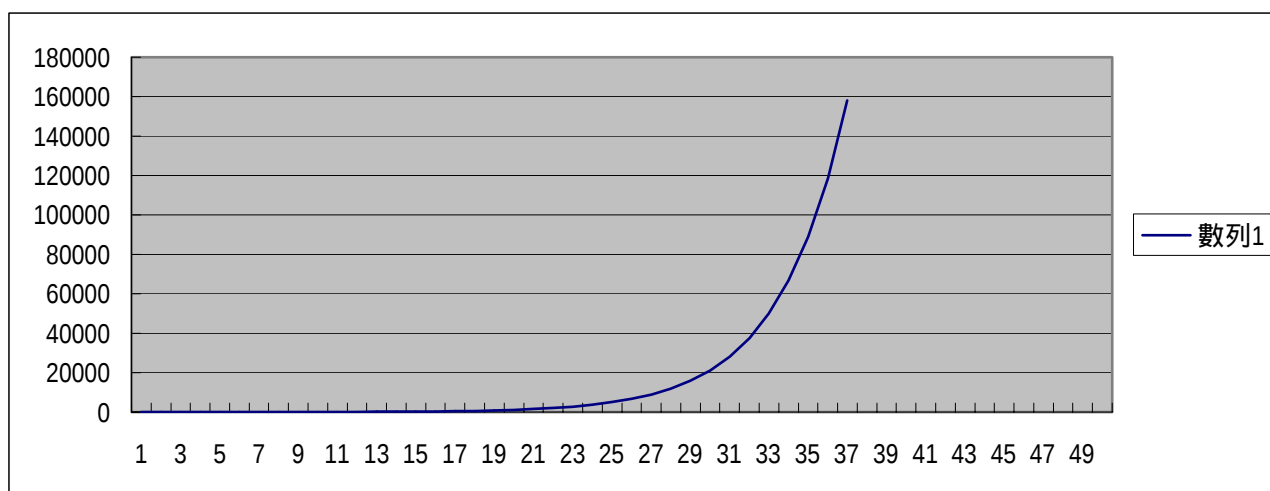


表：汰一留三跳項（於說明書 H）

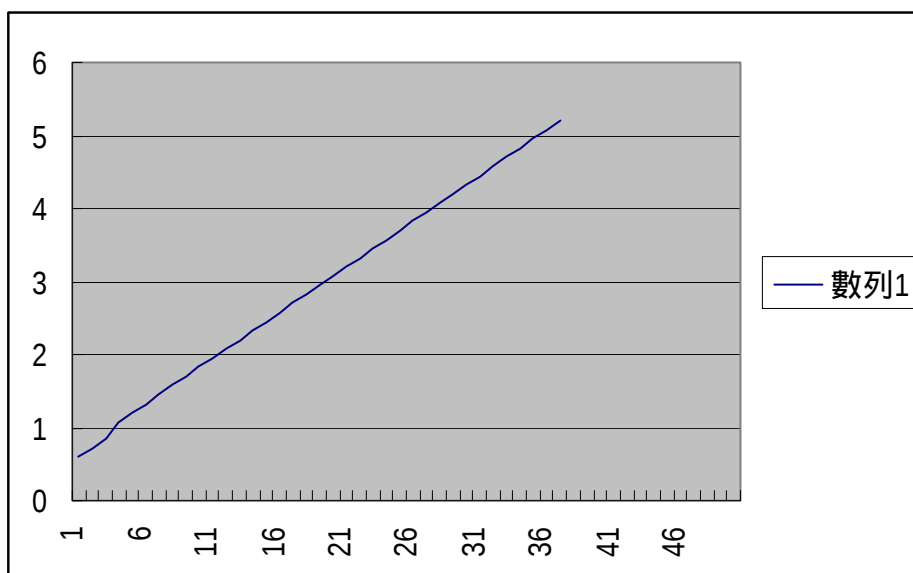
A	N	L (1,2,1,N)	Log N	N與f(x)差
1	4	4	0.60206	-1.02883
2	5	4	0.69897	-1.7051
3	7	7	0.845098	-1.94014
4	12	11	1.079181	0.079818
5	16	15	1.20412	0.106424
6	21	19	1.322219	-0.19143
7	28	26	1.447158	-0.25525
8	38	38	1.579784	0.326339
9	50	48	1.69897	-0.23155
10	67	66	1.826075	0.024603
11	89	87	1.94939	-0.30053
12	119	118	2.075547	-0.06737
13	159	159	2.201397	0.243504
14	212	212	2.326336	0.324671
15	282	280	2.450249	-0.23377
16	376	374	2.575188	-0.3117
17	502	502	2.700704	0.251073
18	669	668	2.825426	0.001431
19	892	891	2.950365	0.001908
20	1189	1187	3.075182	-0.33079
21	1586	1586	3.200303	0.225614
22	2114	2112	3.325105	-0.36585
23	2819	2819	3.450095	-0.15446
24	3759	3759	3.575072	0.12738
25	5012	5012	3.700011	0.16984
26	6682	6680	3.824906	-0.44021
27	8910	8910	3.949878	0.079716
28	11880	11880	4.074816	0.106288
29	15840	15840	4.199755	0.141718
30	21120	21120	4.324694	0.188957
31	28160	28160	4.449633	0.251943
32	37546	37544	4.574564	-0.33074
33	50062	50062	4.699508	0.225677
34	66749	66748	4.824445	-0.03243
35	88999	88999	4.949385	0.290092

36	118665	118664	5.074323	0.053456
37	158220	158219	5.199261	0.071274

(圖：N 與 A 之關係圖)



(圖：Log N 與 A 之關係圖)



重編號碼法：

重編號碼法 (E-3)：

(pf1): 我們先證明若人數 $N = 4^{n-1}$ 時則, $L(3,1,1,N) = N = 4^{n-1}$

當 $n = 1$ 時 $\rightarrow N = 4^{1-1} = 1$, $L(3,1,1,N) = 1 = 4^{n-1} = N$, 原性質成立。

令當 $n = k$ 時, 原性質 $L(3,1,1,N) = 4^{k-1} = N$ 亦成立, 即人數 4^{k-1} 人,

最後留的號碼為 $L(3,1,1,4^{k-1}) = 4^{k-1}$ 號。令當 $n = k + 1$ 時, 有 4^{k+1-1} 人,

即 1、2、3 4^{k+1-1} 個人, 汰一輪之後,

留下四的倍數號碼: 4、8、12 4^{k+1-1} 共 4^{k-1} 人,

我們用重新編碼 $\rightarrow 1^* (=4)$ $2^* (=8)$ $3^* (=12)$ $4^{k-1*} (=4^k)$ 共 4^{k-1} ,

下次淘汰 $1^*, 2^*, 3^*, 5^*$

由 $n = k$ 知最後留下 $L(3,1,1,4^{k-1})^* = 4^{k-1*} = 4^{k+1-1}$, 當 $n = k + 1$ 時, 原性質成立,

由 M.I. 知: $N = 4^{n-1}$ 時 $\rightarrow L(3,1,1,N) = 4^{n-1} \equiv 0$ 成立

(pf2): 我們再證明若人數 $N = 2 \times 4^{n-1}$ 時, 則 $L(3,1,1,N) = 2 \times 4^{n-1} = N$

當 $n = 1$ 時 $\rightarrow N = 2 \times 4^{1-1} = 2$, $L(3,1,1,N) = 2 = N$, 原性質成立

令當 $n = k$ 時, 原性質 $L(3,1,1,N) = 2 \times 4^{k-1} = N$ 亦成立, 即人數 $2 \times 4^{k-1}$ 人最後留下的

號碼為 $L(3,1,1,2 \times 4^{k-1}) = 2 \times 4^{k-1}$ 號當 $n = k + 1$ 時, 有 $2 \times 4^{k+1-1}$ 個人,

即 1、2、3 $2 \times 4^{k+1-1}$ 個人汰一輪之後,

留下 4 的倍數號碼: 4、8、12 $2 \times 4^{k+1-1}$ 共 $2 \times 4^{k-1}$ 人,

重新編碼 $\rightarrow 1^* (=4)$, $2^* (=8)$, $3^* (=12)$, $2 \times 4^{k-1*} (=2 \times 4^{k+1-1})$

下次淘汰 $1^*, 2^*, 3^*, 5^*$

由 $N = k$ 時知最後必留下 $2 \times 4^{k-1*} = 2 \times 4^{k+1-1}$ 號, 當 $n = k + 1$ 時, 原性質成立

由 M.I. 知, 即當 $N = 2 \times 4^{n-1} \rightarrow$ 則 $L(3,1,1,N) = 2 \times 4^{n-1} \equiv 0 \pmod{N}$ 成立

(pf3): 我們接著證明若人數 $N = 3 \times 4^{n-1}$ 時則, $L(3,1,1,N) = N = 3 \times 4^{n-1}$

當 $n = 1$ 時 $\rightarrow N = 3 \times 4^{1-1} = 3$, $L(3,1,1,N) = 3 = 3 \times 4^{n-1} = N$, 原性質成立。

令當 $n = k$ 時, 原性質 $L(3,1,1,N) = 3 \times 4^{k-1} = N$ 亦成立, 即人數 $3 \times 4^{k-1}$ 人,

最後留的號碼為 $L(3,1,1,3 \times 4^{k-1}) = 3 \times 4^{k-1}$ 號。令當 $n = k + 1$ 時,

有 $3 \times 4^{k+1-1}$ 人, 即 1、2、3 $3 \times 4^{k+1-1}$ 個人, 汰一輪之後,

留下四的倍數號碼: 4、8、12 $3 \times 4^{k+1-1}$ 共 $3 \times 4^{k-1}$ 人,

我們用重新編碼 $\rightarrow 1^* (=4)$ $2^* (=8)$ $3^* (=12)$ $3 \times 4^{k-1*} (=3 \times 4^{k+1-1})$ 共 $3 \times 4^{k-1}$ 人,

下次淘汰 $1^*, 2^*, 3^*, 5^*$ 則最後留下 $3 \times 4^{k-1*} = 3 \times 4^{k+1-1}$ 號,

當 $n = k + 1$ 時, 原性質成立,

由 M.I. 知: 即 $N = 3 \times 4^{n-1}$ 時 $\rightarrow L(3,1,1,N) = 3 \times 4^{n-1} \equiv 0 \pmod{N}$ 成立

由 (pf1) (pf2) (pf3) 得証:

$$\text{若人數 } N = \begin{cases} 4^{n-1} \\ 2 \times 4^{n-1} \text{ 時, 則} \\ 3 \times 4^{n-1} \end{cases} \begin{cases} L(3,1,1,N) = N = 4^{n-1} \\ L(3,1,1,N) = N = 2 \times 4^{n-1} \\ L(3,1,1,N) = N = 3 \times 4^{n-1} \end{cases}$$

(pf4): 用重編號碼若人數為 N 人時 $\Rightarrow$ 有人數: 1、2、3 $N \rightarrow$ 留下為 $L(3,1,1,N)$

若人數為 $N + 3$ 人時 $\rightarrow$ 有人數: 1、2、3 N 、 $N + 1$ 、 $N + 2$ 、 $N + 3$, 汰 1 號、2 號、3 號,

留 5、6 N 、 $N + 1$ 、 $N + 2$ 、 $N + 3$, 4, 下次汰 5 號, 共 N 人,

重編碼 $1^* (=5)$ $2^* (=6)$ $(N - 2)^* (=N + 2)$ $(N - 1)^* (=N + 3)$

$N^* (=4)$ 下一次淘汰 1^* 共 N 人, 若 $L(3,1,1,N)^* \neq N^*$

則留 $L(3,1,1,N+3) = L(3,1,1,N) * = L(3,1,1,N) + 4$

即 $L(3,1,1,N+3) = L(3,1,1,N) + 4$

(pf5) : 當 $n = 1 \rightarrow N = 7$, $L(3,1,2,N) = 7 = 7 \times 4^{1-1}$, 原性質成立。

令當 $n = k$ 時, 原性質 $L(3,1,2,N) = 7 \times 4^{k-1}$ 亦成立,

即人數 $= 7 \times 4^{k-1}$ 人倒數第二個留下的號碼為 $L(3,1,2,N) = 7 \times 4^{k-1}$ 號—(G)

則當 $n = k + 1$ 時, 有 $7 \times 4^{k+1-1}$ 人, 及其編號為 1、2、3 $7 \times 4^{k+1-1}$ 個人,

汰一輪之後, 留下 3 的倍數號 3、6、9 $7 \times 4^{k+1-1}$ 共 $7 \times 4^{k-1}$ 人, 下次淘汰 3 號

重編碼 $\rightarrow 3 (= 1*)$ $6 (= 2*)$ $9 (= 3*)$ $7 \times 4^{k+1-1} (= 7 \times 4^{k-1*})$ 共 $N = 7 \times 4^{k-1}$,

由(E)知, $N = 7 \times 4^{k-1}$ 人倒數第二個留下的號碼為 $7 \times 4^{k-1*}$ 號 $(= 7 \times 4^{k+1-1})$,

即 $L(3,1,2,N) = L(3,1,2, 7 \times 4^{k+1-1}) = 7 \times 4^{k+1-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$;

由 M . I . 知: 當 $N = 7 \times 4^{n-1}$ 時, 則 $L(3,1,2,N) = 7 \times 4^{n-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$

(pf6) : 當 $n = 1 \rightarrow N = 5$, $L(3,1,2,N) = 5 = 5 \times 4^{1-1}$, 原性質成立。

令當 $n = k$ 時, 原性質 $L(3,1,2,N) = 5 \times 4^{k-1}$ 亦成立,

即人數 $= 5 \times 4^{k-1}$ 人倒數第二個留下的號碼為 $L(3,1,2,N) = 5 \times 4^{k-1}$ 號—(H)

則當 $n = k + 1$ 時, 有 $5 \times 4^{k+1-1}$ 人, 及其編號為 1、2、3 $5 \times 4^{k+1-1}$ 個人,

汰一輪之後, 留下 3 的倍數號 3、6、9 $5 \times 4^{k+1-1}$ 共 $5 \times 4^{k-1}$ 人, 下次淘汰 3 號

重編碼 $\rightarrow 3 (= 1*)$ $6 (= 2*)$ $9 (= 3*)$ $5 \times 4^{k+1-1} (= 5 \times 4^{k-1*})$ 共 $N = 5 \times 4^{k-1}$,

由(H)知, $N = 5 \times 4^{k-1}$ 人倒數第二個留下的號碼為 $5 \times 4^{k-1*}$ 號 $(= 5 \times 4^{k+1-1})$,

即 $L(3,1,2,N) = L(3,1,2, 5 \times 4^{k+1-1}) = 5 \times 4^{k+1-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$;

由 M . I . 知: 當 $N = 5 \times 4^{n-1}$ 時, 則 $P_N = 5 \times 4^{n-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$

(pf7) : 當 $n = 1 \rightarrow N = 6$, $L(3,1,2,N) = 6 = 6 \times 4^{1-1}$, 原性質成立。

令當 $n = k$ 時, 原性質 $L(3,1,2,N) = 6 \times 4^{k-1}$ 亦成立,

即人數 $= 6 \times 4^{k-1}$ 人倒數第二個留下的號碼為 $L(3,1,2,N) = 6 \times 4^{k-1}$ 號—(I)

則當 $n = k + 1$ 時, 有 $6 \times 4^{k+1-1}$ 人, 及其編號為 1、2、3 $6 \times 4^{k+1-1}$ 個人,

汰一輪之後, 留下 3 的倍數號 3、6、9 $6 \times 4^{k+1-1}$ 共 $6 \times 4^{k-1}$ 人, 下次淘汰 3 號

重編碼 $\rightarrow 3 (= 1*)$ $6 (= 2*)$ $9 (= 3*)$ $6 \times 4^{k+1-1} (= 6 \times 4^{k-1*})$ 共 $N = 6 \times 4^{k-1}$,

由(I)知, $N = 6 \times 4^{k-1}$ 人倒數第二個留下的號碼為 $6 \times 4^{k-1*}$ 號 $(= 6 \times 4^{k+1-1})$,

即 $L(3,1,2,N) = L(3,1,2, 6 \times 4^{k+1-1}) = 6 \times 4^{k+1-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$;

由 M . I . 知: 當 $N = 6 \times 4^{n-1}$ 時, 則 $L(3,1,2,N) = 6 \times 4^{n-1} = N \equiv 0 \pmod{N}$

重編號碼法 (G-1):

(pf) : 設有編號 1、2、3 N 共 N 人, 而留下最後一號為 $L(1,2,1,N)$

當有 $N+1$ 人, 用重編碼: 1、2、3 N 、 $N+1$, 在汰一留二的情況下刪去 1,

留 2、3、4 N , 下次汰 4 號我們用重新編碼 $\rightarrow 1* (= 4)$ $2* (= 5)$ $3* (= 6)$

$(N - 3)* = N$, $(N - 2)* = (N + 1)$ $(N - 1)* (= 2)$ $N* (= 3)$

則 $1*$ 、 $2*$ 、 $N*$ 共 N 人留下最後一號後 $L(1,2,1,N)*$,

$$\text{則 } L(1,2,1,N+1) = L(1,2,1,N) * = \begin{cases} L(1,2,1,N)+3 & L(1,2,1,N) < N-1 \\ 2 & L(1,2,1,N) = N-1 \text{ 得證} \\ 3 & L(1,2,1,N) = N \end{cases}$$

重編號碼法 (H):

(pf): 設有編號 1、2、3...N 共 N 人, 而留下最後一號為 $L(1,3,1,N)$ 。

當有 $N+1$ 人, 用重編號: 1、2、3...N、 $N+1$,

在汰一留三的情況下刪去 1, 留 2、3、4...N, 下次汰 5 號

我們用重編號 $\rightarrow 1^* (=6), 2^* (=7), 3^* (=8)$

$(N-3)^* (=N+1), (N-2)^* (=2), (N-1)^* (=3), N^* (=4)$

則 $1^*, 2^*, \dots, N^*$ 共 N 人留下最後一號後 $L(1,3,1,N)^*$

$$L(1,3,1,N+1) = L(1,3,1,N)^* = \begin{cases} L(1,3,1,N)+4 & L(1,3,1,N) < N-2 \\ 2 & L(1,3,1,N) = N-2 \\ 3 & L(1,3,1,N) = N-1 \\ 4 & L(1,3,1,N) = N \end{cases} \quad \text{得證}$$

補充公式 (K):

汰 4 留 4 公式:

$$4k+1: \frac{32 \times 2^n + \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -1 \\ -17 \end{bmatrix}}{15}, \quad 4k+2: \frac{40 \times 2^n + \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 10 \\ -10 \end{bmatrix}}{15}, \quad 4k+3: \frac{44 \times 2^n + \begin{bmatrix} 17 \\ -11 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}}{15}, \quad 4k: 4 \times 2^{n-1}$$

汰 5 留 5 公式：

$$\begin{aligned}
 & 80 \times 2^n + \begin{bmatrix} 26 \\ 21 \\ 11 \\ -9 \\ -49 \end{bmatrix} & 90 \times 2^n + \begin{bmatrix} 12 \\ -38 \\ 17 \\ -28 \\ 37 \end{bmatrix} & 105 \times 2^n + \begin{bmatrix} 38 \\ -17 \\ 28 \\ -37 \\ -12 \end{bmatrix} & 150 \times 2^n + \begin{bmatrix} -21 \\ -11 \\ 9 \\ 49 \\ -26 \end{bmatrix} \\
 5k+1 : & \frac{\quad}{31}, 5k+2 : \frac{\quad}{31}, 5k+3 : \frac{\quad}{31}, 5k+4 : \frac{\quad}{31}, \\
 5k : & 5 \times 2^{n-1}
 \end{aligned}$$

汰 6 留 6 公式：

$$\begin{aligned}
 & 192 \times 2^n + \begin{bmatrix} 57 \\ 51 \\ 39 \\ 15 \\ -33 \\ -129 \end{bmatrix} & 216 \times 2^n + \begin{bmatrix} 72 \\ 18 \\ -90 \\ 72 \\ 18 \\ -90 \end{bmatrix} & 2512 \times 2^n + \begin{bmatrix} 63 \\ -63 \\ 63 \\ -63 \\ 63 \\ -63 \end{bmatrix} \\
 6k+1 : & \frac{\quad}{63}, 6k+2 : \frac{\quad}{63}, 6k+3 : \frac{\quad}{63}, \\
 & 270 \times 2^n + \begin{bmatrix} 90 \\ -72 \\ -18 \\ 90 \\ -72 \\ -18 \end{bmatrix} & 282 \times 2^n + \begin{bmatrix} 129 \\ -57 \\ -51 \\ -39 \\ -15 \\ 33 \end{bmatrix} \\
 6k+4 : & \frac{\quad}{63}, 6k+5 : \frac{\quad}{63}, 6k : 6 \times 2^{n-1}
 \end{aligned}$$

汰 7 留 7 公式：

$$\begin{aligned}
 & 448 \times 2^n + \begin{bmatrix} 120 \\ 113 \\ 99 \\ 71 \\ 15 \\ -97 \\ -321 \end{bmatrix} & 476 \times 2^n + \begin{bmatrix} 191 \\ 128 \\ 2 \\ -250 \\ 137 \\ 16 \\ -222 \end{bmatrix} & 518 \times 2^n + \begin{bmatrix} 94 \\ -193 \\ 122 \\ -137 \\ 234 \\ 87 \\ -207 \end{bmatrix} \\
 7k+1 : & \frac{\quad}{127}, 7k+2 : \frac{\quad}{127}, 7k+3 : \frac{\quad}{127},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 595 \times 2^n + \begin{bmatrix} 207 \\ -94 \\ 193 \\ -122 \\ 137 \\ -234 \\ -87 \end{bmatrix}, \quad 637 \times 2^n + \begin{bmatrix} 250 \\ -138 \\ -16 \\ 222 \\ -191 \\ -128 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad 665 \times 2^n + \begin{bmatrix} 97 \\ 321 \\ -120 \\ -113 \\ -99 \\ -71 \\ -15 \end{bmatrix}, \quad 7k : 7 \times 2^{n-1} \\
& 7k+4 : \frac{\quad}{127}, \quad 7k+5 : \frac{\quad}{127}, \quad 7k+6 : \frac{\quad}{127}
\end{aligned}$$

汰 8 留 8

$$\begin{aligned}
& 1024 \times 2^n + \begin{bmatrix} 247. \\ 239 \\ 223 \\ 191 \\ 127 \\ -1 \\ -257 \\ -769 \end{bmatrix}, \quad 1088 \times 2^n + \begin{bmatrix} 374 \\ 238 \\ -34 \\ -578 \\ 374 \\ 238 \\ -34 \\ -578 \end{bmatrix}, \quad 1168 \times 2^n + \begin{bmatrix} 469 \\ 173 \\ -419 \\ 437 \\ 109 \\ -547 \\ 181 \\ -403 \end{bmatrix}, \quad 1360 \times 2^n + \begin{bmatrix} 340 \\ -340 \\ 340 \\ -340 \\ 340 \\ -340 \\ 340 \\ -340 \end{bmatrix}, \\
& 8k+1 : \frac{\quad}{255}, \quad 8k+2 : \frac{\quad}{255}, \quad 8k+3 : \frac{\quad}{255}, \quad 8k+4 : \frac{\quad}{255}, \\
& 1456 \times 2^n + \begin{bmatrix} 403 \\ -469 \\ -173 \\ 419 \\ -437 \\ -109 \\ 547 \\ -181 \end{bmatrix}, \quad 1496 \times 2^n + \begin{bmatrix} 578 \\ -374 \\ -238 \\ 34 \\ 578 \\ -374 \\ -238 \\ 34 \end{bmatrix}, \quad 1528 \times 2^n + \begin{bmatrix} 769 \\ -247 \\ -239 \\ -223 \\ -191 \\ -127 \\ 1 \\ 257 \end{bmatrix}, \quad 8k : 8 \times 2^{n-1} \\
& 8k+5 : \frac{\quad}{255}, \quad 8k+6 : \frac{\quad}{255}, \quad 8k+7 : \frac{\quad}{255}
\end{aligned}$$

汰9留9公式：

$$\begin{array}{l}
 9k+1 : \frac{2304 \times 2^n + \begin{bmatrix} 502 \\ 493 \\ 475 \\ 439 \\ 367 \\ 223 \\ -65 \\ -641 \\ -1379 \end{bmatrix}}{511}, 9k+2 : \frac{2376 \times 2^n + \begin{bmatrix} 869 \\ 716 \\ 410 \\ -202 \\ -1426 \\ 725 \\ 428 \\ -166 \\ -1354 \end{bmatrix}}{511}, 9k+3 : \frac{2628 \times 2^n + \begin{bmatrix} 876 \\ 219 \\ -1095 \\ 876 \\ 219 \\ -1095 \\ 876 \\ 219 \\ -1095 \end{bmatrix}}{511}, \\
 9k+4 : \frac{2682 \times 2^n + \begin{bmatrix} 514 \\ -1016 \\ 523 \\ -998 \\ 559 \\ -926 \\ 703 \\ -638 \\ 1279 \end{bmatrix}}{511}, 9k+5 : \frac{3069 \times 2^n + \begin{bmatrix} 1016 \\ -523 \\ 998 \\ -559 \\ 926 \\ -703 \\ 638 \\ -1279 \\ -514 \end{bmatrix}}{511}, 9k+6 : \frac{3285 \times 2^n + \begin{bmatrix} 1095 \\ -876 \\ -219 \\ 1095 \\ -876 \\ -219 \\ 1095 \\ -876 \\ -219 \end{bmatrix}}{511}, \\
 9k+7 : \frac{3375 \times 2^n + \begin{bmatrix} 1426 \\ -725 \\ -428 \\ 166 \\ 1354 \\ -869 \\ -716 \\ -410 \\ 202 \end{bmatrix}}{511}, 9k+8 : \frac{3447 \times 2^n + \begin{bmatrix} 1379 \\ -502 \\ -493 \\ -475 \\ -439 \\ -367 \\ -223 \\ 65 \\ 641 \end{bmatrix}}{511}, 9k : 9 \times 2^{n-1}
 \end{array}$$

汰 10 留 10 公式：

$$\begin{aligned}
 10k+1 : & \frac{5120 \times 2^n + \begin{bmatrix} 1013 \\ 1003 \\ 983 \\ 943 \\ 863 \\ 703 \\ 383 \\ -257 \\ -1537 \\ -4097 \end{bmatrix}}{1023}, & 10k+2 : & \frac{5280 \times 2^n + \begin{bmatrix} 1716 \\ 1386 \\ 726 \\ -594 \\ -3234 \\ 1716 \\ 1386 \\ 726 \\ -594 \\ -3234 \end{bmatrix}}{1023}, & 10k+3 : & \frac{5480 \times 2^n + \begin{bmatrix} 2339 \\ 1607 \\ 149 \\ -2771 \\ 1619 \\ 169 \\ -2731 \\ 1699 \\ 329 \\ -2411 \end{bmatrix}}{1023}, \\
 10k+4 : & \frac{5940 \times 2^n + \begin{bmatrix} 2442 \\ 792 \\ -2508 \\ 1122 \\ -1848 \\ 2442 \\ 792 \\ -2508 \\ 1122 \\ -1848 \end{bmatrix}}{1023}, & 10k+5 : & \frac{6820 \times 2^n + \begin{bmatrix} 1705 \\ -1705 \\ 1705 \\ -1705 \\ 1705 \\ -1705 \\ 1705 \\ -1705 \\ 1705 \\ -1705 \end{bmatrix}}{1023}, & 10k+6 : & \frac{6930 \times 2^n + \begin{bmatrix} 2508 \\ -1122 \\ 1848 \\ -2442 \\ -792 \\ 2508 \\ -1122 \\ 1848 \\ -2442 \\ -792 \end{bmatrix}}{1023}, \\
 10k+7 : & \frac{7310 \times 2^n + \begin{bmatrix} 2771 \\ -1619 \\ -169 \\ 2731 \\ -1699 \\ -329 \\ 2411 \\ -2339 \\ -1607 \\ -149 \end{bmatrix}}{1023}, & 10k+8 : & \frac{7590 \times 2^n + \begin{bmatrix} 3234 \\ -1716 \\ -1386 \\ -726 \\ 594 \\ 3234 \\ -1716 \\ -1386 \\ -726 \\ 594 \end{bmatrix}}{1023}, & 10k+9 : & \frac{7670 \times 2^n + \begin{bmatrix} -1013 \\ -1003 \\ -983 \\ -943 \\ -863 \\ -703 \\ -383 \\ 257 \\ 1537 \\ 4097 \end{bmatrix}}{1023}, \\
 10k : & 10 \times 2^{n-1}
 \end{aligned}$$

評語

優點：本作品值得參加資訊類組的科展。

改進：使用電腦蠻力，缺乏數學方法。